MEMORIAS
DEL INSTITUTO
GEOGRÁFICO
Y ESTADÍSTICO

15

1925/
1927

528
IG
BIBLIOTECA IGN

INSTITUTO GEOGRAFICO
Memorias, tomo XV

I .- Determinaciones relativas de la intensidad de la gravedad, por Guillermo SANS Y HUELIN - pag. 3
Madrid, 1925

II .- Proyecto de nivelaciones de alta precisión para la Península, por M. DE CIFUENTES y J.M. GIL LASANTES
Madrid, 1926 - pag.

III.- La balanza de torsión Eötvös-Schweydar y sus aplicaciones, por Guillermo SANS HUELIN
Madrid, 1924

IV.- Dos campañas de ensayo con la balanza de torsión Eötvös-Schweydar, por Guillermo SANS Y HUELIN
Madrid, 1926

V.- La reducción isostática de nuestras estaciones de gravedad, por Guillermo SANS HUELIN
Madrid, 1926

VI.- Estudio de la propagación de las onda $\bar{P}$ registradas en el sismo producido por la explosión de Oppau (Alemania) de 21 de Septiembre de 1921, por Vicente INGLADA ORS

VII.- Determinaciones relativas de la intensidad de la gravedad, por Guillermo SANS Y HUELIN
Madrid, 1927

VIII.- Resultados obtenidos durante la campaña de 1925 en la Sección A.M. del Polígono A , Alicante-Sagunto, por Manuel de CIFUENTES
Madrid, 1927 ==========

A mi querido [illegible] y co-
ñero Lomas
El Autor
Madrid - Diciembre [illegible]

catastral
(2) MOD

DETERMINACIONES RELATIVAS

DE LA

INTENSIDAD DE LA GRAVEDAD

MEMORIAS
DEL
INSTITUTO GEOGRÁFICO

TOMO XV

I

DETERMINACIONES RELATIVAS
DE LA
INTENSIDAD DE LA GRAVEDAD

POR

GUILLERMO SANS Y HUELIN

COMANDANTE DE ARTILLERÍA E INGENIERO GEÓGRAFO



INSTITUTO GEOGRÁFICO
BIBLIOTECA

MADRID
TALLERES DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO

1925

INTRODUCCIÓN

Cumplimentando el plan aprobado de observaciones gravimétricas fueron éstas realizadas durante las campañas de los años 1919 y 1920 en las islas Baleares y Canarias, respectivamente.

Se observaron ocho estaciones en las islas Baleares, que, enumeradas por orden de observación, fueron Ibiza; Palma de Mallorca, Inca, Manacor y Puerto de Pollensa, en la isla de Mallorca, y Ciudadela, Fornélls y Mahón, en la isla de Menorca.

Me complazco en manifestar mi agradecimiento, por las facilidades dadas para la instalación de los aparatos en locales apropiados, al Sr. D. Juan Tur, de Ibiza; al señor Director del Instituto general y técnico de Palma de Mallorca; al Reverendo Padre Superior de los Padres Franciscanos, en Inca; al señor Alcalde del Ayuntamiento de Manacor; a los Torreros encargados del faro de Puerto de Pollensa; al Reverendo Padre Director del Colegio de Padres Salesianos, en Ciudadela, y al señor Director del Hospital civil de Mahón.

En las islas Canarias se observaron siete estaciones. Tres en la isla de Tenerife denominadas Santa Cruz de Tenerife, Puerto de la Cruz e Izaña; Santa Cruz de la Palma, en la capital de la isla del mismo nombre; Arrecife, en la isla de Lanzarote, y Las Palmas y San Bartolomé de Tirajana, en la isla de Gran Canaria.

Reitero las gracias por sus ofrecimientos de locales para la montura de los instrumentos al señor Director del Laboratorio municipal de Santa Cruz de Tenerife; a Mr. Wildpret, Administrador del Gran Hotel Taoro, en Puerto de la Cruz; al Sr. Junco, Director del Observatorio Aerológico de Izaña; al excelentísimo señor Gobernador militar de Santa Cruz de la Palma; al señor Delegado del Gobierno, en la isla de Lanzarote; al señor Director del Colegio de la Soledad, en Las Palmas, y al Sr. D. Antonio Yáñez, de San Bartolomé de Tirajana.

Aparatos y constantes de los mismos.

1.º Los aparatos empleados por nosotros en las dos campañas fueron:

Aparato de péndulos modelo Sterneck.
Péndulos 104, 105, 106 y 107.
Reloj Strasser de medio segundo, núm. 278.
Cronógrafo Hipp.
Anteojo de pasos Repsold, núm. 2.
Termómetro péndulo, núm. 19.640.
Barómetro Tonnelot, núm. 964.
Psicrómetro.

2.º Las constantes de presión correspondientes a los citados péndulos son:

Péndulo 104	$\lambda = 0{,}0000675$
Id. 105	$\lambda = 0{,}0000679$
Id. 106	$\lambda = 0{,}0000665$
Id. 107	$\lambda = 0{,}0000668$

3.º Las constantes de los mismos péndulos para la corrección de temperatura son:

Péndulo 104	$\tau = 0{,}000004811$
Id. 105	$\tau = 0{,}000004738$
Id. 106	$\tau = 0{,}000004791$
Id. 107	$\tau = 0{,}000004730$

4.º El anteojo de pasos estaba provisto del nivel núm. 115.624, siendo 1″,9 el valor de una división del mismo.

5.º El termómetro péndulo empleado fué el señalado con el número 19.640, cuyas correcciones son:

+ 0	— 0,06
+ 10	— 0,04
+ 20	— 0,10
+ 30	— 0,04
+ 40	— 0,06

6.º La corrección que debe aplicarse a las observaciones hechas con el barómetro Tonnelot, núm. 964, deducidas por comparación con el normal del Observatorio de Madrid, es + 0,40.

7.º Finalmente, los valores de **g**, correspondientes a cada estación, se han calculado partiendo del valor de la gravedad en Madrid, **g = 979,981.**

CAPÍTULO PRIMERO

RESULTADOS DE LAS OBSERVACIONES DE LA CAMPAÑA DE 1919

ESTACIÓN DE MADRID (salida)

Local de observación.

Se hicieron las observaciones en una habitación del Observatorio Astronómico, en donde se hallaban instalados los barómetros, la misma que se utilizó en años anteriores.

Las coordenadas geográficas del pilar de observación son las siguientes:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	3° 41',0 W.
Latitud N	40° 24',5
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante	656m

Determinación de la hora.

Los estados y movimientos del reloj Strasser se determinaron por comparaciones con el reloj magistral del Observatorio, valiéndose del cronógrafo.

En el siguiente cuadro figuran estos estados y movimientos con los correspondientes errores:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t u).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
23 de Marzo de 1919	0 19	— 8,70 ± 0,04	— 0,21 ± 0,06
24 id. id.	6 19	— 8,96 ± 0,04	— 0,46 ± 0,06
25 id. id.	6 19	— 9,42 ± 0,04	— 0,45 ± 0,06
26 id. id.	6 27	— 9,87 ± 0,04	— 0,48 ± 0,06
27 id. id.	6 15	— 10,35 ± 0,04	— 0,38 ± 0,06
28 id. id.	6 39	— 10,74 ± 0,04	— 0,34 ± 0,06
29 id. id.	6 34	— 11,08 ± 0,05	

Los errores relativos al movimiento del reloj se calcularon por la fórmula

$$e_m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

en la que m y m_1 representan los errores correspondientes a dos estados consecutivos del reloj.

El promedio de los valores así obtenidos será el error medio para el conjunto de las observaciones

$$e_m = \pm 0{,}06.$$

Duraciones de oscilación.

Los cálculos y correcciones hechos para determinar los valores de las oscilaciones reducidas pueden verse en el estado que figura señalado con la letra A.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en dirección NW.-SW.

Los valores obtenidos para la corrección por balance del sostén, según el método de Borrass, fueron los siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
34×10^{-7}	32×10^{-7}
36×10^{-7}	33×10^{-7}
33×10^{-7}	28×10^{-7}
29×10^{-7}	33×10^{-7}
33×10^{-7}	32×10^{-7}

Los errores correspondientes se obtienen por la fórmula

$$e_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}$$

en la que Σv^2 representa la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las determinaciones y cada una de éstas, y n el número de determinaciones.

Aplicada la fórmula a cada pareja de péndulos se tendrá:

Péndulos 104 y 106..... $e_{b_1} = \pm 1{,}4 \times 10^{-7}$
Id. 105 y 107..... $e_{b_2} = \pm 1{,}2 \times 10^{-7}$

El error medio de las dos determinaciones se obtiene por la fórmula

$$e_b = \sqrt{\frac{e_{b_1}^2 + e_{b_2}^2}{2 \times 2}} = \sqrt{\frac{1{,}4^2 + 1{,}2^2}{2 \times 2}} = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}.$$

Después de aplicadas a los valores de las duraciones de oscilación observadas

todas las correcciones se obtienen los siguientes valores de las duraciones de oscilación reducidas y los promedios correspondientes.

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014873	0,5015645	0,5015082	0,5015800
76	39	77	785
68	36	62	787
69	37	63	786
66	31	60	786
61	32	51	780
0,5014869	0,5015637	0,5015066	0,5015787

Estado A. **ESTACIÓN DE MADRID (salida)**

FECHAS 1919	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 − 7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	′	s	s	s						s
24 Marzo.....	104	22 26	698,20	7,3	10,70	11,5	— 0,21	156,445	0,5016031	— 4	— 594	— 515	— 12	— 33	0,5014873
24 íd.	105	23 46	698,25	7,3	10,85	11,8	— 0,21	149,275	804	— 4	— 597	— 514	— 12	— 32	5645
24 íd.	106	3 40	695,70	7,5	11,20	11,6	— 0,21	154,345	250	— 4	— 582	— 537	— 12	— 33	5082
24 íd.	107	5 1	695,20	7,6	11,30	11,8	— 0,21	147,855	966	— 4	— 584	— 534	— 12	— 32	5800
25 íd.	104	22 47	696,55	7,3	10,95	11,8	— 0,46	156,175	059	— 4	— 592	— 527	— 27	— 33	4876
25 íd.	105	0 8	696,25	7,6	11,05	11,6	— 0,46	149,125	821	— 4	— 595	— 524	— 27	— 32	5639
25 íd.	106	3 37	697,10	7,6	11,30	11,6	— 0,46	154,205	265	— 4	— 583	— 541	— 27	— 33	5077
25 íd.	107	4 55	697,55	7,7	11,40	11,7	— 0,46	147,795	973	— 4	— 586	— 539	— 27	— 32	5785
26 íd.	104	22 47	702,55	7,2	11,05	11,6	— 0,45	156,175	059	— 4	— 596	— 532	— 26	— 33	4868
26 íd.	105	0 5	702,50	7,6	11,10	11,8	— 0,45	149,090	825	— 4	— 601	— 526	— 26	— 32	5630
26 íd.	106	3 50	702,30	7,3	11,40	11,6	— 0,45	154,260	259	— 4	— 588	— 546	— 26	— 33	5062
26 íd.	107	5 12	702,70	7,2	11,50	11,9	— 0,45	147,705	983	— 4	— 590	— 544	— 26	— 32	5787
27 íd.	104	22 50	706,15	6,8	10,80	11,6	— 0,48	156,215	055	— 4	— 601	— 520	— 28	— 33	4869
27 íd.	105	0 9	706,00	6,9	10,90	11,8	— 0,48	149,125	821	— 4	— 604	— 516	— 28	— 32	5637
27 íd.	106	3 43	705,70	7,0	11,20	11,6	— 0,48	154,285	256	— 4	— 591	— 537	— 28	— 33	5063
27 íd.	107	5 00	705,90	7,2	11,30	11,8	— 0,48	147,760	977	— 4	— 593	— 534	— 28	— 32	5786
28 íd.	104	22 56	708,40	6,6	11,00	11,6	— 0,38	156,225	054	— 4	— 603	— 529	— 22	— 33	4866
28 íd.	105	0 14	708,40	7,0	11,10	11,9	— 0,38	149,125	821	— 4	— 606	— 526	— 22	— 32	5631
28 íd.	106	4 4	708,55	6,6	11,40	11,6	— 0,38	154,275	258	— 4	— 593	— 546	— 22	— 33	5060
28 íd.	107	5 21	708,70	6,6	11,50	11,8	— 0,38	147,695	984	— 4	— 596	— 544	— 22	— 32	5786
29 íd.	104	23 14	710,80	6,5	11,10	11,8	— 0,34	156,200	057	— 4	— 605	— 534	— 20	— 33	4861
29 íd.	105	0 32	710,50	6,7	11,25	11,9	— 0,34	149,065	828	— 4	— 607	— 533	— 20	— 32	5632
29 íd.	106	3 54	710,10	7,0	11,60	11,6	— 0,34	154,275	258	— 4	— 594	— 556	— 20	— 33	5051
29 íd.	107	5 13	710,15	6,9	11,70	11,9	— 0,34	147,690	985	— 4	— 596	— 553	— 20	— 32	5780

ESTACIÓN DE IBIZA

Local de observación.

Se hicieron las observaciones de los péndulos en un almacén de una casa propiedad del Sr. D. Juan Tur, situada en el paseo de Vara del Rey, instalándose la barraca en un solar situado en la acera opuesta del mismo paseo.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	1° 26' 5"3 E.
Latitud N.	38° 54' 19"4
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en la localidad	8m

Determinación de la hora.

La determinación de los estados diarios del reloj Strasser y, por consecuencia, la de los movimientos, se hizo aplicando el método de Borrass a la observación de pasos meridianos de estrellas con el anteojo Repsold.

A continuación figura el resumen de los estados y movimientos con los errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s.)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
22 de Mayo de 1919	15 29	— 5,80 ± 0,07	
23 id. id.	13 52	— 4,28 ± 0,12	+ 1,63 ± 0,14
24 id. id.	13 55	— 2,54 ± 0,08	+ 1,74 ± 0,14
25 id. id.	13 46	— 1,05 ± 0,04	+ 1,50 ± 0,09
26 id. id.	14 17	+ 0,63 ± 0,04	+ 1,64 ± 0,06

El promedio de los errores correspondientes a los movimientos será el error medio para el conjunto de las observaciones:

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}11.$$

Duraciones de oscilación.

Las correcciones aplicadas para obtener los valores de las duraciones de oscilación reducidas figuran en el cuadro marcado con la letra B.

Los péndulos números 104 y 106 oscilaron en la dirección EW. y los 105 y 107 en la dirección NS.

Se obtuvo para el balance del sostén los siguientes resultados:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
35×10^{-7}	36×10^{-7}
36×10^{-7}	35×10^{-7}
33×10^{-7}	37×10^{-7}
37×10^{-7}	36×10^{-7}
35×10^{-7}	36×10^{-7}

Por medio de las fórmulas ya empleadas se obtienen los errores para cada grupo de péndulos y el error medio.

Péndulos 104 y 106..... $e_{b_1} = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$

Id. 105 y 107..... $e_{b_2} = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$

$$e_b = \pm 0{,}5 \times 10^{-7}$$

En el siguiente cuadro figuran los valores de las duraciones de oscilación reducidas y los promedios correspondientes.

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014426	0,5015209	0,5014646	0,5015362
51	216	47	70
60	222	59	81
25	195	36	49
30	202	22	54
42	208	48	59
0,5014439	0,5015209	0,5014643	0,5015364

Estado B. ESTACIÓN DE IBIZA

FECHAS — 1919	Pén-dulos.	Hora sidérea	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
23 Mayo.....	104	0 58	772,90	13,4	19,16	11,4	+ 1,63	157,445	0,5015929	− 4	− 637	− 922	+ 95	− 35	0,5014426
23 íd.	105	2 20	772,95	13,5	19,31	11,8	+ 1,63	150,115	6710	− 4	− 641	− 915	+ 95	− 36	5209
23 íd.	106	3 35	772,80	13,3	19,50	11,3	+ 1,63	155,300	6150	− 3	− 627	− 934	+ 95	− 35	4646
23 íd.	107	6 46	772,35	13,3	19,75	11,6	+ 1,63	148,690	6870	− 4	− 629	− 934	+ 95	− 36	5362
23 íd.	104	7 3	772,10	13,6	19,80	11,5	+ 1,63	156,915	5983	− 4	− 635	− 953	+ 95	− 35	4451
23 íd.	105	9 22	772,00	13,8	20,05	11,6	+ 1,63	149,765	6749	− 4	− 638	− 950	+ 95	− 36	5216
24 íd.	106	0 44	770,90	12,6	19,06	11,6	+ 1,74	155,545	6124	− 4	− 626	− 913	+ 101	− 35	4647
24 íd.	107	2 3	770,80	12,9	19,16	11,5	+ 1,74	148,920	6844	− 4	− 629	− 906	+ 101	− 36	5370
24 íd.	104	3 25	770,55	12,7	19,31	11,4	+ 1,74	157,125	5962	− 4	− 635	− 929	+ 101	− 35	4460
24 íd.	105	7 3	769,75	13,3	19,65	11,6	+ 1,74	149,945	6729	− 4	− 637	− 931	+ 101	− 36	5222
24 íd.	106	8 18	769,65	13,2	19,80	11,5	+ 1,74	155,110	6170	− 4	− 624	− 949	+ 101	− 35	4659
24 íd.	107	9 36	769,65	13,0	20,00	11,9	+ 1,74	148,500	6892	− 4	− 626	− 946	+ 101	− 36	5381
25 íd.	104	1 10	769,75	13,0	19,16	11,3	+ 1,50	157,410	5933	− 3	− 635	− 922	+ 87	− 35	4425
25 íd.	105	2 28	769,75	12,7	19,31	11,6	+ 1,50	150,190	6701	− 4	− 638	− 915	+ 87	− 36	5195
25 íd.	106	3 46	769,65	12,9	19,50	11,4	+ 1,50	155,325	6147	− 4	− 625	− 934	+ 87	− 35	4636
25 íd.	107	6 38	769,60	13,2	19,80	11,9	+ 1,50	148,725	6866	− 4	− 627	− 937	+ 87	− 36	5349
25 íd.	104	6 56	769,65	13,4	20,00	11,6	+ 1,50	156,975	5977	− 4	− 633	− 962	+ 87	− 35	4430
25 íd.	105	9 16	769,60	13,8	20,20	11,6	+ 1,50	149,775	6748	− 4	− 636	− 957	+ 87	− 36	5202
26 íd.	106	1 11	768,35	12,5	19,16	11,5	+ 1,64	155,705	6108	− 4	− 624	− 918	+ 95	− 35	4622
26 íd.	107	2 29	769,25	12,9	19,31	11,9	+ 1,64	148,965	6839	− 4	− 627	− 913	+ 95	− 36	5354
26 íd.	104	3 45	769,10	13,3	19,50	11,8	+ 1,64	157,170	5957	− 4	− 633	− 938	+ 95	− 35	4442
26 íd.	105	6 26	768,60	13,6	19,85	11,6	+ 1,64	149,940	6729	− 4	− 636	− 940	+ 95	− 36	5208
26 íd.	106	7 44	767,25	14,0	20,00	11,5	+ 1,64	155,095	6171	− 4	− 621	− 958	+ 95	− 35	4648
26 íd.	107	9 12	767,90	12,3	20,30	11,6	+ 1,64	148,530	6888	− 4	− 624	− 960	+ 95	− 36	5359

ESTACIÓN DE PALMA DE MALLORCA

Local de observación.

Se montaron los péndulos en una habitación del Instituto general y técnico y el anteojo de pasos en un patio contiguo del mismo edificio.

Las coordenadas geográficas correspondientes son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	2° 39' 6",1 E.
Latitud Norte	39° 34' 31",5
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en la localidad	23m

Determinación de la hora.

Se obtuvo por la observación de estrellas con el anteojo de pasos Repsold.

En el cuadro siguiente figura el resumen de los valores obtenidos para los estados y movimientos del reloj Strasser durante los cinco días de observación.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
8 de Junio de 1919	15 29	— 1,07 ± 0,01	
9 íd. íd.	15 29	— 0,12 ± 0,01	+ 0,95 ± 0,01
10 íd. íd.	15 29	+ 0,35 ± 0,11	+ 0,47 ± 0,11
11 íd. íd.	15 29	+ 0,76 ± 0,04	+ 0,41 ± 0,12
12 íd. íd.	15 29	+ 0,72 ± 0,03	— 0,04 ± 0,05

El error medio para el movimiento en el conjunto de las operaciones será el promedio de los errores

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,07.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra C figuran todas las correcciones que hay que hacer a los valores de las duraciones de oscilación para obtener los de las duraciones reducidas.

Se determinó el balance del sostén por el método de Borrass, oscilando los péndulos 104 y 106 en la dirección NW.-SE., y los 105 y 107 en la NE.-SW.

Los valores obtenidos fueron los siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
36×10^{-7}	35×10^{-7}
34×10^{-7}	36×10^{-7}
33×10^{-7}	35×10^{-7}
36×10^{-7}	36×10^{-7}
35×10^{-7}	36×10^{-7}

El error medio para ambas determinaciones se obtendrá por la fórmula ya conocida, resultando para este caso:

$$e_b = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}.$$

Los valores de las duraciones de oscilación corregidas y los promedios de esos valores figuran en el siguiente cuadro:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014346	0,5015125	0,5014546	0,5015274
41	33	40	67
30	14	47	83
48	26	48	77
47	47	46	68
33	25	51	80
0,5014341	0,5015143	0,5014546	0,5015275

FECHAS — 1919	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7 Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°	′	s	s	s						s
9 Junio	104	2 5	770,00	15,3	20,66	11,6	+ 0,95	157,190	0,5015955	— 4	— 631	— 994	+ 55	— 35	0,5014346
9 íd.	105	3 23	770,15	15,1	20,76	11,6	+ 0,95	149,945	6729	— 4	— 635	— 984	+ 55	— 36	5125
9 íd.	106	4 41	770,35	15,5	20,91	11,3	+ 0,95	155 275	6152	— 3	— 621	— 1 002	+ 55	— 35	4546
9 íd.	107	7 39	770,15	15,5	21,16	11,6	+ 0,95	148,580	6883	— 4	— 623	— 1 001	+ 55	— 36	5274
9 íd.	104	8 55	770,05	15,4	21,26	11,6	+ 0,95	156,970	5978	— 4	— 630	— 1 023	+ 55	— 35	4341
9 íd.	105	10 16	770,05	14,8	21,36	11,6	+ 0,95	149,640	6763	— 4	— 633	— 1 012	+ 55	— 36	5133
10 íd.	106	2 5	770,90	15,5	21,06	11,6	+ 0,47	154,905	6182	— 4	— 621	— 1 009	+ 27	— 35	4540
10 íd.	107	3 23	770,85	15,8	21,11	11,6	+ 0,47	148,400	6903	— 4	— 624	— 999	+ 27	— 36	5267
10 íd.	104	4 39	770,70	15,6	21,21	11,3	+ 0,47	156,840	5991	— 3	— 630	— 1 020	+ 27	— 35	4330
10 íd.	105	8 2	770,05	15,9	21,56	11,6	+ 0,47	149,465	6782	— 4	633	— 1 022	+ 27	— 36	5114
10 íd.	106	9 18	769,75	16,1	21,66	11,7	+ 0,47	154,065	6216	— 4	— 619	— 1 038	+ 27	— 35	4547
10 íd.	107	10 36	769,75	16,1	21,81	11,4	+ 0,47	147,995	6950	— 4	— 622	— 1 032	+ 27	— 36	5283
11 íd.	104	2 23	769,60	15,6	21,36	11,6	+ 0,41	156,555	6020	— 4	— 629	— 1 028	+ 24	— 35	4348
11 íd.	105	3 42	769,55	15,9	21,46	12,0	+ 0,41	149,385	6791	— 4	— 632	— 1 017	+ 24	— 36	5125
11 íd.	106	4 58	769,55	16,1	21,61	11,4	+ 0,41	154,655	6217	— 4	619	— 1 035	+ 24	— 35	4548
11 íd.	107	8 11	769,10	17,0	21,86	11,7	+ 0,41	148,010	6948	— 4	— 621	— 1 034	+ 24	— 36	5277
11 íd.	104	8 25	768,80	16,9	22,01	11,6	+ 0,41	156,285	6048	— 4	— 627	— 1 059	+ 24	— 35	4347
11 íd.	105	10 44	768,65	16,7	22,16	11,7	+ 0,41	148,930	6843	— 4	— 630	— 1 050	+ 24	— 36	5147
12 íd.	106	2 16	769,35	16,3	21,66	11,4	— 0,04	154,400	6244	— 4	— 619	— 1 038	— 2	— 35	4546
12 íd.	107	3 34	769,45	16,1	21,76	11,6	— 0,04	147,905	6960	— 4	— 621	— 1 029	— 2	— 36	5268
12 íd.	104	4 49	769,45	16,6	21,86	11,7	— 0,04	156,235	6053	— 4	— 627	— 1 052	— 2	— 35	4333
12 íd.	105	8 5	769,05	17,0	22,16	11,5	— 0,04	148,890	6847	— 4	— 630	— 1 050	— 2	— 36	5125
12 íd.	106	9 20	768,80	17,3	22,26	11,8	— 0,04	154,110	6275	— 4	— 617	— 1 066	— 2	— 35	4551
12 íd.	107	10 37	768,90	17,6	22,36	11,7	— 0,04	147,570	6999	— 4	— 619	— 1 058	— 2	— 36	5280

ESTACIÓN DE INCA

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en una clase del convento de Padres Franciscanos y el anteojo de pasos en una plaza contigua al mismo.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenvich	2° 54' 36",5 E.
Latitud N.	39° 43' 34"
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en la localidad	123m

Determinación de la hora.

Se determinó la hora, o sean los estados y movimientos del reloj Strasser, aplicando el método de Borrass a la observación de grupos de estrellas en el meridiano con el anteojo Repsold.

En el cuadro siguiente figuran dichos estados y movimientos con sus errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
4 de Julio de 1919	18 59	— 8,52 ± 0,10	— 1,08 ± 0,14
5 id. id.	16 49	— 9,50 ± 0,10	— 1,68 ± 0,16
6 id. id.	16 44	— 11,17 ± 0,13	— 1,75 ± 0,14
8 id. id.	16 55	— 14,68 ± 0,05	

Los errores correspondientes a la marcha diaria del reloj se determinaron por la fórmula

$$\varepsilon_m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

El error medio para el conjunto de las operaciones será el promedio de los errores

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,15$$

Duraciones de oscilación.

En el estado marcado con la letra D constan todas las correcciones que hay que aplicar a los valores de las duraciones de oscilación observadas para obtener los valores de las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en la dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en la dirección NW.-SE.

La corrección por balance del sostén se obtuvo por el método de Borrass, dando los resultados siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
25×10^{-7}	33×10^{-7}
27×10^{-7}	31×10^{-7}
26×10^{-7}	31×10^{-7}
26×10^{-7}	31×10^{-7}
26×10^{-7}	32×10^{-7}

El error para cada par de péndulos se obtiene por la fórmula

$$e_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}$$

resultando

$$e_{b_1} = \pm 0{,}4 \times 10^{-7} \qquad e_{b_2} = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}$$

El error medio se obtiene por la fórmula

$$e_b = \sqrt{\frac{e_{b_1}^2 + e_{b_2}^2}{2 \times 2}}$$

resultando

$$e_b = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$$

En el cuadro siguiente figuran todos los valores de las duraciones de oscilación después de hechas las correcciones y los promedios de esos valores para cada péndulo:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014375	0,5015148	0,5014590	0,5015321
407	70	49	281
367	41	87	299
353	36	74	299
382	50	68	300
387	34	77	295
0,5014379	0,5015147	0,5014574	0,5015299

FECHAS — 1919	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		b m	mm	mm	°	'	s	s	s						
5 Julio.....	104	3 54	752,20	16,2	23,87	11,8	— 1,08	154,585	0,5016225	— 4	— 609	— 1148	— 63	— 26	0,5014375
5 id.	105	5 12	752,35	16,5	23,97	11,9	— 1,08	147,595	6996	— 4	— 613	— 1136	— 63	— 32	5148
5 id.	106	6 28	752,35	16,8	24,07	11,6	— 1,08	152,605	6436	— 4	— 600	— 1153	— 63	— 26	4590
5 id.	107	9 43	751,65	17,2	24,27	11,8	— 1,08	146,115	7169	— 4	— 601	— 1148	— 63	— 32	5321
5 id.	104	10 57	750,45	17,7	24,37	11,6	— 1,08	154,085	6278	— 4	— 606	— 1172	— 63	— 26	4407
5 id.	105	12 15	751,35	18,0	24,48	11,9	— 1,08	147,225	7039	— 4	— 610	— 1160	— 63	— 32	5170
6 id.	106	4 17	752,70	17,1	24,12	11,3	— 1,68	152,645	6432	— 3	— 600	— 1156	— 98	— 26	4549
6 id.	107	5 34	752,55	16,5	24,17	11,9	— 1,68	146,180	7161	— 4	— 603	— 1143	— 98	— 32	5281
6 id.	104	6 48	752,45	16,4	24,27	11,8	— 1,68	154,140	6272	— 4	— 609	— 1168	— 98	— 26	4367
6 id.	105	9 47	752,55	16,6	24,37	11,9	— 1,68	147,195	7042	— 4	— 612	— 1155	— 98	— 32	5141
6 id.	106	11 2	752,70	17,4	24,48	11,6	— 1,68	152,135	6487	— 4	— 599	— 1173	— 98	— 26	4587
6 id.	107	12 19	753,05	17,8	24,63	11,9	— 1,68	145,845	7200	— 4	— 602	— 1165	— 98	— 32	5299
7 id.	104	4 6	755,35	16,7	24,07	11,6	— 1,75	154,305	6254	— 4	— 611	— 1158	— 102	— 26	4353
7 id.	105	5 26	755,20	16,5	24,12	11,6	— 1,75	147,285	7032	— 4	— 615	— 1143	— 102	— 32	5136
7 id.	106	6 41	755,00	16,3	24,17	11,6	— 1,75	152,325	6466	— 4	— 602	— 1158	— 102	— 26	4574
7 id.	107	9 55	754,50	16,8	24,37	11,9	— 1,75	145,900	7194	— 4	— 604	— 1153	— 102	— 32	5299
7 id.	104	11 9	754,60	17,1	24,48	11,8	— 1,75	153,860	6302	— 4	— 610	— 1178	— 102	— 26	4382
7 id.	105	12 28	754,75	16,9	24,58	11,9	— 1,75	146,990	7066	— 4	— 613	— 1165	— 102	— 32	5150
8 id.	106	4 17	758,25	13,6	23,87	11,6	— 1,75	152,475	6450	— 4	— 606	— 1144	— 102	— 26	4568
8 id.	107	5 34	758,65	13,4	23,82	11,9	— 1,75	146,065	7174	— 4	— 609	— 1127	— 102	— 32	5300
8 id.	104	6 50	759,00	13,3	23,87	11,4	— 1,75	154,030	6283	— 4	— 616	— 1148	— 102	— 26	4387
8 id.	105	10 3	759,25	14,1	23,92	11,9	— 1,75	147,350	7024	— 4	— 619	— 1133	— 102	— 32	5134
8 id.	106	11 19	759,30	14,1	23,97	11,5	— 1,75	152,360	6463	— 4	— 606	— 1148	— 102	— 26	4577
8 id.	107	12 37	759,50	14,1	24,07	11,8	— 1,75	146,010	7181	— 4	— 609	— 1139	— 102	— 32	5295

ESTACIÓN DE MANACOR

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en el Laboratorio municipal (convento de Santo Domingo) y la barraca en un patio cercano.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	3ᵐ 12ˢ 32ˢ,9 E.
Latitud Norte	39° 34' 4",6
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en la localidad.....	82,8ᵐ

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados del reloj durante los días de observación por el método de Borrass, aplicado a observación de pasos de estrellas con el anteojo Repsold.

En el cuadro siguiente figuran los estados y movimientos del reloj Strasser, obtenidos en los cinco días de observación.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del rel reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
17 de Julio de 1919.....	17 28	— 0,89 ± 0,03	
18 id. id.	17 28	— 0,48 ± 0,02	+ 0,41 ± 0,04
19 id. id.	17 28	— 0,17 ± 0,02	+ 0,31 ± 0,03
20 id. id.	17 40	— 0,50 ± 0,05	— 0,33 ± 0,05
21 id. id.	17 28	— 1,13 ± 0,02	— 0,64 ± 0,05

Se obtuvieron los errores correspondientes a la marcha diaria del reloj por la fórmula conocida.

El error medio para el conjunto de las observaciones será el promedio de los errores

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}04.$$

Duraciones de oscilación.

Los valores de las duraciones de oscilación reducidas después de la aplicación de las correcciones figuran en el estado marcado con la letra E.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en sentido EW. y los 105 y 107 en sentido NS.

Las correcciones por balance del sostén se obtuvieron por el método conocido, dando los resultados siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
27×10^{-7}	33×10^{-7}
23×10^{-7}	34×10^{-7}
30×10^{-7}	33×10^{-7}
33×10^{-7}	36×10^{-7}
28×10^{-7}	34×10^{-7}

Por las fórmulas conocidas se obtendrán los errores para cada par de péndulos y el error medio

$$e_{b_1} = \pm 2{,}2 \times 10^{-7} \qquad e_{b_2} = \pm 0{,}7$$

$$e_b = \pm 1{,}2 \times 10^{-7}.$$

En el cuadro siguiente figuran los valores de las duraciones de oscilación reducidas y los promedios de estos valores para cada péndulo:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014341	0,5015123	0,5014558	0,5015284
67	34	33	290
62	50	(84)	315
32	24	59	294
64	33	18	263
61	30	38	285
0,5014355	0,5015132	0,5014541	0,5015289

Por diferir bastante del valor medio se suprime uno de los valores correspondientes al péndulo 106, valor encerrado entre paréntesis, teniéndose presente dicha supresión para el cálculo del valor medio definitivo correspondiente a dicho péndulo, que figura en el anterior cuadro.

FECHAS — 1919	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10^{-7}					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
18 Julio.....	104	4 46	758,85	16,6	22,11	11,5	+ 0,41	156,450	0,5016031	— 4	— 618	— 1 064	+ 24	— 28	0,5014341
18 íd.	105	6 5	758,85	16,0	22,16	11,9	+ 0,41	149,230	6809	— 4	— 622	— 1 050	+ 24	— 34	5123
18 íd.	106	7 23	758,75	15,8	22,26	11,5	+ 0,41	154,435	6241	— 4	— 609	— 1 066	+ 24	— 28	4558
18 íd.	107	10 2	758,20	16,5	22,57	11,7	+ 0,41	147,770	6976	— 4	— 610	— 1 068	+ 24	— 34	5284
18 íd.	104	11 18	757,90	16,8	22,72	11,6	+ 0,41	155,930	6084	— 4	— 616	— 1 093	+ 24	— 28	4367
18 íd.	105	12 40	757,90	17,3	22,87	11,9	+ 0,41	148,860	6851	— 4	— 619	— 1 084	+ 24	— 34	5134
19 íd.	106	4 53	757,85	17,1	22,31	11,6	+ 0,31	154,590	6224	— 4	— 608	— 1 069	+ 18	— 28	4533
19 íd.	107	6 13	757,85	17,3	22,42	11,6	+ 0,31	147,735	6980	— 4	— 610	— 1 060	+ 18	— 34	5290
19 íd.	104	7 28	757,65	17,1	22,62	11,4	+ 0,31	155,970	6080	— 4	— 616	— 1 088	+ 18	— 28	4362
19 íd.	105	10 31	757,40	17,4	23,02	11,7	+ 0,31	148,605	6880	— 4	— 619	— 1 091	+ 18	— 34	5150
19 íd.	106	11 46	757,40	18,0	23,22	11,3	+ 0,31	153,740	6314	— 3	— 605	— 1 112	+ 18	— 28	4584
19 íd.	107	13 5	757,40	18,9	23,42	11,6	+ 0,31	147,130	7050	— 4	— 607	— 1 108	+ 18	— 34	5315
20 íd.	104	5 00	758,05	18,3	22,92	11,6	— 0,33	155,770	6101	— 4	— 615	— 1 103	— 19	— 28	4332
20 íd.	105	6 20	758,10	18,0	23,02	11,5	— 0,33	148,505	6891	— 4	— 619	— 1 091	— 19	— 34	5124
20 íd.	106	7 36	758,05	17,7	23,17	11,4	— 0,33	153,640	6325	— 4	— 606	— 1 110	— 19	— 28	4559
20 íd.	107	10 26	758,00	18,1	23,47	11,9	— 0,33	146,970	7069	— 4	— 608	— 1 110	— 19	— 34	5294
20 íd.	104	11 42	758,05	18,7	23,62	11,3	— 0,33	155,160	6164	— 3	— 614	— 1 136	— 19	— 28	4364
20 íd.	105	13 1	758,30	19,0	23,82	11,6	— 0,33	148,115	6936	— 4	— 617	— 1 129	— 19	— 34	5133
21 íd.	106	15 15	764,30	17,0	22,97	11,8	— 0,64	153,885	6299	— 4	— 612	— 1 100	— 37	— 28	4518
21 íd.	107	6 34	764,15	16,4	22,92	11,6	— 0,64	147,240	7037	— 4	— 615	— 1 084	— 37	— 34	5263
21 íd.	104	7 49	764,05	16,4	22,92	11,6	— 0,64	155,390	6140	— 4	— 607	— 1 103	— 37	— 28	4361
21 íd.	105	10 27	764,15	16,7	23,07	11,4	— 0,64	148,240	6922	— 4	— 624	— 1 093	— 37	— 34	5130
21 íd.	106	11 44	764,00	16,9	23,17	11,3	— 0,64	153,625	6327	— 3	— 611	— 1 110	— 37	— 28	4538
21 íd.	107	13 1	764,00	17,4	23,27	11,8	— 0,64	146,920	7074	— 4	— 613	— 1 101	— 37	— 34	5285

ESTACIÓN DE PUERTO DE POLLENSA

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en el faro del puerto y el anteojo de pasos en la explanada del mismo.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	3° 6' 34" E.
Latitud Norte	39° 53' 56"
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en la localidad	13,4m

Determinación de la hora.

Por el método de Borrass se determinaron los estados y movimientos del reloj Strasser, observando previamente pasos meridianos de estrellas con el anteojo Repsold.

En el cuadro siguiente figuran los estados y movimientos obtenidos en los cinco dias de observación con los errores correspondientes a cada observación, habiéndose obtenido los errores de los movimientos por la fórmula

$$\varepsilon_m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s.)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
18 de Agosto de 1919	17 34	+ 16,64 ± 0,03	— 0,75 ± 0,04
19 id. id.	17 15	+ 15,90 ± 0,03	— 1,39 ± 0,05
20 id. id.	17 15	+ 14,51 ± 0,04	— 2,21 ± 0,06
21 id. id.	17 15	+ 12,30 ± 0,04	— 2,83 ± 0,04
22 id. id.	17 15	+ 9,47 ± 0,01	

El error medio para el conjunto de las observaciones será el promedio de los errores:

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,05.$$

Duraciones de oscilación.

Las duraciones de oscilación obtenidas, después de aplicadas todas las correcciones, figuran en el estado marcado con la letra F. En él se consignan también los valores de esas correcciones.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NE.-SW., y los 105 y 107 en NW.-SE.

La corrección por balance del sostén se obtuvo por el método aplicado anteriormente, resultando los siguientes valores:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
36×10^{-7}	43×10^{-7}
39×10^{-7}	43×10^{-7}
38×10^{-7}	47×10^{-7}
36×10^{-7}	42×10^{-7}
37×10^{-7}	44×10^{-7}

Los errores se determinaron por la fórmula

$$e_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}$$

dando los siguientes valores para cada par de péndulos:

$$e_{b_1} = \pm 0{,}8 \times 10^{-7} \qquad e_{b_2} = \pm 1{,}1 \times 10^{-7}$$

El error medio obtenido por la fórmula

$$e_b = \sqrt{\frac{e_{b_1}^2 + e_{b_2}^2}{2 \times 2}}$$

será

$$e_b = \pm 0{,}7 \times 10^{-7}$$

En el siguiente cuadro están los valores de las duraciones de oscilación reducidas y los promedios de esos valores para cada péndulo:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014225	0,5015000	0,5014433	0,5015178
50	5029	(4400)	43
21	5018	4474	85
11	4993	4451	78
54	5024	(4406)	53
34	5018	4471	88
0,5014233	0,5015014	0,5014457	0,5015171

Para obtener el valor medio correspondiente al péndulo 106 se suprimen dos valores, que aparecen encerrados entre paréntesis, por diferir bastante del promedio obtenido con todos ellos. El valor medio que figura anteriormente es el obtenido después de la supresión de los dos valores.

FECHAS — 1919	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sosten.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
19 Agosto.....	104	6 42	769,85	20,0	26,54	11,6	— 0,75	154,785	0,5016204	— 4	— 617	— 1 277	— 44	— 37	0,5014225
19 íd.	105	8 1	769,90	18,9	26,59	11,4	— 0,75	147,795	6973	— 4	— 621	— 1 260	— 44	— 44	5000
19 íd.	106	9 17	769,75	18,9	26,74	11,5	— 0,75	152,870	6407	— 4	— 608	— 1 281	— 44	— 37	4433
19 íd.	107	12 25	769,15	19,3	26,99	11,7	— 0,75	146,220	7156	— 4	— 609	— 1 277	— 44	— 44	5178
19 íd.	104	13 40	768,85	18,9	27,09	11,6	— 0,75	154,320	6253	— 4	— 615	— 1 303	— 44	— 37	4250
19 íd.	105	14 58	768,75	18,4	27,19	11,9	— 0,75	147,305	7028	— 4	— 619	— 1 288	— 44	— 44	5029
20 íd.	106	6 22	769,15	18,5	26,74	11,5	— 1,39	152,850	6410	— 4	— 607	— 1 281	— 81	— 37	4400
20 íd.	107	7 39	769,10	18,9	26,74	11,6	— 1,39	146,295	7147	— 4	— 610	— 1 265	— 81	— 44	5143
20 íd.	104	8 54	768,90	19,3	26,79	11,4	— 1,39	154,365	6248	— 4	— 616	— 1 289	— 81	— 37	4221
20 íd.	105	12 32	768,60	20,3	26,94	11,8	— 1,39	147,195	7042	— 4	— 619	— 1 276	— 81	— 44	5018
20 íd.	106	13 48	768,30	20,3	26,99	11,3	— 1,39	152,070	6494	— 3	— 606	— 1 293	— 81	— 37	4474
20 íd.	107	15 6	768,05	19,3	27,09	11,7	— 1,39	145,820	7203	— 4	— 608	— 1 281	— 81	— 44	5185
21 íd.	104	6 24	768,90	20,0	26,84	11,7	— 2,21	154,000	6287	— 4	— 616	— 1 291	— 128	— 37	4211
21 íd.	105	7 44	768,95	20,3	26,89	11,8	— 2,21	147,025	7062	— 4	— 619	— 1 274	— 128	— 44	4993
21 íd.	106	9 0	768,80	20,3	26,99	11,6	— 2,21	151,840	6519	— 4	— 606	— 1 293	— 128	— 37	4451
21 íd.	107	12 30	768,35	20,5	27,29	11,8	— 2,21	145,405	7253	— 4	— 608	— 1 291	— 128	— 44	5178
21 íd.	104	13 43	768,35	20,6	27,45	11,6	— 2,21	153,330	6358	— 4	— 614	— 1 321	— 128	— 37	4254
21 íd.	105	15 1	763,40	20,2	27,65	11,8	— 2,21	146,470	7127	— 4	— 617	— 1 310	— 128	— 44	5024
22 íd.	106	6 54	769,40	19,8	27,45	11,6	— 2,83	151,720	6532	— 4	— 606	— 1 315	— 164	— 37	4406
22 íd.	107	8 11	769,45	18,7	27,45	11,7	— 2,83	145,260	7270	— 4	— 607	— 1 298	— 164	— 44	5153
22 íd.	104	9 25	769,30	18,5	27,50	11,6	— 2,83	153,155	6377	— 4	— 615	— 1 323	— 164	— 37	4234
22 íd.	105	12 50	768,90	18,9	27,60	11,7	— 2,83	146,220	7156	— 4	— 618	— 1 308	— 164	— 44	5018
22 íd.	106	14 22	768,70	18,9	27,70	11,8	— 2,83	151,010	6608	— 4	— 605	— 1 327	— 164	— 37	4479
22 íd.	107	15 40	768,65	18,1	27,75	11,6	— 2,83	144,835	7321	— 4	— 608	— 1 313	— 164	— 44	5188

ESTACIÓN DE CIUDADELA

Local de observación.

Se hicieron las observaciones de los péndulos en una clase del Colegio de Padres Salesianos, instalándose la barraca astronómica en el patio de recreo del mismo.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	3° 50' 10",5 E.
Latitud Norte.....	40° 0' 4",1
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en la localidad.....	22,2m

Determinación de la hora.

Se hizo de la misma manera que en las estaciones anteriores:

A continuación figura un resumen conteniendo los estados y movimientos del reloj Strasser en los cinco días de observación, con los errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del rel reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
3 de Septiembre de 1919.....	21 3	— 6,47 ± 0,05	— 1,58 ± 0,07
4 id. id.	20 35	— 8,02 ± 0,05	— 2,44 ± 0,06
5 id. id.	20 58	— 10,49 ± 0,03	— 2,76 ± 0,07
6 id. id.	20 58	— 13,25 ± 0,06	— 3,17 ± 0,07
7 id. id.	20 58	— 16,42 ± 0,04	

El error medio para el conjunto de las observaciones será el promedio de los errores correspondientes a los movimientos:

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,07.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado marcado con la letra G figuran las correcciones que se aplican a los valores observados de las duraciones de oscilación para obtener los valores de las duraciones reducidas, que constan en el mismo estado.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección EW. y los 105 y 107 en dirección NS.

La corrección por balance del sostén se obtuvo de la misma manera que en las estaciones anteriores.

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
32×10^{-7}	32×10^{-7}
33×10^{-7}	32×10^{-7}
31×10^{-7}	33×10^{-7}
30×10^{-7}	29×10^{-7}
32×10^{-7}	32×10^{-7}

Los errores obtenidos para cada par de péndulos son:

$$e_{b_1} = \pm 0{,}7 \times 10^{-7} \qquad e_{b_2} = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$$

El error medio deducido de los dos anteriores es:

$$e_b = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}.$$

En el cuadro siguiente figuran los valores de las duraciones de oscilación reducidas y los promedios de estos valores para cada péndulo:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014177	0,5014951	0,5014389	0,5015132
54	80	404	(076)
67	49	365	111
74	29	373	123
59	63	385	099
76	63	397	134
0,5014168	0,5014956	0,5014386	0,5015120

Por diferir bastante del valor medio se suprime uno de los valores correspondiente al péndulo 107, valor encerrado entre paréntesis, teniéndose en cuenta dicha supresión para el cálculo del valor medio definitivo que figura en el cuadro anterior.

FECHAS 1919	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
4 Septiembre...	105	7 54	765,25	17,2	23,72	11,7	— 1,58	149,070	0,5016827	— 4	— 624	— 1 124	— 92	— 32	0,5014951
4 íd. ...	106	9 11	765,30	17,5	23,72	11,6	— 1,58	154,215	6264	— 4	— 611	— 1 136	— 92	— 32	4389
4 íd. ...	107	10 29	765,35	17,5	23,77	11,6	— 1,58	147,585	6997	— 4	— 613	— 1 124	— 92	— 32	5132
4 íd. ...	104	13 11	765,40	18,0	23,92	11,6	— 1,58	156,025	6075	— 4	— 619	— 1 151	— 92	— 32	4177
4 íd. ...	105	14 30	765,45	18,3	24,02	11,8	— 1,58	148,700	6869	— 4	— 623	— 1 138	— 92	— 32	4980
4 íd. ...	106	15 48	765,55	18,1	24,17	11,5	— 1,58	153,875	6300	— 4	— 610	— 1 158	— 92	— 32	4404
5 íd. ...	107	8 17	766,55	18,4	23,92	11,9	— 2,44	147,580	6998	— 4	— 613	— 1 131	— 142	— 32	5076
5 íd. ...	104	9 32	766,50	18,9	23,97	11,7	— 2,44	155,735	6105	— 4	— 620	— 1 153	— 142	— 32	4154
5 íd. ...	105	10 52	766,35	19,2	24,07	11,6	— 2,44	148,515	6890	— 4	— 623	— 1 140	— 142	— 32	4949
5 íd. ...	106	13 18	765,70	19,3	24,37	11,4	— 2,44	153,685	6320	— 4	— 609	— 1 168	— 142	— 32	4365
5 íd. ...	107	14 36	765,55	19,6	24,48	11,7	— 2,44	147,060	7058	— 4	— 611	— 1 158	— 142	— 32	5111
5 íd. ...	104	15 51	765,60	19,6	24,68	11,4	— 2,44	155,305	6149	— 4	— 617	— 1 187	— 142	— 32	4167
6 íd. ...	105	8 18	765,85	18,9	24,22	11,7	— 2,76	148,460	6896	— 4	— 623	— 1 148	— 160	— 32	4929
6 íd. ...	106	9 35	765,85	19,2	24,27	11,7	— 2,76	153,485	6341	— 4	— 609	— 1 163	— 160	— 32	4373
6 íd. ...	107	10 53	765,75	19,0	24,32	11,6	— 2,76	146,860	7081	— 4	— 612	— 1 150	— 160	— 32	5123
6 íd. ...	104	13 17	765,40	19,3	24,48	11,6	— 2,76	155,150	6166	— 4	— 618	— 1 178	— 160	— 32	4174
6 íd. ...	105	14 37	765,30	19,6	24,58	11,6	— 2,76	148,040	6945	— 4	— 621	— 1 165	— 160	— 32	4953
6 íd. ...	106	15 52	765,35	20,1	24,73	11,8	— 2,76	153,180	6374	— 4	— 608	— 1 185	— 160	— 32	4385
7 íd. ...	107	8 22	767,40	18,9	24,22	11,6	— 3,17	146,880	7079	— 4	— 614	— 1 146	— 184	— 32	5099
7 íd. ...	104	9 36	767,35	19,2	24,27	11,9	— 3,17	155,140	6167	— 4	— 620	— 1 168	— 184	— 32	4159
7 íd. ...	105	10 55	767,30	19,0	24,37	11,8	— 3,17	147,900	6961	— 4	— 623	— 1 155	— 184	— 32	4963
7 íd. ...	106	13 23	767,00	18,9	24,53	11,6	— 3,17	152,925	6402	— 4	— 610	— 1 175	— 184	— 32	4397
7 íd. ...	107	14 42	767,00	19,2	24,58	11,6	— 3,17	146,440	7130	— 4	— 613	— 1 163	— 184	— 32	5134
7 íd. ...	104	15 56	767,05	19,6	24,68	11,5	— 3,17	154,805	6202	— 4	— 619	— 1 187	— 184	— 32	4176

ESTACIÓN DE FORNELLS

Local de observación.

Se hicieron las observaciones en una casa propiedad de D.ª Lucía Quintana, instalándose la barraca con el anteojo en el patio de la citada casa.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	4° 7' 52'',6 E.
Latitud Norte.....	40° 3' 24'',1
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar.....	7,4m

Determinación de la hora.

Se hizo por el mismo procedimiento que en las estaciones anteriores.

A continuación figura el cuadro resumen de los estados y movimientos del reloj en los días de observación, con los errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
24 de Septiembre de 1919.....	22 21	+ 6,88 ± 0,05	— 1,17 ± 0,09
25 id. id.	21 22	+ 5,76 ± 0,08	— 0,87 ± 0,09
26 id. id.	22 04	+ 4,86 ± 0,03	— 1,27 ± 0,05
27 id. id.	19 56	+ 3,70 ± 0,04	— 1,49 ± 0,05
28 id. id.	19 46	+ 2,22 ± 0,03	— 1,97 ± 0,13
30 id. id.	19 50	— 1,72 ± 0,13	

El error medio para el conjunto de las observaciones será:

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,08.$$

Duraciones de oscilacion.

En el estado señalado con la letra H figuran las correcciones hechas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en la dirección EW. y los 105 y 107 en la dirección NS.

La corrección por balance del sostén se obtuvo de igual manera que en las estaciones anteriores, dando los siguientes resultados:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
37×10^{-7}	44×10^{-7}
35×10^{-7}	42×10^{-7}
36×10^{-7}	43×10^{-7}
34×10^{-7}	43×10^{-7}
36×10^{-7}	43×10^{-7}

Siendo el error medio de ambas determinaciones

$$e_b = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$$

En el siguiente cuadro figuran los valores corregidos de las duraciones de oscilación y sus valores medios correspondientes:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014123	0,5014876	0,5014280	0,5014999
104	876	98	5017
126	902	70	5002
124	883	72	5009
090	859	80	5012
099	895	62	4999
0,5014111	0,5014882	0,5014277	0,5015006

FECHAS — 1919	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7 Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del ostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°	′	s	s	s						
26 Septiembre..	106	9 21	764,95	18,4	23,17	11,4	— 0,87	155,860	0,5016092	— 4	— 611	— 1 110	— 51	— 36	0,5014280
26 íd. ..	107	10 45	765,00	17,0	23,32	11,5	— 0,87	149,185	6814	— 4	— 614	— 1 103	— 51	— 43	4999
26 íd. ..	104	12 2	764,60	19,3	23,47	11,7	— 0,87	157,120	5962	— 4	— 619	— 1 129	— 51	— 36	4123
26 íd. ..	105	14 36	763,85	19,6	23,77	11,9	— 0,87	150,005	6722	— 4	— 622	— 1 126	— 51	— 43	4876
26 íd. ..	106	15 50	763,55	20,3	23,92	11,6	— 0,87	155,370	6143	— 4	— 608	— 1 146	— 51	— 36	4298
26 íd. ..	107	17 09	763,55	20,6	24,17	11,6	— 0,87	148,705	6869	— 4	— 610	— 1 143	— 51	— 43	5017
27 íd. ..	104	9 27	762,80	19,0	23,92	11,6	— 1,27	156,890	5986	— 4	— 617	— 1 151	— 74	— 36	4104
27 íd. ..	105	10 48	762,55	19,8	23,97	11,7	— 1,27	149,730	6753	— 4	— 620	— 1 136	— 74	— 43	4876
27 íd. ..	106	12 5	762,20	20,1	24,07	11,4	— 1,27	155,360	6144	— 4	— 607	— 1 153	— 74	— 36	4270
27 íd. ..	107	14 27	761,80	21,2	24,43	11,3	— 1,27	148,550	6886	— 3	— 608	— 1 156	— 74	— 43	5002
27 íd. ..	104	15 42	761,55	21,4	24,63	11,8	— 1,27	156,465	6029	— 4	— 614	— 1 185	— 74	— 36	4126
27 íd. ..	105	17 2	761,20	20,8	24,83	11,7	— 1,27	149,170	6816	— 4	— 617	— 1 176	— 74	— 43	4902
28 íd. ..	106	9 40	759,15	17,3	23,67	11,6	— 1,49	155,400	6139	— 4	— 606	— 1 134	— 87	— 36	4272
28 íd. ..	107	10 59	759,15	17,1	23,57	11,6	— 1,49	148,720	6867	— 4	— 609	— 1 115	— 87	— 43	5009
28 íd. ..	104	12 17	759,05	16,8	23,57	11,5	— 1,49	156,750	6000	— 4	— 615	— 1 134	— 87	— 36	4124
28 íd. ..	105	15 6	759,10	16,4	23,72	11,5	— 1,49	149,655	6760	— 4	— 619	— 1 124	— 87	— 43	4883
28 íd. ..	106	16 22	759,35	15,8	23,82	11,5	— 1,49	155,265	6154	— 4	— 606	— 1 141	— 87	— 36	4280
28 íd. ..	107	17 42	759,70	16,6	23,92	11,6	— 1,49	148,555	6886	— 4	— 609	— 1 131	— 87	— 43	5012
29 íd. ..	104	8 12	762,60	17,0	23,02	11,6	— 1,97	157,045	5970	— 4	— 619	— 1 107	— 114	— 36	4090
29 íd. ..	105	9 31	763,00	17,7	23,02	11,9	— 1,97	149,900	6734	— 4	— 623	— 1 091	— 114	— 43	4859
29 íd. ..	106	10 48	763,15	18,0	23,12	11,6	— 1,97	155,455	6134	— 4	— 610	— 1 108	— 114	— 36	4262
29 íd. ..	107	12 7	762,85	17,8	23,27	11,6	— 1,97	148,665	6873	— 4	— 612	— 1 101	— 114	— 43	4999
29 íd. ..	104	15 14	762,15	18,1	23,47	11,6	— 1,97	156,750	6000	— 4	— 618	— 1 129	— 114	— 36	4099
29 íd. ..	105	16 32	762,10	18,4	23,57	11,9	— 1,97	149,365	6794	— 4	— 621	— 1 117	— 114	— 43	4895

ESTACIÓN DE MAHÓN

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en uno de los pabellones del Hospital civil y el anteojo de pasos en la huerta del mismo.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenvich.....	4° 15' 49",8 E.
Latitud Norte.....	39° 53' 12",8
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar.....	50,2m

Determinación de la hora.

Se hizo, como siempre, por observaciones de pasos de estrellas con el anteojo Repsold.

En el cuadro siguiente figura el resumen de los estados y movimientos del reloj en los dias de observación con los errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s.)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
13 de Octubre de 1919.....	20 47	+ 2,35 ± 0,03	
14 id. id.	22 9	+ 1,77 ± 0,06	— 0,55 ± 0,07
15 id. id.	22 9	+ 1,38 ± 0,01	— 0,39 ± 0,06
17 id. id.	21 7	+ 1,29 ± 0,04	— 0,05 ± 0,04

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,06$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra I figuran las correcciones hechas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección EW. y los 105 y 107 en dirección NS.

ESTACIÓN DE MAHÓN

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en uno de los pabellones del Hospital civil y el anteojo de pasos en la huerta del mismo.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenvich.....	4° 15' 49",8 E.
Latitud Norte.....	39° 53' 12",8
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar.....	50,2m

Determinación de la hora.

Se hizo, como siempre, por observaciones de pasos de estrellas con el anteojo Repsold.

En el cuadro siguiente figura el resumen de los estados y movimientos del reloj en los días de observación con los errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
13 de Octubre de 1919.....	20 47	+ 2,35 ± 0,03	
			— 0,55 ± 0,07
14 id. id.	22 9	+ 1,77 ± 0,06	
			— 0,39 ± 0,06
15 id. id.	22 9	+ 1,38 ± 0,01	
			— 0,05 ± 0,04
17 id. id.	21 7	+ 1,29 ± 0,04	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,06$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra I figuran las correcciones hechas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección EW. y los 105 y 107 en dirección NS.

La corrección por balance del sostén, obtenida por el mismo procedimiento que en las demás estaciones, dió estos resultados:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
$40 \times 10-7$	$45 \times 10-7$
$40 \times 10-7$	$43 \times 10-7$
$39 \times 10-7$	$44 \times 10-7$
$41 \times 10-7$	$40 \times 10-7$
$40 \times 10-7$	$43 \times 10-7$

El error medio de ambas determinaciones es

$$e_b = \pm 0{,}6 \times 10-7.$$

En el siguiente cuadro figuran los valores corregidos de las duraciones de oscilación y sus valores medios correspondientes:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014221	0,5014965	0,5014349	0,5015088
185	49	(292)	47
177	24	318	72
190	44	352	92
187	56	305	76
188	26	342	77
0,5014191	0,5014944	0,5014333	0,5015075

Por diferir bastante del valor medio se suprime el del péndulo 106, encerrado entre paréntesis, teniéndose en cuenta dicha supresión para el cálculo del valor medio correspondiente que figura en el anterior estado.

FECHAS — 1919	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7 Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°	′	s	s	s						s
14 Octubre.....	104	11 25	761,85	14,9	18,34	11,6	—0,55	158,545	0,5015818	— 4	— 629	— 892	— 32	— 40	0,5014221
14 íd.	105	12 46	762,05	14,8	18,71	11,7	— 0,55	151,450	6562	— 4	— 632	— 886	— 32	— 43	4965
14 íd.	106	11 3	762,15	14,8	18,86	11,6	—0,55	157,255	5948	— 4	— 619	— 904	— 32	— 40	4349
14 íd.	107	16 56	762,00	14,9	19,01	11,6	—0,55	150,310	6688	— 4	— 622	— 899	— 32	— 43	5088
14 íd.	104	18 15	763,10	14,5	19,01	11,4	—0,55	158,075	5805	— 4	— 629	— 915	— 32	— 40	4185
14 íd.	105	19 37	763,70	14,3	19,01	11,6	—0,55	151,450	6562	— 4	— 633	— 901	— 32	— 43	4949
15 íd.	106	11 17	765,25	14,4	18,61	11,6	—0,39	158,000	5873	— 4	— 622	— 892	— 23	— 40	4292
15 íd.	107	12 38	764,90	14,3	18,66	11,5	— 0,39	150,880	6625	— 4	— 625	— 883	— 23	— 43	5047
15 íd.	104	13 56	764,45	14,3	18,76	11,5	—0,39	158,950	5778	— 4	— 631	— 903	— 23	— 40	4177
15 íd.	105	16 35	764,20	14,4	18,81	11,7	—0,39	151,845	6519	— 4	— 634	— 891	— 23	— 43	4924
15 íd.	106	17 54	764,10	14,3	18,81	11,6	—0,39	157,660	5907	— 4	— 621	— 901	— 23	— 40	4318
15 íd.	107	19 15	764,25	13,9	18,81	11,5	—0,39	150,595	6656	— 4	— 624	— 890	— 23	— 43	5072
16 íd.	104	11 21	765,75	12,6	18,11	11,4	—0,05	159,315	5742	— 4	— 634	— 871	— 3	— 40	4190
16 íd.	105	12 44	765,60	12,8	18,11	11,4	—0,05	152,120	6480	— 4	— 637	— 858	— 3	— 43	4944
16 íd.	106	14 2	765,20	12,7	18,11	11,6	— 0,05	157,820	5891	— 4	— 624	— 868	— 3	— 40	4352
16 íd.	107	16 38	764,80	12,6	18,11	11,4	—0,05	150,875	6625	— 4	— 626	— 857	— 3	— 43	5092
16 íd.	104	17 55	764,85	13,0	18,06	11,6	—0,05	159,375	5736	— 4	— 633	— 869	— 3	— 40	4187
16 íd.	105	19 17	765,35	13,0	18,01	11,8	—0,05	152,055	6496	— 4	— 637	— 853	— 3	— 43	4956
17 íd.	106	11 28	769,55	10,7	16,72	11,3	—0,05	158,900	5783	— 3	— 631	— 801	— 3	— 40	4305
17 íd.	107	12 53	769,50	11,1	16,72	11,6	—0,05	151,550	6551	— 4	— 634	— 791	— 3	— 43	5076
17 íd.	104	14 10	769,35	11,1	16,77	11,6	—0,05	159,915	5682	— 4	— 640	— 807	— 3	— 40	4188
17 íd.	105	16 45	769,15	10,9	16,82	11,7	—0,05	152,780	6417	— 4	— 644	— 797	— 3	— 43	4926
17 íd.	106	18 6	769,15	11,1	16,77	11,5	—0,05	158,500	5823	— 4	— 631	— 803	— 3	— 40	4342
17 íd.	107	19 29	769,45	11,1	16,72	11,5	—0,05	151,540	6552	— 4	— 634	— 791	— 3	— 43	5077

ESTACIÓN DE MADRID (cierre)

Local de observación.

Se hicieron las observaciones en la misma habitación del Observatorio Astronómico que se utilizó para la estación de salida.

Las coordenadas geográficas del pilar de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	3° 41',0 W.
Latitud Norte	40° 24',5
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante	656m

Determinación de la hora.

Los estados y movimientos del reloj Strasser se determinaron por comparaciones con el magistral del Observatorio, valiéndose del cronógrafo. En el siguiente cuadro figuran estos estados y movimientos con los correspondientes errores:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
26 de Enero de 1920	19 30	— 14,32 ± 0,04	
			— 1,21 ± 0,06
27 id. id.	3 33	— 15,93 ± 0,04	
			— 1,69 ± 0,06
28 id. id.	3 38	— 17,63 ± 0,04	
			— 2,31 ± 0,05
29 id. id.	3 40	— 19,94 ± 0,03	
			— 3,23 ± 0,04
30 id. id.	3 47	— 23,19 ± 0,02	
			— 3,48 ± 0,04
31 id. id.	2 41	— 26,52 ± 0,04	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,05.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra J figuran las correcciones hechas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

La corrección por balance del sostén se obtuvo como en las estaciones anteriores, oscilando los péndulos 104 y 106 en la dirección NE.-SW., y los 105 y 107 en la dirección NW.-SE.

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
34×10^{-7}	42×10^{-7}
33×10^{-7}	42×10^{-7}
36×10^{-7}	43×10^{-7}
32×10^{-7}	36×10^{-7}
34×10^{-7}	41×10^{-7}

Siendo el error medio de ambas determinaciones

$$r_b = \pm 0{,}8 \times 10^{-7}$$

Finalmente, en el siguiente cuadro figuran los valores corregidos de las duraciones de oscilación y sus valores medios correspondientes:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014832	0,5015660	0,5015061	0,5015793
39	58	(23)	774
18	31	44	787
10	41	60	(821)
(62)	(87)	25	773
33	28	54	779
19	41	36	794
0,5014825	0,5015643	0,5015047	0,5015783

Por diferir bastante del valor medio, se suprime uno de los valores de cada péndulo, los que aparecen entre paréntesis, teniéndose en cuenta dicha supresión para calcular los valores medios que figuran en el anterior estado.

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidéreo.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
27 Enero.	104	17 38	712,15	7,3	9,91	11,5	— 1,21	156,505	0,5016025	— 4	— 608	— 477	— 70	— 34	0,5014832
27 íd.	105	18 57	712,00	7,6	10,01	11,8	— 1,21	148,780	6860	— 4	— 611	— 474	— 70	— 41	5660
27 íd.	106	20 12	711,65	7,7	10,16	11,6	— 1,21	154,310	6254	— 4	— 598	— 487	— 70	— 34	5061
27 íd.	107	23 40	710,80	7,9	10,46	11,7	— 1,21	147,545	7002	— 4	— 599	— 495	— 70	— 41	5793
27 íd.	104	0 57	710,85	7,7	10,51	11,6	— 1,21	156,185	6058	— 4	— 605	— 506	— 70	— 34	4839
27 íd.	105	2 17	710,95	7,6	10,60	11,6	— 1,21	148,565	6884	— 4	— 609	— 502	— 70	— 41	5658
28 íd.	106	17 48	709,30	7,6	10,36	11,6	— 1,69	154,345	6250	— 4	— 595	— 496	— 98	— 34	5023
28 íd.	107	19 5	709,05	7,7	10,41	11,9	— 1,69	147,500	7007	— 4	— 598	— 492	— 98	— 41	5774
28 íd.	104	20 19	708,65	7,9	10,50	11,6	— 1,69	156,135	6063	— 4	— 604	— 505	— 98	— 34	4818
28 íd.	105	23 51	707,90	7,9	10,75	11,9	— 1,69	148,525	6889	— 4	— 606	— 509	— 98	— 41	5631
28 íd.	106	1 5	708,05	8,0	10,85	11,6	— 1,69	153,940	6293	— 4	— 593	— 520	— 98	— 34	5044
28 íd.	107	2 22	708,30	8,0	11,00	11,9	— 1,69	147,160	7046	— 4	— 596	— 520	— 98	— 41	5787
29 íd.	104	17 52	713,15	6,3	10,36	11,7	— 2,31	155,885	6089	— 4	— 608	— 498	— 134	— 34	4810
29 íd.	105	19 12	713,45	6,9	10,30	11,9	— 2,31	148,225	6923	— 4	— 612	— 491	— 134	— 41	5641
29 íd.	106	20 27	713,50	6,7	10,45	11,7	— 2,31	153,575	6832	— 4	— 599	— 501	— 134	— 34	5060
29 íd.	107	23 48	713,75	6,3	10,65	11,8	— 2,31	146,650	7106	— 4	— 602	— 504	— 134	— 41	5821
29 íd.	104	1 4	714,45	6,5	10,70	11,9	— 2,31	155,225	6158	— 4	— 608	— 515	— 134	— 34	4862
29 íd.	105	2 22	714,90	6,3	10,75	11,9	— 2,31	147,670	6987	— 4	— 612	— 509	— 134	— 41	5687
30 íd.	106	18 3	718,25	6,6	9,86	11,7	— 3,23	153,615	6328	— 4	— 604	— 472	— 188	— 34	5025
30 íd.	107	19 22	718,35	6,9	9,91	11,9	— 3,23	146,850	7082	— 4	— 607	— 469	— 188	— 41	5773
30 íd.	104	20 36	718,05	7,0	10,06	11,7	— 3,23	155,245	6156	— 4	— 613	— 484	— 188	— 34	4833
30 íd.	105	23 52	717,60	7,0	10,31	11,9	— 3,23	147,860	6965	— 4	— 616	— 488	— 188	— 41	5628
30 íd.	106	1 8	717,70	7,2	10,41	11,7	— 3,23	153,200	6372	— 4	— 603	— 499	— 188	— 34	5054
30 íd.	107	2 29	718,00	7,2	10,50	11,9	— 3,23	146,575	7114	— 4	— 605	— 497	— 188	— 41	5779
31 íd.	104	18 37	720,10	6,5	9,91	11,6	— 3,48	155,285	6151	— 4	— 615	— 477	— 202	— 34	4819
31 íd.	105	19 58	719,95	7,0	9,91	11,9	— 3,48	147,770	6976	— 4	— 618	— 470	— 202	— 41	5641
31 íd.	106	0 9	718,90	7,0	10,31	11,4	— 3,48	153,180	6374	— 4	— 604	— 494	— 202	— 34	5036
31 íd.	107	1 27	719,00	7,0	10,45	11,9	— 3,48	146,345	7141	— 4	— 606	— 494	— 202	— 41	5794

CAPÍTULO II

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS Y PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES EN LA CAMPAÑA DE 1919

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS

El estado núm. 1 contiene los valores de los promedios de las duraciones de oscilación reducidas obtenidos durante la campaña y calculados anteriormente.

Estado núm. 1.

ESTACIONES	Pèndulo 104.	Pèndulo 105.	Pèndulo 106.	Pèndulo 107.
Madrid (salida)	0,5014869	0,5015637	0,5015066	0,5015787
Ibiza	439	5209	4643	364
Palma de Mallorca	341	5143	4546	275
Inca	379	5147	4574	299
Manacor	355	5132	4541	289
Pollensa (Puerto)	233	5014	4457	171
Ciudadela	168	4956	4386	120
Fornells	111	4882	4277	006
Mahón	191	4944	4333	075
Madrid (cierre)	825	5643	5047	783

Como promedio de las observaciones en Madrid se obtienen los siguientes:

Estado núm. 2.

ESTACIONES	Pèndulo 104.	Pèndulo 105.	Pèndulo 106.	Pèndulo 107.
Madrid (salida) Madrid (cierre)	0,5014847	0,5015640	0,5015057	0,5015785
Diferencias	44	6	19	4

Las diferencias entre el promedio de la duración de oscilación de un péndulo con las duraciones de oscilación de los otros en una estación cualquiera, comparadas con las correspondientes diferencias en las otras estaciones, mostrarán si hubo o no variación en la longitud de los péndulos durante los diferentes períodos de la campaña.

La pequeña variación entre la latitud de Madrid y la de las estaciones observadas hace que no sea preciso introducir corrección alguna de latitud para hacerlas comparables entre sí.

En el estado núm. 3 aparecen las diferencias en cuestión:

Estado núm. 3.

ESTACIONES	DIFERENCIAS ENTRE LAS DURACIONES DE OSCILACIÓN DE LOS PÉNDULOS					
	104-105	104-106	104-107	105-106	105-107	106-107
Madrid (salida)	— 768	— 197	— 918	+ 571	— 150	— 721
Ibiza	— 770	— 204	— 925	+ 566	— 155	— 721
Palma de Mallorca	— 802	— 205	— 934	+ 597	— 132	— 729
Inca	— 768	— 195	— 920	+ 573	— 152	— 725
Manacor	— 777	— 186	— 934	+ 591	— 157	— 748
Pollensa (Puerto)	— 781	— 224	— 938	+ 557	— 157	— 714
Ciudadela	— 768	— 218	— 952	+ 570	— 164	— 734
Fornells	— 771	— 166	— 895	+ 605	— 124	— 729
Mahón	— 753	— 142	— 884	+ 611	— 131	— 742
Madrid (cierre)	— 818	— 222	— 958	+ 596	— 140	— 736
Diferencias máximas	65	82	74	54	33	34

Teniendo en cuenta la diferencia señalada por el péndulo 104 entre Madrid (salida) y Madrid (cierre) y los resultados del estado anterior, de cuyo examen se deduce que el citado péndulo sufrió una variación no despreciable durante la campaña, prescindiremos de dicho péndulo para los cálculos sucesivos.

PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES

Para saber la precisión obtenida en las observaciones habrán de calcularse por separado los errores medios cometidos en las diferentes operaciones de que se compone una determinación de esta clase y se englobarán estos errores parciales para obtener el error medio correspondiente al valor de **g** en cada estación.

Cálculo de los errores parciales.

1.° Los errores cometidos en la observación de la duración de oscilación se obtendrán por la fórmula

$$e = 10^{-7}\sqrt{\frac{[vv]}{[n]-m}}$$

en la cual representa [**vv**] la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las duraciones de oscilación y cada uno de estos valores, [**n**] el número total de observaciones y **m** el número de péndulos observados.

Para obtener los valores de [**vv**] tendremos que obtener los de **vv**, que son los cuadrados de sus diferencias, las cuales se encuentran ordenadas en el siguiente cuadro:

ESTACIONES	Péndulo 105.		Péndulo 106.		Péndulo 107.	
	v	vv	v	vv	v	vv
Madrid (salida)	8	64	16	256	13	169
	2	4	11	121	2	4
	1	1	4	16	0	0
	0	0	3	9	1	1
	6	36	6	36	1	1
	5	25	15	225	7	49
Ibiza	0	0	3	9	2	4
	7	49	4	16	6	36
	13	169	16	256	17	289
	14	196	7	49	15	225
	7	49	21	441	10	100
	1	1	5	25	5	25
Palma de Mallorca	18	324	0	0	1	1
	10	100	6	36	8	64
	29	841	1	1	8	64
	17	289	2	4	2	4
	4	16	0	0	7	49
	18	324	5	25	5	25

ESTACIONES	Péndulo 105.		Péndulo 106.		Péndulo 107.	
	v	vv	v	vv	v	vv
	1	1	16	256	22	484
	23	529	25	625	18	324
	6	36	13	169	0	0
Inca	11	121	0	0	0	0
	3	9	6	36	1	1
	13	169	3	9	4	16
	9	81	17	289	5	25
	2	4	8	64	1	1
Manacor	18	324	18	324	26	676
	8	64	23	529	5	25
	1	1	3	9	26	676
	2	4	—	—	4	16
	14	196	24	576	6	36
	15	225	17	289	28	784
	4	16	6	36	14	196
Pollensa (Puerto)	21	441	14	196	7	49
	10	100	—	—	18	324
	4	16	—	—	17	289
	5	25	3	9	12	144
	24	576	18	324	9	81
	7	49	21	441	3	9
Ciudadela	27	729	13	169	21	441
	7	49	1	1	14	196
	7	49	11	121	—	—
	6	36	3	9	7	49
	6	36	21	441	11	121
	20	400	7	49	4	16
Fornells	1	1	5	25	3	9
	23	529	3	9	6	36
	13	169	15	225	7	49
	21	441	16	256	13	169
	5	25	15	225	28	784
	20	400	19	361	3	9
Mahón	0	0	28	784	17	289
	12	144	9	81	1	1
	18	324	—	—	2	4
	17	289	14	196	10	100
	15	225	3	9	9	81
	12	144	13	169	4	16
Madrid (cierre)	2	4	22	484	10	100
	15	225	7	49	4	16
	2	4	11	121	11	121

Del cuadro anterior se deduce el siguiente, haciendo la suma de los términos vv para cada estación y cada péndulo y las sumas totales de unos y otros.

ESTACIONES	Péndulo 105.		Péndulo 106.		Péndulo 107.		[vv]	[n]
	vv	n	vv	n	vv	n		
Madrid (salida)	130	6	663	6	224	6	1 017	18
Ibiza	464	6	796	6	679	6	1 939	18
Palma de Mallorca	1 894	6	66	6	207	6	2 167	18
Inca	865	6	1 095	6	825	6	2 785	18
Manacor	478	6	1 215	5	1 419	6	3 112	17
Pollensa (Puerto)	994	6	1 097	4	1 678	6	3 769	16
Ciudadela	1 477	6	1 065	6	871	5	3 413	17
Fornélls	1 171	6	758	6	280	6	2 209	18
Mahón	1 334	6	1 707	5	1 256	6	4 297	17
Madrid (cierre)	891	6	1 028	6	434	6	2 353	18
[vv]	9 698		9 490		7 873		27 061	
[n]		60		56		59		175

Aplicando la fórmula

$$e = 10^{-7} \sqrt{\frac{[vv]}{[n] - m}}$$

para cada estación, poniendo en vez de [vv] los valores de la penúltima columna, sustituyendo [n] por los de la última y m por 3, que son los péndulos observados, tendremos:

Madrid (salida) ..... $e = \pm\ 8{,}2 \times 10^{-7}$
Ibiza ..... $e = \pm 11{,}4 \times 10^{-7}$
Palma de Mallorca ..... $e = \pm 12{,}0 \times 10^{-7}$
Inca ..... $e = \pm 13{,}6 \times 10^{-7}$
Manacor ..... $e = \pm 14{,}9 \times 10^{-7}$
Pollensa (Puerto) ..... $e = \pm 17{,}0 \times 10^{-7}$
Ciudadela ..... $e = \pm 15{,}6 \times 10^{-7}$
Fornélls ..... $e = \pm 12{,}1 \times 10^{-7}$
Mahón ..... $e = \pm 17{,}5 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre) ..... $e = \pm 12{,}5 \times 10^{-7}$

Los valores de los errores del resultado medio en cada estación se obtendrán por la fórmula

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{[n]}} \times e,$$

dando los resultados siguientes:

Madrid (salida) ..... $e_s = \pm 2{,}0 \times 10^{-7}$
Ibiza ..... $e_s = \pm 2{,}7 \times 10^{-7}$
Palma de Mallorca ..... $e_s = \pm 2{,}8 \times 10^{-7}$
Inca ..... $e_s = \pm 3{,}2 \times 10^{-7}$
Manacor ..... $e_s = \pm 3{,}6 \times 10^{-7}$
Pollensa (Puerto) ..... $e_s = \pm 4{,}3 \times 10^{-7}$
Ciudadela ..... $e_s = \pm 3{,}8 \times 10^{-7}$
Fornélls ..... $e_s = \pm 2{,}9 \times 10^{-7}$
Mahón ..... $e_s = \pm 4{,}3 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre) ..... $e_s = \pm 3{,}0 \times 10^{-7}$

Los valores de **e** y e_s para el promedio de las dos estaciones de Madrid serán:

$$e = \sqrt{\frac{1017 + 2353}{18 + 18 - 6}} = \pm 10{,}6 \times 10^{-7}$$

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{36}} \times 10{,}6 = \pm 1{,}8 \times 10^{-7}$$

Para obtener los errores de la duración de oscilación de cada uno de los péndulos en el conjunto de la campaña nos valdremos de la misma fórmula, sustituyendo los valores [**vv**] y [**n**] por los números contenidos en las dos últimas líneas del cuadro último y **m** por el número de estaciones, que son diez:

Así resulta:

Péndulo 105..... $e_{P.\,105} = \sqrt{\frac{9698}{60 - 10}} = \pm 13{,}9 \times 10^{-7}$

Péndulo 106..... $e_{P.\,106} = \sqrt{\frac{9490}{50 - 10}} = \pm 14{,}4 \times 10^{-7}$

Péndulo 107..... $e_{P.\,107} = \sqrt{\frac{7873}{59 - 10}} = \pm 12{,}7 \times 10^{-7}$

El error medio general a todos los péndulos será:

$$e'_{P.} = \sqrt{\frac{27061}{175 - 30}} = \pm 13{,}7 \times 10^{-7}$$

2.° Siendo las correcciones por reducción a la amplitud muy pequeñas, los errores que de ellas pueden provenir son insignificantes y, por lo tanto, admitiremos que estos errores son nulos.

3.° Los errores que provienen por la inseguridad de la constante de reducción al vacío se deducen de los obtenidos al hacer el estudio de las constantes, cuyos valores son:

Péndulo 105..... 0,0000679 ± 9×10^{-7}
Id. 106..... 0,0000665 ± 8×10^{-7}
Id. 107..... 0,0000668 ± 11×10^{-7}

Su promedio es 0,0000671 con un error de

$$\sqrt{\frac{9^2 + 8^2 + 11^2}{3}} = \pm 9{,}4 \times 10^{-7}$$

Siendo la relación entre este error y la constante media

$$\pm \frac{9{,}4}{671} = \pm 0{,}0140$$

En el cuadro siguiente se han reunido los valores de los promedios de las co-

rrecciones por reducción al vacío en las diferentes estaciones. También figuran en él las diferencias entre el valor del promedio de las estaciones de Madrid y los valores de las otras estaciones:

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN AL VACÍO				
	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.	Promedios.	[Δ]
Madrid (salida)	601,7	588,5	590,8	594	—
Ibiza	637,7	624,5	627,0	630	30
Palma de Mallorca	632,2	619,3	621,7	624	24
Inca	613 7	602,2	604,7	607	7
Manacor	620,0	609,2	610,5	613	13
Pollensa (Puerto)	618,0	606,3	608,3	611	11
Ciudadela	609,5	612,7	616,6	613	13
Fornells	620,3	608,0	610,3	613	13
Mahón	636,2	625,2	627,5	630	30
Madrid (cierre)	612,0	600,2	601,8	605	—
Madrid (promedio)	607	595	597	600	—

Multiplicando las diferencias que figuran en la última columna del cuadro anterior por el valor ± 0,0140, deduciremos los valores de los errores por la inseguridad de la constante de reducción al vacío.

Ibiza ..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
Palma de Mallorca ..... $e_d = \pm 0{,}3 \times 10^{-7}$
Inca ..... $e_d = \pm 0{,}1 \times 10^{-7}$
Manacor ..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Pollensa (Puerto) ..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Ciudadela ..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Fornells ..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Mahón ..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$

4.° Análogamente se deducen los que proceden de la inseguridad de las constantes de reducción de temperatura, cuyos valores son:

Péndulo 105 ..... $47{,}38 \pm 0{,}12 \times 10^{-7}$
Id. 106 ..... $47{,}91 \pm 0{,}10 \times 10^{-7}$
Id. 107 ..... $47.30 \pm 0{,}07 \times 10^{-7}$

Su promedio es 47,53 y el error del valor medio de las constantes de temperatura será:

$$\sqrt{\frac{0{,}12^2 + 0{,}10^2 + 0{,}07^2}{3}} = \pm 0{,}10 \times 10^{-7}$$

y la relación entre este error y la constante media será:

$$\frac{\pm 0{,}10}{47{,}53} = \pm 0{,}0021$$

En el cuadro siguiente figuran los valores de los promedios de las correcciones por reducción de temperatura en las diferentes estaciones y las diferencias entre el valor del promedio de las estaciones de Madrid y los valores de las otras estaciones:

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN POR TEMPERATURA				
	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.	Promedios.	[Δ]
Madrid (salida)	523,2	543,8	541,3	536	—
Ibiza	934,7	934,3	932,7	934	419
Palma de Mallorca	1 022,5	1 031,3	1 025,5	1 026	511
Inca	1 148,7	1 155,4	1 145,8	1 150	635
Manacor	1 089,7	1 091,0	1 088,5	1 090	575
Pollensa (Puerto)	1 286,0	1 298,5	1 287,2	1 291	776
Ciudadela	1 164,2	1 145,3	1 174,2	1 161	646
Fornells	1 128,4	1 132,0	1 124,8	1 128	613
Mahón	864,3	855,4	851,9	857	342
Madrid (cierre)	489,0	495,5	494,5	493	—
Madrid (promedio)	506	519,7	517,9	515	—

Multiplicando las diferencias que figuran en la última columna del cuadro anterior por el valor $\pm$ 0,0021 obtendremos los valores de los errores por la inseguridad de la constante por reducción de temperatura:

Ibiza ..... $e_t = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$
Palma de Mallorca ..... $e_t = \pm 1{,}1 \times 10^{-7}$
Inca ..... $e_t = \pm 1{,}3 \times 10^{-7}$
Manacor ..... $e_t = \pm 1{,}2 \times 10^{-7}$
Pollensa (Puerto) ..... $e_t = \pm 1{,}6 \times 10^{-7}$
Ciudadela ..... $e_t = \pm 1{,}4 \times 10^{-7}$
Fornells ..... $e_t = \pm 1{,}3 \times 10^{-7}$
Mahón ..... $e_t = \pm 0{,}7 \times 10^{-7}$

5.° Los errores e_m producidos en los valores de la duración de oscilación a consecuencia de los ε_m cometidos en la determinación de la hora se calculan por la fórmula

$$e_m = \pm a\, s\, \varepsilon_m ,$$

siendo

$a = \frac{10+7}{86400}$,
s = promedio de las duraciones de oscilación en cada estación,
ε_m = los errores medios de conjunto de las determinaciones de hora en cada estación, obteniéndose los valores que figuran en el cuadro adjunto:

ESTACIONES	a	s	ε_m	e_m
Madrid (salida)	$\frac{10^{+7}}{86400}$	0,5015497	0,06	$3,5 \times 10^{-7}$
Ibiza		5072	0,11	$6,4 \times 10^{-7}$
Palma de Mallorca		4988	0,07	$4,1 \times 10^{-7}$
Inca		5009	0,15	$8,7 \times 10^{-7}$
Manacor		4988	0,04	$2,3 \times 10^{-7}$
Pollensa (Puerto)		4881	0,05	$2,9 \times 10^{-7}$
Ciudadela		4821	0,07	$4,1 \times 10^{-7}$
Fornells		4722	0,08	$4,6 \times 10^{-7}$
Mahón		4784	0,06	$3,5 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)		5491	0,05	$2,9 \times 10^{-7}$

6.° Los errores cometidos en las determinaciones del balance del sostén y que se han obtenido anteriormente en cada estación son los siguientes:

Madrid (salida)	$e_b = \pm 0,9 \times 10^{-7}$
Ibiza	$e_b = \pm 0,5 \times 10^{-7}$
Palma de Mallorca	$e_b = \pm 0,4 \times 10^{-7}$
Inca	$e_b = \pm 0,4 \times 10^{-7}$
Manacor	$e_b = \pm 1,2 \times 10^{-7}$
Pollensa (Puerto)	$e_b = \pm 0,7 \times 10^{-7}$
Ciudadela	$e_b = \pm 0,6 \times 10^{-7}$
Fornells	$e_b = \pm 0,4 \times 10^{-7}$
Mahón	$e_b = \pm 0,6 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)	$e_b = \pm 0,8 \times 10^{-7}$

Cálculo de los errores que afectan a las duraciones de oscilación reducidas.

Obtenidos los errores cometidos en las varias operaciones realizadas para deducir las duraciones de oscilación reducidas, se tendrá el error medio total en cada una de las estaciones empleando la fórmula siguiente:

$$E = \sqrt{e_s^2\,(\text{Madrid}) + e_s^2\,(\text{estación observada}) + e_a^2 + e_d^2 + e_t^2 + e_m^2 + e_b^2}$$

En el cuadro siguiente figuran los cuadrados de estos errores y la suma de los mismos para cada una de las estaciones:

ESTACIONES	e_s^2 (Madrid.)	e_s^2 (Estación.)	e_a^2	e_d^2	e_t^2	e_m^2	e_b^2	E^2
Ibiza	$1,8^2$	$2,7^2$	$0,0^2$	$0,4^2$	$0,9^2$	$6,4^2$	$0,5^2$	52,71
Palma de Mallorca	$1,8^2$	$2,8^2$	$0,0^2$	$0,3^2$	$1,1^2$	$4,1^2$	$0,4^2$	29,35
Inca	$1,8^2$	$3,2^2$	$0,0^2$	$0,1^2$	$1,3^2$	$8,7^2$	$0,4^2$	91,03
Manacor	$1,8^2$	$3,6^2$	$0,0^2$	$0,2^2$	$1,2^2$	$2,3^2$	$1,2^2$	24,41
Pollensa (Puerto)	$1,8^2$	$4,3^2$	$0,0^2$	$0,2^2$	$1,6^2$	$2,9^2$	$0,7^2$	33,23
Ciudadela	$1,8^2$	$3,8^2$	$0,0^2$	$0,2^2$	$1,4^2$	$4,1^2$	$0,6^2$	36,85
Fornells	$1,8^2$	$2,9^2$	$0,0^2$	$0,2^2$	$1,3^2$	$4,6^2$	$0,4^2$	34,70
Mahón	$1,8^2$	$4,3^2$	$0,0^2$	$0,4^2$	$0,7^2$	$3,5^2$	$0,6^2$	34,99

Extrayendo las raíces cuadradas de los valores contenidos en la última columna, tendremos los valores **E** para la duración de oscilación en cada una de las estaciones:

Ibiza	$E = \pm 7{,}3 \times 10^{-7}$
Palma de Mallorca	$E = \pm 5{,}4 \times 10^{-7}$
Inca	$E = \pm 9{,}5 \times 10^{-7}$
Manacor	$E = \pm 4{,}9 \times 10^{-7}$
Pollensa (Puerto)	$E = \pm 5{,}8 \times 10^{-7}$
Ciudadela	$E = \pm 6{,}0 \times 10^{-7}$
Fornells	$E = \pm 5{,}9 \times 10^{-7}$
Mahón	$E = \pm 5{,}9 \times 10^{-7}$

CAPÍTULO III

VALORES DE LA INTENSIDAD DE LA FUERZA DE LA GRAVEDAD

CAMPAÑA DE 1919

Para determinar los valores de **g**, o sean los valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en cualquiera estación, aplicaremos la fórmula

$$g = g_m - 2g_m \frac{s - s_m}{s_m} + 3g_m \left(\frac{s - s_m}{s_m}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

en la cual **g** es el valor de la gravedad que se quiere determinar en una estación cualquiera, g_m el valor de la gravedad en Madrid, que es 979.981; **s** el valor de la duración de oscilación en la estación de que se trata, obtenido con un péndulo determinado, y s_m el valor de la duración de oscilación en Madrid, obtenido con el mismo péndulo.

Los valores de s_m para cada uno de los péndulos 105, 106 y 107, son:

Péndulo 105..... $s_m = 0{,}5015640$
Id. 106..... $s_m = 0{,}5015657$
Id. 107..... $s_m = 0{,}5015785$

Aplicando, pues, la fórmula anterior, llegaremos a los resultados que figuran en el siguiente cuadro:

AÑO	ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios.
1919	Ibiza.....	105	980,149	980,146
		106	43	
		107	46	
	Palma de Mallorca.....	105	980,175	980,179
		106	81	
		107	80	

AÑO	ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios
1919	Inca	105	980,174	980,172
		106	70	
		107	71	
	Manacor	105	980,180	980,179
		106	83	
		107	75	
	Pollensa (Puerto)	105	980,226	980,221
		106	15	
		107	21	
	Ciudadela	105	980,248	980,244
		106	43	
		107	41	
	Fornells	105	980,277	980,283
		106	86	
		107	85	
	Mahón	105	980,253	980,258
		106	64	
		107	58	

Los errores correspondientes a estos valores de g, que representaremos por E_g, pueden obtenerse fácilmente por medio de la fórmula

$$E_g = \pm \frac{2 g_m}{s_m} E,$$

en la cual se representa por g_m el valor de la gravedad en Madrid, 979.981; por s_m el promedio de los valores encontrados para la duración de oscilación en Madrid en las estaciones de salida y cierre de la campaña, o sea 0,5015493, y por E los errores consignados al final del capítulo anterior, que han resultado para las duraciones de de oscilación reducidas.

Su aplicación conduce a los resultados siguientes:

Ibiza..... $E_g = \pm 2{,}9 \times 10^{-3}$
Palma de Mallorca..... $E_g = \pm 2{,}1 \times 10^{-3}$
Inca..... $E_g = \pm 3{,}7 \times 10^{-3}$
Manacor..... $E_g = \pm 1{,}9 \times 10^{-3}$
Pollensa (Puerto)..... $E_g = \pm 2{,}3 \times 10^{-3}$
Ciudadela..... $E_g = \pm 2{,}3 \times 10^{-3}$
Fornells..... $E_g = \pm 2{,}3 \times 10^{-3}$
Mahón..... $E_g = \pm 2{,}3 \times 10^{-3}$

En resumen, tendremos, finalmente, para valores de la intensidad de la gravedad:

Ibiza	$g = 980{,}146 \pm 0{,}0029$
Palma de Mallorca	$g = 980{,}179 \pm 0{,}0021$
Inca	$g = 980{,}172 \pm 0{,}0037$
Manacor	$g = 980{,}179 \pm 0{,}0019$
Pollensa (Puerto)	$g = 980{,}221 \mp 0{,}0023$
Ciudadela	$g = 980{,}244 \pm 0{,}0023$
Fornells	$g = 980{,}283 \pm 0{,}0023$
Mahón	$g = 980{,}258 \pm 0{,}0023$

La reducción de estos valores al nivel del mar, la haremos por la fórmula

$$g_o'' = g + \delta g + \delta' g,$$

siendo

$$\delta g = 0{,}0003086\ H \qquad y \qquad \delta' g = \frac{3}{4} \times \frac{\theta}{\theta_m} (g - g_o)$$

en la que representan

H, altitud en metros sobre el nivel del mar del plano determinado por los centros de las lentejas de los péndulos.

θ_m, densidad media de la tierra, igual a 5,52.

θ, densidad media de la meseta de observación.

El cuadro siguiente nos pone de manifiesto el conjunto de estos datos y los valores deducidos de los mismos:

ESTACIONES	g	H	θ	δg	$\delta' g$
Ibiza	980,146	3	2,6	+ 0,001	0,000
Palma de Mallorca	980,179	23	2,6	+ 0,007	— 0,003
Inca	980,172	123	2,6	+ 0,038	— 0,013
Manacor	980,179	83	2,6	+ 0,026	— 0,009
Pollensa (Puerto)	980,221	13	2,6	+ 0,004	— 0,001
Ciudadela	980,244	22	2,6	+ 0,007	— 0,003
Fornells	980,283	7	2,6	+ 0,002	— 0,001
Mahón	980,258	50	2,6	+ 0,015	— 0,005

De los cuales deduciremos los valóres de

$$g_o = g + \delta g \qquad y \qquad g_o'' = g_o + \delta' g,$$

que serán, respectivamente,

ESTACIONES	g_o	g_o''
Ibiza	980,147	980,147
Palma de Mallorca	980,186	980,183
Inca	980,210	980,197
Manacor	980,205	980,196
Pollensa (Puerto)	980,225	980,224
Ciudadela	980,251	980,248
Fornells	980,285	980,284
Mahón	980,273	980,268

El cálculo teórico de los valores de **g**, que representaremos por γ_o, lo haremos por la fórmula de Helmert (1915)

$$\gamma_o = 978{,}052\,(1 + 0{,}005285\,\mathrm{sen}^2\,\varphi - 0{,}000007\,\mathrm{sen}^2\,2\varphi)\,.$$

En el cuadro siguiente se expresan los valores de γ_o, correspondientes a los diversos de φ, que representa la latitud del lugar de observación:

ESTACIONES	φ	γ_o
Ibiza	38° 54'	980,084
Palma de Mallorca	39 35	980,144
Inca	39 44	980,157
Manacor	39 34	980,143
Pollensa (Puerto)	39 54	980,172
Ciudadela	40 00	980,181
Fornélls	40 4	980,186
Mahón	39 53	980,171

Finalmente, el conjunto de los valores encontrados se ve reunido en el cuadro siguiente:

Resumen de los valores obtenidos en la campaña de 1919.

ESTACIONES	LONGITUD	LATITUD	ALTITUD	δ	g	g_0	g_0''	γ_0	$g_0'' - \gamma_0$	$g_0 - \gamma_0$
	° ′	° ′	m		cm	cm	cm	cm	cm	cm
Ibiza	1 26,1 E.	38 54	3	2,6	980,146	980,147	980,147	980,084	+ 0,063	+ 0,063
Palma de Mallorca	2 39,1 E.	39 35	23	2,6	980,179	980,186	980,183	980,144	+ 0,039	+ 0,042
Inca	2 54,6 E.	39 44	123	2,6	980,172	980,210	980,197	980,157	+ 0,040	+ 0,053
Manacor	3 12,6 E.	39 34	83	2,6	980,179	980,205	980,196	980,143	+ 0,053	+ 0,062
Pollensa (Puerto)	3 6,6 E.	39 54	13	2,6	980,221	980,225	980,224	980,172	+ 0,052	+ 0,053
Ciudadela	3 50,2 E.	40 00	22	2,6	980,244	980,251	980,248	980,181	+ 0,067	+ 0,070
Fornells	4 7,9 E.	40 4	7	2,6	980,283	980,285	980,284	980,186	+ 0,098	+ 0,099
Mahón	4 15,8 E.	39 53	50	2,6	980,258	980,273	980,268	980,171	+ 0,097	+ 0,102

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DE LAS OBSERVACIONES DE LA CAMPAÑA DE 1920

ESTACIÓN DE MADRID (salida)

Local de observación.

El local donde se hicieron las observaciones fué, como de costumbre, una habitación del Observatorio Astronómico de Madrid, situada en el cuerpo central del edificio y orientada al Norte.

Las coordenadas geográficas son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	3° 41' W.
Latitud Norte	40° 24',5
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante	656m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados del reloj Strasser por medio de comparaciones cronográficas con el reloj magistral del Observatorio.

Obtenidos los estados, se averiguaron los movimientos, y después de calculados los errores correspondientes se llegó a los resultados que figuran en el siguiente cuadro, resumen del conjunto de determinaciones de hora.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (T. S.	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
10 de Mayo de 1920	7 59	+ 1,90 ± 0,04	
11 id. id.	10 28	+ 1,93 ± 0,07	+ 0,03 ± 0,08
12 id. id.	10 33	+ 1,68 ± 0,05	— 0,25 ± 0,08
13 id. id.	10 50	+ 1,33 ± 0,06	— 0,35 ± 0,08
14 id. id.	10 28	— 0,07 ± 0,04	— 1,42 ± 0,07

Los errores relativos a la marcha diaria del reloj se calcularon por la fórmula

$$\varepsilon'_m = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{t_2 - t_1}$$

en la que m_1 y m_2 representan los errores correspondientes a dos estados consecutivos del reloj, y $t_2 - t_1$ el tiempo expresado en días, entre las dos determinaciones de las que se dedujeron dichos estados, resultando para error medio del conjunto de las observaciones el promedio de estos errores diarios, que en este caso es

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,08.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra A, pueden verse los cálculos y correcciones que se han hecho para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

Los péndulos 104 y 105 oscilaron en dirección NE.-SW., así como los 105 y 107 en la NW.-SE., siendo los valores obtenidos por el estudio del balance, según el método de Borrass, los siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
32×10^{-7}	41×10^{-7}
39×10^{-7}	41×10^{-7}
36×10^{-7}	42×10^{-7}
36×10^{-7}	41×10^{-7}
36×10^{-7}	41×10^{-7}

Los errores correspondientes se han calculado por la fórmula

$$\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} = \varepsilon_b$$

aplicada a cada pareja de péndulos, en la que Σv^2 representa la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las diversas determinaciones del balance y cada una de ellas, y n el número de determinaciones.

La aplicación de la fórmula da los siguientes resultados:

Péndulos 104 y 106..... $\varepsilon_{b_1} = \pm 1,5 \times 10^{-7}$
Id. 105 y 107..... $\varepsilon_{b_2} = \pm 0,3 \times 10^{-7}$

El error medio de las dos determinaciones se obtendrá por la fórmula

$$\varepsilon_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_{b_1}^2 + \varepsilon_{b_2}^2}{2 \times 2}} = \sqrt{\frac{1,5^2 + 0,3^2}{2 \times 2}} = \pm 0,8 \times 10^{-7}.$$

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes son los siguientes:

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014852	0,5015634	0,5015013	0,5015101
63	44	5001	067
36	16	4997	042
45	33	5014	057
73	62	5025	088
55	27	5016	093
0,5014854	0,5015636	0,5015011	0,5015075

Estado A.

ESTACIÓN DE MADRID (salida)

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	"	s	s	s						s
11 Mayo	104	0 34	707,55	12,0	18,50	11,9	+ 0,03	153,240	0,5016308	— 4	— 585	— 893	+ 2	— 36	0,5014852
11 íd.	105	1 52	707,50	11,7	18,71	12,0	+ 0,03	146,260	7151	— 4	— 588	— 886	+ 2	— 41	5634
11 íd.	106	3 7	707,15	11,7	18,91	11,5	+ 0,03	151,725	6532	— 4	— 575	— 906	+ 2	— 36	5013
11 íd.	107	6 43	706,40	11,7	19,16	11,4	+ 0,03	150,865	6626	— 4	— 576	— 906	+ 2	— 41	5101
11 íd.	104	7 59	706,50	11,5	19,26	11,8	+ 0,03	152,850	6410	— 4	— 582	— 927	+ 2	— 36	4803
11 íd.	105	9 16	706,65	11,5	19,36	11,8	+ 0,03	145,935	7190	— 4	— 586	— 917	+ 2	— 41	5044
12 íd.	106	0 38	709,30	12,0	19,06	11,6	— 0,25	151,600	6545	— 4	576	— 913	— 15	— 36	5001
12 íd.	107	1 55	708,90	12,3	19,21	11,8	— 0,25	150,975	6614	— 4	— 578	— 909	— 15	— 41	5067
12 íd.	104	3 11	708,60	12,6	19,36	11,9	— 0,25	152,885	6406	— 4	— 584	— 931	— 15	— 36	4836
12 íd.	105	6 47	706,95	12,1	19,65	11,9	— 0,25	145,920	7192	— 4	— 585	— 931	— 15	— 41	5616
12 íd.	106	8 3	706,65	12,0	19,76	11,8	— 0,25	151,355	6572	— 4	— 573	— 947	— 15	— 36	4997
12 íd.	107	9 19	706,50	12,0	19,85	11,8	— 0,25	150,955	6616	— 4	— 575	— 939	— 15	— 41	5042
13 íd.	104	0 50	706,70	12,9	19,31	11,6	— 0,35	152,795	6416	— 4	— 582	— 929	— 20	— 36	4845
13 íd.	105	2 7	706,35	13,1	19,36	12,2	— 0,35	145,850	7200	— 4	— 585	— 917	— 20	— 41	5633
13 íd.	106	3 21	705,95	12,9	19,45	11,6	— 0,35	151,295	6579	— 4	— 573	— 932	— 20	— 36	5014
13 íd.	107	6 33	705,25	13,2	19,70	11,6	— 0,35	150,845	6628	— 4	— 574	— 932	— 20	— 41	5057
13 íd.	104	7 50	705,00	13,5	19,75	11,9	— 0,35	152,355	6463	— 4	— 580	— 950	— 20	— 36	4873
13 íd.	105	9 10	704,30	13,5	19,85	11,9	— 0,35	145,440	7249	— 4	— 582	— 940	— 20	— 41	5662
14 íd.	106	0 49	707,00	12,2	19,16	11,7	— 1,42	150,750	6639	— 4	— 574	— 918	— 82	— 36	5025
14 íd.	107	2 5	706,90	12,6	19,26	11,6	— 1,42	150,180	6702	— 4	— 576	— 911	— 82	— 41	5088
14 íd.	104	3 20	706,70	12,8	19,36	11,8	— 1,42	152,100	6490	— 4	— 582	— 931	— 82	36	4855
14 íd.	105	6 38	705,75	13,0	19,56	11,9	— 1,42	145,305	7265	— 4	— 584	— 927	— 82	— 41	5627
14 íd.	106	7 56	705,55	12,9	19,65	11,7	— 1,42	150,640	6651	— 4	— 572	— 941	— 82	— 36	5016
14 íd.	107	9 13	705,60	12,7	19,75	11,6	— 1,42	149,950	6728	— 4	— 574	— 934	— 82	— 41	5093

ESTACIÓN DE SANTA CRUZ DE TENERIFE

Local de observación.

Se hicieron las observaciones en una sala del Laboratorio municipal, instalándose la barraca astronómica, con el anteojo de pasos, en un campo contiguo.

Las coordenadas geográficas del lugar de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	16° 16' W.
Latitud Norte	28° 29'
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio de la marea	7m

Determinación de la hora.

El procedimiento seguido para determinar los estados del reloj y, por consiguiente, los movimientos en los diferentes días de observación, fué el de observación de pasos de estrellas por el meridiano con el anteojo Repsold. El método de observación y cálculo de la hora es el de Borrass, modificación del de Stone.

En el cuadro siguiente figuran los estados y movimientos del reloj Strasser en cada uno de los días de observación, siendo, por lo tanto, dicho cuadro un resumen del conjunto de determinaciones de hora:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s.)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
22 de Junio de 1920	15 41	— 13,08 ± 0,04	— 0,37 ± 0,06
23 id. id.	15 41	— 13,45 ± 0,04	— 0,68 ± 0,04
24 id. id.	15 51	— 14,13 ± 0,02	— 1,40 ± 0,04
25 id. id.	15 41	— 15,52 ± 0,04	— 2,35 ± 0,06
26 id. id.	15 51	— 17,87 ± 0,04	

Resultando para error medio del conjunto de las observaciones el valor

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,05.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra B, figuran los cálculos y correcciones necesarios para averiguar los valores de las oscilaciones reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en la dirección NW.-SE., y los 105 y 107 en la normal a la misma; los valores encontrados para valor de la corrección por balance del sostén son los siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
$47 \times 10-7$	$48 \times 10-7$
$46 \times 10-7$	$42 \times 10-7$
$41 \times 10-7$	$48 \times 10-7$
$42 \times 10-7$	$42 \times 10-7$
$44 \times 10-7$	$45 \times 10-7$

y el error medio de las dos determinaciones

$$e_b = \pm 1{,}2 \times 10-7.$$

Finalmente, en el siguiente cuadro figuran los valores corregidos de las duraciones de oscilación y los valores medios correspondientes:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5016313	0,5017112	0,5016475	0,5017249
317	107	65	59
323	101	91	72
299	095	71	44
309	099	64	71
332	102	87	81
0,5016316	0,5017103	0,5016476	0,5017263

Estado B. ESTACIÓN DE SANTA CRUZ DE TENERIFE

FECHAS — 1920	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del osten.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						
23 Junio.....	104	2 50	770,25	15,9	23,22	12,0	— 0,37	138,430	0,5018125	— 4	— 626	— 1 117	— 21	— 44	0,5016313
23 id.	105	4 00	770,25	16,2	23,37	12,2	— 0,37	132,650	8918	— 4	— 629	— 1 107	— 21	— 45	7112
23 id.	106	5 9	770,15	16,6	23,52	11,7	— 0,37	137,215	8286	— 4	— 615	— 1 127	21	— 44	6475
23 id.	107	6 13	769,70	16,2	23,87	11,9	— 0,37	131,630	9065	— 4	— 617	— 1 129	— 21	— 45	7249
23 id.	104	9 25	769,55	16,5	23,97	11,8	— 0,37	138,150	8162	— 4	— 623	— 1 153	— 21	— 44	6317
23 id.	105	10 36	769,55	16,3	24,07	12,2	— 0,37	132,470	8944	— 4	— 627	— 1 140	— 21	— 45	7107
24 id.	106	2 55	768,80	15,3	23,22	11,8	— 0,68	137,260	8280	— 4	— 615	— 1 112	— 40	— 44	6465
24 id.	107	4 8	768,70	15,6	23,42	12,1	— 0,68	131,575	9073	— 4	— 617	— 1 108	— 40	— 45	7259
24 id.	104	5 16	768,40	15,0	23,62	12,0	— 0,68	138,090	8170	— 4	— 623	— 1 136	— 40	— 44	6323
24 id.	105	8 27	767,85	13,6	24,22	12,1	— 0,68	132,330	8964	— 4	— 626	— 1 148	— 40	— 45	7101
24 id.	106	9 34	767,70	13,8	24,43	11,9	— 0,68	136,655	8361	— 4	— 612	— 1 170	— 40	— 44	6491
24 id.	107	10 43	767,60	14,7	24,63	12,0	— 0,68	131,115	9140	— 4	— 614	— 1 165	— 40	— 45	7272
25 id.	104	2 57	767,25	14,9	23,62	11,9	— 1,40	137,960	8187	— 4	— 623	— 1 136	— 81	— 44	6299
25 id.	105	4 7	767,15	15,1	23,82	12,0	— 1,40	132,220	8980	— 4	— 626	— 1 129	— 81	— 45	7095
25 id.	106	5 15	766,95	15,1	24,17	11,9	— 1,40	136,595	8370	— 4	— 612	— 1 158	— 81	— 44	6471
25 id.	107	8 54	766,05	15,6	24,68	12,0	— 1,40	131,040	9151	— 4	— 610	— 1 167	— 81	— 45	7244
25 id.	104	10 12	765,90	15,9	24,83	12,0	— 1,40	137,475	8252	— 4	— 619	— 1 195	— 81	— 44	6309
25 id.	105	11 23	765,95	15,9	24,93	12,0	— 1,40	131,860	9032	— 4	— 622	— 1 181	— 81	— 45	7099
26 id.	106	3 28	766,30	15,6	24,02	11,9	— 2,35	136,280	8412	— 4	— 612	— 1 151	— 137	— 44	6464
26 id.	107	4 38	766,30	15,9	24,22	12,0	— 2,35	130,590	9217	— 4	— 614	— 1 146	— 137	— 45	7271
26 id.	104	5 47	766,15	15,7	24,48	11,9	— 2,35	137,000	8815	— 4	— 620	— 1 178	— 137	— 44	6332
26 id.	105	8 50	765,85	15,7	25,03	12,0	— 2,35	131,415	9096	— 4	— 622	— 1 186	— 137	— 45	7102
26 id.	106	10 00	765,85	15,7	25,23	11,9	— 2,35	135,705	8490	— 4	— 609	— 1 209	— 137	— 44	6487
26 id.	107	11 9	765,80	15,3	25,33	12,0	— 2,35	130,195	9276	— 4	— 611	— 1 198	— 137	— 45	7281

ESTACIÓN DE PUERTO DE LA CRUZ

Local de observación.

Se instalaron los aparatos y se hicieron las observaciones en un local del Gran Hotel Taoro, montándose la barraca astronómica con el anteojo de pasos en el jardín propiedad del hotel.

Las coordenadas geográficas del lugar de observacion son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	16° 34' W.
Latitud Norte.....	28° 26'
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio de la marea.....	80m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados y movimientos del reloj Strasser por el mismo procedimiento que en la estación anterior.

El cuadro siguiente es el resumen de dichos estados y movimientos en los diferentes días de observación:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
14 de Julio de 1920 (1.ª).....	22 30	— 27,30 ± 0,06	— 3,00 ± 0,06
14 id. id (2.ª).....	18 39	— 29,82 ± 0,02	— 3,74 ± 0,05
15 id. id.	16 23	— 33,21 ± 0,05	— 4,57 ± 0,12
16 id. id.	16 11	— 37,74 ± 0,11	— 5,22 ± 0,11
17 id. id.	16 23	— 43,00 ± 0,01	— 5,67 ± 0,09
18 id. id.	16 36	— 48,72 ± 0,09	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,09$$

Duraciones de oscilación.

Todos los cálculos y correcciones hechos para obtener los valores de las oscilaciones reducidas pueden examinarse en el estado señalado con la letra C_1.

El balance del sostén se determinó por el método ya citado, dando los resultados siguientes; advirtiendo que los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NW.-SE., y los 105 y 107 en la perpendicular a la anterior:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
$50 \times 10-7$	$54 \times 10-7$
$52 \times 10-7$	$49 \times 10-7$
$50 \times 10-7$	$52 \times 10-7$
$47 \times 10-7$	$48 \times 10-7$
$50 \times 10-7$	$51 \times 10-7$

Siendo el error medio de ambas determinaciones

$$r_b = \pm 0{,}9 \times 10-7$$

Los valores de las duraciones de oscilación corregidas y sus promedios correspondientes son los siguientes:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5016309	0,5017116	0,5016(453)	0,5017184
30	096	472	182
21	092	485	199
21	117	510	216
(66)	(152)	485	198
23	101	504	213
08	091	489	200
0,5016319	0,5017102	0,5016491	0,5017199

Por diferir bastante de los valores medios se han desechado para el cálculo de la gravedad las duraciones de oscilación encerradas entre paréntesis. Los promedios correspondientes que figuran en el anterior cuadro se han deducido teniendo en cuenta dicha supresión.

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷ Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
14 Julio.....	104	4 59	762,75	15,9	21,71	11,9	— 3,00	137,830	0,5018204	— 4	— 623	— 1 044	— 174	— 50	0,5016309
14 íd.	105	6 9	763,00	16,1	21,76	12,0	— 3,00	132,065	9002	— 4	— 626	— 1 031	— 174	— 51	7116
14 íd.	106	7 22	762,95	16,1	21,86	11,9	— 3,00	136,805	8341	— 4	— 613	— 1 047	— 174	— 50	6453
14 íd.	107	9 36	762,80	16,6	22,06	11,9	— 3,00	131,590	9071	— 4	— 615	— 1 043	— 174	— 51	7184
14 íd.	104	10 44	762,80	17,0	22,16	11,7	— 3,00	137,515	8246	— 4	— 621	— 1 066	— 174	— 50	6330
14 íd.	105	11 55	762,85	16,9	22,26	12,1	— 3,00	132,045	9005	— 4	— 625	— 1 055	— 174	— 51	7096
15 íd.	106	5 3	764,05	16,1	22,11	12,0	— 3,74	136,255	8416	— 4	— 614	— 1 059	— 217	— 50	6472
15 íd.	107	6 17	764,05	16,6	22,16	12,3	— 3,74	131,265	9118	— 4	— 616	— 1 048	— 217	— 51	7182
15 íd.	104	7 26	763,90	17,0	22,21	11,9	— 3,74	137,240	8283	— 4	— 622	— 1 069	— 217	— 50	6321
15 íd.	105	10 05	763,50	16,9	22,36	12,0	— 3,74	131,745	9048	— 4	— 625	— 1 059	— 217	— 51	7092
15 íd.	106	11 17	763,40	16,7	22,47	11,8	— 3,74	136,035	8445	— 4	— 612	— 1 077	— 217	— 50	6485
15 íd.	107	12 27	763,35	16,7	22,52	11,9	— 3,74	131,040	9151	— 4	— 615	— 1 065	— 217	— 51	7199
16 íd.	104	5 6	763,15	16,1	22,11	11,8	— 4,57	136,920	8326	— 4	— 622	— 1 064	— 265	— 50	6321
16 íd.	105	6 16	763,15	16,1	22,11	12,0	— 4,57	131,315	9111	— 4	— 626	— 1 048	— 265	— 51	7117
16 íd.	106	7 23	762,85	16,1	22,11	11,9	— 4,57	135,630	8501	— 4	— 613	— 1 059	— 265	— 50	6510
16 íd.	107	10 7	762,20	16,1	22,26	11,9	— 4,57	130,685	9203	— 4	— 614	— 1 053	— 265	— 51	7216
16 íd.	104	11 15	762,15	16,0	22,31	12,0	— 4,57	136,520	8380	— 4	— 622	— 1 073	— 265	— 50	6366
16 íd.	105	12 27	762,30	15,8	22,36	11,9	— 4,57	131,015	9155	— 4	— 624	— 1 059	— 265	— 51	7152
17 íd.	106	5 10	762,60	15,7	22,01	11,6	— 5,22	135,570	8509	— 4	— 613	— 1 054	— 303	— 50	6485
17 íd.	107	6 19	762,60	15,7	22,06	11,9	— 5,22	130,615	9214	— 4	— 615	— 1 043	— 303	— 51	7198
17 íd.	104	7 26	762,60	15,7	22,11	11,9	— 5,22	136,620	8366	— 4	— 622	— 1 064	— 303	— 50	6323
17 íd.	105	10 10	761,80	16,0	22,21	11,9	— 5,22	131,150	9135	— 4	— 624	— 1 052	— 303	— 51	7101
17 íd.	106	11 19	761,55	15,8	22,26	11,7	— 5,22	135,360	8538	— 4	— 611	— 1 066	— 303	— 50	6504
17 íd.	107	12 28	761,55	16,3	22,42	12,0	— 5,22	130,405	9245	— 4	— 614	— 1 060	— 303	— 51	7213
18 íd.	104	5 4	761,80	16,6	22,26	11,8	— 5,67	136,530	8382	— 4	— 620	— 1 071	— 329	— 50	6308
18 íd.	105	6 15	761,95	16,4	22,31	12,1	— 5,67	131,010	9156	— 4	— 624	— 1 057	— 329	— 51	7091
18 íd.	106	11 26	761,70	16,7	22,57	11,9	— 5,67	135,180	8563	— 4	— 610	— 1 081	— 329	— 50	6489
18 íd.	107	12 35	761,65	16,7	22,62	12,0	— 5,67	130,255	9267	— 4	— 613	— 1 070	— 329	— 51	7200

ESTACIÓN DE IZAÑA

Local de observación.

Se montaron los aparatos en una sala del Observatorio Aerológico de Izaña, dependiente de nuestro Instituto. La barraca astronómica se dispuso en la explanada contigua al edificio, al E. del mismo.

Las coordenadas geográficas son:

Longitud con relación al meridiano de Greenvich	16° 31' W.
Latitud Norte	28° 19'
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio de la marea	2.367m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados y movimientos del reloj por observación de grupos de estrellas en el meridiano con el anteojo de pasos.

En el siguiente cuadro figuran los estados y movimientos del reloj Strasser durante los días de observación con los errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
28 de Julio de 1920	17 28	+ 2,48 ± 0,07	+ 2,65 ± 0,07
29 id. id.	17 28	+ 5,13 ± 0,02	+ 2,00 ± 0,02
30 id. id.	17 28	+ 7,13 ± 0,01	+ 0,76 ± 0,03
31 id. id.	17 28	+ 7,89 ± 0,03	+ 0,79 ± 0,05
1 de Agosto id.	17 40	+ 8,68 ± 0,04	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,04.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra D, figuran las correcciones hechas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

El balance del sostén se obtuvo como en las estaciones anteriores, oscilando los péndulos 104 y 106 en la dirección NW.-SE., y los 105 y 107 en la normal a la anterior. A continuación se consignan los resultados obtenidos:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
43×10^{-7}	38×10^{-7}
46×10^{-7}	39×10^{-7}
47×10^{-7}	39×10^{-7}
48×10^{-7}	38×10^{-7}
46×10^{-7}	39×10^{-7}

El error medio de ambas determinaciones es

$$\epsilon_b = \pm 0{,}1 \times 10^{-7}$$

En el cuadro siguiente aparecen los valores corregidos y los promedios de las duraciones de oscilación:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5017639	0,5018410	0,5017789	0,5018501
41	395	(747)	492
29	392	808	536
04	406	800	499
29	411	778	521
46	402	797	524
0,5017631	0,5018403	0,5017794	0,5018512

Por desviarse demasiado del valor medio se ha desechado para el cálculo de la gravedad el valor del péndulo 106, comprendido entre paréntesis. El promedio correspondiente se ha deducido teniendo en cuenta dicha supresión.

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Periodo de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
29 Julio.....	104	5 25	584,90	6,9	17,76	12,1	+ 2,65	132,955	0,5018874	— 4	— 485	— 854	+ 154	— 46	0,5017639
29 íd.	105	6 36	585,30	6,5	17,91	12,0	+ 2,65	127,810	9637	— 4	— 489	— 849	+ 154	— 39	8410
29 íd.	106	7 41	585,40	6,6	18,11	12,2	+ 2,65	131,865	9031	— 4	— 478	— 868	+ 154	— 46	7789
29 íd.	107	10 54	585,35	7,0	18,51	12,2	+ 2,65	127,110	9746	— 4	— 480	— 876	+ 154	— 39	8501
29 íd.	104	12 1	585,35	7,2	18,56	12,3	+ 2,65	132,075	8914	— 4	— 484	— 893	+ 154	— 46	7641
29 íd.	105	13 9	585,40	7,5	18,66	12,2	+ 2,65	127,695	9655	— 4	— 487	— 884	+ 154	— 39	8395
30 íd.	106	5 21	586,40	6,8	18,31	12,4	+ 2,00	131,820	9037	— 4	— 479	— 877	+ 116	— 46	7747
30 íd.	107	6 29	586,50	6,9	18,41	12,2	+ 2,00	126,945	9771	— 4	— 481	— 871	+ 116	— 39	8492
30 íd.	104	7 35	586,50	7,2	18,56	12,4	+ 2,00	132,490	8941	— 4	— 485	— 893	+ 116	— 46	7629
30 íd.	105	10 39	586,40	7,0	18,81	12,6	+ 2,00	127,425	9697	— 4	— 488	— 891	+ 116	— 39	8392
30 íd.	106	11 45	586,35	7,1	18,86	12,5	+ 2,00	131,225	9124	— 4	— 478	— 904	+ 116	— 46	7808
30 íd.	107	12 56	586,30	7,1	18,96	12,0	+ 2,00	126,510	9840	— 4	— 480	— 897	+ 116	— 39	8536
31 íd.	104	5 20	586,45	7,0	18,56	12,4	+ 0,76	132,160	8988	— 4	— 485	— 893	+ 44	— 46	7604
31 íd.	105	6 28	586,55	7,2	18,66	12,2	+ 0,76	126,910	9777	— 4	— 488	— 884	+ 44	— 39	8406
31 íd.	106	7 32	586,55	7,1	18,76	12,1	+ 0,76	130,825	9183	— 4	— 478	— 899	+ 44	— 46	7800
31 íd.	107	10 54	586,15	7,0	19,01	12,2	+ 0,76	126,280	9876	— 4	— 479	— 893	+ 44	— 39	8499
31 íd.	104	11 58	586,05	7,2	19,01	12,2	+ 0,76	131,845	9034	— 4	— 484	— 915	+ 44	— 46	7629
31 íd.	105	13 7	586,05	7,1	19,06	12,2	+ 0,76	126,760	9800	— 4	— 487	— 903	+ 44	— 39	8411
1 Agosto.....	106	5 26	586,55	7,3	18,66	12,0	+ 0,79	131,020	9154	— 4	— 478	— 894	+ 46	— 46	7778
1 íd.	107	6 32	586,70	7,6	18,76	12,5	+ 0,79	126,225	9885	— 4	— 480	— 887	+ 46	— 39	8521
1 íd.	104	7 36	586,65	7,2	18,86	12,2	+ 0,79	131,790	9042	— 4	— 485	— 907	+ 46	— 46	7646
1 íd.	105	10 44	586,35	7,9	19,16	12,2	+ 0,79	126,800	9794	— 4	— 487	— 908	+ 46	— 39	8402
1 íd.	106	11 48	586,30	8,1	19,26	12,4	+ 0,79	130,700	9201	— 4	— 477	— 923	+ 46	— 46	7797
1 íd.	107	12 55	586,25	8,0	19,36	12,3	+ 0,79	126,025	9916	— 4	— 479	— 916	+ 46	— 39	8524

ESTACIÓN DE SANTA CRUZ DE LA PALMA

Local de observación.

Se hicieron las observaciones pendulares dentro del recinto del castillo de Santa Catalina, montándose la barraca astronómica en la explanada del mismo.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	17° 46' W.
Latitud Norte	28° 41'
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio de la marea	12m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados parciales del reloj por el método de Borrass, como en las estaciones anteriores.

En el siguiente cuadro figuran los estados y movimientos del reloj Strasser durante los días de observacion con los errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
22 de Agosto de 1920	19 19	+ 2,32 ± 0,06	
			+ 0,58 ± 0,06
23 id. id.	19 19	+ 2,90 ± 0,02	
			+ 0,47 ± 0,04
24 id. id.	19 19	+ 3,37 ± 0,03	
			— 0,11 ± 0,04
25 id. id.	19 19	+ 3,26 ± 0,02	
			— 0,51 ± 0,04
26 id. id.	19 19	+ 2,75 ± 0,03	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,04.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra E_1 figuran las correcciones hechas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

El balance del sostén se obtuvo como en las estaciones anteriores, oscilando los péndulos 104 y 106 en la dirección NW.-SE., y los 105 y 107 en la perpendicular a la anterior. A continuación se consignan los resultados obtenidos:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
38×10^{-7}	40×10^{-7}
39×10^{-7}	43×10^{-7}
38×10^{-7}	42×10^{-7}
36×10^{-7}	38×10^{-7}
38×10^{-7}	41×10^{-7}

El error medio de ambas determinaciones es

$$e_b = \pm 0{,}1 \times 10^{-7}$$

Los valores de las duraciones de oscilación corregidas y sus promedios correspondientes son los siguientes:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5016191	0,5016974	0,5016365	0,5017042
190	58	26	72
204	(16)	37	64
195	77	73	84
214	90	45	68
220	50	68	85
0,5016202	0,5016970	0,5016352	0,5017069

Por diferir bastante del valor medio se suprime el valor del péndulo 105, comprendido entre paréntesis. En el promedio correspondiente se ha tenido en cuenta dicha supresión.

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	′	s	s	s						s
23 Agosto.....	104	7 21	769,30	17,9	23,92	11,8	+ 0,58	139,600	0,5017973	— 4	— 623	— 1 151	+ 34	— 38	0,5016191
23 id.	105	8 34	769,25	18,4	24,43	12,0	+ 0,58	133,715	8767	— 4	— 625	— 1 157	+ 34	— 41	6974
23 id.	106	9 49	769,15	18,7	24,98	11,8	+ 0,58	138,005	8181	— 4	— 611	— 1 197	+ 34	— 38	6365
23 id.	107	12 40	768,80	18,7	25,84	12,0	+ 0,58	132,870	8886	— 4	— 611	— 1 222	+ 34	— 41	7042
23 id.	104	13 50	768,65	18,5	25,99	11,6	+ 0,58	138,880	8066	— 4	— 618	— 1 250	+ 34	— 38	6190
23 id.	105	15 4	768,60	18,1	25,99	11,9	+ 0,58	133,330	8821	— 4	— 621	— 1 231	+ 34	— 41	6958
24 id.	106	7 30	769,00	16,4	23,82	11,9	+ 0,47	138,655	8096	— 4	— 614	— 1 141	+ 27	— 38	6326
24 id.	107	8 40	769,05	16,9	24,27	11,9	+ 0,47	133,100	8854	— 4	— 616	— 1 148	+ 27	— 41	7072
24 id.	104	9 50	769,05	17,2	24,78	11,9	+ 0,47	139,145	8032	— 4	— 621	— 1 192	+ 27	— 38	6204
24 id.	105	12 51	768,65	16,9	25,49	12,0	+ 0,47	133,730	8765	— 4	— 623	— 1 208	+ 27	— 41	6916
24 id.	106	14 00	768,60	16,3	25,54	11,9	+ 0,47	137,970	8186	— 4	— 610	— 1 224	+ 27	— 38	6337
24 id.	107	15 12	768,55	15,3	25,44	11,9	+ 0,47	132,790	8898	— 4	— 613	— 1 203	+ 27	— 41	7064
25 id.	104	7 15	768,40	15,4	23,52	11,9	— 0,11	139,395	7999	— 4	— 624	— 1 132	— 6	— 38	6195
25 id.	105	8 31	768,40	16,3	23,97	11,9	— 0,11	133,550	8790	— 4	— 626	— 1 136	— 6	— 41	6977
25 id.	106	9 41	768,35	16,4	24,48	11,9	— 0,11	137,820	8206	— 4	— 612	— 1 173	— 6	— 38	6373
25 id.	107	13 00	767,80	15,8	25,44	11,9	— 0,11	132,420	8951	— 4	— 613	— 1 203	— 6	— 41	7084
25 id.	104	14 14	767,60	15,5	25,59	11,9	— 0,11	138,530	8112	— 4	— 619	— 1 231	— 6	— 38	6214
25 id.	105	15 27	767,45	15,6	25,59	11,9	— 0,11	132,950	8875	— 4	— 622	— 1 212	— 6	— 41	6990
26 id.	106	7 36	767,40	16,5	23,22	11,9	— 0,51	138,295	8143	— 4	— 614	— 1 112	— 30	— 38	6345
26 id.	107	8 48	767,35	16,9	23,82	12,0	— 0,51	132,880	8885	— 4	— 615	— 1 127	— 30	— 41	7068
26 id.	104	10 2	767,25	17,2	24,43	11,9	— 0,51	138,720	8087	— 4	— 620	— 1 175	— 30	— 38	6220
26 id.	105	13 9	766,95	16,9	25,18	12,0	— 0,51	133,195	8840	— 4	— 622	— 1 193	— 30	— 41	6950
26 id.	106	14 18	766,85	17,1	25,18	11,9	— 0,51	137,450	8255	— 4	— 609	— 1 206	— 30	— 38	6368
26 id.	107	15 28	766,85	17,2	25,08	12,0	— 0,51	132,370	8958	— 4	— 612	— 1 186	— 30	— 41	7085

ESTACIÓN DE ARRECIFE

Local de observación.

Se hicieron las observaciones de los péndulos en una de las clases de las Escuelas municipales, instalándose la barraca astronómica en el patio del mercado público contiguo.

Las coordenadas geográficas del lugar de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	13° 35' W.
Latitud Norte	28° 58'
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio de la marea	4m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados y movimientos por observaciones de estrellas, como en las estaciones anteriores.

El cuadro siguiente resume los estados en los diferentes días de observación y los movimientos deducidos de aquéllos:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s.)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
13 de Septiembre de 1920	19 3	— 1,82 ± 0,01	— 1,92 ± 0,02
14 id. id.	18 53	— 3,73 ± 0,02	— 2,70 ± 0,02
16 id. id.	19 3	— 9,15 ± 0,01	— 3,39 ± 0,02
17 id. id.	19 3	— 12,54 ± 0,02	— 2,44 ± 0,04
18 id. id.	19 3	— 14,98 ± 0,04	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones:

$$e_m = \pm 0^s,03.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra F_1 aparecen las correcciones hechas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

El balance del sostén se obtuvo como en las estaciones anteriores, oscilando los péndulos 104 y 106 en la dirección NE.-SW., y los 105 y 107 en la perpendicular a la anterior:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
45×10^{-7}	45×10^{-7}
48×10^{-7}	45×10^{-7}
47×10^{-7}	48×10^{-7}
42×10^{-7}	49×10^{-7}
46×10^{-7}	47×10^{-7}

Para error medio de ambas determinaciones resulta

$$e_b = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$$

Los valores de las duraciones de oscilación corregidas y sus promedios correspondientes son los siguientes:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5016212	0,5016988	0,5016369	0,5017115
255	7015	355	(070)
(183)	(6958)	364	(082)
254	7038	(430)	140
266	7042	382	122
243	6999	407	134
217	7002	403	110
235	—	—	119
0,5016240	0,5017014	0,5016380	0,5017123

Por discrepar bastante de los valores medios se han desechado los péndulos encerrados entre paréntesis, habiéndose tenido en cuenta dicha supresión para los promedios que figuran en el anterior cuadro.

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 − 7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	′	s	s	s						s
14 Septiembre..	104	9 4	766,95	17,5	24,88	11,9	— 1,91	137,945	0,5018189	— 4	— 619	— 1 197	— 111	— 46	0,5016212
14 íd. ..	105	10 14	766,70	17,8	24,98	12,1	— 1,91	132,380	8957	— 4	— 623	— 1 184	— 111	— 47	6988
14 íd. ..	106	11 22	766,40	17,8	25,08	11,9	— 1,91	136,810	8341	— 4	— 609	— 1 202	— 111	— 46	6369
14 íd. ..	107	14 1	765,15	17,6	25,38	12,3	— 1,91	131,475	9088	— 4	— 611	— 1 200	— 111	— 47	7115
14 íd. ..	104	15 9	765,00	17,9	25,49	11,9	— 1,91	137,425	8258	— 4	— 616	— 1 226	— 111	— 46	6255
14 íd. ..	105	16 20	764,95	18,1	25,54	12,1	— 1,91	132,035	9006	— 4	— 619	— 1 210	— 111	— 47	7015
15 íd. ..	106	9 3	765,60	17,5	24,58	12,0	— 2,70	136,765	8347	— 4	— 607	— 1 178	— 157	— 46	6355
15 íd. ..	107	10 14	765,55	17,8	24,73	11,8	— 2,70	131,665	9060	— 4	— 612	— 1 170	— 157	— 47	7070
15 íd. ..	104	11 22	765,30	17,6	24,93	11,9	— 2,70	137,815	8206	— 4	— 617	— 1 199	— 157	— 46	6183
15 íd. ..	105	14 37	764,95	17,8	25,28	12,0	— 2,70	132,190	8984	— 4	— 620	— 1 198	— 157	— 47	6958
15 íd. ..	106	15 45	765,00	17,8	25,33	11,9	— 2,70	136,430	8392	— 4	— 607	— 1 214	— 157	— 46	6364
15 íd. ..	107	16 56	765,10	17,8	25,38	11,9	— 2,70	131,390	9100	— 4	— 610	— 1 200	— 157	— 47	7082
16 íd. ..	104	9 18	766,50	18,1	25,18	11,9	— 2,70	137,190	8290	— 4	— 618	— 1 211	— 157	— 46	6254
16 íd. ..	105	10 28	766,40	18,4	25,33	12,0	— 2,70	131,615	9067	— 4	— 621	— 1 200	— 157	— 47	7038
16 íd. ..	106	11 35	766,40	18,4	25,54	11,9	— 2,70	135,865	8469	— 4	— 608	— 1 224	— 157	— 46	6430
16 íd. ..	107	14 9	766,00	18,4	25,74	12,0	— 2,70	130,870	9176	— 4	— 610	— 1 218	— 157	— 47	7140
16 íd. ..	104	15 16	765,85	17,9	25,79	11,9	— 2,70	136,885	8330	— 4	— 616	— 1 241	— 157	— 46	6266
16 íd. ..	105	16 27	765,85	17,8	25,84	12,0	— 2,70	131,430	9094	— 4	— 620	— 1 224	— 157	— 47	7042
17 íd. ..	106	9 23	767,70	18,1	25,18	11,9	— 3,39	136,045	8444	— 4	— 609	— 1 206	— 197	— 46	6382
17 íd. ..	107	10 33	767,95	18,4	25,28	11,9	— 3,39	130,855	9178	— 4	— 612	— 1 196	— 197	— 47	7122
17 íd. ..	104	11 41	767,75	18,9	25,44	12,0	— 3,39	136,870	8332	— 4	— 618	— 1 224	— 197	— 46	6243
17 íd. ..	105	14 13	767,40	18,4	25,74	12,2	— 3,39	131,470	9088	— 4	— 621	— 1 220	— 197	— 47	6999
17 íd. ..	106	15 21	767,40	18,4	25,79	12,0	— 3,39	135,650	8498	— 4	— 608	— 1 236	— 197	— 46	6407
17 íd. ..	107	16 30	767,40	18,4	25,84	12,0	— 3,39	130,610	9215	— 4	— 611	— 1 222	— 197	— 47	7134
18 íd. ..	104	9 34	768,15	19,0	25,28	11,9	— 2,44	137,540	8243	— 4	— 618	— 1 216	— 142	— 46	6217
18 íd. ..	105	10 46	768,00	19,3	25,44	12,0	— 2,44	131,925	9022	— 4	— 622	— 1 205	— 142	— 47	7002
18 íd. ..	106	11 54	767,75	19,2	25,64	11,9	— 2,44	136,140	8431	— 4	— 608	— 1 228	— 142	— 46	6403
18 íd. ..	107	14 25	767,55	18,9	25,84	12,0	— 2,44	131,150	9136	— 4	— 611	— 1 222	— 142	— 47	7110
18 íd. ..	104	15 33	767,50	19,3	25,89	11,9	— 2,44	137,185	8290	— 4	— 617	— 1 246	— 142	— 46	6235
18 íd. ..	107	16 42	767,50	18,9	25,94	12,0	— 2,44	131,055	9149	— 4	— 610	— 1 227	— 142	— 47	7119

ESTACIÓN DE LAS PALMAS

Local de observación.

En el sótano de uno de los pabellones del Colegio de La Soledad se instalaron los péndulos, montándose la barraca astronómica en el patio de recreo.

Las coordenadas geográficas del lugar de observacion son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	15° 26' W.
Latitud Norte.....	28° 7'
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio de la marea.....	8m

Determinación de la hora.

Se observaron estrellas con el anteojo Repsold a su paso por el meridiano, calculándose la hora por el método de Borrass:

En el siguiente cuadro figuran los estados y movimientos del Strasser durante los días de observación, con los errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
11 de Octubre de 1920.....	20 47	— 8,46 ± 0,06	— 1,02 ± 0,07
12 íd. íd.	20 25	— 9,46 ± 0,04	— 1,75 ± 0,04
13 íd. íd.	20 25	— 11,21 ± 0,02	— 1,72 ± 0,04
14 íd. íd.	20 25	— 12,93 ± 0,04	— 2,75 ± 0,07
15 íd. íd.	21 3	— 15,75 ± 0,06	— 2,70 ± 0,07
17 íd. íd.	20 15	— 21,06 ± 0,03	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,06$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra G, figuran las correcciones hechas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

El balance del sostén se obtuvo como en las estaciones anteriores, oscilando los

péndulos 104 y 106 en la dirección NW.-SE., y los 105 y 107 en la normal a la misma.

Los resultados obtenidos son:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
43×10^{-7}	40×10^{-7}
41×10^{-7}	38×10^{-7}
36×10^{-7}	40×10^{-7}
40×10^{-7}	40×10^{-7}
40×10^{-7}	40×10^{-7}

El error medio de ambas determinaciones es:

$$e_b = \pm 0{,}8 \times 10^{-7}.$$

Los valores corregidos y los promedios de las duraciones de oscilación constan en el adjunto cuadro:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5016386	0,5017168	0,50165(86)	0,5017(309)
(445)	(215)	32	263
384	133	54	282
381	155	54	284
410	176	27	275
396	155	57	288
389	161	47	273
0,5016391	0,5017158	0,5016545	0,5017278

Por diferir bastante de los valores medios se han suprimido para los cálculos sucesivos las duraciones de oscilación encerradas entre paréntesis. Los promedios que figuran en el cuadro anterior se han deducido teniendo en cuenta dichas supresiones.

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7 Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°	′	s	s	s						s
12 Octubre.....	104	10 39	767,60	16,6	23,12	11,9	— 1,02	137,685	0,5018224	— 4	— 623	— 1 112	— 59	— 40	0,5016386
12 íd.	105	11 51	767,60	16,9	23,22	11,9	— 1,02	132,090	8998	— 4	— 627	— 1 100	— 59	— 40	7168
12 íd.	106	13 00	767,45	17,2	23,37	12,0	— 1,02	136,205	8422	— 4	— 613	— 1 120	— 59	— 40	6586
12 íd.	107	16 1	767,05	17,2	23,57	11,9	— 1,02	131,100	9142	— 4	— 615	— 1 115	— 59	— 40	7309
12 íd.	104	17 9	767,10	17,5	23,67	11,9	— 1,02	137,050	8308	— 4	— 621	— 1 139	— 59	— 40	6445
12 íd.	105	18 19	767,15	17,5	23,77	12,0	— 1,02	131,600	9069	— 4	— 625	— 1 125	— 59	— 40	7215
13 íd.	106	10 41	769,00	17,5	23,52	11,8	— 1,75	136,230	8419	— 4	— 614	— 1 127	— 102	— 40	6532
13 íd.	107	11 51	769,00	17,8	23,52	11,7	— 1,75	131,130	9138	— 4	— 617	— 1 112	— 102	— 40	7263
13 íd.	104	12 59	768,70	17,2	23,57	11,9	— 1,75	137,210	8287	— 4	— 623	— 1 134	— 102	— 40	6384
13 íd.	105	16 1	768,20	17,2	23,72	12,0	— 1,75	131,880	9029	— 4	— 626	— 1 124	— 102	— 40	7133
13 íd.	106	17 15	768,25	17,5	23,77	12,0	— 1,75	135,985	8452	— 4	— 613	— 1 139	— 102	— 40	6554
13 íd.	107	18 24	768,35	17,5	23,87	11,9	— 1,75	130,890	9173	— 4	— 616	— 1 129	— 102	— 40	7282
14 íd.	104	10 43	769,25	18,0	23,52	11,9	— 1,72	137,265	8280	— 4	— 623	— 1 132	— 100	— 40	6381
14 íd.	105	11 54	769,15	18,7	23,57	12,0	— 1,72	131,785	9043	— 4	— 627	— 1 117	— 100	— 40	7155
14 íd.	106	13 2	768,85	18,6	23,67	12,0	— 1,72	136,035	8445	— 4	— 613	— 1 134	— 100	— 40	6554
14 íd.	107	16 12	768,40	18,1	23,87	12,0	— 1,72	130,900	9172	— 4	— 615	— 1 129	— 100	— 40	7284
14 íd.	104	17 21	768,35	18,4	23,92	11,9	— 1,72	136,910	8327	— 4	— 622	— 1 151	— 100	— 40	6410
14 íd.	105	18 31	768,30	18,4	23,97	12,0	— 1,72	131,520	9081	— 4	— 625	— 1 136	— 100	— 40	7176
15 íd.	106	10 52	767,65	18,0	23,62	12,0	— 2,75	135,210	8476	— 4	— 613	— 1 132	— 160	— 40	6257
15 íd.	107	12 1	767,50	18,6	23,67	12,0	— 2,75	130,615	9214	— 4	— 615	— 1 120	— 160	— 40	7275
15 íd.	104	13 9	767,25	18,4	23,77	11,9	— 2,75	136,630	8365	— 4	— 621	— 1 144	— 160	— 40	6396
15 íd.	105	16 16	766,80	18,1	23,92	12,0	— 2,75	131,260	9116	— 4	— 624	— 1 133	— 160	— 40	7155
15 íd.	106	17 24	766,85	18,9	23,97	12,0	— 2,75	135,490	8520	— 4	— 611	— 1 148	— 160	— 40	6557
15 íd.	107	18 35	766,90	18,9	24,07	11,9	— 2,75	130,410	9244	— 4	— 613	— 1 139	— 160	— 40	7288
16 íd.	104	11 41	768,10	19,0	23,87	11,8	— 2,70	136,670	8359	— 4	— 621	— 1 148	— 157	— 40	6389
16 íd.	105	12 50	767,95	19,3	23,92	12,0	— 2,70	131,253	9120	— 4	— 625	— 1 133	— 157	— 40	7161
16 íd.	106	16 56	767,60	18,1	24,12	12,0	— 2,70	135,515	8516	— 4	— 612	— 1 156	— 157	— 40	6547
16 íd.	107	18 4	767,60	18,0	24,12	12,0	— 2,70	130,515	9229	— 4	— 614	— 1 141	— 157	— 40	7273

ESTACIÓN DE SAN BARTOLOMÉ DE TIRAJANA

Local de observación.

Se montaron los aparatos en una casa particular, perteneciente al Sr. D. Antonio Yáñez, instalándose la barraca en la huerta de la misma.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	15° 36' W.
Latitud Norte	27° 55'
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio de la marea	895m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados parciales del reloj por observación astronómica siguiendo el método de Borrass, como en las demás estaciones.

En el siguiente cuadro figuran los estados y movimientos del reloj Strasser durante los días de observación, con los errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
30 de Octubre de 1920	21 4	+ 1,10 ± 0,05	
31 id. id.	20 25	+ 1,36 ± 0,05	+ 0,27 ± 0,07
1 de Noviembre id.	20 25	+ 1,40 ± 0,07	+ 0,04 ± 0,09
2 id. id.	23 42	− 0,03 ± 0,01	− 1,26 ± 0,07
3 id. id.	20 25	− 1,70 ± 0,07	− 1,93 ± 0,07

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,08.$$

Duraciones de oscilación.

Las correcciones hechas para determinar los valores de las oscilaciones reducidas pueden verse en el estado señalado con la letra H_1.

El balance del sostén se determinó por el método de Borrass, oscilando los péndulos 104 y 106 en dirección NE.-SW., y los 105 y 107 en dirección perpendicular a la anterior.

Se obtuvieron los siguientes valores:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
$50 \times 10-7$	$53 \times 10-7$
$50 \times 10-7$	$53 \times 10-7$
$44 \times 10-7$	$50 \times 10-7$
$42 \times 10-7$	$55 \times 10-7$
$47 \times 10-7$	$53 \times 10-7$

Siendo el error medio de ambas determinaciones

$$\epsilon_b = \pm 1{,}1 \times 10-7$$

Los valores de las duraciones de oscilación corregidas y sus promedios correspondientes constan en el siguiente cuadro:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5016778	0,5017552	0,5016966	0,5017660
801	57	27	56
794	47	64	86
763	32	49	49
789	44	56	68
794	43	68	87
0,5016787	0,5017546	0,5016955	0,5017668

Estado H_2. ESTACIÓN DE SAN BARTOLOMÉ DE TIRAJANA

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Periodo de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del ostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						
31 Octubre.....	104	12 6	691,55	10,5	17,51	12,0	+0,27	137,645	0,5018230	−4	−574	−842	+15	−47	0,5016778
31 íd.	105	13 16	691,55	10,7	17,61	12,1	+0,27	132,045	9005	−4	−577	−834	+15	−53	7552
31 íd.	106	14 26	691,40	11,0	17,81	11,9	+0,27	136,225	8420	−4	−564	−853	+15	−47	6966
31 íd.	107	16 22	691,10	10,9	18,11	12,1	+0,27	131,220	9125	−4	−566	−857	+15	−53	7660
31 íd.	104	17 31	691,10	10,8	18,26	11,9	+0,27	137,210	8287	−4	−572	−878	+15	−47	6801
31 íd.	105	18 40	691,20	10,8	18,36	12,2	+0,27	131,775	9044	−4	−575	−870	+15	−53	7557
1 Noviembre...	106	11 49	692,25	10,8	17,86	11,9	+0,04	136,390	8397	−4	−565	−856	+2	−47	6927
1 íd. ...	107	12 58	692,20	11,2	17,96	12,1	+0,04	131,200	9128	−4	−567	−850	+2	−53	7656
1 íd. ...	104	14 7	691,95	11,5	18,11	12,0	+0,04	137,210	8287	−4	−573	−871	+2	−47	6794
1 íd. ...	105	16 19	691,35	11,8	18,36	12,2	+0,04	131,755	9047	−4	−575	−870	+2	−53	7547
1 íd. ...	106	17 27	691,15	12,1	18,46	12,0	+0,04	135,925	8460	−4	−563	−884	+2	−47	6964
1 íd. ...	107	18 36	691,15	12,1	18,56	12,1	+0,04	130,815	9184	−4	−565	−878	+2	−53	7686
2 íd. ...	104	12 8	691,35	11,2	17,76	11,9	−1,26	137,010	8314	−4	−573	−854	−73	−47	6763
2 íd. ...	105	13 19	691,20	11,6	17,91	12,1	−1,26	131,480	9087	−4	−576	−849	−73	−53	7532
2 íd. ...	106	14 28	690,95	11,8	18,11	12,0	−1,26	135,605	8504	−4	−563	−868	−73	−47	6949
2 íd. ...	107	16 23	690,70	11,8	18,36	12,0	−1,26	130,625	9212	−4	−565	−868	−73	−53	7649
2 íd. ...	104	17 31	690,70	12,1	18,46	12,0	−1,26	136,575	8372	−4	−571	−888	−73	−47	6789
2 íd. ...	105	18 41	690,80	12,1	18,61	12,1	−1,26	131,185	9130	−4	−574	−882	−73	−53	7544
3 íd. ...	106	12 7	692,30	10,8	17,71	11,9	−1,93	135,405	8532	−4	−565	−848	−112	−47	6956
3 íd. ...	107	13 17	692,30	11,4	17,76	12,0	−1,93	130,405	9245	−4	−568	−840	−112	−53	7668
3 íd. ...	104	14 26	692,05	11,7	17,91	12,0	−1,93	136,425	8392	−4	−573	−862	−112	−47	6794
3 íd. ...	105	16 30	691,80	11,4	18,16	12,1	−1,93	131,065	9148	−4	−576	−860	−112	−53	7543
3 íd. ...	106	17 40	691,90	11,7	18,26	12,0	−1,93	135,125	8570	−4	−564	−875	−112	−47	6968
3 íd. ...	107	18 49	692,05	11,7	18,31	12,1	−1,93	130,115	9288	−4	−566	−866	−112	−53	7687

ESTACIÓN DE MADRID (cierre)

Local de observación.

La habitación en que se llevaron a cabo los trabajos fué la misma que se utilizó en ocasiones anteriores en el Observatorio Astronómico.

Las coordenadas geográficas son, pues, las indicadas anteriormente.

Determinación de la hora.

Se hicieron las comparaciones necesarias del reloj Strasser con el magistral del Observatorio. Los estados y movimientos figuran en el siguiente cuadro:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
26 de Diciembre de 1920.....	18 35	$-0,72 \pm 0,04$	$+1,11 \pm 0,06$
27 id. id.	1 23	$+0,70 \pm 0,04$	$+0,85 \pm 0,06$
28 id. id.	1 35	$+1,56 \pm 0,04$	$+0,58 \pm 0,06$
29 id. id.	1 34	$+2,14 \pm 0,04$	$-0,21 \pm 0,06$
30 id. id.	1 39	$+1,93 \pm 0,04$	$-0,48 \pm 0,06$
31 id. id.	0 31	$+1,47 \pm 0,04$	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0^s,06.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra I, figuran las correcciones hechas para determinar los valores de las oscilaciones reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección SE.-NW., y los 105 y 107 en la normal a la misma, dando el estudio del balance los resultados siguientes:

Péndulos 104 y 106.

$$\begin{array}{r} 30 \times 10^{-7} \\ 31 \times 10^{-7} \\ 27 \times 10^{-7} \\ 26 \times 10^{-7} \\ \hline 28 \times 10^{-7} \end{array}$$

Péndulos 105 y 107.

$$\begin{array}{r} 36 \times 10^{-7} \\ 34 \times 10^{-7} \\ 34 \times 10^{-7} \\ 35 \times 10^{-7} \\ \hline 35 \times 10^{-7} \end{array}$$

Error medio para ambas determinaciones

$$e_b = \pm 0{,}7 \times 10^{-7}.$$

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes figura en el siguiente cuadro:

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,501869	0,5015640	0,50150(69)	0,5015758
902	47	25	32
877	16	48	44
853	16	41	(73)
(918)	(66)	29	44
883	26	56	56
860	11	22	35
0,501874	0,5015626	0,5015037	0,5015745

Por discrepar bastante de los valores medios se han desechado los valores encerrados entre paréntesis, teniéndose en cuenta dicha supresión en el cálculo de los promedios que figuran en el mismo cuadro.

FECHAS — 1920	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	′	s	s	s						s
27 Diciembre...	104	15 47	712,15	9,1	14,73	11,5	+1,11	155,370	0,5016143	− 4	− 597	− 709	+ 64	− 28	0,5014869
27 íd. ...	105	17 7	711,95	8,8	15,13	11,8	+1,11	148,150	6932	− 4	− 600	− 717	+ 64	− 35	5640
27 íd. ...	106	18 22	711,60	8,8	15,47	11,6	+1,11	153,270	6364	− 4	− 586	− 741	+ 64	− 28	5069
27 íd. ...	107	21 33	711,60	9,0	15,97	11,7	+1,11	146,900	7076	− 4	− 588	− 755	+ 64	− 35	5758
27 íd. ...	104	22 49	711,80	9,2	16,17	11,8	+1,11	154,420	6242	− 4	− 594	− 778	+ 64	− 28	4902
27 íd. ...	105	0 7	712,10	9,0	16,32	11,8	+1,11	147,625	6992	− 4	− 597	− 773	+ 64	− 35	5647
28 íd. ...	106	15 44	715,15	9,9	16,52	11,9	+0,85	153,070	6386	− 4	− 587	− 791	+ 49	− 28	5025
28 íd. ...	107	17 2	715,10	9,9	16,42	11,6	+0,85	146,795	7089	− 4	− 590	− 777	+ 49	− 35	5732
28 íd. ...	104	18 17	714,95	9,7	16,27	11,7	+0,85	154,450	6239	− 4	− 596	− 783	+ 49	− 28	4877
28 íd. ...	105	21 44	715,30	9,5	16,27	11,8	+0,85	147,755	6977	− 4	− 600	− 771	+ 49	− 35	5616
28 íd. ...	106	23 1	715,45	9,3	16,32	11,7	+0,85	152,930	6401	− 4	− 588	− 782	+ 49	− 28	5048
28 íd. ...	107	0 20	715,55	9,3	16,27	11,9	+0,85	146,745	7095	− 4	− 591	− 770	+ 49	− 35	5744
29 íd. ...	104	15 47	716,20	9,3	15,42	11,8	+0,58	154,895	6192	− 4	− 599	− 742	+ 34	− 28	4853
29 íd. ...	105	17 5	716,10	9,8	15,72	11,8	+0,58	147,840	6968	− 4	− 602	− 745	+ 34	− 35	5616
29 íd. ...	106	18 21	715,50	9,7	16,17	11,9	+0,58	152,920	6402	− 4	− 588	− 775	+ 34	− 28	5041
29 íd. ...	107	21 45	715,05	9,0	16,47	11,8	+0,58	146,295	7147	− 4	− 590	− 779	+ 34	− 35	5773
29 íd. ...	104	23 0	714,95	9,1	16,42	11,6	+0,58	153,860	6302	− 4	− 596	− 790	+ 34	− 28	4918
29 íd. ...	105	0 19	714,90	9,7	16,27	11,6	+0,58	147,195	7042	− 4	− 600	− 771	+ 34	− 35	5666
30 íd. ...	106	15 59	714,35	8,8	15,18	11,6	−0,21	153,040	6389	− 4	− 589	− 727	− 12	− 28	5029
30 íd. ...	107	17 18	714,10	9,1	15,57	11,9	−0,21	146,510	7122	− 4	− 591	− 736	− 12	− 35	5744
30 íd. ...	104	18 33	713,55	9,1	15,97	11,6	−0,21	153,960	6291	− 4	− 596	− 768	− 12	− 28	4883
30 íd. ...	105	21 49	713,55	9,0	16,42	11,8	−0,21	147,105	7053	− 4	− 598	− 778	− 12	− 35	5626
30 íd. ...	106	23 4	713,50	8,9	16,37	11,7	−0,21	152,290	6470	− 4	− 586	− 784	− 12	− 28	5056
30 íd. ...	107	0 22	713,75	9,3	16,32	11,6	−0,21	146,120	7168	− 4	− 589	− 772	− 12	− 35	5756
31 íd. ..	104	16 23	715,60	9,4	15,82	11,7	−0,48	154,075	6279	− 4	− 598	− 761	− 28	− 28	4860
31 íd. ..	105	17 42	715,30	9,1	16,02	11,6	−0,48	147,235	7038	− 4	− 601	− 759	− 28	− 35	5611
31 íd. ...	106	21 58	714,70	8,7	15,82	11,6	−0,48	152,680	6428	− 4	− 588	− 758	− 28	− 28	5022
31 íd. ...	107	23 17	714,85	8,7	15,67	11,8	−0,48	146,410	7134	− 4	− 591	− 741	− 28	− 35	5735

CAPÍTULO V

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS Y PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES EN LA CAMPAÑA DE 1920

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS

En el estado núm. 1 figuran los valores de los promedios de las duraciones de oscilación reducidas obtenidos durante la campaña y calculados anteriormente.

Estado núm. 1.

ESTACIONES	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
Madrid (salida)	0,5014854	0,5015636	0,5015011	0,5015075
Santa Cruz de Tenerife	6316	7103	6476	7263
Puerto de la Cruz	6319	7102	6491	7199
Izaña	7631	8403	7794	8512
Santa Cruz de la Palma	6202	6970	6352	7069
Arrecife	6240	7014	6380	7123
Las Palmas	6391	7158	6545	7278
San Bartolomé de Tirajana	6787	7546	6955	7668
Madrid (cierre)	4874	5626	5037	5745

Como promedio de las observaciones en Madrid se obtienen los siguientes:

Estado núm. 2.

ESTACIONES	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
Madrid (salida)	0,5014864	0,5015631	0,5015024	0,5017410
Madrid (cierre)				
Diferencias	20	10	26	670

Examinando el promedio de las observaciones en Madrid se ve que el péndulo 107 varió extraordinariamente entre la salida y el regreso. El estado siguiente concretará en cuáles y cuántas estaciones experimentó variación:

Estado núm. 3.

ESTACIONES	DIFERENCIAS ENTRE LAS DURACIONES DE OSCILACIÓN DE LOS PÉNDULOS					
	104-105	104-106	104-107	105-106	105-107	106-107
Madrid (salida).....	— 782	— 157	— 221	+ 625	— 561	— 64
Santa Cruz de Tenerife....	— 787	— 160	— 947	+ 627	— 160	— 787
Puerto de la Cruz.....	— 783	— 172	— 880	+ 611	— 97	— 708
Izaña.....	— 772	— 163	— 881	+ 609	— 109	— 718
Santa Cruz de la Palma....	— 768	— 150	— 867	+ 618	— 99	— 717
Arrecife.....	— 774	— 140	— 883	+ 634	— 109	— 743
Las Palmas.....	— 767	— 154	— 887	+ 613	— 120	— 733
San Bartolomé de Tirajana.	— 759	— 168	— 881	+ 591	— 122	— 713
Madrid (cierre).....	— 752	— 163	— 871	+ 589	— 119	— 708
Diferencias máximas..	35	32	726	45	721	723

El estudio de estas diferencias pone de manifiesto que las variaciones más notables del péndulo 107 tuvieron lugar en Madrid (salida) y Santa Cruz de Tenerife, aunque bastante más aminorada en esta segunda estación. Para los cálculos sucesivo se prescindirá de dicho péndulo 107.

PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES

Para saber la precisión obtenida en las observaciones habrán de calcularse por separado los errores medios cometidos en las diferentes operaciones de que se compone una determinación de esta clase y se englobarán estos errores parciales para obtener el error medio correspondiente al valor de **g** en cada estación.

Cálculo de los errores parciales.

1.° Los errores cometidos en la observación de la duración de oscilación se obtendrán por la fórmula

$$e = 10^{-7}\sqrt{\frac{[vv]}{[n]-m}}$$

en la cual representan [**vv**] la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las duraciones de oscilación y cada uno de estos valores, [**n**] el número total de observaciones y **m** el número de péndulos observados.

Para obtener los valores de [**vv**] tendremos que obtener los de **vv**, que son los cuadrados de sus diferencias, las cuales se encuentran ordenadas en el siguiente cuadro:

ESTACIONES	Péndulo 104.		Péndulo 105.		Péndulo 106.	
	v	vv	v	vv	v	vv
Madrid (salida)	2	4	2	4	2	4
	9	81	8	64	10	100
	18	324	20	400	14	196
	9	81	3	9	3	9
	19	361	26	676	14	196
	1	1	9	81	5	25
Santa Cruz de Tenerife	3	9	9	81	1	1
	1	1	4	16	11	121
	7	49	2	4	15	225
	17	289	8	64	5	25
	7	49	4	16	12	144
	16	256	1	1	11	121
Puerto de la Cruz	10	100	14	196	19	361
	11	121	6	36	6	36
	2	4	10	100	19	361
	2	4	5	25	6	36
	4	16	1	1	13	169
	11	121	11	121	2	4

ESTACIONES	Péndulo 104.		Péndulo 105.		Péndulo 106.	
	v	vv	v	vv	v	vv
	8	64	7	49	5	25
	10	100	8	64	14	196
Izaña	2	4	11	121	6	36
	27	729	3	9	16	256
	2	4	8	64	3	9
	15	225	1	1	—	—
	11	121	4	16	13	169
	12	144	12	144	26	676
Santa Cruz de la Palma	2	4	7	49	15	225
	7	49	20	400	21	441
	12	144	20	400	7	49
	18	324	—	—	16	256
	28	784	26	676	11	121
	15	225	1	1	25	625
	14	196	24	576	16	256
Arrecife	26	676	28	784	2	4
	3	9	15	225	27	729
	23	529	12	144	23	529
	5	25	—	—	—	—
	5	25	10	100	13	169
	7	49	25	625	9	81
Las Palmas	10	100	3	9	9	81
	19	361	18	324	18	324
	5	25	3	9	12	144
	2	4	3	9	2	4
	9	81	6	36	11	121
	14	196	11	121	28	784
San Bartolomé de Tirajana	7	49	1	1	9	81
	24	576	14	196	6	36
	2	4	2	4	1	1
	7	49	3	9	13	169
	5	25	14	196	12	144
	22	484	21	441	11	121
Madrid (cierre)	3	9	10	100	4	16
	21	441	10	100	8	64
	9	81	0	0	19	361
	14	196	15	225	15	225

Del cuadro anterior se deduce el siguiente, haciendo la suma de los términos **vv** para cada estación y cada péndulo y las sumas totales de unos y otros.

ESTACIONES	Péndulo 104.		Péndulo 105.		Péndulo 106.		[vv]	[n]
	vv	n	vv	n	vv	n		
Madrid (salida)	852	6	1 234	6	530	6	2 616	18
Santa Cruz de Tenerife	653	6	182	6	637	6	1 472	18
Puerto de la Cruz	366	6	479	6	1 167	6	2 012	18
Izaña	1 126	6	308	6	522	5	1 956	17
Santa Cruz de la Palma	786	6	1 009	5	1 816	6	3 611	17
Arrecife	2 444	7	2 496	6	2 264	6	7 114	19
Las Palmas	564	6	1 076	6	803	6	2 443	18
San Bartolomé de Tirajana	955	6	367	6	1 192	6	2 514	18
Madrid (cierre)	1 236	6	1 062	6	931	6	3 229	18
[vv]	8 982		8 123		9 862		26 967	
[n]		55		53		53		161

Aplicando la fórmula

$$e = 10^{-7}\sqrt{\frac{[vv]}{[n]-m}}$$

para cada estación, poniendo en vez de [vv] los valores de la penúltima columna, sustituyendo [n] por los de la última y m por 3, que son los péndulos observados, tendremos:

Madrid (salida) ..... $e = \pm 13{,}2 \times 10^{-7}$
Santa Cruz de Tenerife ..... $e = \pm 9{,}9 \times 10^{-7}$
Puerto de la Cruz ..... $e = \pm 11{,}6 \times 10^{-7}$
Izaña ..... $e = \pm 11{,}8 \times 10^{-7}$
Santa Cruz de la Palma ..... $e = \pm 16{,}1 \times 10^{-7}$
Arrecife ..... $e = \pm 21{,}1 \times 10^{-7}$
Las Palmas ..... $e = \pm 11{,}7 \times 10^{-7}$
San Bartolomé de Tirajana ..... $e = \pm 12{,}9 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre) ..... $e = \pm 14{,}7 \times 10^{-7}$

Los valores de los errores del resultado medio en cada estación se obtendrán por la fórmula

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{[n]}} \times e,$$

dando los resultados siguientes:

Madrid (salida) ..... $e_s = \pm 3{,}4 \times 10^{-7}$
Santa Cruz deTenerife ..... $e_s = \pm 2{,}4 \times 10^{-7}$
Puerto de la Cruz ..... $e_s = \pm 2{,}8 \times 10^{-7}$
Izaña ..... $e_s = \pm 2{,}9 \times 10^{-7}$
Santa Cruz de la Palma ..... $e_s = \pm 3{,}9 \times 10^{-7}$
Arrecife ..... $e_s = \pm 4{,}8 \times 10^{-7}$
Las Palmas ..... $e_s = \pm 2{,}8 \times 10^{-7}$
San Bartolomé de Tirajana ..... $e_s = \pm 3{,}1 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre) ..... $e_s = \pm 3{,}5 \times 10^{-7}$

Los valores de e y e_s para el promedio de las dos estaciones de Madrid serán:

$$e = \sqrt{\frac{2616 + 3229}{18 + 18 - 6}} = \pm 13{,}9 \times 10^{-7}$$

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{36}} \times 13{,}9 = \pm 2{,}3 \times 10^{-7}$$

Para obtener los errores de la duración de oscilación de cada uno de los péndulos en el conjunto de la campaña nos valdremos de la misma fórmula, sustituyendo los valores [vv] y [n] por los números contenidos en las dos últimas líneas del cuadro último y m por el número de estaciones, que son nueve:

Asi resulta:

Péndulo 104..... $e_{P.\,104} = \sqrt{\frac{8982}{55 - 9}} = \pm 14{,}0 \times 10^{-7}$

Péndulo 105..... $e_{P.\,105} = \sqrt{\frac{8123}{53 - 9}} = \pm 13{,}6 \times 10^{-7}$

Péndulo 106..... $e_{P.\,106} = \sqrt{\frac{9862}{53 - 9}} = \pm 15{,}0 \times 10^{-7}$

El error medio general a todos los péndulos será:

$$e'_{P.} = \sqrt{\frac{26967}{161 - 27}} = \pm 14{,}2 \times 10^{-7}$$

2.° Siendo las correcciones por reducción a la amplitud muy pequeñas, los errores que de ellas pueden provenir son insignificantes y, por tanto, admitiremos que son nulos.

3.° Los errores que provienen por la inseguridad de la constante de reducción al vacío se deducen de los obtenidos al hacer el estudio de las constantes, cuyos valores son:

Péndulo	104.....	$0{,}0000675 \pm 11 \times 10^{-7}$
Id.	105.....	$0{,}0000679 \pm 9 \times 10^{-7}$
Id.	106.....	$0{,}0000665 \pm 8 \times 10^{-7}$

Su promedio es 0,0000673 con un error de

$$\sqrt{\frac{11^2 + 9^2 + 8^2}{3}} = \pm 9{,}4 \times 10^{-7}$$

Siendo la relación entre este error y la constante media

$$\pm \frac{9{,}4}{673} = \pm 0{,}0140$$

En el cuadro siguiente se han reunido los valores de los promedios de las co-

rrecciones por reducción al vacío en las diferentes estaciones. También figuran en él las diferencias entre el valor del promedio de las estaciones de Madrid y los valores de las otras estaciones:

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN AL VACÍO				
	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Promedios.	[Δ]
Madrid (salida)	582,5	585,0	573,9	581	—
Santa Cruz de Tenerife	622,7	625,7	612,5	620	32
Puerto de la Cruz	621,5	625,0	612,3	620	32
Izaña	484 7	487,7	477,8	483	105
Santa Cruz de la Palma	620,0	623,2	613,4	619	31
Arrecife	617,5	621,0	608,0	616	28
Las Palmas	622,2	625,7	612,7	620	32
San Bartolomé de Tirajana	572,7	575,5	564,0	571	17
Madrid (cierre)	596,7	599,7	587,7	595	—
Madrid (promedio)	590	592	581	588	—

Multiplicando las diferencias que figuran en la última columna del cuadro anterior por el valor $\pm$ 0,0140, deduciremos los valores de los errores por la inseguridad de la constante de reducción al vacío.

Santa Cruz de Tenerife ..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
Puerto de la Cruz ..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
Izaña ..... $e_d = \pm 1{,}5 \times 10^{-7}$
Santa Cruz de la Palma ..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
Arrecife ..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
Las Palmas ..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
San Bartolomé de Tirajana ..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$

4.° Análogamente se deducen los que proceden de la inseguridad de las constantes de reducción de temperatura, cuyos valores son:

Péndulo 104 ..... $48{,}11 \pm 0{,}14 \times 10^{-7}$
Id. 105 ..... $47{,}38 \pm 0{,}12 \times 10^{-7}$
Id. 106 ..... $47{,}91 \pm 0{,}10 \times 10^{-7}$

Su promedio es 47,8 y el error del valor medio de las constantes de temperatura será:

$$\sqrt{\frac{0{,}14^2 + 0{,}12^2 + 0{,}10^2}{3}} = \pm 0{,}12 \times 10^{-7}$$

y la relación entre este error y la constante media será:

$$\frac{\pm 0{,}12}{47{,}8} = \pm 0{,}0025$$

En el cuadro siguiente figuran los valores de los promedios de las correcciones por reducción de temperatura en las diferentes estaciones y las diferencias entre el valor del promedio de las estaciones de Madrid y los valores de las otras estaciones:

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN POR TEMPERATURA				
	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Promedios.	[Δ]
Madrid (salida)	926,9	919,7	926,2	924	—
Santa Cruz de Tenerife	1 152,5	1 148,5	1 154,5	1 152	310
Puerto de la Cruz	1 067,9	1 050,4	1 063,3	1 061	219
Izaña	892,5	886,5	897,6	892	50
Santa Cruz de la Palma	1 188,5	1 185,8	1 173,4	1 183	341
Arrecife	1 223,0	1 207,2	1 210,7	1 214	372
Las Palmas	1 136,9	1 123,9	1 139,4	1 133	291
San Bartolomé de Tirajana	865,9	860,9	864,0	864	22
Madrid (cierre)	756,9	757,2	769,5	761	—
Madrid (promedio)	842	838	848	842	—

Multiplicando las diferencias que figuran en la última columna del cuadro anterior por el valor ± 0,0025 obtendremos los valores de los errores por la inseguridad de la constante por reducción de temperatura:

Santa Cruz de Tenerife ..... $e_t = \pm 0{,}8 \times 10^{-7}$
Puerto de la Cruz ..... $e_t = \pm 0{,}5 \times 10^{-7}$
Izaña ..... $e_t = \pm 0{,}1 \times 10^{-7}$
Santa Cruz de la Palma ..... $e_t = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$
Arrecife ..... $e_t = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$
Las Palmas ..... $e_t = \pm 0{,}7 \times 10^{-7}$
San Bartolomé de Tirajana ..... $e_t = \pm 0{,}1 \times 10^{-7}$

5.° Los errores e_m producidos en los valores de la duración de oscilación a consecuencia de los ε_m cometidos en la determinación de la hora se calculan por la fórmula

$$e_m = \pm a s \varepsilon_m ,$$

siendo

$a = \frac{10^{+7}}{86400}$,

s = promedio de las duraciones de oscilación en cada estación,

ε_m = los errores medios de conjunto de las determinaciones de hora en cada estación, obteniéndose los valores que figuran en el cuadro adjunto:

ESTACIONES	a	x	ε_m	e_m
Madrid (salida)	$\frac{10+7}{86400}$	0,5015067	0,08	$4,6 \times 10-7$
Santa Cruz de Tenerife		6632	0,05	$2,9 \times 10-7$
Puerto de la Cruz		6637	0,09	$5,2 \times 10-7$
Izaña		7943	0,04	$2,3 \times 10-7$
Santa Cruz de la Palma		6508	0,04	$2,3 \times 10-7$
Arrecife		6545	0,03	$1,7 \times 10-7$
Las Palmas		6698	0,06	$3,4 \times 10-7$
San Bartoloméde Tirajana		7096	0,08	$4,6 \times 10-7$
Madrid (cierre)		5179	0,06	$3,4 \times 10-7$

6.° Los errores cometidos en las determinaciones del balance del sostén y que se han obtenido anteriormente en cada estación son los siguientes:

Madrid (salida)	$e_b = \pm 0,8 \times 10-7$
Santa Cruz de Tenerife	$e_b = \pm 1,2 \times 10-7$
Puerto de la Cruz	$e_b = \pm 0,9 \times 10-7$
Izaña	$e_b = \pm 0,1 \times 10-7$
Santa Cruz de la Palma	$e_b = \pm 0,1 \times 10-7$
Arrecife	$e_b = \pm 0,9 \times 10-7$
Las Palmas	$e_b = \pm 0,8 \times 10-7$
San Bartolomé de Tirajana	$e_b = \pm 1,1 \times 10-7$
Madrid (cierre)	$e_b = \pm 0,7 \times 10-7$

Cálculo de los errores que afectan a las duraciones de oscilación reducidas.

Obtenidos los diversos errores cometidos en las varias operaciones realizadas para deducir las duraciones de oscilación reducidas, se tendrá el error medio total en cada una de las estaciones empleando la fórmula siguiente:

$$E = \sqrt{e_x^2\,(\text{Madrid}) + e_s^2\,(\text{estación observada}) + e_a^2 + e_d^2 + e_t^2 + e_m^2 + e_b^2}$$

En el cuadro siguiente figuran los cuadrados de estos errores y la suma de los mismos para cada estación:

ESTACIONES	e_x^2 (Madrid.)	e_s^2 (Estación.)	e_a^2	e_d^2	e_t^2	e_m^2	e_b^2	E^2
Santa Cruz de Tenerife	$2,3^2$	$2,4^2$	0,00	$0,4^2$	$0,8^2$	$2,9^2$	$1,2^2$	21,70
Puerto de la Cruz	$2,3^2$	$2,8^2$	0,00	$0,4^2$	$0,5^2$	$5,2^2$	$0,9^2$	41,39
Izaña	$2,3^2$	$2,9^2$	0,00	$1,5^2$	$0,1^2$	$2,3^2$	$0,1^2$	21,26
Santa Cruz de la Palma	$2,3^2$	$3,9^2$	0,00	$0,4^2$	$0,9^2$	$2,3^2$	$0,1^2$	26,77
Arrecife	$2,3^2$	$4,8^2$	0,00	$0,4^2$	$0,9^2$	$1,7^2$	$0,9^2$	33,00
Las Palmas	$2,3^2$	$2,8^2$	0,00	$0,4^2$	$0,7^2$	$3,4^2$	$0,8^2$	25,98
San Bartolomé de Tirajana	$2,3^2$	$3,1^2$	0,00	$0,2^2$	$0,1^2$	$4,6^2$	$1,1^2$	37,32

Extrayendo las raíces cuadradas de los valores contenidos en la última columna, tendremos los errores E para la duración de oscilación en cada una de las estaciones:

Santa Cruz de Tenerife.....	$E = \pm 4{,}7 \times 10^{-7}$
Puerto de la Cruz.....	$E = \pm 6{,}4 \times 10^{-7}$
Izaña.....	$E = \pm 4{,}6 \times 10^{-7}$
Santa Cruz de la Palma.....	$E = \pm 5{,}2 \times 10^{-7}$
Arrecife.....	$E = \pm 5{,}7 \times 10^{-7}$
Las Palmas.....	$E = \pm 5{,}1 \times 10^{-7}$
San Bartolomé de Tirajana.....	$E = \pm 6{,}1 \times 10^{-7}$

CAPÍTULO VI

VALORES DE LA INTENSIDAD DE LA FUERZA DE LA GRAVEDAD

CAMPAÑA DE 1920

Para determinar los valores de g, o sean los valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en cualquiera estación, aplicaremos la fórmula

$$g = g_m - 2g_m \frac{s - s_m}{s_m} + 3g_m \left(\frac{s - s_m}{s_m}\right)^2 + \ldots\ldots$$

en la cual g es el valor de la gravedad que se quiere determinar en una estación cualquiera, g_m el valor de la gravedad en Madrid, que es 979.981; s el valor de la duración de oscilación en la estación de que se trata, obtenido con un péndulo determinado, y s_m el valor de la duración de oscilación en Madrid, obtenido con el mismo péndulo.

Los valores de s_m para cada uno de los péndulos son:

Péndulo 104..... $s_m = 0{,}5014864$
Id. 105..... $s_m = 0{,}5015631$
Id. 106..... $s_m = 0{,}5015024$

Aplicando, pues, la fórmula anterior, llegaremos a los resultados que figuran en el siguiente cuadro:

AÑO	ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios.
1920	Santa Cruz de Tenerife.....	104	979,414	979,411
		105	406	
		106	414	
	Puerto de la Cruz.....	104	979,412	979,409
		105	406	
		106	408	

AÑO	ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios.
1920	Izaña	104	978,900	978,899
		105	898	
		106	898	
	Santa Cruz de la Palma	104	979,458	979,459
		105	458	
		106	462	
	Arrecife	104	979,443	979,445
		105	441	
		106	451	
	Las Palmas	104	979,384	979,385
		105	384	
		106	387	
	San Bartolomé de Tirajana	104	979,229	979,229
		105	233	
		106	226	

Los errores correspondientes a estos valores de **g**, que representaremos por E_g, pueden obtenerse por medio de la fórmula

$$E_g = \pm \frac{2g_m}{s_m} E,$$

en la cual se representa por g_m el valor de la gravedad en Madrid, 979.981; por s_m el promedio de las duraciones de oscilación en Madrid en las estaciones de salida y cierre de la campaña, o sea 0,5015173, y por E los errores consignados al final del capítulo anterior, que han resultado para las duraciones de oscilación reducidas.

Su aplicación nos conduce a los valores siguientes:

Santa Cruz de Tenerife	$E_g = \pm 1{,}8 \times 10^{-3}$
Puerto de la Cruz	$E_g = \pm 2{,}5 \times 10^{-3}$
Izaña	$E_g = \pm 1{,}8 \times 10^{-3}$
Santa Cruz de la Palma	$E_g = \pm 2{,}0 \times 10^{-3}$
Arrecife	$E_g = \pm 2{,}2 \times 10^{-3}$
Las Palmas	$E_g = \pm 2{,}0 \times 10^{-3}$
San Bartolomé de Tirajana	$E_g = \pm 2{,}4 \times 10^{-3}$

En resumen, tendremos, finalmente, para valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad:

Santa Cruz de Tenerife	$g = 979{,}411 \pm 0{,}0018$
Puerto de la Cruz	$g = 979{,}409 \pm 0{,}0025$
Izaña	$g = 978{,}899 \pm 0{,}0018$
Santa Cruz de la Palma	$g = 979{,}459 \pm 0{,}0020$
Arrecife	$g = 979{,}445 \pm 0{,}0022$
Las Palmas	$g = 979{,}385 \pm 0{,}0020$
San Bartolomé de Tirajana	$g = 979{,}229 \pm 0{,}0024$

La reducción de estos valores al nivel del mar, la haremos por la fórmula

$$g_o'' = g + \delta g + \delta' g,$$

siendo

$$\delta g = 0{,}0003086\ H \qquad y \qquad \delta' g = \frac{3}{4} \times \frac{\theta}{\theta_m} (g - g_o)$$

en las cuales representan

H, altitud en metros sobre el nivel del mar del centro de las lentejas de los péndulos.

θ_m, densidad media de la Tierra, igual a 5,52.

θ, densidad media de la meseta de observación.

El cuadro siguiente nos pone de manifiesto el conjunto de estos datos y los valores deducidos de los mismos:

ESTACIONES	g	H	θ	δg	$\delta' g$
Santa Cruz de Tenerife	979,411	7	2,6	+ 0,002	— 0,001
Puerto de la Cruz	979,409	80	2,85	+ 0,025	— 0,009
Izaña	978,899	2 367	2,85	+ 0,731	— 0,283
Santa Cruz de la Palma	979,459	12	2,6	+ 0,004	— 0,001
Arrecife	979,445	4	2,6	+ 0,001	— 0,000
Las Palmas	979,385	8	2,6	+ 0,003	— 0,001
San Bartolomé de Tirajana	979,229	895	2,85	+ 0,276	— 0,107

De los cuales deduciremos los valores de

$$g_o = g + \delta g \qquad y \qquad g_o'' = g_o + \delta' g,$$

que serán, respectivamente,

ESTACIONES	g_o	g_o''
Santa Cruz de Tenerife	979,413	979,412
Puerto de la Cruz	979,434	979,425
Izaña	979,630	979,347
Santa Cruz de la Palma	979,463	979,462
Arrecife	979,446	979,446
Las Palmas	979,388	979,387
San Bartolomé de Tirajana	979,505	979,398

El cálculo teórico de los valores de g, que representaremos por γ_o, lo haremos por la fórmula de Helmert (1915):

$$\gamma_o = 978{,}052\,(1 + 0{,}005285\,\text{sen}^2\,\varphi - 0{,}000007\,\text{sen}^2\,2\,\varphi)\,.$$

En el cuadro siguiente se expresan los valores de γ_o, correspondientes a los diversos de φ, que representa la latitud del lugar de observación:

ESTACIONES	φ	γ_o
Santa Cruz de Tenerife	28° 29′	979,223
Puerto de la Cruz	28 26	979,219
Izaña	28 19	979,210
Santa Cruz de la Palma	28 41	979,237
Arrecife	28 58	979,260
Las Palmas	28 07	979,195
San Bartolomé de Tirajana	27 55	979,180

Finalmente, el conjunto de los valores encontrados se ve reunido en el cuadro siguiente:

Resumen de los valores obtenidos en la campaña de 1920.

ESTACIONES	LONGITUD	LATITUD	ALTITUD	θ	g	g_0	g''_0	γ_0	$g''_0 - \gamma_0$	$g_0 - \gamma_0$
	° ′	° ′	m		cm	cm	cm	cm	cm	cm
Santa Cruz de Tenerife.....	16 16 W.	28 29	7	2,6	979,411	979,413	979,412	979,223	+ 0,189	+ 0,190
Puerto de la Cruz.....	16 34 W.	28 26	80	2,85	979,409	979,434	979,425	979,219	+ 0,206	+ 0,215
Izaña.....	16 34 W.	28 19	2 367	2,85	978,899	979,630	979,347	979,210	+ 0,137	+ 0,420
Santa Cruz de la Palma.....	17 46 W.	28 41	12	2,6	979,459	979,463	979,462	979,237	+ 0,225	+ 0,226
Arrecife.....	13 35 W.	28 58	4	2,6	979,445	979,446	979,446	979,260	+ 0,186	+ 0,186
Las Palmas.....	15 26 W.	28 7	8	2,6	979,385	979,388	979,387	979,195	+ 0,192	+ 0,193
San Bartolomé de Tirajana.....	15 36 W.	27 55	895	2,85	979,229	979,505	979,398	979,180	+ 0,219	+ 0,325

ÍNDICE

Páginas.

INTRODUCCIÓN..... 5

CAPÍTULO PRIMERO.—Resultados de las observaciones de la campaña de 1919..... 7

CAPÍTULO SEGUNDO.—Invariabilidad de los péndulos y precisión de las observaciones en la campaña de 1919..... 47

CAPÍTULO TERCERO.—Valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en la campaña de 1919..... 57

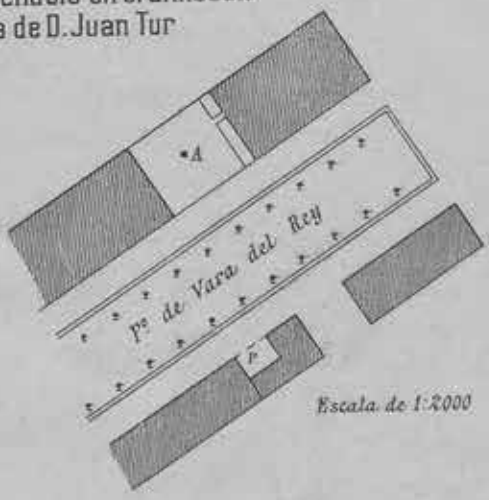
CAPÍTULO CUARTO.—Resultados de las observaciones de la campaña de 1920..... 63

CAPÍTULO QUINTO.—Invariabilidad de los péndulos y precisión de las observaciones en la campaña de 1920..... 99

CAPÍTULO SEXTO.—Valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en la campaña de 1920..... 109

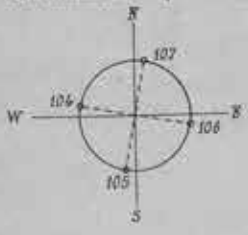
IBIZA

Instalación del péndulo en el almacén de una casa de D. Juan Tur



Escala de 1:2000

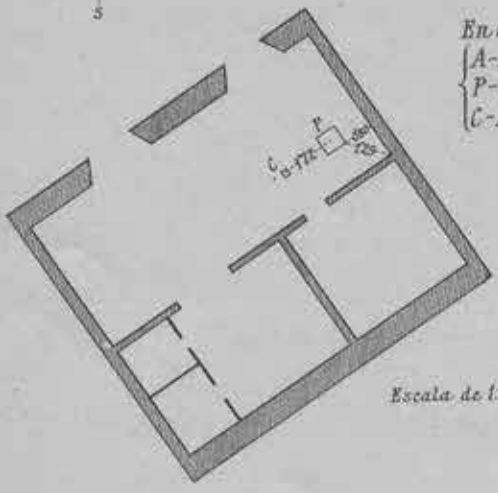
Orientación de los planos de oscilación de los péndulos



Nota

En estos croquis representan

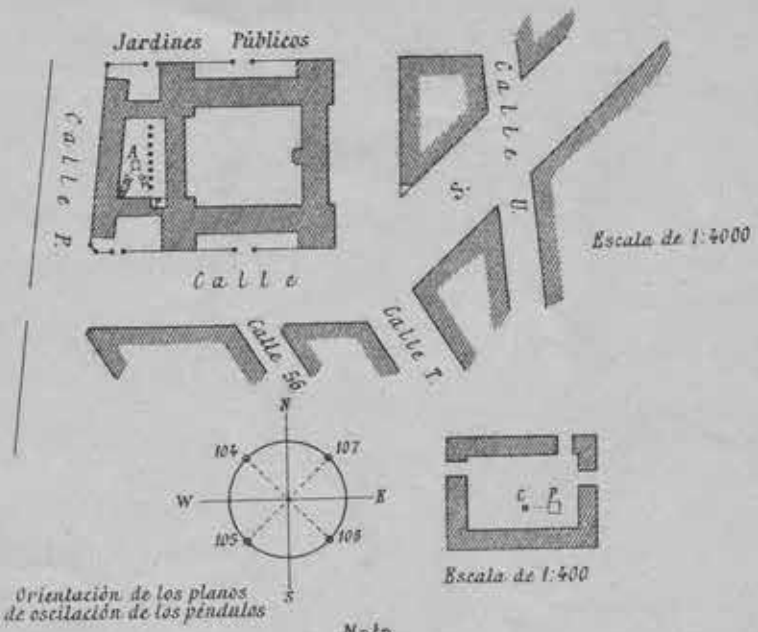
- *A-Anteojo de pasos*
- *P-Péndulo*
- *C-Aparato de coincidencias*



Escala de 1:200

PALMA DE MALLORCA

Instalación del péndulo en el guardarropa del Instituto General y Técnico



Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

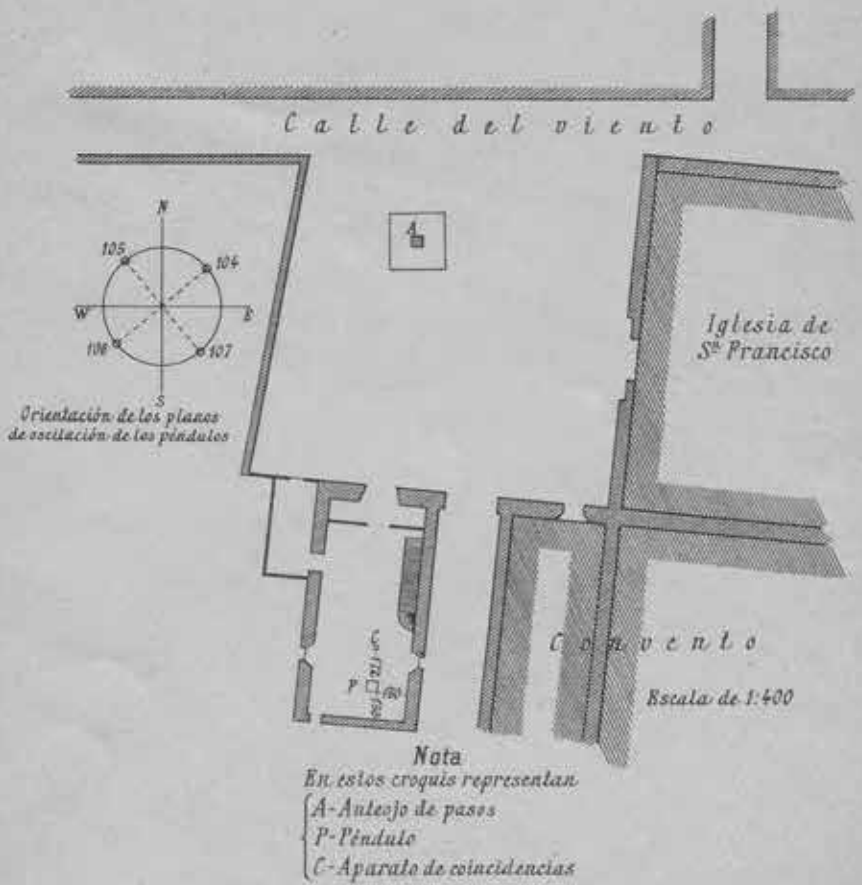
Nota

En estos croquis representan

- A - Anteojo de pasos
- P - Péndulo
- C - Aparato de coincidencias

INCA

Instalación del péndulo en una clase del convento de S. Francisco



Nota

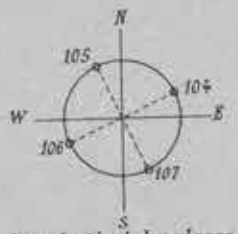
En estos croquis representan

- *A-Anteojo de pasos*
- *P-Péndulo*
- *C-Aparato de coincidencias*

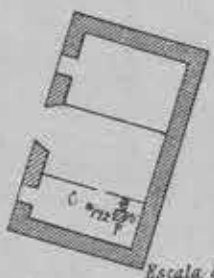
MANACOR

Instalación del péndulo en el Laboratorio Municipal (Convento de Stº Domingo)





Orientación de los planos de oscilación de los péndulos



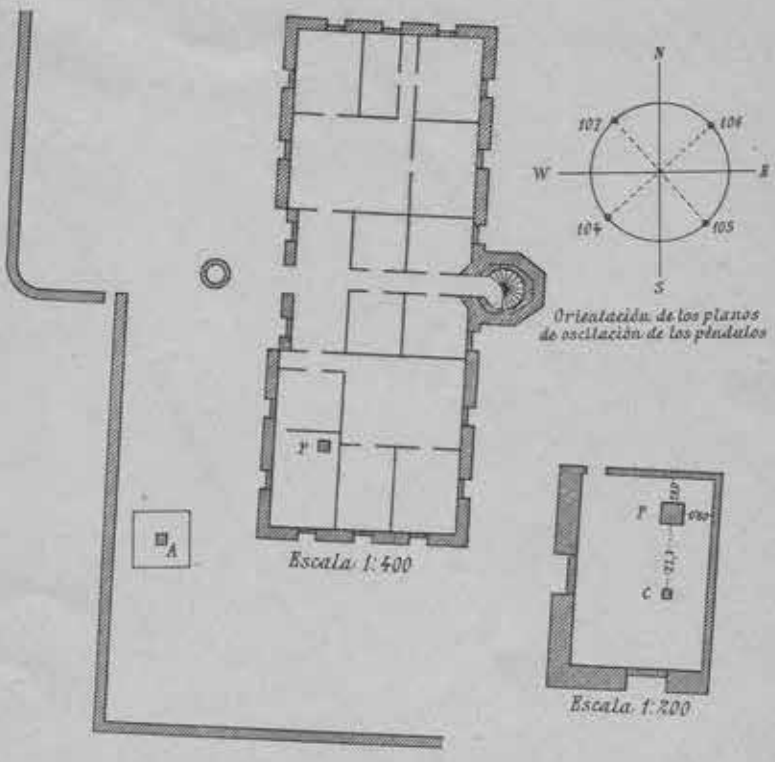
Nota

En estos croquis representan

- *A - Anteojo de pasos*
- *P - Péndulos*
- *C - Aparato de coincidencias*

POLLENSA

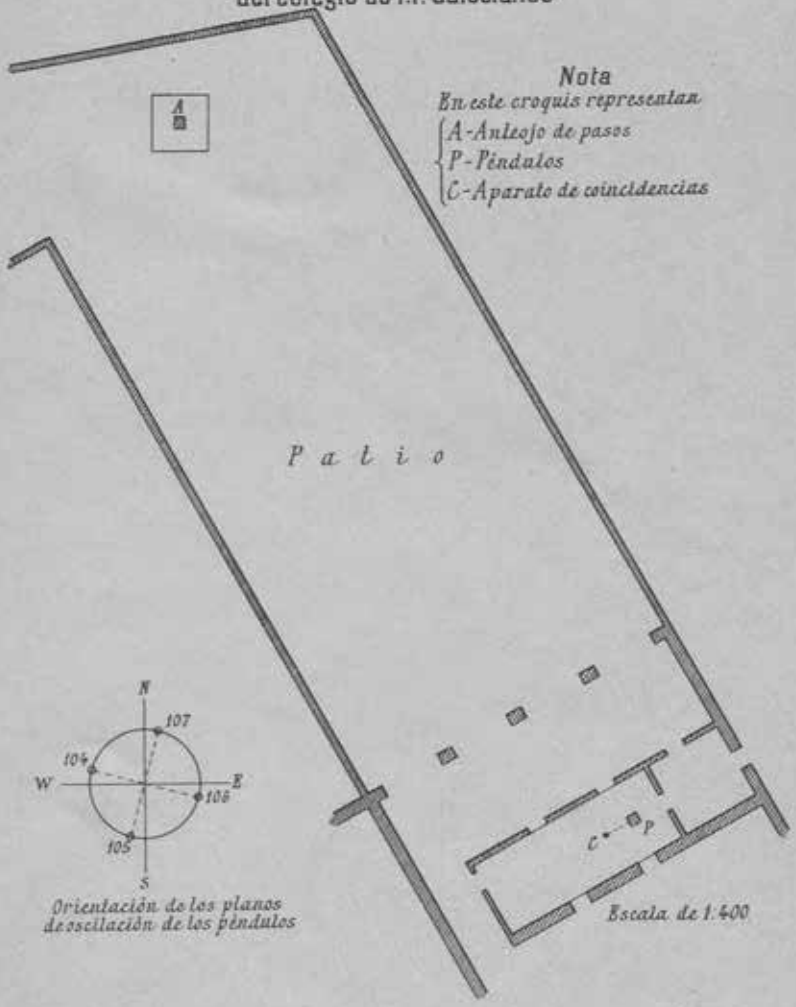
Instalación del péndulo en el faro de su nombre



Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

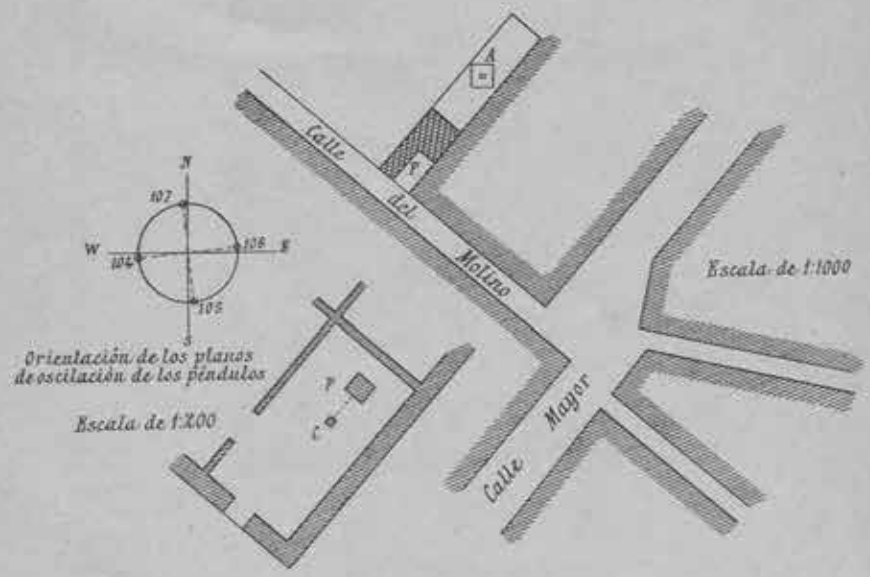
CIUDADELA

Instalación del péndulo en una clase del colegio de P.P. Salesianos



FORNELLS

Instalación del péndulo en una casa de Dª Lucia Quintana



Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

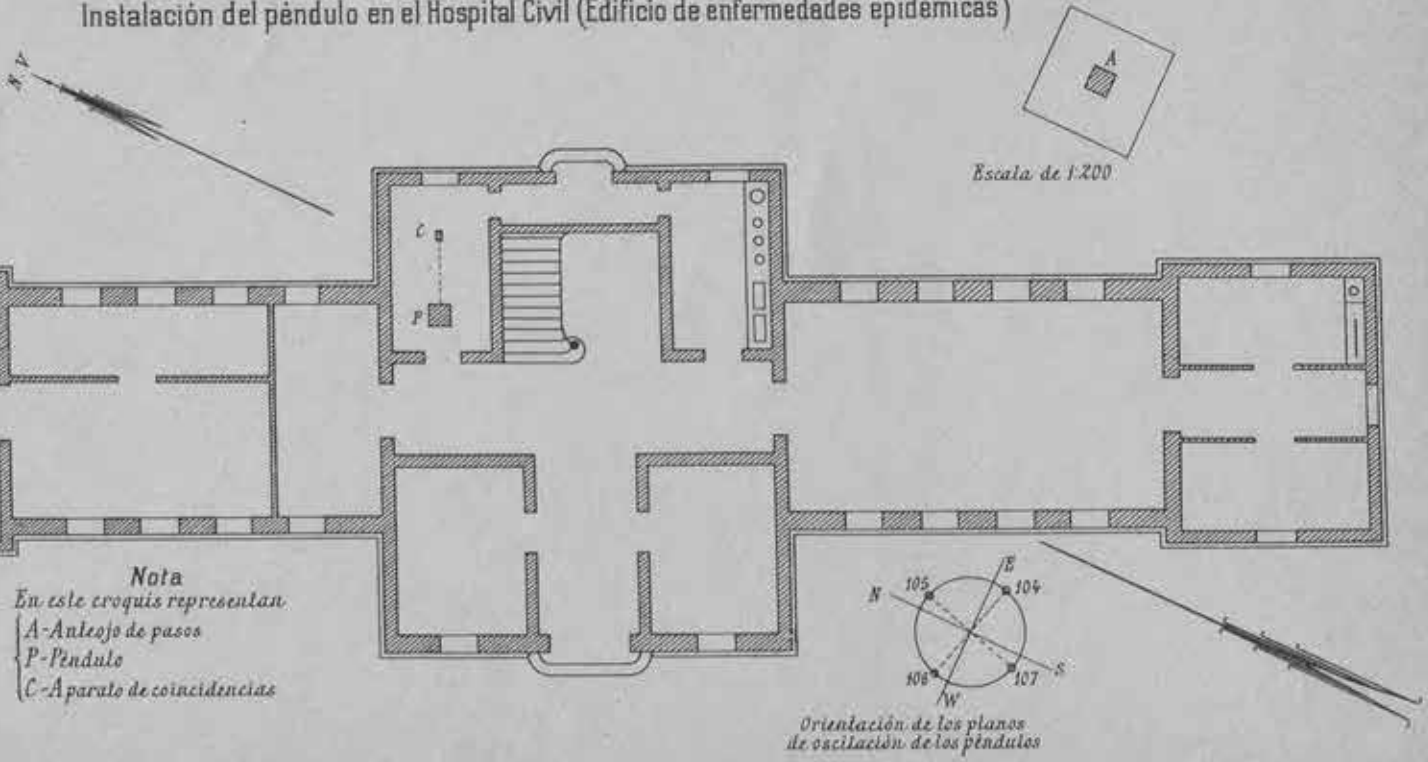
Nota

En estos croquis representan

- *A - Anteojo de pasos*
- *P - Péndulo*
- *C - Aparato de coincidencias*

MAHÓN

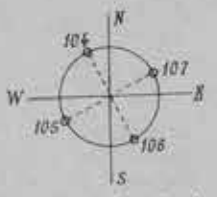
Instalación del péndulo en el Hospital Civil (Edificio de enfermedades epidémicas)



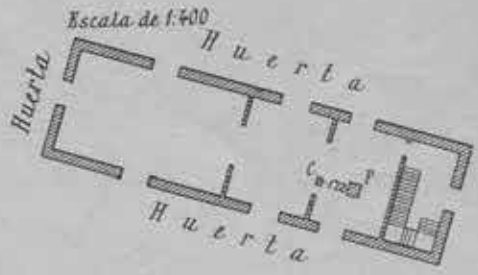
Sta CRUZ DE TENERIFE

Instalación del pèndulo en el Laboratorio Provincial

A



Orientación de los planos de oscilación de los pèndulos



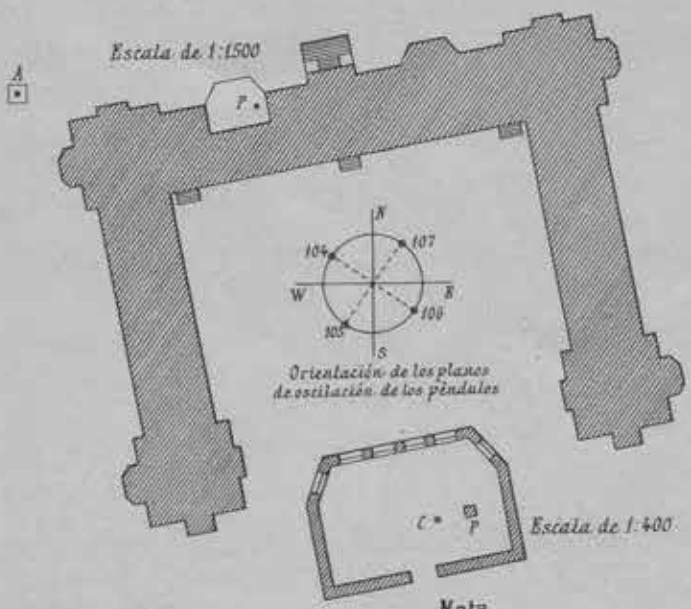
Nota

En estos croquis representan

- *A - Anteojo de pasos*
- *P - Pèndulo*
- *C - Aparato de coincidencias*

PUERTO DE LA CRUZ (TENERIFE)

Instalación del péndulo en una habitación de la planta baja del Hotel Taoro



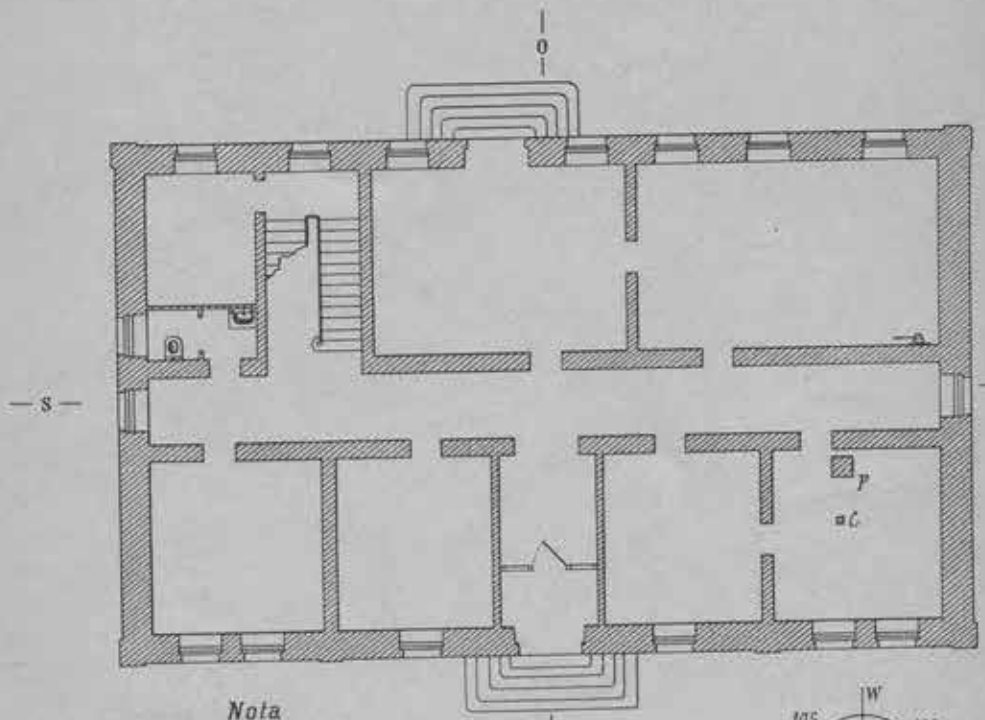
Nota

En estos croquis representan

- *A - Anteojo de pasos*
- *P - Péndulos*
- *C - Aparato de coincidencias*

IZAÑA (TENERIFE)

Instalación del péndulo en la planta baja del Observatorio Meteorológico

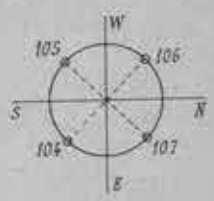


Nota

En este croquis representan

- *A - Anteojo de pasos*
- *P - Péndulo*
- *C - Aparato de coincidencias*

Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

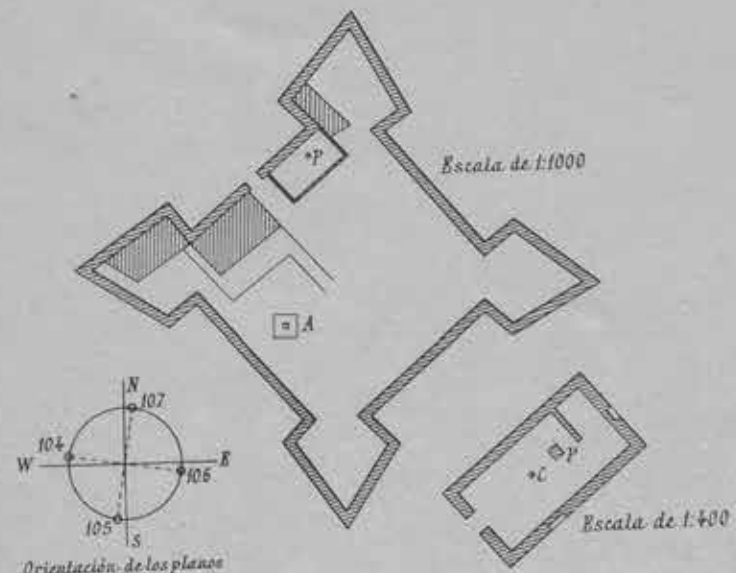


Escala de 1:200

A

Stª CRUZ DE LA PALMA

Instalación del péndulo en el Castillo de Stª Catalina



Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

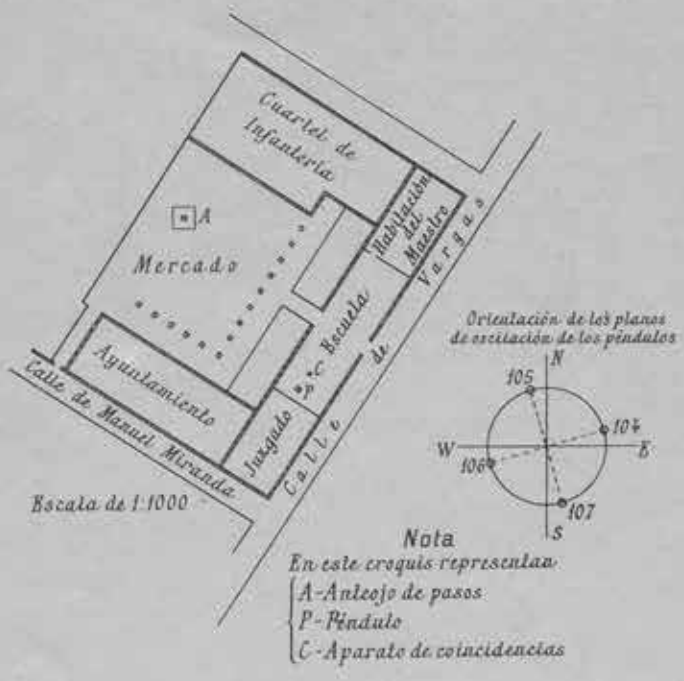
Nota

En estos croquis representan

- A-Anteojo de pasos
- P-Péndulos
- C-Aparato de coincidencias

ARRÈCIFE DE LANZAROTE

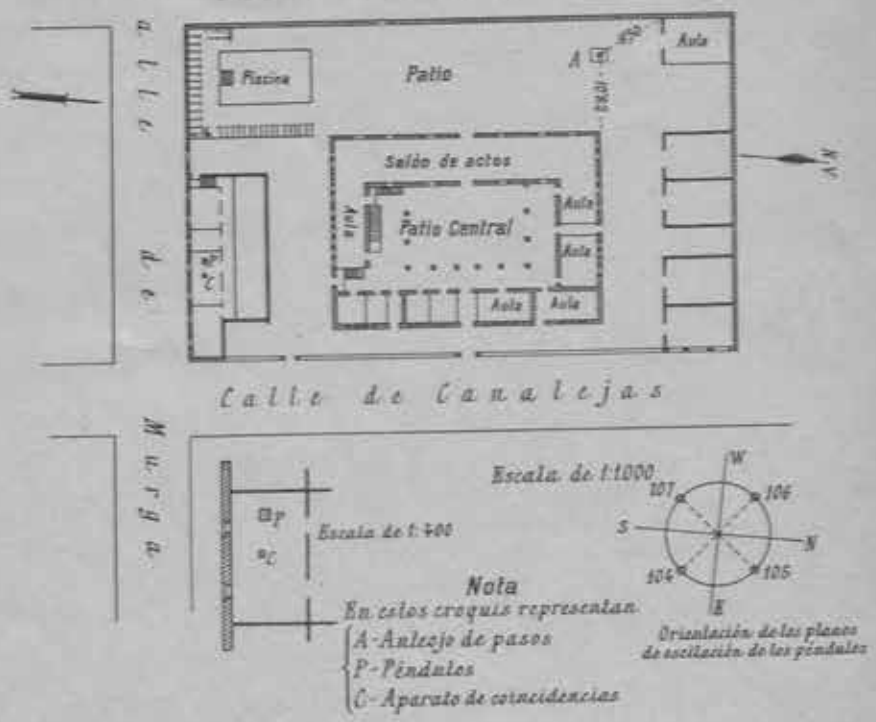
Instalación del péndulo en la Escuela municipal



LAS PALMAS

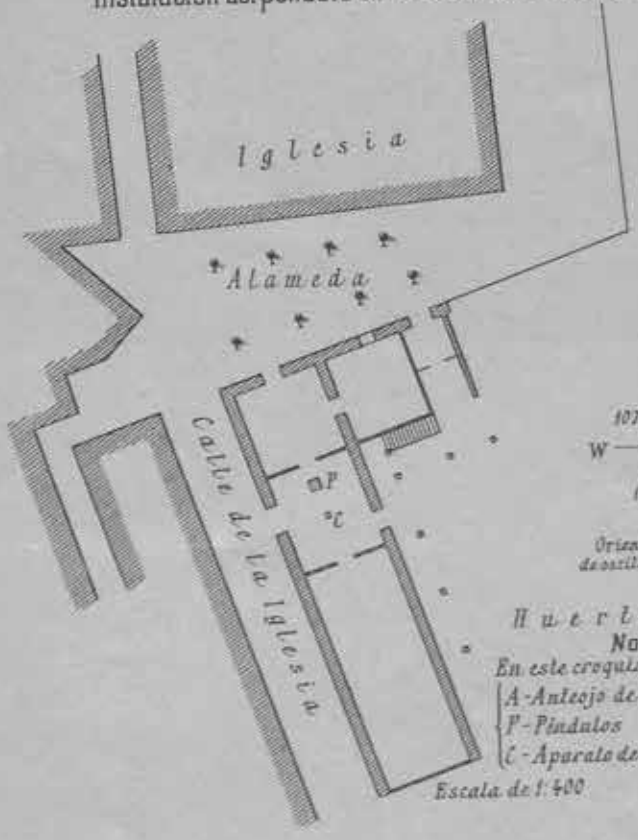
Instalación del péndulo en el colegio de Nª Sª de la Soledad

(Sótano del pabellón anexo al colegio)



S. BARTOLOMÉ DE TIRAJANA (GRAN CANARIA)

Instalación del péndulo en una casa de D Antonio Yáñez



Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

Nota

En este croquis representan:

- A - Anteojo de pasos
- P - Péndulos
- C - Aparato de coincidencias

Escala de 1:400



PALMA DE MALLORCA.—BARRACA ASTRONÓMICA EN UN PATIO DEL INSTITUTO GENERAL Y TÉCNICO



INCA—BARRACA ASTRONÓMICA



CIUDADELA.—BARRACA ASTRONÓMICA EN UN PATIO DE RECREO DEL COLEGIO DE PADRES SALESIANOS



PUERTO DE LA CRUZ.—GRAN HOTEL TAORO



OBSERVATORIO DE IZAÑA.—BARRACA ASTRONÓMICA



VISTA DEL PICO DE TEIDE DESDE EL OBSERVATORIO DE IZAÑA



SANTA CRUZ DE LA PALMA.—CASTILLO DE SANTA CATALINA



SANTA CRUZ DE LA PALMA.—VISTA DE LA POBLACIÓN DESDE EL CASTILLO DE SANTA CATALINA



LAS PALMAS.—COLEGIO DE LA SOLEDAD



SAN BARTOLOMÉ DE TIRAJANA.—CASA Y JARDÍN DE D. ANTONIO YÁÑEZ

NIVELACIONES DE PRECISIÓN

PROYECTO DE NIVELACIONES DE ALTA PRECISIÓN

PARA LA PENÍNSULA

MEMORIAS
DEL
INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL

TOMO XV.

II

NIVELACIONES DE PRECISIÓN

PROYECTO DE NIVELACIONES DE ALTA PRECISIÓN
PARA LA PENÍNSULA

POR

M. DE CIFUENTES
Jefe del Servicio.

J. M. GIL LASANTAS
Ingeniero adjunto.



MADRID
TALLERES DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL
—
1926

CAPÍTULO PRIMERO

NECESIDAD Y OBJETO DEL PROYECTO

(Descripción general del mismo.)

Acuerdo tomado por la XVII Conferencia de la Asociación Geodésica Internacional, reunida en Hamburgo en el año 1912.

Considerados los importantes progresos realizados en las nivelaciones desde el año 1867 en que por primera vez se fijaron límites a los errores admisibles de los trabajos;

Considerando el interés que desde el punto de vista geodésico tendría crear una nueva categoría más precisa, es decir, con tolerancias más reducidas y cuyos errores accidental y sistemático fueran calculados, según reglas uniformes, sobre la base de conservar sin modificación alguna las tolerancias de 1867 para las nivelaciones de precisión,

Se acuerda clasificar, en lo sucesivo, en una nueva categoría de nivelaciones de alta precisión, toda línea, grupo de líneas o red, niveladas dos veces en sentidos opuestos y en fechas tanto como sea posible distintas, y cuyos errores accidental y sistemático uniformemente calculados por medio de las fórmulas que se insertan a continuación no excedan de

1^{mm}	por kilómetro para el error	accidental probable.
$1^{mm},5$	» » »	medio.
$0^{mm},2$	» »	sistemático probable.
$0^{mm},3$	» » »	medio.

Fórmula para el error accidental probable η_r en el caso de un grupo de líneas, constituyan o no polígonos cerrados

$$\eta_r^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\varepsilon\Delta^2}{\varepsilon L} - \frac{\varepsilon r^2}{(\varepsilon L)^2}\varepsilon\frac{S^2}{L}\right], \qquad [I]$$

Fórmula para el error sistemático probable σ_r o σ_R en el caso de un grupo de líneas que no forman red

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{9 \cdot L} \cdot \frac{S^2}{L} \qquad \text{[II]}$$

En el caso de una red que por lo menos tenga una decena de polígonos

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{\cdot L^2} \left[\frac{2}{9} \cdot f^2 - \gamma_r^2 \cdot L \right] \qquad \text{[III]}$$

Para obtener los errores medios correspondientes no hay más que multiplicar las fórmulas expresadas por $\frac{9}{4}$.

En estas fórmulas se representa por

- L La longitud de una línea aislada o de un lado de un polígono de la red.
- $\cdot L$ El desarrollo total del grupo de líneas de la red.
- Δ La discordancia entre los resultados de las dos nivelaciones ejecutadas entre dos señales consecutivas.
- r La distancia entre estas dos señales.
- S La discordancia sistemática total obtenida para una línea entera o para un lado de un polígono entre las dos nivelaciones.
- f El error de cierre de un polígono después de hecha la corrección ortométrica.
- $\cdot f^2$ La suma de los cuadrados de los errores de cierre de todos los polígonos, comprendiendo el polígono total.

Este acuerdo fué adoptado por unanimidad en la citada Conferencia de la que España formaba parte, y por lo tanto, tiene que servir de norma para la ejecución de los nuevos trabajos en nuestro país, que con arreglo a esa resolución no pueden sus errores exceder de los citados límites, y además hay que deducirlos por las fórmulas previamente establecidas.

Proyecto de nivelaciones de alta precisión.

No es solamente el tener que dar cumplimiento al anterior acuerdo lo que justifica la presentación de este proyecto, sino también la necesidad sentida desde hace algún tiempo de comprobar, mediante nuevos trabajos, los antiguos de nivelaciones de precisión, que por la fecha tan lejana en que se empezaron y la poca frecuencia con que se establecieron sus señales en el terreno y en forma que no se puede comprobar su inamovilidad, no es posible hoy día, con sus propios elementos, explicar satisfactoriamente algunas anomalías de importancia que han aparecido al cerrar sus polígonos, y por esta razón, en el nuevo proyecto que se presenta, se establece el contacto con las antiguas líneas en puntos más que suficientes para poder localizar sus errores y para poder deducir por la comparación entre ambos resultados si hay

que atribuirlos a posibles desplazamientos que hayan podido sufrir las señales establecidas desde hace tantos años (en 1872 dieron principio los trabajos), o a una acumulación de aquéllos, por no haber tomado, durante la práctica de las operaciones en campo y en gabinete, todas aquellas precauciones que son esenciales en esta clase de trabajos, especialmente cuando ocurre, como en nuestro país, que forzosamente tienen que adquirir un gran desarrollo.

Desde luego se puede hacer notar que muy pocas, casi ninguna de las antiguas señales ha sido establecida en el terreno con verdadero carácter de permanencia; la mayor parte lo han sido en los pavimentos de las iglesias, Ayuntamientos, Diputaciones, etc., etc., y es natural que con el tiempo transcurrido hayan tenido que participar del movimiento de los edificios donde se han establecido. Además, colocadas aisladamente, no ha podido saberse nunca al empezar un nuevo itinerario si la señal que se ha tomado como origen para los trabajos ha sufrido algún desplazamiento con el terreno. Se ha tenido que suponer siempre su inamovilidad al empezar una campaña y forzosamente en algunos casos no habrá ocurrido así, y este error de la señal de origen introducido en esta forma durante las operaciones, necesariamente habrá tenido que manifestarse en los resultados, perturbando injustamente la bondad de las operaciones ejecutadas en el terreno. También ocurre que casi siempre se ha operado dentro de una gran incertidumbre en la longitud de metro de mira, y esto que no puede tener gran importancia en el terreno llano, la tiene, por el contrario, muy grande cuando esta clase de trabajos se desarrollan, como sucede en nuestro país, en terreno montañoso. Los cálculos, asimismo, se han ejecutado deficientemente por no haberse hecho un estudio cuidadoso de los errores, separando la parte accidental de la parte sistemática y sin corregir tampoco los resultados con arreglo a la teoría ortométrica o dinámica.

En estas condiciones se hace de todo punto imposible estudiar los errores de los antiguos trabajos de nivelación por desconocer las causas que han podido producirlos, sin que sea posible escoger ningún procedimiento basado en métodos científicos que permitiera por una compensación hacerlos desaparecer. Estos errores, en armonía con el método operatorio empleado, se manifiestan inexorablemente en los resultados, y únicamente por una rectificación en campo y en gabinete de parte de las líneas antiguas intencionadamente escogidas, empleando procedimientos y métodos de cálculos más precisos, será posible corregirlos con algún fundamento. En el adjunto croquis, que comprende la nueva red de nivelaciones de alta precisión, figuran también en doble trazo las líneas antiguas que volverán a ser niveladas; y como puede observarse por el número de enlaces que se han tenido en cuenta, habrá elementos de juicio suficientes para poder rectificar los antiguos trabajos, consiguiéndose, por lo tanto, con la realización de este proyecto, satisfacer esta apremiante necesidad, poniendo de manifiesto la precisión que corresponde a los antiguos trabajos, que por los muchos factores que han entrado en su ejecución y forma desconocida en que han intervenido la mayor parte de ellos, es de todo punto imposible, sin el auxilio de nuevas rectificaciones en el campo, explicar satisfactoriamente la causa y magnitud de sus errores. Este proyecto proporcionará además, distribuidas convenientemente por toda la superficie del país, suficiente número de puntos cuyas altitudes de gran precisión satisfarán no sólo las necesidades prácticas de los demás tra-

bajos complementarios, sino también la de todos aquellos relacionados con la Geodesia, pues sus enlaces con las fronteras portuguesa y francesa y con los 13 mareógrafos que se proyectan en el litoral, contribuirán poderosamente a dilucidar la tan debatida cuestión de si es el nivel medio del mar o las nivelaciones de gran precisión las que pueden transportar con más seguridad a grandes distancias un plano horizontal.

Constitución de la red y principios fundamentales para la ejecución de los trabajos

(véase el croquis en escala de 1 : 1.500.000).

Las nivelaciones de precisión, entre sus varios cometidos, tienen uno, desde el punto de vista geofísico, muy importante que cumplir: obtener una representación geométrica de la superficie de nivel que mejor defina la figura de la Tierra.

Esta superficie, que es la del geoide, a causa de la preponderancia de las aguas, tiene que aproximarse mucho a la de los mares en estado de equilibrio, idealmente prolongada a través de los continentes.

Las nivelaciones geométricas habían supuesto siempre que las superficies terrestres de nivel eran paralelas. Estas superficies, definidas por Clairaut y estudiadas por Laplace, como normales en todos sus puntos a la dirección de la plomada, realmente no son paralelas entre sí, y, como consecuencia de esto, en los trabajos de nivelación que se ejecutan admitiendo que los planos engendrados por el nivel son paralelos entre sí, forzosamente tienen que resultar errores, puesto que la Mecánica nos dice que entre esos planos hay equidistancias dinámicas, pero no geométricas.

Estos errores, durante mucho tiempo, pasaron confundidos con los errores inherentes a la práctica de los trabajos; pero el progreso continuo conseguido en la fabricación de los instrumentos y los métodos de trabajos los pusieron de manifiesto, y, como consecuencia, la necesidad de hacerlos desaparecer.

La teoría ortométrica y la teoría dinámica, con el mismo fundamento, pero empleando procedimientos distintos, corrigen los resultados erróneos de la nivelación debidos a la falta de paralelismo entre las superficies de nivel.

Se comprende, por lo tanto, que la altimetría de una región, respecto a la cual se desea determinar la forma del geoide, tenga que ejecutarse en forma absolutamente rigurosa; es decir, teniendo presente siempre aquellas teorías que tienen en cuenta la falta de paralelismo entre las superficies de nivel.

La aplicación de las dos teorías exige conocer la variación de la gravedad en el itinerario de las nivelaciones. La fórmula correspondiente, desde luego, proporciona esa variación a lo largo de los paralelos y de los meridianos, y, por lo tanto, únicamente a lo largo de estas líneas debería llevarse a cabo la determinación de las altitudes. Pero como en la realidad las nivelaciones geométricas también tienen que servir los intereses particulares y los del Estado, a lo largo de las carreteras, ferrocarriles, canales, etc., etc., y, por otra parte, sería imposible, por los accidentes del terreno, separarse de las vías de comunicación, no hay más remedio que subordinarse, al trazar el proyecto, a la red general de comunicaciones que existe en el país.

Corrección ortométrica y corrección dinámica.

Aun cuando las teorías ortométrica y dinámica están suficientemente desarrolladas en esta Memoria y su aplicación a la práctica de las nivelaciones perfectamente expuesta por el Ingeniero Sr. Gil Lasantas, es conveniente, sin embargo, insistir sobre el particular para esclarecer cierta ambigüedad que puede deducirse de la expresión «altitud de un punto sobre el mar» y sobre todo la que se origina con los distintos valores que se obtienen para la diferencia de nivel entre dos puntos, según han sido los itinerarios por donde se ha llevado la nivelación.

Se ha creído también conveniente la aplicación de una fórmula más general para deducir las dos correcciones y la formación de unas tablas que permitan obtener rápidamente esos valores para las distintas latitudes que afectan a la Península.

Una superficie es de nivel cuando en todos sus puntos es perpendicular a la dirección de la gravedad, definida por la plomada.

La superficie del agua tranquila, a una temperatura uniforme, es una superficie de nivel. Una superficie de nivel también se llama una superficie equipotencial, por ser el mismo el potencial de la gravedad en cada uno de sus puntos.

La diferencia en potencial, entre dos superficies equipotenciales, es igual al trabajo que hay que hacer para transportar la unidad de masa desde un punto cualquiera de una de las superficies a la otra, ya sea a favor o en contra de la acción de la gravedad.

Este trabajo o diferencia de potencial es independiente de los puntos que se escojan y del itinerario recorrido.

El trabajo para pasar desde un punto a otro de la misma superficie de nivel es nulo.

Las superficies potenciales y equipotenciales tienen sus propiedades que están ampliamente discutidas en muchos libros.

En las nivelaciones corrientes, y en el supuesto de que el trabajo de campo es suficientemente exacto, se obtiene siempre la misma diferencia de nivel entre dos puntos, cualquiera que sea el itinerario que se haya seguido. Esto implica que las superficies de nivel son paralelas entre sí. Pero como esto no es verdad, se introduce un error en las observaciones, que si se puede despreciar en las nivelaciones corrientes por ser inferior a los errores inherentes a los trabajos, ya no sucede lo mismo si se trata de nivelaciones de precisión, por ser grande la influencia sobre los resultados de la observación, debida a la falta de paralelismo entre las superficies de nivel, sobre todo si el itinerario sigue la dirección del meridiano y muy especialmente si su altitud media es considerable.

Esta corrección sería pequeña y probablemente despreciable a lo largo de una llanura próxima a la costa.

La superficie del mar y las demás superficies de nivel por encima o por debajo de él tienen aproximadamente la forma esferoidal, pero como cada una de las superficies que están por encima tienen, con respecto a la superficie del mar, un achatamiento mayor proporcional a su altitud, tienen que estar más próximos al nivel del mar en los polos que en el ecuador.

Una superficie de nivel que pasara por el ecuador a 1 000 metros sobre el mar, únicamente distaría del mar 995 metros cerca de los polos.

Esta convergencia polar, con respecto a las demás superficies, es aproximadamente proporcional a su altitud; es decir, que si la elevación sobre el mar en el ecuador es de 500 metros, en los polos solamente será de 497,50 metros, y así sucesivamente.

Si una línea corta la superficie de nivel de manera que las tangentes en todos sus puntos coincidan en la dirección de la gravedad, esto es, con la perpendicular en cada punto a la superficie de nivel que pasa por él, esta línea no será recta, sino ligeramente curva y cóncava respecto al eje de la Tierra.

Estrictamente hablando, hay entonces alguna ambigüedad en la expresión «altitud o elevación de un punto sobre el nivel del mar».

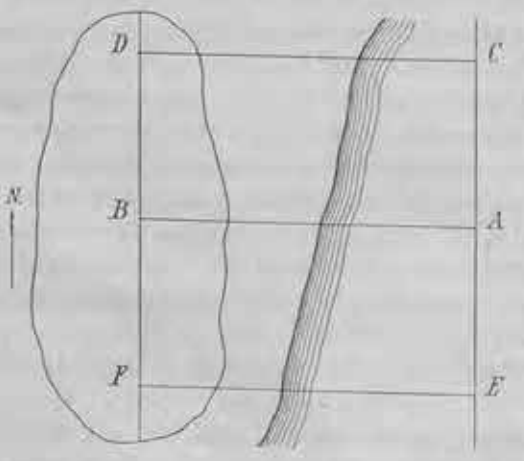
La distancia entre un punto y el nivel del mar puede ser medida de tres maneras distintas:

1.ª A lo largo de la línea curva que acabamos de citar.

2.ª A lo largo de una línea recta que sea perpendicular a la superficie de nivel que pasa por el punto que se considera y llegue hasta el nivel del mar.

3.ª A lo largo de la línea recta que pasa por el punto y sea perpendicular a la superficie del mar.

Esta última línea es la que generalmente se usa en Geodesia para reducir al nivel del mar las altitudes, con objeto de tener un punto en el nivel del mar que corresponda a otro situado encima de él, pero aun cuando tuviéramos en cuenta cualquiera de las otras dos líneas, la diferencia entre los resultados es absolutamente despreciable, pues no llega a una milésima de milímetro para una longitud de 10 000 metros, que, como se sabe, es superior a la montaña más elevada del Globo. La ambigüedad debida a esta causa no es necesario, por lo tanto, tenerla en cuenta, pero como no sucede lo mismo con la que se relaciona en los distintos itinerarios que se pueden seguir, es conveniente precisar las ideas por medio de un ejemplo.



Un caso ideal para poner de manifiesto las distintas diferencias de nivel obtenidas entre dos puntos, según haya sido el itinerario recorrido, es el siguiente:

Supongamos un lago tranquilo, orientado en la dirección N.-S., y situado en el extremo de una llanura, cerca de la orilla del mar y en el hemisferio N. Sea *B* un punto de la superficie del lago, cerca del centro, y *A* un punto del nivel del mar, en la misma latitud que *B*. Partiendo de *A* hacia el N. por la superficie del mar, ejecutemos una nivelación hasta el punto *C*, y después, por un paralelo, hasta el punto *D* de la superficie del lago, y por último, por esta superficie hacia el S. hasta llegar al punto *B*.

La diferencia de nivel entre *A* y *B* es distinta de la diferencia de nivel entre *C* y *D*.

Ejecutemos ahora otro itinerario de nivelación desde *A* hacia el S., hasta el punto *E*

situado en el mar, y después por el paralelo hasta el punto F de la superficie del lago, terminando, por último, en dirección al N. hasta llegar al punto B.

La diferencia de nivel entre A y B también es distinta de la diferencia de nivel entre E y F, y ésta superior a la obtenida por el primer itinerario, desde el momento en que las dos superficies de nivel, la del lago y la del mar, cada vez se aproximan más cuanto más se acercan al polo, teniendo que ser, por lo tanto, distintas las tres diferencias de nivel entre C y D, A y B, E y F.

Hay dos procedimientos para corregir esta ambigüedad; es decir, que prescindiendo de los errores de observación se puede siempre llegar al mismo resultado desde el mismo punto.

Un procedimiento es corregir la diferencia de nivel de tal manera que se pueda obtener la distancia en el momento preciso entre el punto B y el nivel del mar, es decir, en el caso general entre un punto cualquiera y el geoide. Esta altitud se llama altitud ortométrica de B, y la corrección que hay que aplicar a los resultados obtenidos en la nivelación para deducir de la altitud proporcionada por la observación esta altitud ortométrica, se llama corrección ortométrica.

Hay que tener presente que no se debe hablar de corrección ortométrica de una altitud, sino de corrección ortométrica de una diferencia de nivel obtenida al seguir cierto itinerario. En virtud de lo expuesto resulta que los puntos de una superficie de nivel, si están en latitudes distintas, forzosamente tienen que tener diferentes altitudes ortométricas, y, de la misma manera, si hay varios puntos situados en distintas latitudes que tienen la misma altitud ortométrica, forzosamente tienen que estar en diferentes superficies de nivel.

Para evitar estas incongruencias se recurre al segundo procedimiento, que se desentiende del concepto sencillo de tener que medir una longitud, caracterizando cada superficie de nivel con un número peculiar para toda ella.

En vez de dar la altura de un punto sobre el nivel del mar, afecta a la superficie de nivel que pasa por ese punto de un solo número. Los puntos F, B y D del nivel del lago tendrán, por lo tanto, el mismo número.

Por razones de comodidad se numeran las superficies de nivel, de tal manera que los números escogidos sean sensiblemente iguales a los que indican la altura (en la unidad elegida) de los puntos de la superficie sobre el nivel del mar.

Estos números que caracterizan las superficies de nivel se llaman cotas dinámicas, y se definen de la manera siguiente:

En el sistema métrico la cota dinámica de un punto indica el trabajo necesario para levantar la masa de un kilogramo, venciendo la acción de la gravedad, desde el nivel del mar hasta la superficie de nivel que pasa por el punto. Este trabajo se mide en kilogrametros desde el nivel del mar, en la latitud de 45 grados.

En otro sistema cualquiera se considerarán las unidades correspondientes, y, por lo tanto, de una manera general, se puede definir la cota dinámica de un punto como el trabajo necesario para elevar la unidad de masa desde el nivel del mar hasta la superficie de nivel que pasa por el punto en cuestión, no siendo necesario más, para obtener el valor correspondiente que dividir este trabajo expresado en unidades absolutas por g_{45}, que representa la aceleración normal de la gravedad al nivel del mar, en la latitud de 45 grados.

La cantidad que es necesario añadir a la altitud ortométrica de un punto para obtener la cota dinámica se llama *corrección dinámica*.

La determinación exacta de las correcciones ortométricas y dinámicas exige, por lo tanto, conocer el valor de la fuerza de la gravedad en cada uno de los puntos del itinerario; esto puede conseguirse con suficiente aproximación si hacemos determinaciones absolutas o relativas del valor de la gravedad en numerosos puntos de la línea que ha sido nivelada; pero esto hoy día es impracticable, porque no se dispone de un aparato que permita deducir rápidamente por su observación directa el valor de la gravedad, y por eso se hace uso de una expresión matemática que, partiendo de un valor medio de la fuerza de la gravedad al nivel del mar y a la latitud de 45 grados, permita deducir aproximadamente el verdadero valor en el sitio de los trabajos.

Esta fórmula, debida a Helmert, se expresa de la manera siguiente:

$$g = g_{45}(1 - \alpha \cos 2\varphi + \xi \cos^2 2\varphi - Kh), \qquad [1]$$

en la que g es el verdadero valor que se busca de la fuerza de la gravedad en un punto cualquiera del itinerario de nivelación, cuya latitud sea φ y su altitud ortométrica sea h, y g_{45} es el valor medio antes citado de la gravedad igual a 980·624 dinas en la orilla del mar y a la latitud de 45 grados α ξ y K son tres constantes. Las dos primeras, independientes de las unidades escogidas, valen en todos los sistemas, respectivamente, 0,002644 y 0,000007 y K si el sistema elegido es el métrico decimal; es decir, si h viene expresado en metros es igual $K = 0{,}0000003147$ o, más concretamente, $K = \frac{3147}{10^{10}}\left(1 + \frac{71}{10^5}\cos 2\varphi - \frac{23}{10_8}h\right)$ o, para simplificar, $K = K'(1 + \gamma \cos 2\varphi - ch)$.

Si llamamos W el trabajo para levantar la unidad de masa desde el nivel del mar hasta un punto cuya altitud ortométrica sea h, y H la cota dinámica de la superficie de nivel que pasa por el punto, tendremos:

$$W = \int_0^h g\,dh = g_{45}\int_0^h (1 - \alpha \cos 2\varphi + \xi \cos^2 2\varphi - Kh)\,dh$$

$$W = g_{45}(1 - \alpha \cos 2\varphi + \xi \cos^2 2\varphi)\,h - K'\frac{h^2}{2}\left(1 + \gamma \cos 2\varphi - \frac{2}{3}ch\right),$$

como por definición $H = \frac{W}{g_{45}}$ resulta

$$H = h - h(\alpha \cos 2\varphi - \xi \cos^2 2\varphi) - K'\frac{h^2}{2}\left(1 + \gamma \cos 2\varphi - \frac{2}{3}ch\right) \qquad [2]$$

Fórmula que establece la relación entre la altitud ortométrica y la cota dinámica.

Como H es por definición una cantidad constante para toda la superficie del nivel, la fórmula anterior puede ser considerada como la ecuación de esa superficie cuyas coordenadas sean φ y h.

Si consideramos ahora un punto infinitamente próximo de coordenadas $\varphi + d\varphi$ y $h + dh$, es evidente que la relación a la que tienen que satisfacer $d\varphi$ y dh se encontrará diferenciando la fórmula anterior, y teniendo presente que H es constante, resultará

$$dh = \frac{-2h\left(\alpha \operatorname{sen} 2\varphi - \xi \operatorname{sen} 4\varphi + K'h\frac{\gamma}{2}\operatorname{sen} 2\varphi\right)d\varphi}{1 - \alpha \cos 2\varphi + \xi \cos^2 2\varphi - K'h(1 + \gamma \cos 2\varphi - ch)} \qquad [3]$$

que queda reducida a

$$dh = -2h\alpha \operatorname{sen} 2\varphi \left[1 + \left(\alpha - \frac{2\xi}{\alpha}\right)\cos 2\varphi + K'h\left(1 + \frac{\tau}{2\alpha}\right) + \ldots\ldots\right] d\varphi. \qquad [4]$$

El término en $K'h$ puede despreciarse porque es insignificante comparado con los errores propios de la observación.

En la nivelación ejecutada en los Estados Unidos, entre San Diego y Seattle, con una altitud media de 1 000 metros, y una diferencia en latitud de 15 grados, la corrección ortométrica llegó a valer 1,250 metros, mientras que la influencia del citado término fué inferior a 0,0005 metros, y por lo tanto, prácticamente la ecuación puede ser escrita bajo la forma

$$dh = -2h\alpha \operatorname{sen} 2\varphi \left[1 + \left(\alpha - \frac{2\xi}{\alpha}\right)\cos 2\varphi\right] d\varphi. \qquad [5]$$

Esta ecuación permite corregir ortométricamente la diferencia de nivel obtenida por la observación. En un trabajo de nivelación, una vez que se ha corregido el error de curvatura y el de refracción, los dos puntos observados sobre las miras se encuentran en la misma superficie de nivel. Las miras miden las distancias desde esos puntos a sus puntos de apoyo, pero desde el momento en que el punto observado sobre la mira situada más al Norte (nos referimos al hemisferio N.) se encuentra más próximo a la superficie del mar, que el otro punto observado sobre la otra mira en una cantidad que puede ser estimada por la ecuación anterior, no habrá más remedio que corregir la diferencia de nivel observada para obtener la verdadera diferencia en altitud sobre el nivel del mar.

Esta corrección se hace por medio de esa fórmula, que puede aplicarse a distancia más grande que la que corresponde a una sencilla nivelada, sin más que tomar para valor de h la altitud media que ha tenido el nivel entre aquellos puntos, cuya verdadera diferencia en altitud se quiere determinar.

Las ecuaciones [**5**] y [**2**] proporcionan, por consiguiente, las correcciones ortométricas y dinámicas. En el primer caso para obtener las altitudes ortométricas de los puntos de la red y en el segundo para obtener las cotas dinámicas de las superficies de nivel que pasan por esos puntos.

Primer caso (corrección ortométrica):

Si en la ecuación [**5**] expresamos $d\varphi$ en minutos de arco y llamamos C al factor $2\alpha \operatorname{sen} 2\varphi \left[1 + \left(\alpha - \frac{2\xi}{\alpha}\right)\cos 2\varphi\right] \operatorname{sen} 1'$, la ecuación simplificada en esta forma será: $dh = -Chd\varphi$ (se ha incluído sen 1' para poder expresar $d\varphi$ en minutos), y, por lo tanto, la cantidad $-Chdh$ será la corrección ortométrica que hay que aplicar a la diferencia de nivel observada entre dos puntos (altitud del segundo punto menos altitud del punto de partida) para obtener su diferencia de altitud sobre el nivel del mar. En esa ecuación, h es la altitud media del aparato entre esos puntos y $d\varphi$ es la diferencia de latitud en minutos, positiva cuando el segundo punto está al N. del primero.

En cualquier unidad de longitud puede expresarse h, resultando la corrección, como es lógico, expresada en las mismas unidades.

Por consiguiente, si se forman unas tablas en las que se tome como argumento

la latitud φ de 10 en 10 minutos, por ejemplo, a la derecha en otra columna los valores de C y en otra columna los logaritmos correspondientes, tendremos todos los datos necesarios para calcular rápidamente la corrección ortométrica.

Segundo caso (corrección dinámica):

La ecuación [**2**] proporciona la corrección dinámica cuya expresión es

$$-(\alpha \cos 2\varphi - \xi \cos^2 2\varphi)\, h - K' \frac{h^2}{2}\left(1 + \gamma \cos 2\varphi - \frac{2}{3} c h\right),$$

en la que el primer término es la corrección dinámica por latitud y el segundo término la corrección dinámica por altitud.

Si para simplificar representamos por D_1 y D_2 los factores de h y h^2, respectivamente, la corrección dinámica total será $-D_1 h - D_2 h^2$, que habrá que restar de la altitud ortométrica del punto que se considera para obtener la cota dinámica de la superficie de nivel que pasa por ese punto.

Unas tablas análogas a las primeras, utilizando el argumento φ para D_1 y su logaritmo, y el doble argumento φ y h para D_2 y su logaritmo, proporcionarán los valores de esas correcciones.

Las tablas que se insertan al final contienen esas cantidades para todos los valores de φ de 10 en 10 minutos comprendidos entre los paralelos 36 y 44 grados, entre los cuales está comprendida España.

En la tabla 1.ª, bajo el mismo argumento φ, se han calculado los valores de C, D_1 y de sus logaritmos respectivos, y por las tablas 2.ª y 3.ª de doble entrada, con los argumentos φ y h, se obtienen los valores de D_2 y de su logaritmo. La variación tan lenta de D_2, que únicamente oscila entre 0,0000001575 para $\varphi = 0$ y $h = 0$, y 0,0000001571 para $\varphi = 90°$ y $h = 5000^m$; es decir, en cuatro unidades del décimo orden, consiente no tener en cuenta los valores de φ sino de 10 en 10 grados y los valores de h de 1000 en 1000 metros, como así se ha hecho en las expresadas tablas.

Aplicación práctica de la primera tabla.

Primer ejemplo (corrección ortométrica):

Supongamos que un itinerario de nivelación se ha llevado por el ferrocarril de Santander desde la estación de Venta de Baños, situada en la latitud de 41° 53′, hasta la estación de Reinosa, cuya latitud es de 43° 03′, y que la altitud media alcanzada por el nivel entre esos puntos es de 800 metros.

La tabla da para valor de C, correspondiente a la latitud media, $\varphi = 42° 28'$, $C = 0{,}000001532$, y como $d\varphi = 70'$, la corrección de $-Chd\varphi$ será

$$= -800 \times 0{,}000001532 \times 70' = -0{,}0858,$$

que habrá que aplicar a la diferencia de nivel observada 128,6080 metros para tener 128,5222 metros, es decir, la verdadera diferencia de altitud entre esos puntos sobre el nivel del mar, y, por lo tanto, si 721,0130 metros es la altura ortométrica de Venta

de Baños, la altitud ortométrica de Reinosa no será 849,6210 metros obtenida por las observaciones, sino 849,6210 — 0,0858 = 849,5352 metros.

Segundo ejemplo (corrección ortométrica):

Por las observaciones mareográficas registradas en Alicante se sabe que la altura sobre el nivel medio del mar, de un clavo metálico situado en el brocal del pozo del Mareógrafo es de 1,795 metros.

Por observaciones análogas registradas en el Mareógrafo de Santander se conoce también la longitud de la perpendicular bajada sobre el nivel medio del mar desde otro clavo semejante, situado también en el brocal del pozo de ese Mareógrafo (4,550 metros). La verdadera diferencia de nivel entre ambas señales, puesto que se trata de altitudes ortométricas, es, por lo tanto, de 2,755 metros más o menos el error inherente a las observaciones de los Mareógrafos.

Ahora bien, esta diferencia de nivel también se conoce por el trabajo de nivelación que ha transportado la altitud desde Alicante hasta Santander, pasando por Madrid, y se ha obtenido, como valor de esta diferencia entre las mismas señales metálicas, 3,472. Hay, por lo tanto, una discordancia de 0,717 entre los resultados de la nivelación y los resultados de los Mareógrafos que, a primera vista, permite dudar de la bondad del uno o del otro resultado.

Pero antes de compararlos apliquemos la corrección ortométrica a la nivelación ejecutada entre Alicante (latitud = 38° 21′) y Santander (latitud = 43° 28′), y tomemos como valor medio de h, en el itinerario de los trabajos (Alicante, Madrid, Santander), $h = 800$ metros; tendremos por la tabla 1.ª, para φ (latitud media = 41°, $C = +\ 0{,}000001523$ y, por lo tanto, la corrección ortométrica correspondiente a Santander $-\ Ch d\varphi = -\ 0{,}000001523 \times 300' \times 800 = -\ 0{,}3655$ metros, que reduce la discordancia anterior a 0,3505, más explicable por los errores que se hayan podido cometer al hacer la nivelación entre Madrid-Santander.

Tercer ejemplo (corrección dinámica):

Se desea saber la cota dinámica H de la superficie de nivel que pasa por la estación de Reinosa, cuya altitud ortométrica calculada es $h = 849{,}5352$ metros.

El valor que buscamos es $H = h - D_1 h - D_2 h^2$, en la que el término $-\ D_1 h$ es la corrección dinámica por latitud, igual en este caso, según la tabla 1.ª, para la latitud de 43° 03′ de Reinosa $-\ D_1 h = -\ 0{,}1564$, y el término $-\ D_2 h^2$ es la corrección dinámica por altitud que, en el caso presente (tablas 2.ª y 3.ª) es $= -\ D_2 h^2 = -\ 0{,}1136$. Por lo tanto, la cota dinámica que buscamos será

$$H = h - D_1 h - D_2 h^2 = 849{,}5352 - 0{,}1564 - 0{,}1136 = 849{,}4924,$$

que es un número que no expresa longitud, sino el trabajo en kilogrametros que se precisa hacer para elevar la masa de un kilogramo desde la superficie del mar en la latitud de 45 grados hasta la superficie de nivel que pasa por ese punto de Reinosa, cuya altitud ortométrica es de 849,5352 metros, pudiéndose disponer esta comparación entre los dos valores ortométrico y dinámico de los distintos puntos de la nivelación en la forma siguiente:

Comparación entre las altitudes ortométricas y las cotas dinámicas.

Señales de la nivelación.	Latitud φ	Altitud ortométrica h	Corrección dinámica por latitud $-D_1 h$	Corrección dinámica por altitud $-D_2 h^2$	Corrección dinámica total.	Cota dinámica H
	° '	Metros.				Kilogrametros.
N. P. Reinosa, estación del ferrocarril.	43 03	849,5352	— 0,1564	— 0,1136	— 0,0428	849,4924

Corrección ortométrica ..... $(-Chd\varphi)$
Corrección dinámica ..... $(-D_1 h - D_2 h^2)$.

Tabla 1.ª

Proporciona los valores de C y D_1 y de sus logaritmos.
C está expresado en unidades del noveno orden decimal.
D_1 está expresado en unidades del sexto orden decimal.
Hay que sobreentender — 10 con log C y log D_1.
El signo de D_1 es independiente del signo de la latitud.

Latitud φ	C	Log C	D_1	Log D_1
° '				
36 00	+ 1 462	4,1649	+ 816	6,9119
10	+ 1 464	4,1657	+ 802	6,9040
20	+ 1 467	4,1665	+ 787	6,8960
30	+ 1 470	4,1673	+ 772	6,8879
40	+ 1 472	4,1680	+ 758	6,8795
50	+ 1 475	4,1688	+ 743	6,8710
37 00	+ 1 478	4,1695	+ 728	6,8623
10	+ 1 480	4,1703	+ 713	6,8534
20	+ 1 482	4,1710	+ 699	6,8443
30	+ 1 485	4,1717	+ 684	6,8350
40	+ 1 487	4,1723	+ 669	6,8254
50	+ 1 489	4,1730	+ 654	6,8157
38 00	+ 1 492	4,1736	+ 639	6,8057
10	+ 1 494	4,1743	+ 624	6,7954
20	+ 1 496	4,1749	+ 609	6,7849
30	+ 1 498	4,1755	+ 594	6,7741
40	+ 1 500	4,1761	+ 579	6,7630
50	+ 1 502	4,1766	+ 564	6,7516
39 00	+ 1 504	4,1772	+ 549	6,7399
10	+ 1 506	4,1777	+ 534	6,7278
20	+ 1 507	4,1782	+ 519	6,7154
30	+ 1 509	4,1787	+ 504	6,7026
40	+ 1 511	4,1792	+ 489	6,6894
50	+ 1 513	4,1797	+ 474	6,6758

Latitud φ	C	Log C	D_1	Log D_1
° ′				
40 00	+ 1 514	4,1802	+ 459	6,6617
10	+ 1 516	4,1806	+ 444	6,6472
20	+ 1 517	4,1810	+ 429	6,6321
30	+ 1 519	4,1815	+ 413	6,6164
40	+ 1 520	4,1819	+ 398	6,6002
50	+ 1 521	4,1822	+ 383	6,5833
41 00	+ 1 523	4,1826	+ 368	6,5657
10	+ 1 524	4,1830	+ 353	6,5473
20	+ 1 525	4,1833	+ 337	6,5281
30	+ 1 526	4,1836	+ 322	6,5080
40	+ 1 527	4,1839	+ 307	6,4869
50	+ 1 528	4,1842	+ 292	6,4648
42 00	+ 1 529	4,1845	+ 276	6,4414
10	+ 1 530	4,1848	+ 261	6,4166
20	+ 1 531	4,1850	+ 246	6,3904
30	+ 1 532	4,1853	+ 230	6,3625
40	+ 1 533	4,1855	+ 215	6,3326
50	+ 1 534	4,1857	+ 200	6,3005
43 00	+ 1 534	4,1859	+ 184	6,2658
10	+ 1 535	4,1861	+ 169	6,2280
20	+ 1 535	4,1862	+ 154	6,1867
30	+ 1 536	4,1864	+ 138	6,1410
40	+ 1 536	4,1865	+ 123	6,0899
50	+ 1 537	4,1866	+ 108	6,0319
44 00	+ 1 537	4,1867	+ 92	5,9650

Tabla 2.ª

Proporciona los valores de D_2 en unidades del décimo orden decimal. D_2 es siempre positivo.

φ / h	0 metros.	1 000 metros.	2 000 metros.	3 000 metros.	4 000 metros.	5 000 metros.
0°	1 575	1 574	1 574	1 574	1 574	1 573
10	1 575	1 574	1 574	1 574	1 574	1 573
20	1 574	1 574	1 574	1 574	1 573	1 573
30	1 574	1 574	1 574	1 573	1 573	1 573
40	1 574	1 573	1 573	1 573	1 573	1 572
50	1 573	1 573	1 573	1 573	1 572	1 572
60	1 573	1 573	1 572	1 572	1 572	1 572
70	1 573	1 572	1 572	1 572	1 572	1 572
80	1 572	1 572	1 572	1 572	1 572	1 571
90	1 572	1 572	1 572	1 572	1 571	1 571

Tabla 3.ª

Proporciona los valores de log D_1.
D_1 es siempre positivo.
— 10 hay que tenerlo en cuenta como parte de la característica.

φ / h	0 metros.	1 000 metros.	2 000 metros.	3 000 metros.	4 000 metros.	5 000 metros.
0°	3 1972	3 1971	3 1970	3 1970	3 1969	3 1968
10	1971	1971	1970	1970	1969	1968
20	1971	1970	1970	1969	1968	1968
30	1970	1970	1969	1968	1968	1967
40	1969	1969	1968	1967	1966	1966
50	1968	1968	1967	1966	1965	1965
60	1967	1966	1966	1965	1965	1964
70	1966	1966	1965	1964	1964	1963
80	1966	1965	1965	1964	1963	1962
90	3 1966	3 1965	3 1964	3 1964	3 1963	3 1962

Es evidente que si a lo largo del itinerario se han hecho numerosas observaciones relativas de la intensidad de la gravedad, las cotas dinámicas pueden obtenerse directamente y con más rapidez que las altitudes ortométricas; claro es que para esto es necesario conocer la cota dinámica de un punto de partida, siendo entonces sencillo transportarlas por medio de la nivelación a otro punto que no estuviera muy distante. Para conseguirlo, si designamos por $\Delta h'$ la diferencia de nivel obtenida por la observación y por g el valor medio de la intensidad de la gravedad que corresponde al itinerario, la diferencia entre las cotas dinámicas de los dos puntos será $\frac{\Delta h'}{g_0} g$; este valor de g puede obtenerse directamente o por interpolación entre dos estaciones adyacentes, y el punto correspondiente del itinerario será aquél cuya proyección sobre el geoide sea el centro de la recta que una las proyecciones de los extremos, y cuya altitud sea también el promedio de sus altitudes, valores estos que no necesitan conocerse con gran exactitud.

Si la gravedad no puede ser observada podemos partir del valor teórico de g y deducir también las cotas dinámicas, sin que tenga que intervenir para nada la altitud ortométrica. Con este objeto, si representamos por g el valor teórico de la gravedad, la fórmula anterior $\frac{g}{g_0} \Delta h'$ (ver fórmula [1]) se transformará en

$$(1 - \alpha \cos 2\varphi + \xi \cos^2 2\varphi - Kh)\Delta h' = \Delta h' - (D_1 + Kh)\Delta h',$$

cuyo segundo término indica la corrección que hay que aplicar a la diferencia de nivel observada $\Delta h'$ para obtener la diferencia entre las cotas dinámicas.

No obstante, pudiera desconocerse la ley de la variación de la gravedad con la

altitud y con la latitud, y desear la altitud ortométrica de un punto disponiendo solamente de valores de la gravedad obtenidos por la observación. En este caso las cotas dinámicas deben obtenerse primero punto por punto, y en seguida los dos valores (distancia y gravedad) deben medirse a lo largo de la vertical sobre el geoide.

La cota dinámica *cero* representa la superficie del geoide, y la distancia entre un punto dado y el geoide es la altitud ortométrica del punto.

Se ha comprobado prácticamente que la fórmula [1], que expresa la variación de gravedad normal es suficientemente exacta, estando de acuerdo con los valores obtenidos directamente por las observaciones en las regiones relativamente llanas. Esto es debido a que el último término que expresa la influencia de la altitud es menos aproximado que los demás, y por eso en las regiones montañosas en que se observan diferencias sensibles entre el valor real de la gravedad y el normal deducido de la fórmula, ya no será posible, sin cometer errores, basarse en la aplicación de esa fórmula, siendo entonces preferible conocer el valor real de la gravedad en el sitio de los trabajos.

Si dispusiéramos de un instrumento que rápidamente nos determinara el valor absoluto de la gravedad en una región, el problema estaría resuelto; pero como por hoy día esto no es posible será preciso contentarse con un valor relativo, tomando como base una determinación de la gravedad hecha con toda la precisión posible en una estación situada en el centro de la región de los trabajos, y entonces, si disponemos de un cierto número de estas estaciones convenientemente distribuídas en el proyecto de nivelación, conseguiríamos cotas dinámicas y altitudes ortométricas de la mayor precisión.

Afortunadamente para nuestro país, en que los trabajos de la determinación de la gravedad han alcanzado tanto desarrollo, el proyecto de «Nivelaciones de alta precisión» queda enlazado en aquéllos en un número suficiente de estaciones para poder deducir la corrección ortométrica, teniendo en cuenta el valor real de la gravedad en la zona de los trabajos.

Al desarrollar este proyecto se han tenido en cuenta las vías férreas con preferencia a las carreteras, porque la pendiente más uniforme de sus líneas proporciona para la misma distancia horizontal menor número de estaciones de nivel en beneficio de la exactitud de las nivelaciones. Pero, sobre todo, lo que más ha influído al seguir este criterio es la necesidad de colocar las señales para los trabajos bajo el amparo y vigilancia de los ferrocarriles, donde indudablemente quedan mejor protegidas que en las carreteras de la mala intención de voluntades inconscientes. Además, sus medios rápidos de comunicación permiten con mucha más facilidad la inspección y reparación de las señales, así como la rectificación que haya que efectuarse en los trabajos. Por estas razones, este proyecto, de una longitud total de 10 000 kilómetros, comprende 7 000 kilómetros por las vías férreas y 3 000 kilómetros por las carreteras.

Estas líneas que se han escogido para los nuevos trabajos, al cortarse unas en otras, forman 19 polígonos cerrados

$$A, B, C, D, E, G, H, I, J, K, L, N, O, Q, R, S, T, U, V,$$

y ocho polígonos abiertos o zonas limitadas por las dos fronteras; cuatro con las nivelaciones francesas (F, F', F'', F''') y otras cuatro con las de Portugal (P, P', P'', P'''),

estando también enlazadas con el nivel medio del mar en el Mediterráneo por los Mareógrafos proyectados en Port-Bou, Tarragona, Sagunto, Alicante, Almería y Málaga, y con el nivel medio del Atlántico por los Mareógrafos en Cádiz, Huelva, Vigo, La Coruña, Gijón, Santander y San Sebastián.

Estos Mareógrafos se han distanciado unos 300 kilómetros aproximadamente, para que el error probable con que pueda obtenerse la diferencia de nivel entre dos señales de la nivelación inmediatas a dos Mareógrafos sucesivos por sus observaciones sea sensiblemente el mismo que el que resultaría para la misma diferencia de nivel por el trabajo de nivelación, error este último que, como se sabe, aumenta con la distancia y que, con arreglo a las condiciones estipuladas, es función de $1^{mm} \sqrt{K}$ y $0^{m},2\,K$.

Estos Mareógrafos, que constituyen la red mareográfica de la Península, cuyo proyecto ha sido presentado previamente y ha merecido ser aprobado por la Dirección general, no tienen más objeto que proporcionar la base de referencia indispensable para los nuevos trabajos de nivelación. Es decir, determinar por sus observaciones, con la mayor precisión, la distancia vertical sobre la superficie del geoide de sus 13 referencias metálicas, que son, a su vez, señales de los nuevos trabajos y puntos de origen para sus altitudes, y únicamente en esta forma debe quedar referida al geoide la altimetría de todo el país, rechazando la posibilidad de atribuir al nivel medio de un mar lejano del Mareógrafo que se haya escogido como origen la altitud transportada por el trabajo de nivelación seguramente afectado de errores accidentales y sistemáticos.

En estas condiciones cada origen de altitudes conserva el valor que le ha sido asignado por el Mareógrafo más próximo, y es lógico que así sea, pues si con arreglo a las condiciones impuestas el error probable kilométrico con que debe obtenerse las altitudes de los nuevos trabajos no puede exceder de un milímetro, es natural que a las altitudes de origen les corresponda, por lo menos, la misma precisión, y esto únicamente puede conseguirse dándoles el valor directamente calculado por las observaciones del Mareógrafo más cercano.

Es, por lo tanto, indispensable establecer las condiciones que cada Mareógrafo tiene que cumplir según la localidad, eligiendo el aparato más apropósito para conseguir en la determinación del nivel medio del mar la precisión que mejor se armonice con los errores de los nuevos trabajos de alta precisión.

Estos Mareógrafos únicamente necesitan funcionar el tiempo que sea indispensable para su cometido, y una vez obtenidos los resultados pueden desaparecer. En el citado proyecto se propone, sin embargo, que dos de esas estaciones sigan funcionando permanentemente, consideradas como estaciones reguladoras, una en el Occéano y otra en el Mediterráneo, dedicadas a toda clase de investigaciones científicas relacionadas con el estudio de las mareas, sin perjuicio de seguir también observando la altitud del nivel medio, que como es sabido es casi invariable de un año para otro.

La referencia externa e interna de los Mareógrafos que por estar establecidos sobre la obra viva nunca se pueden considerar estables, se referirán a la distancia que sea necesaria a un grupo de tres o cuatro señales permanentes (próximas entre sí) de la nivelación y que se considerarán como la verdadera referencia del Mareógrafo y punto de partida para las altitudes.

Los polígonos de la red se designan por sus letras respectivas y el lado común a dos polígonos es lo que constituye una sección y se designará por la combinación de las dos letras de los polígonos correspondientes; por ejemplo: la sección *Q-T* será el ferrocarril de Córdoba a Sevilla, y estos dos puntos las cabezas de sección por donde deben empezar siempre los trabajos de campo cuando se empiece un nuevo polígono.

La dirección general de los trabajos dentro de cada polígono en el campo y en el gabinete puede considerarse en el sentido de las agujas del reloj.

Las secciones, por su excesiva longitud, pueden dividirse en subsecciones, y éstas a su vez, en trozos, que será aquella distancia mínima de tres kilómetros que en los distintos itinerarios esté comprendida por dos grupos de tres señales principales.

Se ha procurado en este proyecto que al cruzarse unas líneas con otras no concurran en cada cabeza de sección más de tres itinerarios, y esto se hace con el objeto de reducir al mínimun los distintos valores que necesariamente tienen que obtenerse para la altitud de la señal del terreno donde concurren varios itinerarios.

En estos vértices, al empezar o terminar los trabajos, debe establecerse un grupo de cuatro señales principales, en condiciones inmejorables de estabilidad y de independencia, pues hay que tener en cuenta que puede transcurrir mucho tiempo antes de volver a reanudar el trabajo que quedó interrumpido en una cabeza de sección. La ejecución de estos trabajos, teniendo en cuenta su desarrollo y la forma con que deben colocarse las señales en el terreno según se propone más adelante, exige el establecimiento de 10000 señales permanentes y 10000 señales metálicas secundarias.

Indudablemente que el criterio que se siga en la elección de los polígonos que constituyen la red, teniendo en cuenta su forma más o menos regular así como el desarrollo de sus perímetros, influirá considerablemente en los resultados de las nivelaciones.

En nuestro país, en que la red de comunicaciones es tan escasa, no se han podido escoger siempre los mejores itinerarios, pues no ha habido más remedio que ceñirse a los ferrocarriles y a las carreteras que le atraviesan. Y respecto al desarrollo de los polígonos, desde luego se reconoce que es excesivo, pero razones de orden práctico para la pronta terminación de los trabajos, y sobre todo, de orden económico, no han aconsejado, al trazar este proyecto, aumentar el número de sus polígonos, satisfaciendo mejor las exigencias de un trabajo que requiere tanta precisión, y por otra parte, no hay que perder de vista que la antigua red de nivelaciones de precisión comprende toda la superficie del país, y que sus altitudes satisfacen prácticamente las necesidades de los demás trabajos complementarios, siendo, por lo tanto, el verdadero cometido de estos nuevos trabajos distribuir por el país un número suficiente de altitudes que consientan las rectificaciones de los antiguos trabajos, y, al mismo tiempo, cumplir desde el punto de vista geodésico con el cometido que no pudieron realizar aquéllas.

Los Ingenieros de este Servicio estiman que tal como está concebido el proyecto se pueden cumplir esas condiciones, es decir, que no se puede, sin comprometer seriamente la precisión de los resultados, aumentar el desarrollo de los polígonos, disminuyendo su número, siendo, por lo tanto, muy interesante respecto a este particular hacer algunas consideraciones.

Para caracterizar la precisión de una red de nivelación, se creía que era suficiente conocer el error medio accidental por kilómetro, deduciéndolo de la comparación de las discordancias entre los dos resultados de un itinerario, o deduciéndolo de los errores de cierre de los polígonos de la red.

Pero en la práctica sucede que a esos errores se suman otros de carácter sistemático cuya influencia pequeña sobre cortos itinerarios es mucho más grande que la de los errores accidentales en las líneas de mucha longitud, y que hace inadmisible el procedimiento, en esta clase de trabajos, de querer cruzar el territorio de parte a parte con un itinerario de nivelación, y que como ocurriría en la Península, tendría además que pasar por la parte más elevada del país. El trabajo desarrollado en esta forma sería progresivamente más erróneo, pues mientras que el error accidental es indiferentemente positivo o negativo y su influencia se manifiesta solamente en función de la raíz cuadrada de la distansia, el error sistemático es, por el contrario, siempre del mismo signo; aumenta absolutamente con la distancia, adquiriendo al final del itinerario un valor mucho más grande que el error accidental.

Se hace, por lo tanto, necesario determinar separadamente el valor de los dos errores. El sistemático puede obtenerse de un modo directo acumulando algebraicamente las discordancias obtenidas en la doble operación, para las mismas señales fijas situadas en el itinerario, porque como la parte accidental es indiferentemente positiva o negativa resultará compensada en esta acumulación, y por consiguiente el resultado final será la expresión de la parte sistemática correspondiente a todo el itinerario. Conocida la discordancia sistemática para toda la longitud, conoceremos también la discordancia sistemática por kilómetro y, por lo tanto, el error probable sistemático de la media de la doble operación, pues ya se sabe que es igual a la tercera parte de la discordancia.

Una vez conocida la discordancia sistemática correspondiente a toda la sección, o a la de sus trozos, si la eliminamos de la discordancia efectiva obtenida entre las mismas señales, obtendremos la que corresponda a la parte accidental del itinerario que hayamos considerado, de la que podemos deducir la que corresponde a un kilómetro y, por lo tanto, el error probable accidental kilométrico de la media de la doble nivelación.

Esta determinación de los errores accidental y sistemático lo mismo puede hacerse por secciones enteras o por trozos de sección que *a posteriori*, teniendo en cuenta los errores de cierre de los polígonos de la red, y con objeto de conseguirlo de una manera uniforme para poder comparar los resultados obtenidos por los distintos países es por lo que se han establecido las fórmulas de carácter internacional previamente citadas.

Los resultados de la nivelación vienen, por lo tanto, afectados de errores sistemáticos y accidentales, y la práctica de estas operaciones en los distintos países ha puesto de manifiesto siempre que es mucho más temible la influencia de los primeros, sobre todo en las secciones de mucha longitud que forman parte de polígonos de gran desarrollo.

Los progresos conseguidos en la construcción de los instrumentos y la organización con que pueden llevarse a cabo las operaciones en el campo y en gabinete consienten que la precisión de los resultados cumplan con las condiciones establecidas

de que el error probable accidental por kilómetro no exceda de un milímetro. Pero como con respecto a los errores sistemáticos, desgraciadamente no están bien determinadas las causas que puedan producirlos, pues únicamente la práctica de los trabajos los ponen de manifiesto, sin que pueda saberse si guardan alguna relación con la orientación del itinerario, con las condiciones atmosféricas o con la naturaleza del terreno, etcétera, etc., ya es más difícil, sobre todo por las condiciones tan desfavorables de nuestro país con respecto a las demás naciones, mantenerse dentro del límite de 0,2 de milímetro impuesto para el coeficiente de este error (probable kilométrico), y no quedará más remedio que ejecutar frecuentes rectificaciones en los trabajos, en cuanto se manifieste la influencia de una causa sistemática y eliminar la incertidumbre de la verdadera longitud del metro de las miras empleadas, sobre todo cuando se opere en terreno montañoso, estudiando cuidadosamente en el comparador las cintas de la mira después de los trabajos de campo.

Para aumentar la precisión de estos trabajos es, por lo tanto, preferible una disminución en los errores sistemáticos que en los accidentales. Desgraciadamente, por el desconocimiento de las causas a que son debidos los primeros, se hace imposible tenerlos en cuenta antes de los trabajos, y por hoy día el único procedimiento práctico para atenuar su influencia en los resultados de una nivelación de precisión es el reducir las dimensiones de los polígonos de la red, de acuerdo con el buen resultado obtenido en los trabajos ejecutados en Holanda sobre polígonos reducidos y el mal resultado que ha dado, en cambio, la nivelación en los Estados Unidos de los grandes polígonos de 2 000 kilómetros de desarrollo.

La longitud media de los polígonos de la red es de unos 700 kilómetros, habiendo resultado con excesivo desarrollo los polígonos *C*, *J*, *K* y *V* por la escasez de vías de comunicación en esas regiones, que no ha permitido proyectarlos de otra forma. De todas maneras, como fatalmente tendrá que transcurrir mucho tiempo antes de la completa terminación de estos trabajos, la implantación de nuevas vías seguramente ofrecerá la ocasión, el día de mañana, de modificar beneficiosamente algún detalle de este proyecto que, por estas razones, no debe considerarse absolutamente definitivo.

Todas las capitales de provincia, excepto Avila, Granada, Murcia y Soria, se encuentran comprendidas en el proyecto, como también un gran número de vértices de la Red geodésica de 1.er orden y muchas de las estaciones donde se ha efectuado la determinación de la intensidad de la gravedad; es decir, que la nueva red de nivelaciones ha sido enlazada en suficiente número de puntos con la superficie del geoide, con la antigua red de nivelaciones de precisión, con la nivelación de Francia y Portugal, con la red de gravimetría y con la triangulación geodésica de 1.er orden, y en estas condiciones se comprende fácilmente que la ejecución de sus trabajos permita sacar provechosa enseñanza y conseguir práctica y científicamente el objetivo que con ellos se persigue.

La ejecución de estos trabajos debe organizarse en forma de que se empiecen a nivelar los polígonos situados en el litoral comprendidos entre dos Mareógrafos sucesivos, por secciones completas dentro de cada polígono; es decir, que no debe interrumpirse nunca el trabajo de una sección para pasar a otra y menos a otro polígono, sin que antes haya quedado completamente terminada su nivelación y calculados sus errores, accidental y sistemático kilométricos, dentro de los límites previamente mar-

cados. En esta forma se continuarán los trabajos nivelando todos los polígonos del litoral para continuar después sucesivamente por los demás polígonos hacia el interior del país, con objeto de encontrar en las secciones próximas a Madrid la comprobación definitiva de los trabajos que han sido referidos por los polígonos *D*, *C*, *A*, *V*, *U* y *T* al nivel medio del mar en el Mediterráneo, y por los polígonos *L*, *K*, *J*, *I* y *E* al nivel medio del mar en el Océano. Estos trabajos, que pueden ejecutarse simultáneamente en dos polígonos situados en uno y otro litoral, exigen por su naturaleza una minuciosidad y lentitud en las operaciones sobre el terreno, que no permiten a una pareja de observadores nivelar más de un kilómetro diario en debidas condiciones, y como el desarrollo total de los itinerarios es de unos 10 000 kilómetros habrá que fijarse en la cantidad de personal que ha de intervenir en su ejecución para que prácticamente sea realizable la ejecución de todo el proyecto.

Si convenimos, por ejemplo, que los trabajos van a dar principio por la nivelación del polígono *A* del litoral comprendido entre los Mareógrafos proyectados en Sagunto y en Alicante, se nivelarán independientemente, empezando por la sección del litoral las cinco secciones *AM*, *AV*, *AR*, *AB* y *AC* del referido polígono, ejecutándose los cálculos correspondientes para asegurarse de que el error probable kilométrico en cada una de las secciones es inferior a $1^{mm}\sqrt{K}$ para la parte accidental y $0^{mm},2K$ para la parte sistemática. Conseguido esto se comprueba la diferencia de nivel obtenida entre las señales principales establecidas en Alicante y Sagunto, con la determinada directamente por las observaciones de los Mareógrafos. Estas dos diferencias de nivel tienen que ser iguales dentro de la tolerancia impuesta por los errores que forzosamente hay que cometer durante la observación.

Si esto, efectivamente, ocurre así, se tomarán como punto de partida las señales principales de Sagunto y de Alicante para dar altitudes a los itinerarios próximos a ellas, consiguiéndose de esta manera ir localizando en cada Mareógrafo los errores que forzosamente tiene que arrastrar la nivelación. Con respecto al polígono de referencia puede organizarse el trabajo en forma de que tomando como origen la altitud de la señal principal de Sagunto, obtenida por las observaciones de su Mareógrafo, se den altitudes a las secciones *AM*, *AC* y *AB* del polígono y, partiendo de la altitud conocida de Alicante por las observaciones de su Mareógrafo, se den altitudes a las secciones *AV* y *AR* del polígono.

En estas condiciones, en el vértice Cuenca encontraremos la comprobación de los trabajos ejecutados en el polígono al comparar los dos valores que necesariamente aparecerán para el citado vértice. Esta discordancia, que es el error de cierre del polígono, estará integrada por el error inherente a las observaciones y el ortométrico en función de los dos itinerarios que se han seguido. Eliminando esta última por la corrección ortométrica, lo que queda expresará el cierre ortométrico del polígono, que si se encuentra dentro de los límites de error previamente marcados, nos dará la seguridad de que el trabajo de nivelación en cada una de las secciones ha sido bien ejecutado. Cuando por la interrupción o deficiencia de la observación de alguno de los Mareógrafos no sea posible conocer con la debida garantía la altitud de su referencia sobre el nivel medio del mar, se tendrá en cuenta la altitud que viene arrastrada por la nivelación, siempre que este trabajo se encuentre dentro del límite de error impuesto por la fórmula $1^{mm}\sqrt{K}$; es decir, que si en el polígono *A*, por ejemplo, las observa-

ciones obtenidas por el Mareógrafo de Sagunto han sido deficientes (sin perjuicio de cerrar el polígono *A* por la nivelación obtenida partiendo de la señal inicial de Alicante), después de haber nivelado el polígono *C* se debe cerrar el polígono *A* + *C*, partiendo simultáneamente de las altitudes mareográficas de Alicante y de Tarragona para encontrar en el vértice Teruel la comprobación de los trabajos. Realmente no debe nunca presentarse el caso de no poder aprovechar las observaciones de un Mareógrafo por defectuosas, pues hay que contar de antemano con ellas, y esto es factible y rápido, pues no se trata más que de asegurar su funcionamiento durante trescientos setenta días seguidos solamente.

Recibido en este servicio el nuevo material de campo que fué adquirido por la Casa Zeiss, de Jena (Alemania), se procedió al estudio de los niveles y de sus errores, que quedarán completamente terminados después de las experiencias que actualmente se están ejecutando en el polígono de ensayos proyectado entre Aranjuez y Madrid. A continuación se describen los citados instrumentos, manera de corregirlos y las normas para realizar los trabajos, así como el método analítico que hay que desarrollar para la determinación aislada de los errores accidental y sistemático, y la manera de aplicar las correcciones ortométricas y dinámicas, y terminando, por último, con la descripción de las señales que deben emplearse en los trabajos y manera de establecerlas en el terreno, factor este último el más importante, a juicio de este servicio, y que más influencia puede tener en los resultados de la nivelación.

Proyecto de nivelaciones de alta precisión.

SECCIONES		KILÓMETROS
A B	Carretera de Cuenca a Teruel	148
A C	Ferrocarril de Teruel a Sagunto	137
A R	Carretera de Albacete a Cuenca	152
A V	Ferrocarril de Alicante a Albacete	177
B C	Idem de Calatayud a Teruel	132
B G	Idem de Jadraque a Calatayud	140
B H	Idem de Madrid a Jadraque	105
B N	Idem de Aranjuez a Madrid	49
B R	Idem de Cuenca a Aranjuez	152
C D	Idem de Lérida a Tarragona	103
C E	Idem de Zaragoza a Tardienta	52
C F	Idem de Tardienta a Lérida	131
C G	Idem de Calatayud a Zaragoza	96
D F'	Carretera de Lérida a Puigcerdá	187
D F''	Ferrocarril de Puigcerdá a Barcelona	120
E F	Idem de San Sebastián a Liédena	142
	Carretera de Liédena a Jaca	68
E F'	Ferrocarril de Jaca a Tardienta	133
E G	Idem de Zaragoza a Miranda de Ebro	240
E I	Idem de Miranda de Ebro a Deva	94
F F'	Carretera de Somport a Jaca	62
F'' F'''	Idem de Le Perthus a Figueras	32
G H	Idem de Jadraque a Burgos	255

SECCIONES		KILÓMETROS
G I	Ferrocarril de Burgos a Miranda de Ebro	90
H I	Idem de Venta de Baños a Burgos	84
H J	Idem de Medina del Campo a Venta de Baños	79
H N	Idem de Madrid a Medina del Campo	191
I J	Idem de Venta de Baños a Santander	230
J K	Carretera de León a Gijón	150
	Ferrocarril de Astorga a León	52
J N	Idem de Medina del Campo a Zamora	90
J P	Idem de Zamora a Astorga	119
K L	Idem de Monforte a La Coruña	186
K P	Idem de Astorga a Monforte	186
L P	Idem de Monforte a Guillarey y ramal a Túy	144
N O	Idem de Algodor a Toledo	14
	Carretera de Toledo a Torrijos	29
	Ferrocarril de Torrijos a Plasencia	168
N P	Idem de Salamanca a Zamora	66
N P'	Idem de Plasencia a Salamanca	163
N R	Idem de Aranjuez a Algodor	42
O P'	Idem de Arroyo de Malpartida a Plasencia	77
O P''	Idem de Mérida a Arroyo de Malpartida	90
O Q	Idem de Almorchón a Mérida	121
O R	Idem de Algodor a Puertollano	150
O S	Idem de Puertollano a Almorchón	118
P P'	Idem de Salamanca a la Fregeneda	126
P' P''	Carretera de Arroyo de Malpartida a Puente Internacional	72
P'' P'''	Idem de los Santos a Badajoz	77
P'' Q	Ferrocarril de Mérida a Los Santos	57
P''' Q	Idem de Los Santos a Huelva	189
Q S	Idem de Almorchón a Córdoba	135
Q T	Idem de Córdoba a Sevilla	132
R S	Idem de Valdepeñas a Puertollano	76
R V	Carretera de Albacete a Valdepeñas	171
S T	Ferrocarril de Puente Genil a Córdoba	77
S U	Idem de Linares a Puente Genil	184
S V	Idem de Valdepeñas a Linares	90
T U	Idem de Puente Genil a Málaga	116
U V	Idem de Linares a Almería	242
L M	Idem de Guillarey a Santiago y ramal a Vigo	130
	Carretera de Santiago a La Coruña	62
K M	Idem de La Coruña, Vivero a Gijón	383
J M	Idem de Gijón a Ribadesella	67
	Ferrocarril de Ribadesella a Santander	131
I M	Idem de Santander a Bilbao	119
	Carretera de Bilbao a Deva	64
E M	Ferrocarril de Deva a San Sebastián	45
F M	Idem de San Sebastián a Behovia	12
F''' M	Idem de Port-Bou a Figueras	26
F'' M	Idem de Figueras a Barcelona	147
D M	Idem de Barcelona a Tarragona	91
C M	Idem de Tarragona a Sagunto	246

SECCIONES		KILÓMETROS
	Ferrocarril de Sagunto a Valencia	29
	Idem de Valencia a Cullera	39
A M	Carretera de Cullera a Gandía	27
	Ferrocarril de Gandía a Alicante	124
	Carretera de Alicante a La Unión	96
V M	Ferrocarril de La Unión a Aguilas	107
	Carretera de Aguilas a Almería	131
U M	Idem de Almería a Málaga	225
	Idem de Málaga a Cádiz	267
T M	Ferrocarril de Cádiz a Sevilla	153
Q M	Idem de Sevilla a Huelva	110
P''' M	Carretera de Huelva a Ayamonte	60
	TOTAL	10 184

CAPÍTULO II

INSTRUMENTOS

Grandes son los inconvenientes que tienen los aparatos hasta la fecha empleados para la ejecución de las nivelaciones de alta precisión, y que por ser tan conocidos no hemos de enumerar, limitándonos a hacer resaltar las diferencias características entre aquellos modelos que se han usado y el Wild-Zeiss núm. 3, recientemente adquirido. Estas diferencias son las siguientes:

1.ª El eje tronco-cónico que se creía ideal por su doble aspecto de eje de giro, guía del movimiento de rotación y sostén, ha sido sustituído por eje cilíndrico (con solamente el primero de los cometidos apuntados); pues la práctica ha demostrado que en el primero de los citados ejes se producen desgastes desiguales que dan lugar a huelgos que originan en el giro superficies no regulares con los consiguientes errores.

2.ª El nivel del nuevo modelo carece de divisiones, con lo cual se evitan los errores que pudieran provenir de lecturas defectuosas, consiguiéndose el calado de la burbuja por la coincidencia de las imágenes de sus extremos mediante una ingeniosa disposición, que se detalla más adelante en la descripción del aparato.

3.ª El nivel va íntimamente unido (con el juego necesario para las correspondientes correcciones mediante tornillos) al anteojo, con lo cual se evitan los huelgos inherentes al constante apoyo de los soportes de aquél sobre éste.

4.ª La organización del aparato hace innecesaria la perfecta verticalidad del eje general del mismo, constituyendo esto una ventaja estimable para la precisión y rapidez de los trabajos.

5.ª El anteojo en el nuevo modelo Wild-Zeiss es reversible, ventaja esta digna de mención, pues evita los errores correspondientes a la desigualdad de los collares, interposición de polvo, etc., etc., entre apoyos.

6.ª Un dispositivo especial permite darse cuenta inmediata del movimiento relativo que sufra el aparato durante la nivelada por consecuencia de algún movimiento brusco, reacción del suelo, etc., etc.

7.ª Un dispositivo adicional permite hacer la lectura (sobre la mira) de la fracción de división con toda exactitud, evitándose de este modo los errores que pudieran cometerse en la estima a ojo de dicha fracción.

La mira que se va a emplear difiere de las antiguas de madera empleadas en que está constituída por una cinta de Invar, metal que, como es sabido, no sufre prácticamente variación alguna por los cambios de temperatura, humedad, etc., etc.

Descripción del aparato modelo Wild-Zeiss núm. 3.

Consta de dos partes: Plataforma *P* y aparato *R* (compuesto de anteojo, nivel y eje general). (Véase figuras 1.ª, 1.ª′ y 1.ª″)

Plataforma.—Provista de sus tres tornillos nivelantes *a*, se coloca sobre el trípode, encajando en ranuras que tiene éste los tres extremos inferiores de los tornillos nivelantes. La plataforma se fija al trípode mediante la platina *p*, en la que se enrosca la tuerca *V*; quedando de este modo unidos invariablemente trípode y plataforma. Las cabezas *c* de los tornillos nivelantes tienen un pequeño movimiento de giro que permite inmovilizarlos.

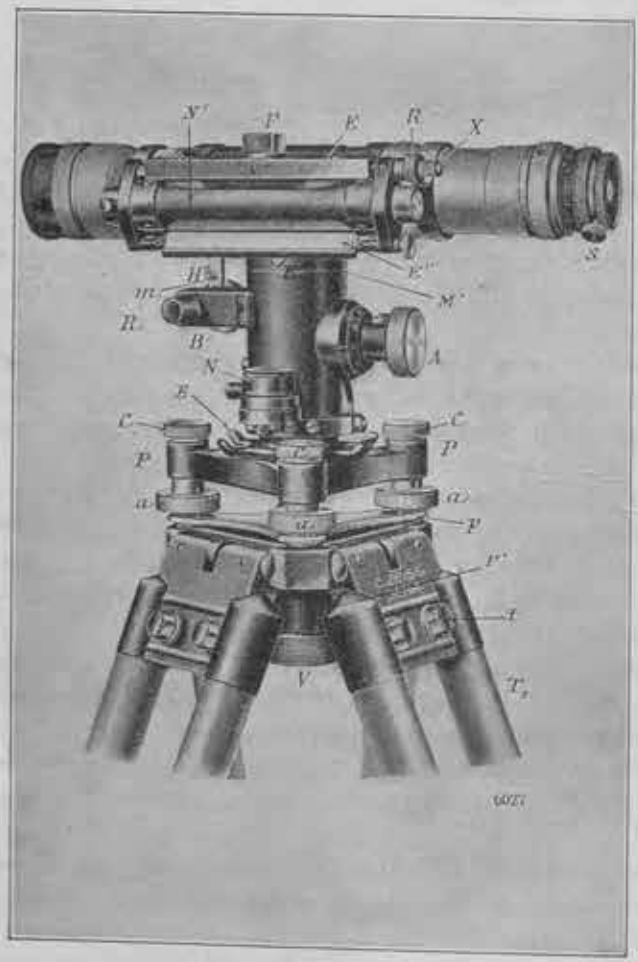


Figura 1.ª

Aparato: eje general.—Éste, que es cilíndrico y de acero duro, termina en un vástago cilíndrico que entra en el orificio central que tiene la plataforma y a la cual se fija mediante la estrella *E* que se enrosca en el filete que bordea el citado orificio central de la plataforma. De este modo quedan unidos el trípode (*), plataforma y aparato (pues al expresado eje general van unidos el anteojo, nivel esférico *N*, tornillo *A* y tornillos de coincidencia y presión).

Anteojo.—Éste está unido al eje general mediante el manguito *M′* y el eje horizontal *E′*. Tiene los movimientos siguientes:

1.° De giro, alrededor del eje general (vertical); movimiento que se limita y afina mediante los correspondientes tornillos de presión y de coincidencia.

(*) El trípode lleva el tornillo *V*, que permite fijar la posición de sus tres brazos una vez dispuestos éstos convenientemente. Las tuercas *t* sirven para hacer rígida la unión entre los brazos de madera y sus guarniciones metálicas cuando entre ellos se produce algún huelgo por sequedad excesiva, etc., etc.

2.° De báscula (con pequeño ángulo de giro) alrededor del eje E', mediante el tornillo A. Con este movimiento se consigue la delicada y definitiva nivelación del aparato, pues los tres tornillos nivelantes de plataforma P se emplean para conseguir una aproximada nivelación, apreciada por el nivel esférico N.

3.° De giro (de 180°) entre collares, para lo que hay que bajar el tope H que tiene dos posiciones vertical como aparece en la figura (posición de trabajo) y horizontal (posición de transporte).

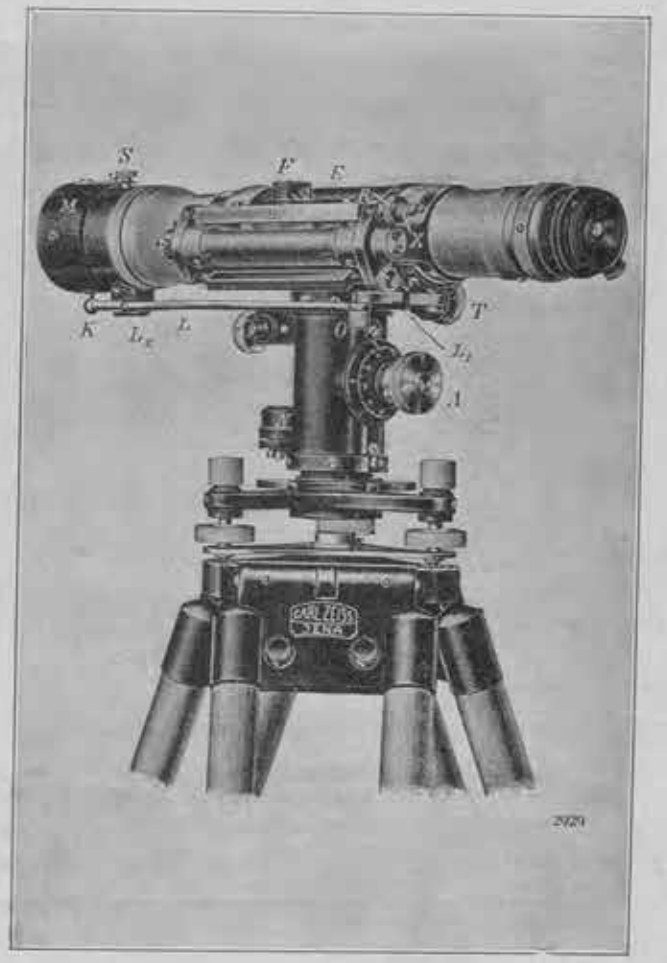


Figura 1.ª

En esta última posición el ensanchamiento m encaja en un entrante que lleva el anteojo, impidiendo a éste el giro entre collares.

El anteojo es reversible; es decir, que el extremo ocular puede convertirse en objetivo, y recíprocamente (inversión empleada para la corrección del aparato), separando el ocular de su alojamiento, después de desatornillar el tornillo s y colocar en el objetivo un segundo ocular que lleva la caja del aparato. Esto puede hacerse por la constitución óptica del anteojo que esquemáticamente representa la figura 2.ª En la posición de trabajo aquélla la integran las lentes O, L, V, L_1, mientras que en la inversión citada el anteojo está constituído ópticamente por las O_1, L_1, V, L.

Para mayor comodidad el ocular va graduado en dioptrías, lo que permite la rápida colocación del mismo en la posición de enfoque, mediante un suave movimiento helicoidal, que impide la introducción de polvo, etc., etc.

El enfoque de la mira se consigue mediante un tornillo (no visible en la figura 1.ª) que lateralmente lleva el anteojo, y que permite desplazar paralelamente a sí misma la lente intermedia V (fig. 2.ª).

El retículo grabado en el sistema ocular O está constituído por un hilo vertical, dos hilos extremos cortados y el hilo central o nivelador en la forma que indica o

representa la figura 3.ª, disposición empleada para obtener una mayor precisión en las lecturas a pequeñas distancias cuando se haga uso del dispositivo de estima que más adelante se describe.

El retículo grabado en el sistema ocular O_1 lo constituyen dos hilos, horizontal y vertical, que se cortan en sus puntos medios (fig. 4.ª).

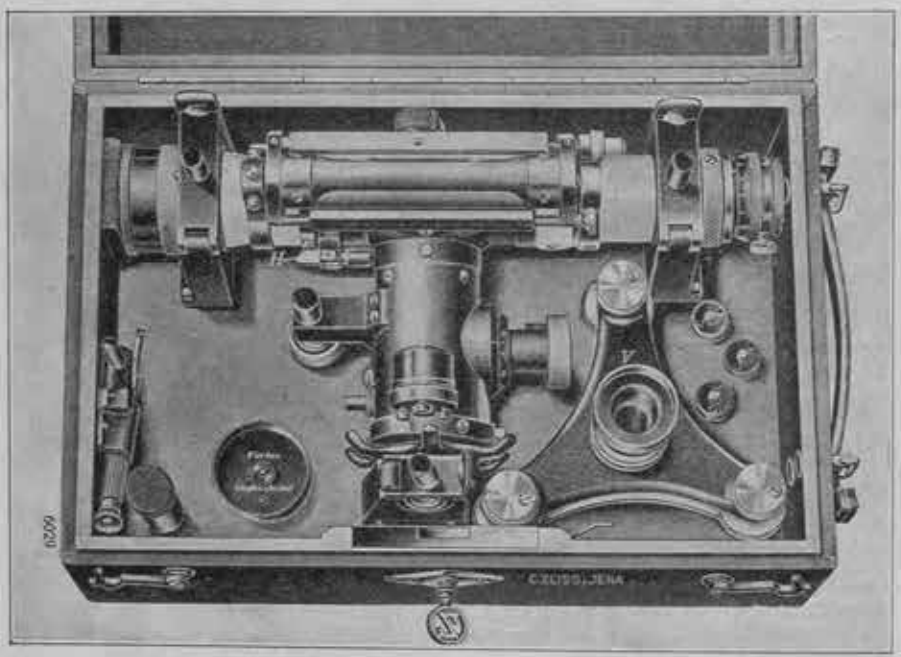


Figura 1.ª"

Nivel.—Además del nivel esférico N, del que anteriormente se ha hablado, el anteojo lleva unido lateralmente el nivel N' (fig. 1.ª), con el que se aprecia la última y perfecta nivelación de la visual horizontal. Este nivel N' carece de divisiones, apre-

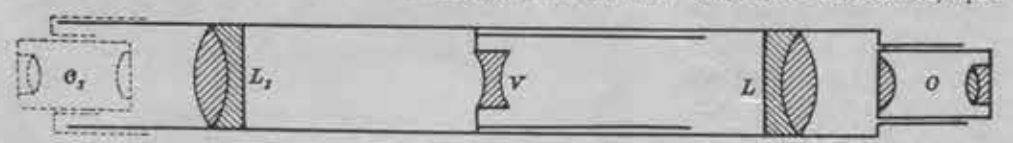


Figura 2.ª

ciándose el centrado de su burbuja mediante un sistema de prismas E y F que recoge las dos imágenes de los extremos de aquélla, presentándoles ante el observador como indican o representan las figuras 5.ª y 6.ª (la 5.ª, burbuja centrada, y la 6.ª, burbuja sin centrar).

En la figura 7.ª se ve esquemáticamente la constitución del sistema nivel y prismas.

El espejo E'' (fig. 1.ª) sirve para la iluminación del sistema de prismas y, al mismo tiempo, permite ver la burbuja, dándose cuenta del sentido en que hay que mover el

tornillo *A* para calar aquélla. Esto es en la práctica de gran utilidad porque por el prisma *F* no se presenta la burbuja más que cuando está ésta próxima a ser calada.

Tanto el nivel como el sistema de prismas tienen los correspondientes tornillos de corrección.

Al indicar las diferencias características del nivel descrito con los Kern antes usados, se ha hecho referencia a un dispositivo especial de estima. Este dispositivo permite hacer exactamente las lecturas del hilo (principalmente del hilo nivelador por su doble

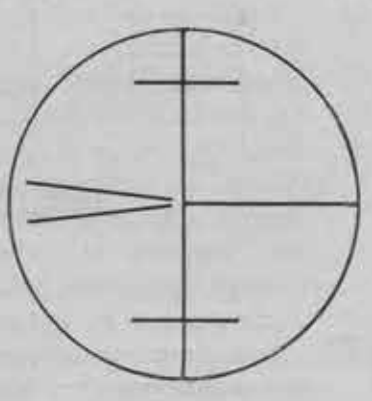


Figura 3.ª

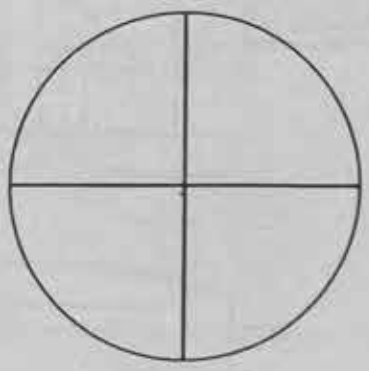


Figura 4.ª

trazo), cuando los citados hilos no coinciden exactamente con las divisiones de las miras, desplazando la línea de colimación paralelamente a sí misma hasta conseguir la coincidencia de ésta con la división más próxima de la mira, leyéndose en un tambor el citado desplazamiento.

Dicho dispositivo está constituido por un cristal de caras paralelas alojado en una caja *M* (fig. 1.ª) que se coloca enchufándola en el objetivo del anteojo, cuidando que

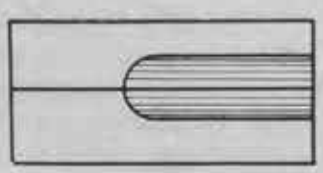


Figura 5.ª

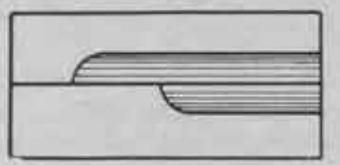


Figura 6.ª

estén en prolongación las dos referencias que una y otro llevan en su parte superior y apretando el tornillo *S* que fija la caja al anteojo.

Dicho cristal puede girar alrededor de un eje horizontal mediante la varilla o vástago de unión *L* y la palanca L_1.

El primero tiene en sus extremos un tope esférico para alojarlo en la cavidad que lleva el saliente que tiene en su parte inferior la armadura del cristal de caras paralelas, y el otro extremo tiene un tornillo *O* que se enrosca en la tuerca O_1 de la palanca L_1, haciéndola pasar por la escotadura guía L_2 de la caja *M*. La palanca L_1, que está unida al aparato, tiene en el extremo del otro brazo un tambor *T* que lleva su correspondiente índice. Unidos como queda dicho la caja *M* con *L* y L_1 y *T*, el movimiento de giro del tambor se traduce en giro (alrededor de su eje horizontal) del

cristal de caras paralelas y, por tanto, en desplazamiento en altura de la línea de colimación; desplazamiento que da el tambor *T*, para lo que está convenientemente dividido, apreciándose claramente en él las vigésimas de milímetro, pudiendo llegar la apreciación hasta las centésimas de milímetro estimando a ojo las décimas entre divisiones. Esta última apreciación nos parece totalmente ilusoria puesto que ella depende, en primer lugar, de la exactitud con que se haga la coincidencia del hilo del retículo con la división de la mira.

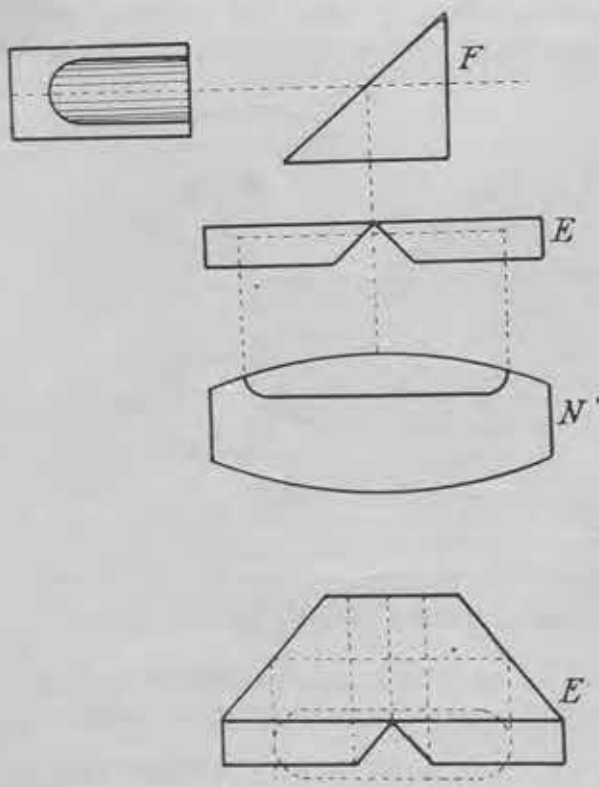


Figura 7.ª

El tambor está numerado del 0 al 10,80, de manera que el cristal de caras paralelas esté vertical y, por tanto, no desvíe la línea de colimación cuando el índice marque en el tambor 5,40. Estando éste en esta posición se puede siempre (en todos los casos) hacer coincidir (girándolo convenientemente) el hilo nivelador (o los estadimétricos) con la división de la mira más próxima a él, apreciando el intervalo recorrido por la diferencia entre la división del tambor que marque el índice (hecha la coincidencia) y 5,40 posición inicial de éste. No teniendo necesidad de anotar si dicha diferencia hay que agregarla o restarla de la lectura hecha directamente sobre la mira, ni preocuparse de que el índice en el tambor marque 5,40, toda vez que dicha diferencia es algebraica y tiene fijo el sustraendo 5,40. Esto en la posición normal del aparato; es decir, nivel a la izquierda y cuando el tambor esté dispuesto de tal modo que al aumentar sus lecturas ascienda la visual; es decir, el hilo o hilos del retículo se acerquen a la división menor de la mira (de los dos en que esté comprendido). Cuando se gira el anteojo 180° entre collares (nivel a la derecha) se opera del mismo modo, sin más variación que tomar el 5,40 como minuendo para los efectos del signo de la expresada diferencia.

Para aclarar lo expuesto supongamos que marcando el tambor 5,40 la mira se presenta mirando por el anteojo, como indica la figura 8.ª La lectura hecha sobre la mira sería 40,6, por estar más próximo el hilo nivelador del 40,6 que del 40,5 (prescíndase de la escala de la derecha, como se verá más adelante al describir la mira de comprobación). Anotada esta lectura se hace girar el tambor hasta llevar el hilo nivelador a la división 40,6 de la mira (fig. 9.ª), moviendo o girando el anteojo lo necesario para efectuar la exacta coincidencia; se lee a continuación el tambor, que supon-

gamos marca 3,20; la diferencia 3,20 — 5,40 = — 2,20 se le agrega a 4,60, y se obtendrá la lectura verdadera, que será 40,6 — 0,0220 = — 40,578 (téngase presente que las unidades que resulten de la resta a 5,40 son del orden inmediatamente inferior a

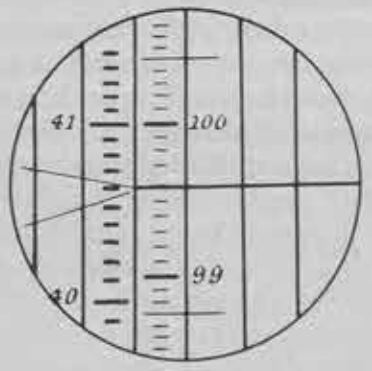


Figura 8.ª

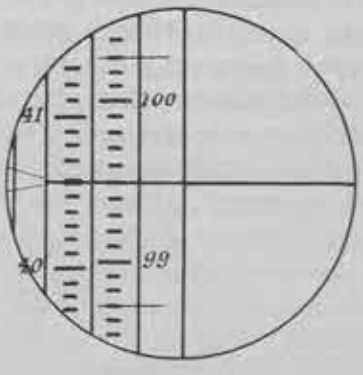


Figura 9.ª

las del último orden de la mira, pues 10 divisiones numeradas del tambor equivalen a una división pequeña de la mira).

Para obtener la más exacta coincidencia del hilo nivelador del retículo con la división de la mira se debe emplear la parte de la izquierda de aquél (fig. 10) cuando por estar la mira cerca del aparato se perciba con claridad la anchura de las divisio-

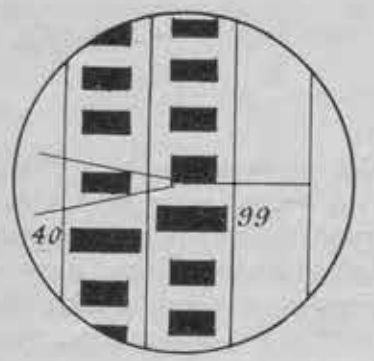


Figura 10.

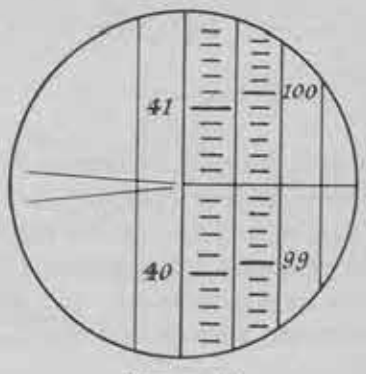


Figura 11.

nes de aquélla y permita hacerse la expresada coincidencia en la forma que indica la citada figura 10, empleándose la parte de la derecha del retículo (fig. 11) en caso contrario.

Dedúcense de lo expuesto las siguientes reglas:

1.ª *Posición normal del aparato. — Nivel a la izquierda.* — Hágase coincidir, girando convenientemente el tambor, el hilo nivelador del retículo o los estadimétricos, con una división de la mira, y anótese la lectura de mira correspondiente a dicha división, agregándole la suma algebraica lectura de tambor — 5,40, teniendo en cuenta que las unidades de esta diferencia son del orden inmediato inferior al último de la división de la mira.

2.ª *Posición de corrección del aparato.—Nivel a la derecha.*—Se procede del mismo modo, sin más diferencia que la suma algebraica que hay que agregar a la lectura de mira es 5,40 — lectura del tambor.

Esta es la manera rigurosa de operar, pero para los efectos de *obtener el desnivel* entre una o varias estaciones de frente y espalda se puede simplificar el procedimiento, limitándose a poner a continuación de la lectura de mira (división sobre la que hace la coincidencia) la lectura de tambor si se opera con anteojo a la izquierda, y restar la lectura del tambor de la mira si se trabaja con anteojo a la derecha, pues de este modo todas las lecturas vendrán aumentadas y disminuídas, respectivamente, en 5,40.

En efecto, sean:

M = lectura en la mira.

T = idem en el tambor.

La lectura verdadera será $M + (0,T - 0,540)$.

En caso de un anteojo a la izquierda la lectura por el segundo procedimiento expuesto será $M + 0,T$.

Diferencia entre ambas lecturas

$$M + 0,T - [M + (0,T - 0,540) = M + 0,T - M - 0,T + 0,540 = 0,540].$$

En caso de anteojo a la derecha la lectura por el segundo procedimiento será $M - 0,T$.

Diferencia entre las lecturas por el primero y segundo procedimiento será:

$$M + (0,540 - 0,T) - M - 0,T = M + 0,540 - 0,T - M + 0,T = 0,540.$$

Cuando la posición del tambor sea inversa a la que acabamos de considerar, es decir, cuando al girar el tambor de modo que sus lecturas aumenten, los hilos del retículo se acerquen a la división mayor de la mira (de las dos en que estén comprendidos), se procederá análogamente a lo indicado anteriormente, sin más que tener en cuenta que las posiciones anteojo a la izquierda y anteojo a la derecha corresponden, respectivamente, a los de anteojo a la derecha y anteojo a la izquierda del caso considerado.

Ahora bien, como el desnivel entre dos o más estaciones de mira es la diferencia entre las sumas de las lecturas de espalda y frente, podemos establecer, considerando el caso de nivel a la izquierda,

$$D = M - 0,T - (M' - 0,T') = M - 0,T - M' + 0,T' = (M + 0,T') - (M' + 0,T);$$

de donde se deduce que para obtener el desnivel con anteojo a la izquierda por diferencia entre niveladas de espalda y frente, podemos constituir aquellas lecturas con las de mira correspondiente y los del tambor de los de frente, y éstas (niveladas de frente) con los correspondientes de mira y los de tambor de espalda.

Corrección del aparato.

1.ª *Paralelismo entre las proyecciones de las líneas de colimación y de fe de nivel.*— Para efectuar esta corrección se coloca el aparato de manera que uno de los tornillos nivelantes de la plataforma esté aplomado con el objetivo o con el ocular del anteojo dirigido a la mira. Se hace con el anteojo (nivel a la izquierda) una lectura sobre la mira después de haber calado las burbujas de los niveles esférico y reversible. A continuación se da aproximadamente una vuelta a uno de los tornillos nivelantes laterales y con el otro tornillo nivelante, girándole convenientemente, se mueve el anteojo hasta obtener una lectura de mira igual aproximadamente a la anterior, consiguiendo después, por medio del tornillo A, leer en la mira la misma exacta lectura que se hizo al principio; es decir, que antes de tocar los tornillos nivelantes. Conseguido esto, si las citadas proyecciones de las líneas de colimación y de fe del nivel son paralelas, la burbuja del nivel reversible aparecerá calada; en caso contrario, se cala la burbuja por medio de tornillos que lleva el citado nivel en el extremo del lado del objetivo.

2.ª *Obtención de la visual horizontal.*—Antes de indicar el medio de obtener la visual horizontal, exenta de todos los errores instrumentales, recordaremos la propiedad de estos niveles reversibles, fundamento del procedimiento a seguir para obtener aquélla.

Propiedad.—En todo nivel reversible correcto (se llama correcto un nivel reversible cuando sus dos directrices, superior e inferior, son paralelas) la media de las dos lecturas hechas sobre una mira situada en un punto fijo, con nivel a la izquierda y nivel a la derecha, está exenta de todos los errores instrumentales y es, por lo tanto, la lectura que se haría sobre la mira si el eje óptico del anteojo fuese rigurosamente horizontal, siempre que antes de hacer cada una de las lecturas se haya tenido la precaución de calar la burbuja por medio del correspondiente tornillo de calado A, en el aparato de que se trata (fig. 1.ª).

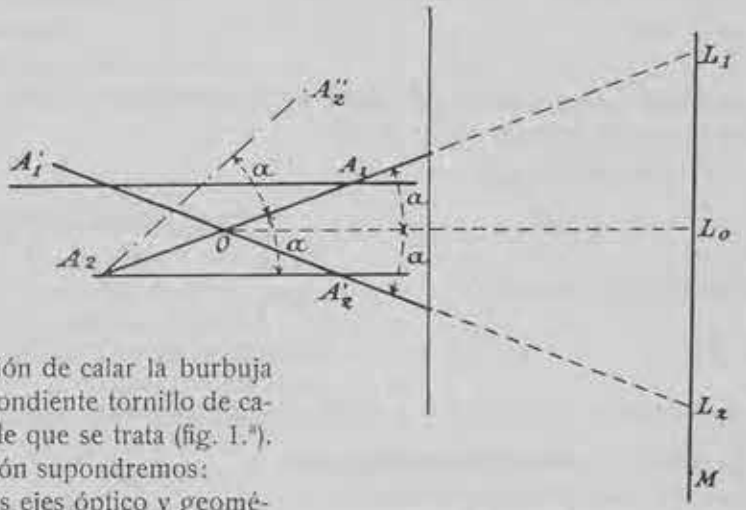


Figura 12.

Para su demostración supondremos:

Primer caso: que los ejes óptico y geométrico del anteojo coinciden. Sean (fig. 12) $A_1 A_2$ el eje geométrico del anteojo; O el punto de $A_1 A_2$ alrededor del cual gira el anteojo (por giro de tornillo calado A); $A_1 A_1'$ la tangente trazada en la parte superior de la superficie tórica interna del nivel en el punto medio de la burbuja, esto es, la directriz de la cara superior del nivel; $A_2 A_2'$ la directriz de la cara inferior del nivel (por hipótesis $A_1 A_1'$ y $A_2 A_2'$ son paralelas); α el

ángulo que forma cada directriz con el eje de la figura del anteojo. Como hemos supuesto el nivel calado, $A_1 A_1'$ y $A_2 A_2'$ serán horizontales.

La primera lectura hecha sobre la mira M con nivel a la izquierda será L_1, diferente de la L_0, que se haría si el eje óptico del anteojo fuese horizontal; pero al girar el sistema anteojo y nivel 180° entre collares alrededor del eje de figura de aquél (nivel a la derecha), la directriz $A_2 A_2'$ tomará la posicón $A_2 A_2''$ formando un ángulo α con la $A_1 A_2$ y un ángulo 2α con la horizontal y, por lo tanto, el nivel no resultará calado y habrá que calarlo, antes de hacer la segunda lectura, por medio del tornillo del calado A (fig. 1.ª), haciendo girar el sistema anteojo y nivel alrededor del punto O el ángulo 2α, con lo cual la $A_2 A_2''$ tomará la posición $A_1 A_1'$ y el eje de la figura y óptico $A_1 A_2$ se trasladará a $A_1' A_2'$, dando o haciéndose en L_2 la segunda lectura; verificándose por la igualdad de los triángulos $L_1 O L_0$ y $L_0 O L_2$ que

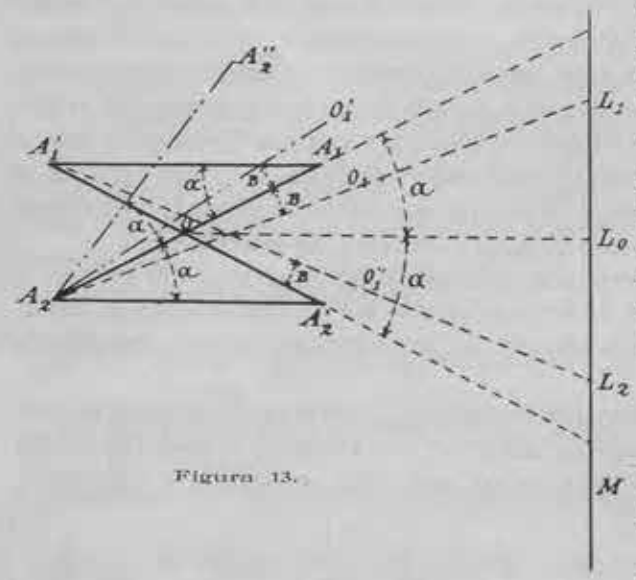


Figura 13.

$$\frac{1}{2}(L_1 + L_2) = L_0,$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

Segundo caso: los ejes óptico y geométrico del anteojo no coinciden. La propiedad enunciada sigue verificándose, como se ve, por la simple inspección de la figura 13, en la que

Primera lectura L_1:

Posición de los elementos	Eje geométrico o de figura	$A_2 A_1$
	Idem óptico	$A_2 O_1$
	Centro de giro	O
	Directriz superior	$A_1 A_1'$
	Idem inferior	$A_2 A_2'$
Posición de los elementos después del giro de 180° y antes de calar la burbuja	Eje geométrico	$A_2 A_1$
	Idem óptico	$A_2 O_1$
	Centro de giro	O
	Directriz superior (en esta posición, que es la inferior de la posición anterior)	$A_2 A_2''$
Posición de los elementos después del calado de la burbuja mediante el giro del sistema anteojo y nivel el ángulo 2α	Eje geométrico	$A_1' A_2'$
	Idem óptico	$A_1 O_1''$
	Centro de giro	O
	Directriz superior	$A_1 A_1'$

Segunda lectura L_2:

Por la igualdad de los triángulos $L_1 O L_0$ y $L_0 O L_2$ se verifica $\frac{1}{2}(L_1 + L_2) = L_0$.

Dedúcese, por lo tanto, que los trabajos de precisión deben hacerse siempre con la media de las dos posiciones ya indicadas.

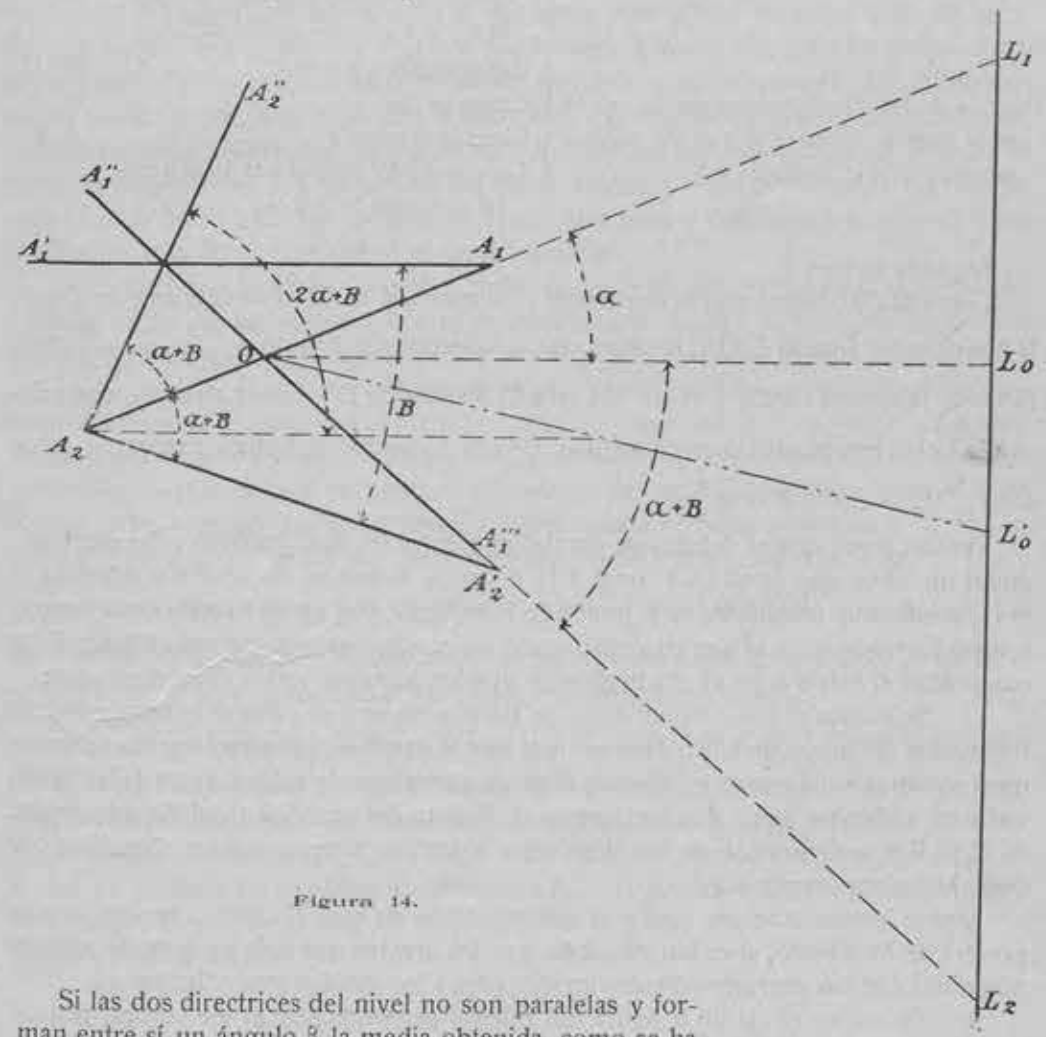


Figura 14.

Si las dos directrices del nivel no son paralelas y forman entre sí un ángulo β la media obtenida, como se ha indicado, de las dos lecturas, nivel a la izquierda y nivel a la derecha, resultará afectada de un error angular igual a $\frac{\beta}{2}$ (véase fig. 14) siguiendo el cuadro siguiente:

Primera lectura L_1.

Posición de los elementos al hacer la primera lectura	Ejes geométrico y óptico (supuestos coincidiendo)	$A_1 A_2$
	Centro de giro	O
	Directriz superior (horizontal)	$A_1 A_1'$
	Idem inferior (forma con $A_1 A_1'$ un ángulo β)	$A_2 A_2'$

Posición de los elementos después del giro de 180° y antes de calar la burbuja.....	Ejes geométrico y óptico.....	$A_1 A_2$
	Centro de giro.....	O
	Directriz superior (en esta posición, o sea la inferior de la posición anterior) que formará con la horizontal un ángulo $\alpha + \beta + \alpha + \beta - \beta = 2\alpha + \beta$.	$A_2 A_2''$,
Posición de los elementos después del calado de la burbuja mediante el giro del sistema anteojo y nivel el ángulo $2\alpha + \beta$.....	Ejes geométrico y óptico.....	$A_1'' A_2'''$
	Centro de giro.....	O
	Directriz superior.....	$A_1 A_1'$
	Los ejes $A_1'' A_1'''$ forman con la horizontal un ángulo $2\alpha + \beta - \alpha = \alpha + \beta$.	

Segunda lectura L_2:

Como la OL_1 forma con la horizontal el ángulo α y la OL_2 forma el ángulo $\alpha + \beta$, la bisectriz del ángulo $L_1 O L_2$ formará con la horizontal el ángulo $\frac{\alpha + \beta - \alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$; por lo tanto, la lectura media $\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ será L_0' distinta de L_0 y estará afectada, con relación a la horizontal, de un error angular $\frac{\beta}{2}$; por lo tanto, la lectura exenta de error sería $\frac{1}{2}(L_1 + L_2) + d \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}$.

Vemos, pues, que el defecto de paralelismo entre las dos directrices del nivel originan un error que es proporcional a la distancia a que se encuentre el nivel de la mira, y que muy mucho interesa poner de manifiesto, y si existe hacerlo desaparecer, o desechar el aparato si por su constitución no puede conseguirse esto último. Para comprobar si existe o no el citado defecto pueden seguirse varios procedimientos:

1.° Se coloca el nivel equidistante de las dos miras y se obtiene el desnivel entre los puntos de apoyo de ellas, desnivel que por la equidistancia estará exento del error que buscamos o queremos evidenciar; después, aproximando el nivel a una de las miras, vuélvese a obtener aquel desnivel, que será distinto del anterior si tal defecto existe.

2.° Por comparación de los desniveles entre los mismos puntos obtenidos por dos nivelaciones recíprocas.

Ambos procedimientos tienen el inconveniente de que el defecto buscado no se pondrá de manifiesto, si es tan pequeño que los errores que origine sean de análoga magnitud que los correspondientes accidentales a los citados procedimientos.

3.° Se coloca el eje de la figura del anteojo perpendicular al eje vertical general del aparato; se hace que una de las directrices del nivel sea perpendicular al citado eje del aparato, con lo que habremos conseguido que el eje de la figura del anteojo y la directriz del nivel sean horizontales y paralelos; después se gira el sistema anteojo y nivel 180° alrededor del eje de la figura del primero, y si las dos directrices son paralelas la burbuja del nivel quedará centrada. Este procedimiento, más útil que los anteriores, es de muy esmerada aplicación y deberá emplearse únicamente en aquellos aparatos en que no pueda hacerse la inversión del anteojo extremo por extremo, pues en los que esta operación pueda efectuarse, como sucede con el Wild-Zeiss, lo más práctico y sencillo es, después de hechas las dos lecturas (nivel a la izquierda y nivel a la derecha), efectuar la expresada inversión haciendo el ocular obje-

tivo, y recíprocamente, y de este modo el error angular $\frac{\beta}{2}$ (originado por aquel defecto de paralelismo) cambiará de signo y, por consiguiente, ambos se anularán en la media de las cuatro lecturas hechas.

Como resumen de lo expuesto, diremos: que si con el nivel Wild-Zeiss hacemos sobre una mira dos lecturas (nivel a la izquierda y nivel a la derecha) antes de la inversión (ocular por objetivo y objetivo por ocular), y otros dos (nivel a la derecha y nivel a la izquierda) después de la inversión, teniendo la precaución de calar la burbuja en las cuatro posiciones, la media de las cuatro expresadas lecturas estará totalmente exenta de todos los errores instrumentales, incluso del correspondiente al defecto de paralelismo entre las dos directrices del nivel. Además, si las dos medias correspondientes cada una a cada par de lecturas efectuadas antes y después de la inversión son iguales, las dos directrices del nivel serán paralelas.

Dedúcese, por lo tanto, que la manera de corregir el aparato es la siguiente: se halla la media de las lecturas correspondientes a las cuatro citadas posiciones, y si dicha media es igual a la media de las dos primeras lecturas, nivel a la izquierda y nivel a la derecha, el aparato está corregido; en caso contrario se hace, girando convenientemente el anteojo con el tornillo *A* (fig. 1.ª), que esta última media (de las dos lecturas) sea igual a aquella media (de las cuatro lecturas), y conseguido esto se mueve convenientemente la caja de prismas por medio del tornillo y contratuerca *R* hasta centrar la burbuja, o, más sencillamente, hacer que la primera lectura (anteojo sin invertir y nivel a la izquierda) sea igual al promedio de dichas cuatro lecturas.

La corrección, pues, de que tratamos consiste en hacer que $\frac{1}{4}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$, representando L_1, L_2, L_3 y L_4 las cuatro lecturas dichas, sea igual a $\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ en el primer caso, lo que conseguimos sin tanteos del modo siguiente:

Sea $L_a = \frac{1}{4}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$ y $L_m = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$. Si L_a y L_m son desiguales, sea $L_a - L_m = d$, se lleva el anteojo a leer en la primera posición $L_1' = L_1 + d$, y moviendo la caja de prismas hasta calar la burbuja quedará el aparato corregido. En efecto, las nuevas lecturas serán $L_1' = L_1 + d$ y $L_2' = L_2 + d$, puesto que el corrimiento de la caja de prismas no modifica la diferencia $L_1 - L_2$ (siempre que las caras del nivel sean paralelas).

La nueva media será

$$L_m' = \frac{L_1' + L_2'}{2} = \frac{L_1 + d + L_2 + d}{2} = L_m + d,$$

Las lecturas tercera y cuarta serán $L_3' = L_3 - d$ y $L_4' = L_4 - d$, por consiguiente,

$$L_a' = \frac{1}{4}(L_1' + L_2' + L_3' + L_4') = \frac{1}{4}(L_1 + d + L_2 + d + L_3 - d + L_4 - d) = L_a,$$

de

$$\left.\begin{array}{l} L_m' = L_m + d \\ L_a' = L_a \end{array}\right\} \quad L_a' - L_m' = L_a - (L_m + d) = L_a - L_a = 0; \qquad L_a' = L_m';$$

o sea

$$\frac{1}{4}(L_1' + L_2' + L_3' + L_4') = \frac{1}{2}(L_3' + L_2') \qquad [1]$$

$$L_1' + L_2' = L_1 + d + L_2 + d = L_1 + L_2 + 2d \qquad [2]$$

$$L_3' + L_4' = L_3 - d + L_4 - d = L_3 + L_4 - 2d \qquad [3]$$

pero

$$\frac{1}{4}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) - \frac{1}{2}(L_1 + L_2) = d; \quad \frac{1}{4}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) - \frac{1}{4}(2L_1 + 2L_2) = d;$$

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 - 2L_1 - 2L_2 = 4d;$$

o sea

$$L_3 + L_4 - L_1 - L_2 = 4d,$$

y por ser L_1 y L_4 y L_2 y L_3 simétricos

$$L_3 - L_2 = 2d \qquad L_3 = L_2 + 2d$$

$$L_4 - L_1 = 2d \qquad L_4 = L_1 + 2d$$

sustituyendo en [3]

$$L_3' + L_4' = L_3 - d + L_4 - d = L_2 + 2d + L_1 + 2d - 2d = L_2 + L_1 + 2d = L_1' + L_2', \quad [4]$$

expresión que en unión de la [1] demuestra lo que nos proponíamos.

Si se comprobase que la diferencia entre las lecturas en las posiciones primera y segunda varía al correr la caja de prismas, lo que sería debido a falta de paralelismo en las caras del nivel, la corrección no podría hacerse más que por aproximaciones sucesivas.

Para mayor claridad vamos a poner unos ejemplos:

1.° Sean las lecturas obtenidas

I	37,96
II	37,92
III	37,61
IV	38,27
	151,76

Media de las cuatro lecturas $\dfrac{151,76}{4} = 37,94$

Idem de las dos ídem (I y II) $\dfrac{75,88}{2} = 37,94.$

El aparato está, por lo tanto, corregido para emplearlo en nivelaciones de precisión.

Si se quisiera emplear el segundo procedimiento se giraría el anteojo (por medio del tornillo *A*) hasta leer en la mira con el anteojo en la posición primera 37,94, y se correría la caja de prismas hasta calar la burbuja.

2.° Sean las lecturas

I.....	41,88
II.....	41,84
III.....	41,46
IV.....	42,10
	167,28

La media de las cuatro lecturas es..... $\frac{167,28}{4} = 41,82.$

Idem de las dos ídem (I y II)..... $\frac{83,72}{2} = 41,86.$

Llévese el anteojo por el tornillo *A* hasta leer en la mira, en la posición I,

$$41,88 - 0,04 = 41,84;$$

entonces las demás lecturas serán

I.....	41,84
II.....	41,80
III.....	41,50
IV.....	42,14
	167,28

Media de las cuatro lecturas..... $\frac{167,28}{4} = 41,82.$

Idem de las dos ídem (I y II)..... $\frac{83,64}{2} = 41,82.$

Idem de las dos ídem (III y IV)..... $\frac{83,64}{2} = 41,82,$

quedando, por lo tanto, el aparato corregido.

Cuando se haga uso del dispositivo de estima (cristal de caras paralelas) la corrección se hace del mismo modo.

Después de haber hecho sin el dispositivo las cuatro lecturas, se coloca en el aparato, del modo ya indicado, el mencionado dispositivo y se hace señalar al tambor 5,40. Después, girando convenientemente el tornillo *A*, se mueve el anteojo de modo que la media de las lecturas que se hagan en las posiciones primera y segunda sea igual a la media de las cuatro lecturas que se hicieron sin el dispositivo, procediendo después a calar la burbuja por el corrimiento de la caja de prismas. De este modo, la corrección efectuada comprende la desviación que proviniera de la flexión del anteojo debido al peso de la caja del dispositivo, etc., etc.; análogamente se procedería si se emplease el segundo procedimiento (nivel a la izquierda).

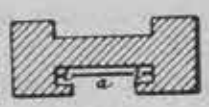


Figura 15.

Mira de precisión.—Está constituída por una barra prismática rectangular de madera de tres metros de longitud y sección transversal de la forma que indica la figura 15, provista en sus extremos de las correspondientes guarniciones de acero. En el cajetín, y unida a la guarnición inferior, va una cinta de Invar que por

su extremo superior está sostenida por un brazo de una palanca que por medio de un resorte de 20 kilogramos de fuerza que está unido al otro brazo y madera de la mira (fig. 16) mantiene constantemente tensa la cinta de Invar, lográndose de este modo su completa independencia de la madera en lo que se refiere a las dilataciones y contracciones que ésta puede experimentar por efecto de los agentes atmosféricos, no produciendo estas dilataciones o contracciones otros efectos sobre aquélla (cinta de Invar) que un inapreciable aumento o disminución en la tensión a que está sujeta por efecto del indicado resorte. La cinta de Invar lleva dos divisiones en medios decímetros numerados de abajo a arriba de 0 a 59 una de ellas, y la otra (escala o división de comprobación) de 60 a 119. Cada división semidecimétrica está, a su vez, dividida en diez partes sin numerar. Con estas dos escalas se notan inmediatamente las lecturas erróneas, toda vez que la diferencia entre las lecturas hechas sobre las citadas dos escalas debe ser constante (comprendida entre 59,24 y 59,26).

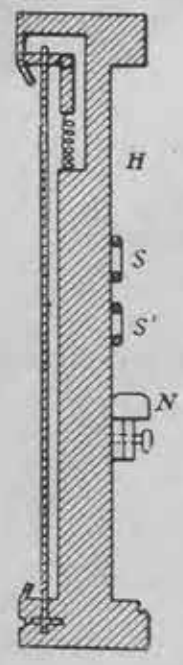


Figura 16.

La mira va provista en su parte posterior de un nivel esférico *N* (fig. 16) y de dos asas abatibles *s* y *s'* (fig. 16) que durante el transporte se alojan en el entrante *H* que tiene en toda su longitud. Cada dos miras tienen una caja envase y a fin de que las miras no se rocen por las caras divididas llevan éstas unos topes *a b c d* (fig. 17), uno plano y otro con entrante los de un extremo, y plano y otro con saliente los del otro extremo, debiendo colocarse en las cajas de modo que los dos topes planos de una y otra estén en contacto y que el saliente de una y entrante de la otra coincidan.



Figura 17.

A fin de comprobar o corregir el nivel esférico de las miras, se ha agregado a éstas en uno de sus costados y en sus partes superior e inferior dos plaquitas de metal en donde se atornillan dos escuadras, también metálicas, provistas las de la parte superior de un pequeño orificio para suspender una plomada, y la de la parte inferior de un cono metálico, cuyo vértice ha de enrasar en la plomada cuando la mira está vertical (fig. 18). Para evitar el resbalamiento de la mira sobre su apoyo se coloca en aquélla y en su guarnición inferior un anillo (fig. 19) que queda fijo a ésta, encajando sus dos salientes (uno con resorte) en los dos entrantes que aquélla tiene en su parte inferior (fig. 16).

Soporte. – La mira se coloca apoyando su talón plano sobre las señales fijas o sobre su soporte, que provisto de tres patas de acero duro que lo fijan al terreno, termina en su parte superior en un casquete esférico.

Trípode de mira.—Para conseguir la invariabilidad de la mira en posición, se puede hacer uso de los trípodes corrientes a los que se les ha agregado una placa de madera que abraza a la mira por sus costados, a los que se fija por un tornillo de

presión. Dicha placa, que está colocada sobre la plataforma del trípode, permite dar a la mira un pequeño movimiento hasta conseguir el centrado de la burbuja del nivel esférico, inmovilizándose una vez conseguido esto por medio de un tornillo central que atraviesa la plataforma y placa de madera. El citado movimiento se consigue por ser el orificio de paso del tornillo en la placa de mayor diámetro que el de éste. Para conseguir con facilidad la puesta en estación, se debe tener la precaución de colocar el trípode de la mira de modo que dos de sus patas estén adelantadas con relación a la señal o soporte sobre el que haya de colocarse la mira. Puede también usarse este trípode con solamente dos patas. Pero tanto estos como los clásicos bastones tienen bastantes inconvenientes, que hemos tratado de evitar con el modelo que a continuación se describe y que nos ha dado muy buenos resultados.

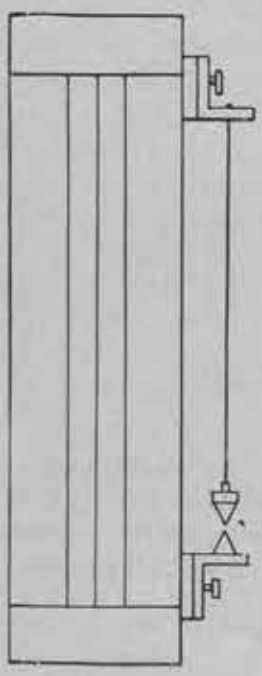


Figura 18.

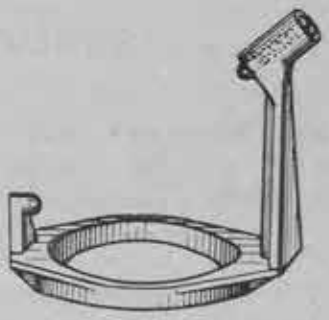


Figura 19.

Este modelo, ideado por el Topógrafo de esta Brigada de Nivelación de Precisión, señor Aranda, es simplemente una abrazadera (fig. 20) que se adapta y fija a la mira a la altura conveniente por sus dos brazos mediante un tornillo.

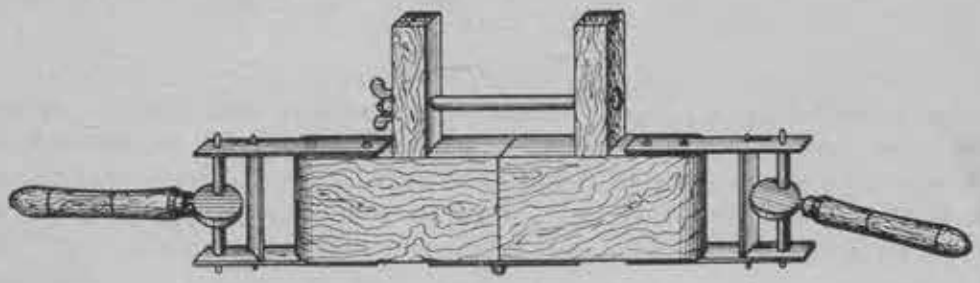
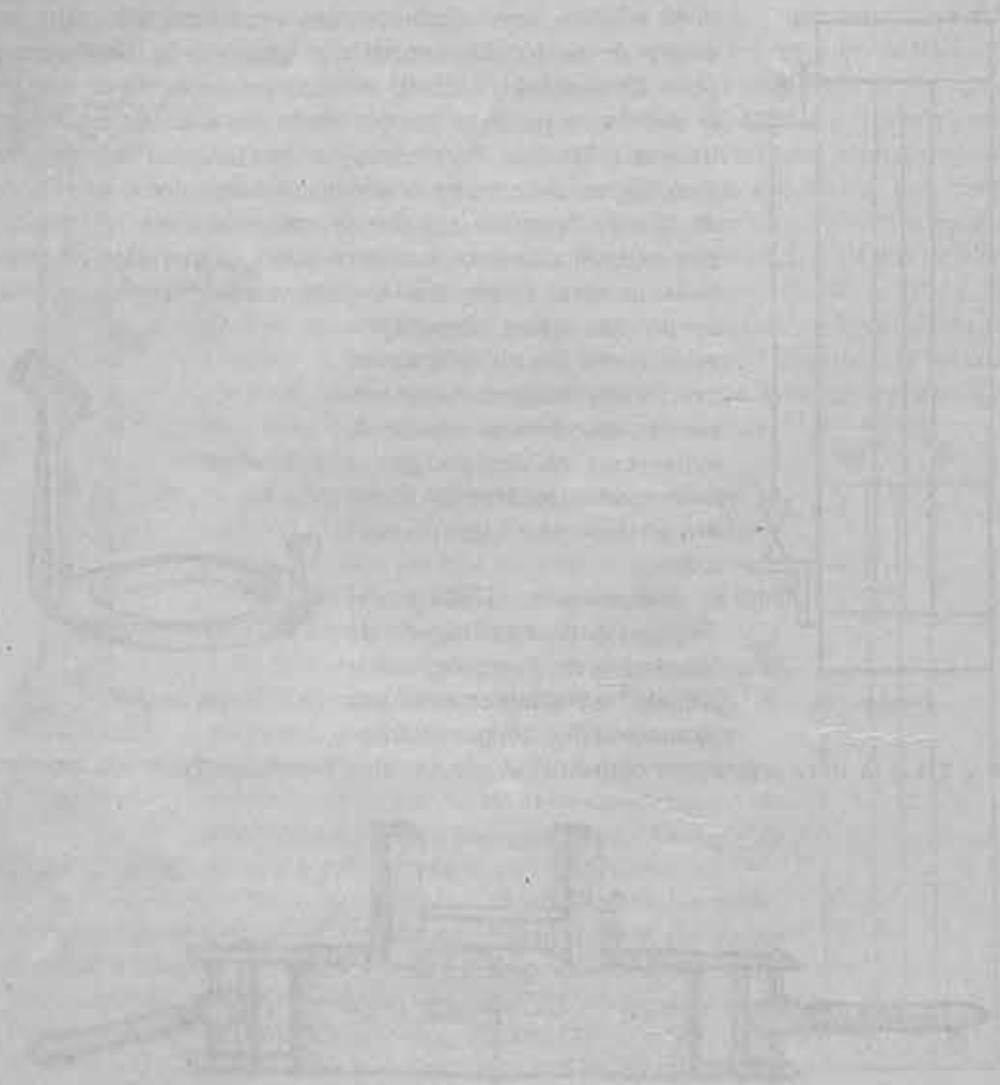


Figura 20.

Por los huecos laterales se introducen los bastones que, apoyados en el suelo, proporcionan la inmovilidad de la mira por quedar aquéllos comprimidos entre unos rebordes (semicilíndricos) y unas planchitas de metal, movidas por excéntricas al apoyar el portamiras las manos sobre los mangos.



CAPÍTULO III

ESTUDIO DE LOS ERRORES

Como consecuencia de las continuas exigencias de la Geodesia, en la XVII Conferencia general de la Asociación Geodésica Internacional celebrada en el año 1912 se creó la nueva categoría de nivelaciones: «Nivelaciones de alta precisión»; definida por la magnitud de los errores admisibles, para los que se fijó los correspondientes a

1^{mm} por kilómetro para el error accidental medio probable.
$0^{mm},2$ » » sistemático »

calculadas para mayor uniformidad por las fórmulas

$$m_r^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} \Sigma \frac{S^2}{L}\right]; \quad s_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L} \Sigma \frac{S^2}{L} \quad \text{y} \quad s_R^2 = \frac{1}{\Sigma L^2}\left(\frac{2}{9}\Sigma f^2 - r_r^2 \Sigma L\right).$$

Escogidos entre todos los modelos de aparatos, hoy día en uso, el Wild-Zeiss número 3 para ejecutar en nuestra península los trabajos correspondientes a aquella precisa categoría «Nivelaciones de alta precisión» procede, para obtener de los citados aparatos el mayor y mejor rendimiento, principalmente en cuanto a la exactitud de los trabajos se refiere, estudiar los errores con aquéllos cometibles, a fin de dar las normas e instrucciones más convenientes para la ejecución de los mencionados trabajos.

Errores accidentales.

1.° *Error en la coincidencia de los extremos de la burbuja.*—Aun suponiendo que esta coincidencia no pueda hacerse con una exactitud mayor que la correspondiente a un error máximo de 0,0005 metros, se producirá un error medio probable de $\frac{0,0005}{3 \times 2}$ para la exacta situación del centro de la burbuja, que originará un error de $\frac{0,0005}{6}$ en la lectura sobre una mira colocada a una distancia del aparato igual al radio del

nivel (*); y como este error es directamente proporcional a la distancia, resultará que a la distancia media de 35 metros el error será $\frac{0,0005}{6} \times \frac{35}{41} = 0^{mm},071$.

Pero haciéndose en cada posición de la mira dos series de lecturas, resultará que el error medio probable en definitiva para la distancia media de 35 metros será

$$\frac{0,0005}{6} \times \frac{35}{41} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0^{mm},0503.$$

2.° *Error de lectura o error de estima.*—Teniendo el anteojo del aparato un aumento de 36 diámetros, las divisiones semicéntricas de la mira colocada a la distancia media de 35 metros se apreciarán con la misma longitud que a simple vista colocadas a una distancia de $\frac{35}{36} = 0,97$ metros, originándose un ángulo visual que abarcará un milímetro a una distancia de 0,194 metros. En estas condiciones un operador ejercitado apreciará el décimo de división, cometiendo en la estima un error medio probable $e_o = \frac{0,1}{3} = 33$ milésimas de división que corresponde sobre la mira a un valor de $e_o = 0^{cm},5 \times 0,033 = 0^{cm},0166 = 0^{mm},166$.

Observación.—Este mismo error se cometería también aun cuando los aumentos del anteojo no fuesen más que 14 (suponiendo en 0,25 metros la distancia mínima de visión distinta), pues se tendría $\frac{35}{14} = 2,5 \ldots . 0,25$, etc., etc.

Con el aumento de 36 diámetros y cometiendo el mismo error medio probable $e_o = 0^{mm},166$ se puede aumentar la longitud de las niveladas hasta una distancia d determinada por $\frac{d}{36} = 2,5$; $d = 90$ metros. Se tendría en este caso $\frac{90}{36} = 2,5 \ldots . 0,25$, etcétera, etc. Claro es que con el aumento de 36 diámetros y la mira a 35 metros se podría obtener una mayor precisión en las lecturas, o sea una disminución en el error de estima. Efectivamente, un aumento de 14 diámetros equivale, para los efectos de la apreciación, a tener una división ($0^{cm},5$) en medios milímetros a la distancia de 2,5, y en estas condiciones se aprecia perfectamente el décimo de división, o sea $0^{mm},5$. Con un aumento de 36 diámetros, permaneciendo constante la distancia de 35 metros, se tendrá $\frac{0,5 \times 36}{14} = 1,28$ y, por lo tanto, la apreciación de la longitud de 0,5 corresponderá a fraccionar la división en un número de partes $d = \frac{1,28}{0,05} = 25$ (en números redondos), resultando, en su consecuencia, que la apreciación sería $\frac{0^{cm},5}{25} = 0^{mm},2$, que corresponde a un error medio probable $e_o = \frac{0,2}{3} = 0^{mm},066$.

(*) La sensibilidad del nivel es la correspondiente a 2^{mm} por $10''$, según características de la casa constructora, con lo que resultará

$$C = 2\pi R = 360^o = 1296000'' = 129600 \times 2 = 259200^{mm}$$

de donde

$$R = \frac{259200}{2\pi} = 41^m$$

en números redondos.

Pero esto exigiría que el operador estuviera perfectamente habituado a tal clase de fraccionamiento y que los hilos del retículo no se proyectasen aparentemente sobre la mira colocada a 35 metros con una anchura superior a $0^{mm},2$. Como ni una ni otra condición se cumplen, muy principalmente la primera, pues los operadores están habituados a la apreciación de la décima de división, resultará que no puede aprovecharse el exceso de aumentos para obtener una mayor apreciación, o sea un menor error de estima.

La precisión indicada anteriormente de $0^{mm},166$ puede, desde luego, obtenerse con un operador ejercitado por permitirlo la anchura con que se proyectan los hilos del retículo. En efecto: admitiendo que el poder separador del ojo o agudeza visual es de 60″, el espesor del hilo del retículo deberá cumplir la condición

$$\delta \leqq f_1\, 60'' \operatorname{arc} 1'' = \frac{f_1}{f} f\, 60'' \operatorname{arc} 1'',$$

siendo

f_1 = distancia focal ocular

f = ídem íd. objetiva,

llamando A a los aumentos del anteojo se tiene

$$\frac{f_1}{f} = \frac{1}{A},$$

que da

$$\delta \leqq \frac{f}{A} 60'' \operatorname{arc} 1'';$$

sustituyendo

$$\left.\begin{matrix} f = 249 \\ A = 36 \end{matrix}\right\},$$

se tiene

$$\delta \leqq \frac{249}{36} 60 \operatorname{arc} 1'' = 0{,}002;$$

suponiendo que este sea el grueso del hilo, el ángulo paralático (ω) cuyo vértice es el foco principal del objetivo será

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\omega) = \frac{0{,}001}{249} = 0{,}00000405622; \qquad \frac{1}{2}(\omega) = 0''83,$$

o sea

$$\omega = 1''66.$$

Con este ángulo el hilo del retículo se proyectará aparentemente sobre la mira colocada a una distancia media de 35 metros con una anchura $D = 35 \times 1'',66 \operatorname{arc} 1'' = 0^{mm},28$ y a la distancia máxima de 50 metros $D = 50 \times 1'',66 \times \operatorname{arc} 1'' = 0^{mm},40$; cantidades ambas menores de $0^{mm},5$ que es la apreciación que hemos supuesto al principio y correspondiente a $e_a = 0^{mm},166$.

Estos resultados coinciden perfectamente con los obtenidos escrupulosa y directamente con el aparato, como se ve en el cuadro siguiente:

Distancias.	Grueso de la faja coincidente con el hilo del retículo.	Grueso según la fórmula.
50,60	0,40	0,4048
80,00	0,65	0,64
100,00	0,80	0,80

En resumen: el error e_s sería $e_s = 0^{mm},166$, pero teniendo en cuenta los dos sistemas de lecturas que se hacen en cada posición de la mira, resultará, en definitiva,

$$e_0 = \frac{0,166}{\sqrt{2}} = 0^{mm},1178.$$

Esta cuantía de error es sin emplear el dispositivo de estima. Haciendo uso de él, la apreciación de las lecturas puede llegar teóricamente a las centésimas de milímetro con la estima a ojo de las divisiones (no numeradas) del tambor. Pero esta estima teórica debe considerarse ilusoria, puesto que el error que estudiamos depende en primer término de la exactitud con que hagamos la coincidencia del hilo del retículo con la división de la mira, lo que depende de la anchura o grueso con que se proyectan aquéllos sobre ésta; así, por ejemplo, a la distancia de 18 metros el grueso del hilo es de $0^{mm},15$, por lo tanto, el error de e_s será

$$\frac{0,15}{3\sqrt{2}} = 0^{mm},035.$$

Todavía puede aquilatarse aún más la precisión de las lecturas a estas distancias hasta 20 metros en que se aprecia perfectamente el ancho de la división de la mira, haciendo la coincidencia con el doble trazo convergente del retículo (parte izquierda del mismo); mas como éste no puede emplearse con igual ventaja a la distancia media de 35, ni por lo tanto, a las mayores, prescindiremos de aquellos casos favorables y consideraremos el error accidental medio probable por el concepto que nos ocupa, que es el anteriormente hallado $e_s = 0^{mm},1178$.

3.º Error debido a la variación de temperatura.

4.º Error de contacto.

Los errores por estas dos causas que, respectivamente, vienen representados por $e_s = 0^{mm},2$ y $e_s = 0^{mm},117$ con los procedimientos operatorios, aparatos y miras empleados hasta la fecha, desaparecen con los nuevos aparatos por la invariabilidad práctica de la cinta Invar y por la constitución del modelo Wild-Zeiss.

5.º Inclinación de la mira.—Aun cuando la verticalidad de la mira está expuesta a dos clases de errores, accidentales en cuanto que la burbuja del nivel esférico no estará totalmente centrada, y sistemático en cuanto al defecto de corrección del nivel, como ambas causas de error se traducirán en la práctica en una inclinación de la

mira respecto de la vertical, o sea en falta de perpendicularidad de la mira y eje de colimación, sistemáticamente se obtendrá en todas las posiciones de aquéllas mayor lectura que la que se obtendría si la mira tuviese aquella posición ideal, consideraremos, para los efectos de la diferencia de nivel, que este error es accidental, toda vez que su influencia en dicha diferencia de nivel dependerá de la mayor inclinación que sobre la vertical tenga la mira de frente respecto a la que tenga la mira de espalda, o viceversa y *a priori*, y puesto que las miras van siendo alternativamente de frente y espalda, en el transcurso de los trabajos es evidente que los errores debidos a las expresadas causas iránse destruyendo en parte, ya por la influencia que en él tienen la relativa posición de la mira respecto a su nivel esférico, ya por cuanto se refiera a la mayor aptitud que un portamiras puede tener sobre el otro para los efectos de centración de la burbuja. Como la mira debe colocarse sobre la señal o soporte con su trípode, el portamiras calará la burbuja con una diferencia máxima de $0^{mm},5$ entre las distancias respectivas de los bordes de la burbuja a los puntos más próximos a la circunferencia del nivel en el sentido transversal, o sea con una desviación máxima de $\frac{0^{mm},5}{2}$ en este sentido para el centro de la burbuja, lo que producirá una separación probable (de la exacta posición) de $\frac{0^{mm},2}{3}$ y una inclinación probable de la mira igual a $\frac{0,09}{300}$ suponiendo que el radio del nivel sea 300^{mm}, de modo que

$$i = \frac{0^{mm},09}{300} = 0^{mm},0003.$$

La precisión del calado de la burbuja en el sentido perpendicular al considerado, o sea en dirección del aparato, la fijaremos en la mitad de lo apuntado por el paralaje debido al espesor del vidrio, por lo tanto, la inclinación accidental probable de la mira en este sentido será $i' = 2\,i = 0^{mm},0006$.

Además, el defecto inicial de corrección del nivel y los pequeños movimientos que pueden producirse en el transcurso de las operaciones, en la posición relativa del nivel y mira alcanzan difícilmente un total de un milímetro que corresponde a una inclinación $i'' = \frac{1}{300} = 0^{mm},0033$. Por consiguiente, la inclinación probable debida a las causas expuestas será

$$I = \sqrt{0,0003^2 + 0,0006^2 + 0,0033^2} = 0^{mm},0034;$$

a consecuencia de esta inclinación, el error por metro de mira será (fig. 21)

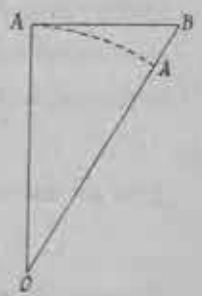


Figura 21.

$$\varepsilon = A'B = \frac{\overline{AB}^2}{2\,AO} = \frac{\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AO}^2}\,AO}{2} = \frac{I^2 AO}{2}$$

para un metro, $AO = 1$ metro

$$\varepsilon = \frac{I^2}{2} = \frac{0,0034}{2} = 0^{mm},0058,$$

totalmente despreciable.

Con la inclinación máxima indicada y teniendo la mira la graduación central, el error del cero por este concepto o inclinación del cero resulta totalmente insignificante, pues aun admitiendo una tolerancia de $1^{mm},0$, límite raramente alcanzado, para diferencia de nivel entre los bordes del talón de la mira, resultará elevado el cero de la graduación central, aun en el supuesto de que el punto de apoyo (talón y señal o soporte) esté a un tercio de uno de los bordes, la cantidad

$$0{,}0054 \times \frac{1^{mm},0}{6} = 0^{mm},0006 \text{ (*) (despreciable).}$$

Haciendo uso del anillo central que se adosa al talón de la mira para evitar que éste pueda resbalar sobre el pivote del soporte o plancha, y que siempre debe emplearse, se elimina este error, pues el citado punto de apoyo (talón y pivote del soporte) está siempre prácticamente centrado; por consiguiente, el error accidental medio probable, debido a todas las causas, será

$$e_0 = \sqrt{0{,}0503^2 + 0{,}1178^2} = \sqrt{0{,}01570693} = 0^{mm},125$$

por nivelada de 35 metros, que producirá un error accidental medio probable kilométrico igual a

$$\frac{0{,}125 \times \sqrt{\frac{1\,000}{35}}}{\sqrt{2}};$$

teniendo en cuenta que la nivelación se efectúa dos veces en sentidos contrarios (ida y vuelta), resultando en definitiva $e_0 = 0^{mm},47$.

(*) Aun cuando para la fijación de la mira no se use trípode y se emplee el bastón, resultará:

Calado de la burbuja en el sentido transversal.— Separación probable del centro de la burbuja 0,2 milímetros, correspondiente a una separación de un milímetro entre bordes, que origina una inclinación de

$$i' = \frac{0{,}2}{300} = 0^{mm},00065.$$

Inclinación de la mira por error en el calado de la burbuja en sentido contrario al considerado

$$i' = 2i = 0{,}0013.$$

Defecto inicial del nivel

$$i'' = \frac{1}{300} = 0{,}0033.$$

Inclinación total

$$I = \sqrt{i^2 + i'^2 + i''^2} = 0{,}0036 \text{ (despreciable).}$$

Error por metro de mira

$$\frac{0{,}0036^2}{2} = 0^{mm},006 \text{ (despreciable).}$$

Elevación del cero

$$0{,}0036 \times \frac{1{,}0}{6} = 0{,}0006 \text{ (despreciable).}$$

Errores sistemáticos.

Errores de refracción.—Sea (fig. 22) OB la dirección de la visual afectada de la refracción; M y M' las miras; h = altura del elemento $b\,b_1$ de la línea visual, distante una cantidad x de la mira M'; H = altura del instrumento; I = ángulo en b de la trayectoria $O\,B$ con la normal al suelo; dI = variación de este ángulo; L_1 y L_2 las distancias del aparato a las miras de frente y de espalda; L = longitud total de la nivelada = $(L_1 + L_2)$; h_1 y h_2 las alturas de las lecturas hechas sobre las miras de frente y de espalda; $t_1\,t_2\,t_3$ las temperaturas del aire en los puntos B, O y A, respectivamente, $\theta = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$; p = pendiente del terreno; B = presión barométrica; α coeficiente de la dilatación del aire = 0,00366; n = índice de refracción del aire; D = diferencia de nivel entre los puntos de apoyo de las miras de frente y de espalda; μ = módulo de los logaritmos neperiano = $\log e = 0{,}434$; a, b y c = tres constantes determinadas por la fórmula $t = a + b \log (h + c)$, que expresa la temperatura del aire en un punto cualquiera en función de su altura. Dichas constantes se determinan en cada caso particular por medio de tres observaciones de temperatura $t\,t'\,t''$ hechas a las alturas $h\,h'\,h''$; b es positiva si la temperatura crece con la altura y negativa en caso contrario, mientras que c es siempre positiva.

La lectura hecha sobre la mira M' será h_1 a la que habrá que agregar Bm' para tener la verdadera; es decir, la que se haría si no existiera el error de refracción

$$\varepsilon_1 = Bm' = \int_0^{L_1} x\,dI.$$

Por ser $B\,m'$ sumamente pequeño se puede hacer

$$x = \frac{h - h_1}{p};$$

además sabemos que

$$n \operatorname{sen} I = \text{constante}$$

$$n = 1 + 0{,}000294\,\frac{B}{0{,}76} \times \frac{1}{1 + \alpha t};$$

ecuaciones que diferenciadas dan

$$dI = \operatorname{tang} I\,\frac{du}{n} = -\frac{1}{p}\,dn$$

Puesto que siendo Bm' tan pequeño se puede hacer $\operatorname{tang} I = \frac{1}{p}$, y puesto que diferenciándose n de la unidad en una cantidad menor que 0,0003 se puede hacer $n = 1$.

$$dn = -0{,}00000108\,\frac{B}{0{,}76} \times \frac{dt}{(1 + \alpha t)^2} =$$

$$= -0{,}00000108\,\frac{B}{0{,}76} \times \frac{dt}{(1 + \alpha\theta)^2} =$$

Puesto que t variará muy poco en el trayecto $A\,B$ y se puede suponer o hacer $t = \theta = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$.

$$= -0{,}00000108\,\frac{B}{0{,}76} \times \frac{Mb}{(1 + \alpha\theta)^2} \times \frac{dh}{h + c}$$

Puesto que de la fórmula $t = a + b \log (h + c)$ se obtiene, diferenciándola, $dt = \frac{Mb\,dh}{(h + c)}$.

Sustituyendo estos valores obtenidos para dI, dn y x en la expresión de ε integrada entre los límites h_1 y H tendremos la corrección total para la visual OB, que será

$$\varepsilon_1 = m'B = \int_{h_1}^{H} x\,dI =$$

$$= -\int_{h_1}^{H} \frac{h-h_1}{p} \times \frac{1}{p}\,dn = \int_{h_1}^{H} \frac{h-h_1}{p^2} \times 0{,}00000108\,\frac{B}{0{,}76}\,\frac{Mb}{(1+\alpha\theta)^2} \times \frac{dh}{h+c} =$$

$$= \frac{0{,}00000108}{p^2} \times \frac{B}{0{,}76} \times \frac{Mb}{(1+\alpha\theta)^2} \int_{h_1}^{H} \frac{(h-h_1)\,dh}{h+c} =$$

$$= \frac{0{,}00000108}{p^2}\,\frac{B}{0{,}76}\,\frac{Mb}{(1+\alpha\theta)^2}\left[(H-h_1) + (h_1+c)\,L\,\frac{h_1+c}{H+c}\right];$$

análogamente para la visual OA, se tendrá:

$$\varepsilon_2 = mA = \frac{0{,}00000108}{p^2} \times \frac{B}{0{,}76}\,\frac{Mb}{(1+\alpha\theta)^2}\left[(H-h_3) + (h_3+c)\,L\,\frac{h_3+c}{H+c}\right];$$

luego la corrección final que habrá que agregar a la diferencia de nivel $D = h_3 - h_1$ será:

$$\varepsilon = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \frac{0{,}00000108}{p^2}\,\frac{B}{0{,}76} \times$$

$$\times \frac{Mb}{(1+\alpha\theta)^2}\left[H - h_3 + (h_3+c)\,L\,\frac{h_3+c}{H+c} - H + h_1 - (h_1+c)\,L\,\frac{h_1+c}{H+c}\right] =$$

$$= -\frac{0{,}00000108}{p^2}\,\frac{B}{0{,}76} \times \frac{Mb}{(1+\alpha\theta)^2}\left[h_3 - h_1 - (h_3+c)\,L\,\frac{h_3+c}{H+c} + (h_1+c)\,L\,\frac{h_1+c}{H+c}\right] =$$

$$= -\frac{0{,}00000108}{p^2}\,\frac{B}{0{,}76} \times \frac{Mb}{(1+\alpha\theta)^2}\left[D - (h_3+c)\,L\,\frac{h_3+c}{H+c} + (h_1+c)\,L\,\frac{h_1+c}{H+c}\right]. \qquad [1]$$

Vemos, pues, que en la magnitud del citado error influyen la pendiente del terreno, longitud de las niveladas, diferencia entre las longitudes de las niveladas de frente y espalda, altura del instrumento, coeficiente estadimétrico, presión barométrica, parte inferior de la mira no utilizada, temperatura, etc.; por lo que hácese preciso, para formarse idea del citado error, además de considerar algunos casos de los que frecuentemente se presentan en la práctica, estudiar todas aquellas causas que en él influyen para, en su consecuencia, ver los medios prácticos de anularlo o reducirlo.

1.° Considerando el caso en que la temperatura varíe uniformemente con la altura, y suponiendo una diferencia máxima entre las longitudes de las niveladas de frente y espalda de un metro, tendremos:

$$\varepsilon = 0^{mm},00108\,\frac{B}{0{,}76} \times \frac{1}{(1+\alpha\theta)^2}\,\frac{L(L_3 - L_1)}{2}\ (*)$$

(*) $\qquad t = t_0 + \beta h;$

llamando β a la variación de la temperatura por metro de altura

$$t = a + b\log(h+c) = a + Mb\left(Lc + \frac{h}{c} - \frac{h^2}{2c^2} + \frac{h^3}{3c^3} - \frac{h^4}{4c^4} \cdots\right).$$

y sustituyendo

$$B = 0{,}76; \qquad \theta = 10^{g}; \qquad \beta = 0{,}5; \qquad L_3 - L_1 = 0^{m},33; \qquad L = 60$$

se tiene

$$\varepsilon = 0{,}0052,$$

error que en el caso más desfavorable produce un error kilométrico

$$\varepsilon_K = 0{,}0052 \times \frac{1000}{60} = 0^{mm},086.$$

2.° Supongamos un terreno horizontal, se tendrá:

$$\varepsilon_0 = 0{,}00108\,\frac{\beta}{0{,}76}\,\frac{1}{(1+\alpha\theta)^2}\,\frac{Mb}{2(H+c)}\,L\,(L_3 - L_1) = \frac{MbKL(L_3 - L_1)}{2(H+c)} \quad (*),$$

---

de estas dos ecuaciones se deduce

$$a + MbLc = t_0; \qquad Mb\,\frac{h}{c} = \beta h; \qquad \frac{Mb}{c} = \beta; \qquad M\,\frac{b}{c^2} = \frac{\beta}{c} = 0 \ldots\ldots,$$

relaciones que para ser satisfechas exigen

$$c = \infty; \qquad b = \infty; \qquad \frac{b}{c} = \text{constante} = \frac{\beta}{M};$$

sustituyendo estos valores en la ecuación primera, se obtiene

$$\varepsilon = \frac{0}{0};$$

pero en realidad el límite es

$$\varepsilon = MbKL\,\frac{L_3 - L_1}{2(H+c)},$$

siendo

$$K = 0^{mm},00108\,\frac{B}{0{,}76}\cdot\frac{1}{(1+\alpha\theta)^2};$$

sustituyendo en esta expresión $\dfrac{Mb}{H+c}$ por su límite $M\dfrac{b}{c} = \beta$, se tiene

$$\varepsilon = \frac{K}{2}\,\beta L\,(L_3 - L_1).$$

(*) Siendo horizontal el terreno se verificará

$$D = 0; \qquad p = 0; \qquad h_1 = h_3 = H,$$

que convierten la expresión primera en

$$\varepsilon = \frac{0}{0},$$

forma indeterminada; pero que tiene por límite

$$\varepsilon = MbKL\,\frac{L_3 - L_1}{2(H+c)}.$$

en la que

$$K = 0{,}00108\,\frac{\beta}{0{,}76} \times \frac{1}{(1+\alpha\theta)^2}\,;$$

sustituyendo en la expresión de ε_0 los valores $b = 2{,}30$ y $c = 0{,}60$ que corresponden a estado térmico definido más adelante, se tiene:

$$\varepsilon_K = 0^{mm},084.$$

Mas como no siempre tiene tan escasa importancia el error de refracción, existiendo casos en que éste puede llegar a ser mayor que el error accidental, como se ve en el que más adelante se cita, procede estudiar con todo cuidado las causas que influyen en el citado error.

Influencia de la pendiente del terreno. — Para mayor facilidad o comodidad de los cálculos supondremos que el nivel está colocado equidistante de las miras, con lo cual se tendrá:

$$h_3 - H = H - h_1 = \frac{D}{2},$$

que da

$$h_3 + c = (H+c) + \frac{D}{2} = (H+c)\left[1 + \frac{D}{2(H+c)}\right]$$

$$h_1 + c = (H+c) - \frac{D}{2} = (H+c)\left[1 - \frac{D}{2(H+c)}\right];$$

haciendo

$$\delta = \frac{D}{2(H+c)}$$

y sacando factor común a D en la expresión [**1**], se tiene

$$\varepsilon = -\frac{0^{mm},00108}{p^2} \times \frac{B}{0{,}76} \times \frac{MbD}{(1+\alpha\theta)^2}\left[1 - \frac{1}{2\delta}\,L\,\frac{1+\delta}{1-\delta} - \frac{1}{2}\,L(1-\delta^2)\right] =$$

$$= -MK\,\frac{bD}{p^2}\left[1 - \frac{1}{2\delta}\,L\,\frac{1+\delta}{1-\delta} - \frac{1}{2}\,L(1-\delta^2)\right], \qquad [2]$$

en la que

$$K = 0{,}00108\,\frac{B}{0{,}76} \times \frac{1}{(1+\alpha\theta)^2}$$

expresión [**2**] que da el error ε en función de la variable auxiliar δ.

Dependencia entre δ y p. — Distinguiremos dos casos: primero, terreno poco inclinado, en donde la longitud de las niveladas es constantemente igual al máximo m; y segundo, terreno de pendiente fuerte, en donde aquellas longitudes son variables, disminuyendo a medida que aumenta p.

En el primer caso, puesto que L permanece constante, la expresión

$$\delta = \frac{D}{2(H+c)} = \frac{pL}{2(H+c)} \qquad [3]$$

expresa la relación entre δ y p.

En el segundo caso L es una variable definida por

$$(p+s)\frac{L}{2}=(H-e), \qquad [4]$$

expresión deducida de la figura 23;

$$\left.\begin{array}{lll} H-H_2=H_1; & \dfrac{H_1}{\frac{L}{2}}=p; & H_1=p\cdot\dfrac{L}{2} \\ \dfrac{H_3}{\frac{L}{2}}=s; & H_3=s\,\dfrac{L}{2} & \end{array}\right\} \quad H_1+H_3=(p+s)\frac{L}{2}=H-H_2+H_3=H-e,$$

eliminando L entre

$$\left.\begin{array}{l} \delta=\dfrac{pL}{2(H+c)} \\ (p+s)\dfrac{L}{2}=(H+c) \end{array}\right\} \quad \delta=\frac{H-e}{H+c}\times\frac{p}{p+s}. \qquad [5]$$

El punto de paso de un caso a otro; es decir, la pendiente a partir de la cual las niveladas deben de disminuir se obtendrá sustituyendo L por L_m en la expresión [4], que dará

$$p_m=\frac{2(H-e)}{L_m}-s;$$

el valor de δ correspondiente a esta pendiente de transición se obtendrá llevando este valor de p_m a la expresión [3], que dará

$$\delta=\frac{pL}{2(H+c)}=\frac{\left[\frac{2(H-e)}{L_m}-s\right]L_m}{2(H+c)}=\frac{2L_m(H-e)-L_m^2 s}{2(H+c)L_m}=\frac{2(H-e)-sL_m}{2(H+c)}.$$

Sea, por ejemplo,

$$L_m=120^m; \qquad e=0{,}30^m; \qquad s=0{,}005 \qquad \text{y} \qquad H=1{,}50,$$

se tendrá

$$p_m=0{,}015 \qquad \text{y} \qquad \delta_m=0{,}45,$$

que nos dice que a partir de la pendiente $\frac{1{,}5}{100}$ las niveladas deben acortarse.

Variación del error de refracción con la pendiente.—Estudiada la dependencia entre δ y p, vamos a ver la que existe entre s y p; para ello distinguiremos los dos mismos casos anteriores:

Primer caso, o sea niveladas de longitud constante $p \leqq p_m$.—De las ecuaciones

$$p=\frac{D}{L}, \qquad \delta=\frac{pL}{2(H+c)}$$

se deduce

$$D=pL, \qquad p=\frac{2\delta(H+c)}{L};$$

sustituyendo estos valores en la expresión [**2**], se tiene:

$$\varepsilon' = -\dot{M}Kb\frac{pL}{p\,\frac{2\delta(H+c)}{L}}\left[1-\frac{1}{2\delta}L\frac{1+\delta}{1-\delta}-\frac{1}{2}L(1-\delta^2)\right]=$$

$$=-\frac{MbKL_m^2}{2(H+c)}\frac{1}{\delta}\left[1-\frac{1}{2\delta}L\frac{1+\delta}{1-\delta}-\frac{1}{2}L(1-\delta^2)\right]=-\frac{bKL_m^2}{2(H+c)}\Phi(\delta), \qquad [\mathbf{6}]$$

siendo o representando

$$\Phi(\delta)=\frac{1}{\delta}\left[1-\frac{1}{2\delta}L\frac{1+\delta}{1-\delta}-\frac{1}{2}L(1-\delta)^2\right]=\frac{1}{\delta}L\frac{1+\delta}{1-\delta}\varphi(\delta),$$

siendo o representando

$$\varphi(\delta)=\frac{1-\frac{1}{2}L(1-\delta^2)}{L\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)}-\frac{1}{2\delta}.$$

Siendo, pues, la expresión [**6**] un producto de dos factores, uno constante e igual a $\frac{bKL_m^2}{2(H+c)}$ y otro variable $\Phi(\delta)$; para formarse idea de la variación o dependencia de ε' con relación a δ o a p, bastará construir la curva

$$\Phi(\delta)=\frac{1}{\delta}L\frac{1+\delta}{1-\delta}\varphi(\delta) \quad \text{(fig. 24)}$$

entre los límites de δ

$$\left[\delta=\frac{D}{2(H+c)}\right],$$

que son

$$\begin{array}{llll} \delta=0 & \text{para} & D=0 & \text{ó} \quad c=\infty \\ \delta=1 & \text{»} & D=2H & \text{y} \quad c=0, \end{array}$$

y en la que para

$$\begin{array}{ll} \delta=0 & \Phi(\delta)=0 \\ \delta=0{,}04 & \Phi(\delta)=0{,}03 \\ \delta=0{,}07 & \Phi(\delta)=0{,}0585 \\ \delta=1{,}1 & \Phi(\delta)=0{,}138 \end{array}$$

curva que, como se ve en la figura 24, parte del origen de coordenadas y se eleva regularmente hasta $Y=0{,}138$.

Segundo caso, niveladas de longitud variable $p \geq p_m$.—La ecuación [**6**] representa en este caso el error de refracción sin más que sustituir la constante L_m por la variable L que se obtiene del valor de

$$\delta_m=\frac{2(H-e)-\sigma L}{2(H+c)},$$

que da

$$2\delta_m(H+c)-2(H-e)=-\sigma L \qquad \text{y} \qquad L=\frac{2}{\sigma}[(H-e)-\delta(H+c)];$$

llamando

$$\pi = \frac{L}{L_m} = \frac{2}{\sigma L_m}[(H-e) - \delta(H+c)]$$

tendremos $L = \pi L_m$, y sustituyendo en la [6] se obtendrá:

$$\varepsilon'' = -\frac{bK}{2(H+c)}\Phi(\delta) \times \pi^2 L_m^2 = -\frac{bKL_m^2}{2(H+c)}\Phi(\delta) \cdot \pi^2 = \varepsilon' \cdot \pi^2. \qquad [7]$$

Por consiguiente, para ver o conocer la variación de ε'' con relación a (δ) o a p bastará estudiar el producto

$$\Phi(\delta) \times \pi^2 = \omega(\delta),$$

puesto que el otro factor $\frac{bKL_m^2}{2(H+c)}$ es constante.

Dicho producto se puede representar gráficamente; bastará para ello multiplicar la ordenada de la curva $\Phi(\delta)$ (fig. 24) por π^2; lo que podemos hacer de un modo gráfico teniendo en cuenta que π es una función lineal de δ y representada en la figura 24 por la recta AB, que tiene por ordenada en el origen

$$\pi_0 = 0B\,\frac{2(H-e)}{\sigma L_m} = 0{,}046$$

para $\delta = 0$ y que corta al eje de las X en el punto A $\pi = 0$ correspondiente a

$$\delta = 0A = \frac{H-e}{H+c} = 0{,}9.$$

Construyendo o representando dicho producto [curva $\omega(\delta)$], en la que para

$$\begin{array}{llll} \delta = 0, & \Phi(\delta) = 0 & \text{y} & \omega(\delta) = 0 \\ \delta = \delta_m, & \pi = 1 & \text{y} & \omega(\delta) = \Phi(\delta) \\ \delta = \dfrac{H-e}{H+c}, & \pi = 0 & \text{y} & \omega(\delta) = 0, \end{array}$$

se ve que parte del origen se eleva regularmente por encima de $\Phi(\delta)$ hasta un máximo N y desciende también regularmente hasta el eje de las X, cortando a la curva $\Phi(\delta)$ en un punto M correspondiente a $\delta = \delta_m$.

La porción de curva útil a nuestro caso es la parte comprendida entre M y A, puesto que el caso que consideramos es el de pendientes mayores que p_m, o sea valores de δ comprendidos entre $\delta = \delta_m$ y $\delta = 1$.

Por consiguiente, cuando la inclinación o pendiente del terreno varía entre $p = 0$ (horizontal) y $p = 1$ (vertical), el error de refracción varía según las ordenadas del triángulo curvilíneo MOA. Nulo dicho error en terreno horizontal va aumentando con la pendiente del terreno hasta un máximo

$$\varepsilon' = \frac{bKL_m^2}{2(H+c)}\Phi(\delta_m)$$

correspondiente a la pendiente de transición (suponiendo hasta aquí las niveladas de igual longitud), para disminuir después a partir de dicho máximo a medida que disminuye la longitud de las niveladas.

Influencia de la longitud máxima de las niveladas. —Para estudiar ésta, consideremos la influencia que en la expresión

$$z = -\frac{bKL_m^2}{2(H+c)}\Phi(\delta)$$

tiene la variante L_m. La parte de dicha expresión dependiente de L_m es

$$L_m^2\Phi(\delta_m) = M(L_m),$$

en la que

$$\delta_m = \frac{2(H-e) - zL_m}{2(H+c)}.$$

Eliminando δ_m entre estas dos relaciones, tendremos $M(L_m)$ en función de L_m. Para representar gráficamente esta función (fig. 25), sea OM la curva $\Phi(\delta_m)$. Sobre el eje de las X, o mejor sobre una paralela a este eje, tómense los valores de L_m, y sobre el eje de las Y los correspondientes de δ_m deducidos de la ecuación

$$\delta_m = \frac{2(H-e) - zL_m}{2(H+c)},$$

que por ser función lineal de δ_m y L_m queda representada por la recta BC, que partiendo de C, punto correspondiente a

$$L_m = 0 \qquad \text{y} \qquad \delta_m = 0C = \frac{H-e}{H+c} = 0A \quad \text{(fig. 24)}$$

encuentra el eje de las X en un punto B dado por

$$\delta_m = 0; \qquad L_m = 0B = \frac{2(H-e)}{z} = 560,$$

(suponiendo $H = 1^m,50$; $e = 0^m,10$; $z = 0,005$), límites estos que corresponden a

$$p_m = \infty$$
$$p_m = 0,$$

puesto que

$$p_m = \frac{2(H-e)}{L_m} - z$$
$$\delta = \frac{H-e}{H+c}\,\frac{p}{p-z}.$$

Para obtener ahora el punto $\Phi(\delta_m)$ correspondiente a un valor de $L_m = 50^m$ tómese $oa = 50^m$; aa' representará el valor de δ_m correpondiente $= oa''$. Llévese oa'' sobre el eje de las X en oa''' y levántese la ordenada $a'''A$ de la curva $\Phi(\delta_m)$. Bastando ahora multiplicar este valor de $\Phi(\delta_m)$ por L_m^2 para tener el valor correspondiente

de $M(L_m)$. Para esto proyectemos A sobre la ordenada de u (cien metros), tomada por unidad de longitud, y tendremos el punto A'; únase A' con O, la recta OA' corta en A'' a la vertical del punto a, y se verificará

$$\frac{Oa}{ou} = \frac{aA''}{uA'} = L_m$$

de donde

$$aA'' = L_m \Phi(\delta_m);$$

multiplicando nuevamente este valor por L_m como acabamos de indicar se tendrá el punto A_1 que buscamos, pues

$$A_1 a = L_m \times A'' a = L_m^2 \Phi(\delta_m).$$

Repitiendo estas operaciones por los diversos valores de L_m se obtiene la curva $M(L_m)$, que nos dice que el error máximo de refracción correspondiente a la pendiente de transición crece más rápidamente que la longitud máxima de las niveladas.

Influencia de la altura del instrumento. —La parte de la expresión de

$$\varepsilon = \frac{-bKL_m^2}{2(H+c)} \Phi(\delta_m)$$

dependiente de H está representada por

$$\frac{\Phi(\delta_m)}{(H+c)} = \omega(H).$$

Procediendo análogamente al caso anterior a eliminar δ_m entre esta expresión y la

$$\delta_m = \frac{2(H-e) - \sigma L_m}{2(H+c)}$$

se obtendrá la representación gráfica de la dependencia que buscamos.

Para ello sea $OA''M$ (fig. 26) la curva $\Phi(\delta)$.

La ecuación

$$\delta_m = \frac{2(H-e) - \sigma L_m}{2(H+c)}$$

da

$$2\delta_m H + 2\delta_m c = 2H - 2e - \sigma L_m$$

o

$$\delta_m H + \delta_m c = H - e - \frac{\sigma L_m}{2}$$

o

$$\frac{\sigma L_m}{2} + e + c = -\delta_m H - \delta_m c + H + c = (H+c)(1-\delta_m).$$

Ecuación ésta, representada gráficamente por una hipérbola equilátera, cuyas asíntotas son

Recta RS que corresponde a $\delta_m = 1$ $(H = \infty)$

Idem RT idem a $H = -c$ $\delta_m = \infty$.

La curva $bcdAf$ es la parte de dicha hipérbola comprendida entre dos límites

$$H = 0{,}46; \qquad H = 2^m.$$

Para obtener ahora la curva $\omega(H)$ que buscamos, sea a un punto cualquiera correspondiente a $H = 1{,}60$; por las construcciones que se detallan en la figura se obtiene

$$A'''a = A''a' = \Phi(\delta_m);$$

bastará, por lo tanto, dividir este valor obtenido por $(H + c)$ para tener el punto correspondiente de la $\omega(H)$. Para esto únase A''' con T y se tendrá la recta TA'''; trácese la recta $\alpha\beta$ que tenga por ecuación $o\alpha = 1^m - c$ y el punto de intersección a'' de ambas rectas, llevado sobre la ordenada de $a = 1{,}60$, dará el punto A_1 de la curva que buscamos, pues se tiene

$$\frac{a''\alpha}{A'''a} = \frac{T\alpha}{Ta},$$

pero

$$a''\alpha = A_1 a; \qquad T\alpha = 1; \qquad Ta = Oa + To = H + c,$$

y, por tanto,

$$A_1 a = \frac{\Phi(\delta_m)}{H + c}.$$

Procediendo análogamente para los diversos valores de H, comprendidos entre los límites prácticos

$$H = 1{,}20; \qquad H = 1{,}80,$$

se obtiene la $A_2 A_1 A_3$, que nos dice que el error máximo de refracción correspondiente a la pendiente de transición es casi independiente de la altura del instrumento. Esto se explica fácilmente, porque siendo p_m una función creciente de H

$$p_m = \frac{2(H - e)}{L_m} - \sigma,$$

al aumentar H aumenta p_m y, por consiguiente, el rayo luminoso, aunque atraviesa mayor número de capas de aire, las encuentra menos oblicuamente, efectuándose una compensación en la desviación final de la visual.

Influencia de la porción inferior de la mira no utilizada.—La influencia de e sobre el valor ε está representada en la influencia que dicha variante e tiene sobre

$$\delta_m = \frac{2(H - e) - \sigma L_m}{2(H + c)}$$

y, por tanto, sobre $\Phi(\delta_m)$. La curva representativa de la expresada influencia o dependencia entre σ y e puede construirse de la manera siguiente: Sea (fig. 27) OM la curva $\Phi(\delta_m)$. Paralelamente al eje de las X constrúyase la escala representativa de los valores de e, y llévese sobre el eje de las Y los valores de δ_m correspondientes a aquellos de e obtenidos por la expresión

$$\delta_m = \frac{2(H-e) - \sigma L_m}{2(H+c)};$$

expresión ésta, que está representada en la figura por la recta AB que corta al

$$\text{eje } X \text{ en } A; \quad \delta_m = 0 \text{ para } p_m = 0; \qquad e_0 = H - \frac{\sigma L_m}{2} = 1{,}20 = oA$$

$$\text{eje } Y \text{ en } B; \quad e = 0 \text{ para } oB = \delta_m = \frac{2H - \sigma L_m}{2(H+c)} = \frac{oA}{H+c} = 0{,}77,$$

(suponiendo $L_m = 120^m$; $H = 1^m{,}50$; $c = 0{,}06$ y $\sigma = 0{,}005$).

Para obtener ahora el punto de la curva que buscamos correspondiente a $e = 0{,}30 = oa$, que da $aa' = oa''$ valor correspondiente a δ_m, llévese oa'' sobre oA en oa_1 y la ordenada a_1a_2 representará el valor correspondiente de $\Phi(\delta_m)$. Llevando ahora a_1a_2 sobre la vertical de a, tendremos el punto A' de la curva buscada correspondiente al valor de $e = 0{,}30$. De la misma manera se obtendrán todos los demás puntos de la curva $A_1A'A''A_2$, que nos dice que el error máximo de refracción correspondiente a la pendiente de transición decrece casi uniformemente a medida que aumenta la parte inferior no utilizada de la mira.

Influencia del coeficiente estadimétrico – El valor de σ no ejerce influencia más que en el de $\Phi(\delta_m)$, pudiendo presentarse gráficamente esta dependencia entre σ y $\Phi(\delta_m)$ de la manera siguiente: Sea (fig. 28) OM la curva $\Phi(\delta_m)$.

La ecuación

$$\delta_m = \frac{2(H-e) - \sigma L_m}{2(H+c)}$$

queda representada por la recta AB, que encuentra a los ejes

$$X, \text{ en } A, \text{ dado por } \sigma_0 = oA = \frac{2(H-e)}{L_m} = 0{,}023 \text{ para } \delta_m = 0_1, \text{ ó } p_m = 0, \text{ puesto que } \delta = \frac{pL}{2(H+c)}$$

$$Y, \text{ en } B, \text{ dado por } \delta_m = oB = \frac{H-e}{H+c} \text{ para } \sigma = 0, \; p_m = \sigma_0, \text{ puesto que } p_m = \frac{2(H-e)}{L_m} - \sigma.$$

Para determinar ahora el valor de $\Phi(\delta_m)$ correspondiente a un valor dado de $\sigma = 0{,}005 = oa$ que da sobre la recta AB la ordenada aa', llévese aa' sobre el eje de las Y en $oa'' = aa'$; tómese $oa''' = oa''$ y trácese la ordenada de la curva $\Phi(\delta)$ correspondiente a este punto a''', y llévese ésta $a'''a_1$ sobre la ordenada de a y se tendrá el punto A_1 de la curva que se trata de obtener. Procediendo análogamente para los diversos valores de σ se obtiene la curva BA_1A_2, que nos dice «que el error máximo de refracción correspondiente a la pendiente de transición disminuye (más rápidamente) a medida que aumenta el coeficiente estadimétrico.

Influencia de la repartición de la temperatura.—Si en la expresión

$$t = a + b \log (h + c)$$

se reemplaza sucesivamente t y h por t_1 y h_1, después por t_2 y H y por último por t_3 y h_3, y se restan miembro a miembro las expresiones resultantes, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} t_3 - t_1 = b \log \frac{h_3 + c}{h_1 + c} &= b \log \frac{(H + c)\left[1 + \frac{D}{2(H + c)}\right]}{(H + c)\left[1 - \frac{D}{2(H + c)}\right]} = b \log \frac{1 + \frac{D}{2(H + c)}}{1 - \frac{D}{2(H + c)}} = \\ &= b \log \frac{1 + \delta}{1 - \delta} = M b L \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \end{aligned}\right\} \quad [8]$$

siendo

$$\delta = \frac{D}{2(H + c)},$$

(y puesto que estando el nivel equidistante de las miras se tiene $h_3 - H = H - h_1 = \frac{D}{2}$)

$$t_2 - t_1 = b \log \frac{H + c}{h_1 + c} = - b \log (1 - \delta),$$

de donde

$$t_3 - t_2 = b \log (1 + \delta) \qquad \text{y} \qquad \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} = \tau = - \frac{\log (1 + \delta)}{\log (1 - \delta)},$$

fórmula que expresa el valor de δ en función de τ; en ella se ven que si $\tau = 0$ ($t_3 - t_2$ infinitamente pequeño con relación a $t_2 - t_1$), δ será $= 1$; si $\tau = 1$ (temperatura variando uniformemente con la altura) δ será $= 0$.

Los valores de τ y δ correspondientes y comprendidos entre dichos límites quedan representados en la doble escala de la figura 29. Para ver ahora la influencia o dependencia entre ε y t, sustituyamos en la ecuación [**2**]

$$\varepsilon = - MK \frac{bD}{p^2} \left[1 - \frac{1}{2\delta} L \frac{1 + \delta}{1 - \delta} - \frac{1}{2} L (1 - \delta^2)\right]$$

el valor de Mb por el deducido de la expresión [**8**]

$$Mb = \frac{t_3 - t_1}{L \frac{1 + \delta}{1 - \delta}}$$

y se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon = \frac{KD}{p^2} (t_3 - t_1) \left[\frac{1 - \frac{1}{2\delta} L \frac{1 + \delta}{1 - \delta} - \frac{1}{2} L (1 - \delta^2)}{L \frac{1 + \delta}{1 - \delta}}\right] = \\ = \frac{KD}{p^2} (t_3 - t_1) \left[\frac{1 - \frac{1}{2} L (1 - \delta^2)}{L \frac{1 + \delta}{1 - \delta}} - \frac{1}{2\delta}\right] \end{aligned}\right\} \quad [9]$$

expresión ésta que demuestra que el error de refracción es proporcional a la diferencia $(t_2 - t_1)$ de las temperaturas correspondientes a las miras de frente y espalda en los puntos leídos sobre ellas y a la función

$$\frac{1-\frac{1}{2}L(1-\delta^2)}{L\frac{1+\delta}{1-\delta}} = x(\delta)$$

dependiente de δ, y por tanto, de τ. En la figura 29 está representada esta función, y da, por consiguiente, los diversos valores de $\varphi(\delta)$ correspondientes a los de φ y de τ, viéndose que parte de 0 ($\delta = 1$ $\tau = 0$), y se eleva rápidamente hasta alcanzar el máximo de 0,066 que corresponde a $\delta = 0{,}904$ o $\tau = 0{,}27$ para descender después casi uniformemente y volver a 0 para $\delta = 0$ ó $\tau = 1$, es decir, cuando la temperatura varía uniformemente con la altura. Lo que podía de antemano preverse, puesto que los errores de refracción sobre las dos lecturas (mira, espalda y frente) serán iguales, y por consiguiente, la diferencia de nivel estará exenta del citado error. Lo mismo hubiéranse deducido de la expresión que para este caso (temperatura variando uniformemente con la altura) se obtiene

$$\varepsilon_0 = \frac{MbKL(L_2 - L_1)}{2(H+c)},$$

pues siendo $L_2 = L_1$ será $\varepsilon = 0$. Como aplicación de lo expuesto y confirmación de la importancia que puede adquirir en determinadas circunstancias el error de refracción, consideremos el caso siguiente: sean $L_m = 120$, $c = 0{,}30$, $H = 1{,}50$, $D = 2$ y $B = 0{,}76$, $\sigma = 0{,}005$, temperaturas en el lugar de la estación a

0,50	2°,3
1,50	3°
2,50	3°,4

se verificará

$$\tau = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} = 0{,}57,$$

que da $\delta = 0{,}5$ (fig. 29)

$$\delta = \frac{D}{2(H+c)} \qquad c = 0{,}50$$

$$t_3 - t_1 = b \log \frac{h_3 + c}{h_1 + c} \qquad b = 2{,}30$$

$$p_m = \frac{2(H-c)}{L_m} - \sigma = 0{,}015,$$

que nos dice que las niveladas deben acortarse a partir de $p = \frac{15}{1000}$.

$$\delta_m = \frac{2(H-c) - \sigma L_m}{2(H+c)} = 0{,}45,$$

que da (fig. 24) $\Phi(\delta_m) = 0{,}034$.

$$\left.\begin{array}{ll} t_2 - t_1 = -b\log(1-\delta) = 0{,}28 & t_1 = 2{,}72 \\ t_3 - t_2 = \quad b\log(1+\delta) = 0{,}22 & t_3 = 3{,}22 \end{array}\right\} \theta = 2{,}98$$

$$K = 0{,}00108\,\frac{\beta}{0{,}76} \times \frac{1}{(1+\alpha\theta)^2} = 0{,}00105 \qquad r_m = \frac{bKL_m^2}{2(H+e)}\,\Phi(\delta_m) = 0{,}296;$$

luego en un kilómetro de pendiente continua el error sería $\varepsilon_k = 0{,}296\,\frac{1000}{120} = 2^{mm},13$.

Pero acortando las niveladas, haciéndolas de 40 metros, se tiene

$$\delta = \frac{2(H-e) - \varepsilon L_m}{2(H+e)} = 0{,}11, \quad \Phi(\delta_m) = 0{,}007, \quad r_m = 0^{mm},0067 \quad \text{y} \quad \varepsilon_K = 0^{mm},16.$$

Vemos, por lo tanto, que cuando se presenten en la práctica de los trabajos casos en que sean de temer grandes refracciones, no hay más remedio que acortar la longitud de las niveladas.

Casos como el apuntado se presentan a la salida y puesta del Sol, en los cambios bruscos de temperatura, etc., etc., por lo que es muy recomendable no efectuar en estas horas, trabajos de alta precisión si el terreno se presenta con pendiente continua, pues ya se ha visto con qué facilidad pueden producirse en estos casos errores sistemáticos (por efecto de la refracción), que superen el límite fijado de 0,2 por kilómetro.

Como resumen de lo expuesto y de los diversos casos analizados y calculados, que no expondremos por no alargar este trabajo, diremos:

1.° Que el nivel se colocará siempre equidistante de las miras, dentro del límite de $0^{mm},20$ para el error probable.

2.° Que en terreno horizontal, cuando la temperatura varíe uniformemente con la altura y cuando la temperatura permanezca constante (túneles), las niveladas pueden llegar al máximo de 100 metros.

3.° Que e (parte no utilizada de la mira), no debe nunca ser inferior a 0,25 para niveladas menores de 25 metros, y a 0,50 cuando las niveladas son mayores de 25 metros.

4.° Cuando el terreno se presente con pendiente no continua ascendente y descendente, y no sean de temer por el estado del aire grandes refracciones, las niveladas pueden llegar a la longitud de 70 metros.

5.° En caso de terreno con pendiente continua y estado del aire análogo al caso anterior, las niveladas deben acortarse hasta 60 metros.

6.° Cuando el terreno se presente con pendientes continuas, si el estado del aire hace temer grandes refracciones, las niveladas deben reducirse a 40 metros, extremando en estos casos la equidistancia del aparato a las miras.

7.° Suspender los trabajos cuando presentándose el terreno con fuertes pendientes continuas, sean de temer por el estado del aire grandes refracciones.

8.° En casos extremos, y cuando sea imprescindible ejecutar trabajos de nivelación de alta precisión para establecer la señal de fin de jornada, etc., las niveladas pueden reducirse hasta 20 metros, no debiendo llevar más adelante dicha reducción para no sobrepasar el límite admisible del error accidental.

Además de todas estas causas de error apuntadas existen otras varias que no

teniendo cabida en el vasto campo del cálculo pueden, en gran modo, perturbar los resultados y, por consiguiente, conviene tenerlas muy presentes, así como el medio de evitarlas. Dichas causas son, entre otras:

1.ª *Desarreglo del nivel esférico de la mira.*—Para evitar que esta causa de error pase de los límites apuntados al tratar de los errores por inclinación de la mira, hay que verificar de cuando en cuando aquéllos con ayuda de la plomada y escuadras que al efecto van provistas cada juego de dos miras.

2.ª *Pereza de la burbuja.*—A fin de evitar que la coincidencia de los extremos de la burbuja sea ficticia y, por consiguiente, ilusoria la horizontalidad del aparato, hay que tener cuidado en terminar el calado muy lentamente y siempre en el mismo sentido.

3.ª *Falta de horizontalidad de los hilos.*—Conviene comprobar el cumplimiento de esta condición, para no falsear las lecturas, haciendo enrasar o bisectando con un extremo del hilo nivelador una división de la mira y comprobando, girando convenientemente el anteojo, que aquél en toda su longitud sigue enrasando o bisectando la citada división.

4.ª *Inclinación de la mira.*—Al hacer las lecturas sobre la mira debe el observador comprobar el paralelismo entre el hilo vertical del retículo y el de la mira.

5.ª *Cambio de posición del talón de la mira.*—Deben los portamiras, para evitar esta causa de error, emplear constantemente el anillo que se adosa al talón de la mira y que evita que éste resbale sobre el pivote del apoyo.

6.ª *Error de lectura.*—Dada la doble numeración de la mira debe el observador comprobar en todas las lecturas del hilo nivelador, la constante diferencia que debe existir entre las hechas en las dos escalas de aquélla.

7.ª *Defecto de colocación del ocular.*—Debe el observador acostumbrarse a mover lentamente el ocular y apreciar con igual limpieza y claridad la imagen de la mira y los hilos del retículo.

8.ª *Defecto de colocación del retículo.*—Es muy conveniente comprobar la exacta colocación del retículo, elevando y bajando el ojo del observador delante del ocular y asegurarse de que no existe desplazamiento relativo entre los hilos del retículo e imagen de la mira.

9.ª *Modificación de la visual después del calado de la burbuja.*—Para evitar cualquier alteración en la posición de la burbuja, que hay que comprobar al terminar las lecturas, ya por efecto de los movimientos elásticos del suelo, depresión del mismo, etcétera, etc., es muy conveniente fijar sólidamente el trípode y pisar lo menos posible en las proximidades de sus pies, conviniendo, para la compensación de los efectos producidos por las citadas causas, tener la precaución de colocar dos pies del trípode en dirección del itinerario y alternativamente a derecha y a izquierda del observador.

10. *Hundimiento del soporte de la mira.*—Debe el portamiras hincar fuertemente el soporte de la mira sobre el terreno, a fin de evitar que se hunda en el transcurso de la nivelación por efecto del peso de la mira. Si se usa bastones para la fijación de la mira, el esfuerzo ejercido debe principalmente efectuarse sobre los bastones.

11. *Defecto de estabilidad de las señales.*—A fin de conseguir la inamovilidad de las señales conviene colocar éstas con alguna anticipación a los trabajos de la nive-

lación, para que hayan hecho su definitivo asiento antes de que aquéllos se efectúen. Al paso de un tren o vehículo conviene levantar la mira de la plancha o apoyo para no aumentar el efecto de las vibraciones.

12. *Acción de la temperatura y viento.*—Para anular prácticamente las perturbaciones que por estas causas (temperatura, humedad, viento, etc.) puedan producirse, conviene hacer las niveladas en el menor tiempo posible y hacer constante uso del quitasol y parabrisas.

13. *Ondulación de la imagen de la mira.*—A consecuencia de estas ondulaciones que se producen, principalmente al mediodía y por la mañana durante la evaporación del rocío, la estima no puede hacerse en buenas condiciones, por lo que conviene no operar durante las horas en que estas ondulaciones tengan una amplitud de dos milímetros o más, acortando las niveladas siempre que la ondulación se haga sensible, colocando el aparato lo más alto posible, a fin de que la visual sea lo más separada del suelo y teniendo la precaución de colocar las miras de modo que aquélla (visual) no cruce el balastro ni los carriles cuando los trabajos se lleven por las líneas férreas.

14. *Error de miras.*—Como para disminuir la duración de las niveladas se deben emplear dos miras, éstas deben colocarse alternativamente de frente y de espalda en el transcurso de una nivelación; invirtiéndose el orden en la segunda nivelación si esto se efectuase con las mismas miras, que se hará en sentido contrario para destruir, por lo menos en parte, ciertos errores sistemáticos que se producen en el sentido de la marcha, como son el descenso del aparato y soporte de la mira durante el intervalo de nivelada de espalda a la de frente. De todo cuanto antecede se desprenden las siguientes normas de trabajo; normas que la práctica de los mismos rectificará o sancionará.

Normas para el observador.

1.ª Empleará dos miras, que alternativamente serán de frente y de espalda, invirtiendo el orden de ellas en la segunda nivelación si ésta la llevare a cabo el mismo operador.

2.ª El aparato lo colocará equidistante de las miras, apreciando ésta con cinta, rodete, etc., con un $e_0 = 0^{mm},20$ y de modo que dos de las patas del trípode estén en la dirección del itinerario que se siga y alternativamente a su derecha e izquierda.

3.ª El centrado de la burbuja la hará como se ha indicado, teniendo cuidado de girar lentamente y en el mismo sentido el tornillo de calado.

4.ª Comprobará al hacer la lectura el paralelismo de hilo vertical del retículo y borde de la mira, así como también la permanencia del calado de la burbuja al terminar las lecturas.

5.ª Pisará lo menos posible en las proximidades de las patas del trípode del aparato.

6.ª Cuidará de que el quitasol y parabrisas resguarden totalmente el aparato y trípode.

7.ª La longitud de las niveladas serán de un máximo de 50 metros (100 total entre las miras de frente y de espalda) en terreno horizontal, cuando la temperatura

varíe uniformemente con la altura y cuando la temperatura permanezca constante (nivelación por túneles, etc).

8.ª Las longitudes de las niveladas se disminuirán prudentemente cuando el terreno se presente con pendientes mayores de 0,015.

9.ª El hilo estadimétrico inferior ha de estar encima de la división 5 (25 centímetros).

10. La longitud media de cada nivelada será de 30 a 35 metros cuando el terreno no se presente con pendientes continuas y no sean de temer grandes refracciones por el estado del aire.

11. En caso de pendiente continua y estado del aire análogo al caso anterior, las niveladas serán de 20 a 25 metros.

12. Cuando el terreno se presente con pendiente continua y sean de temer fuertes refracciones, las niveladas deben reducirse a 10 ó 15 metros, extremando en estos casos la equidistancia del aparato.

13. No deben ejecutarse los trabajos cuando presentándose el terreno con fuertes pendientes continuas sean de temer grandes refracciones.

14. Cuando en este caso sea imprescindible continuar la nivelación (establecimiento de la señal de fin de jornada por cambio brusco del ambiente del aire), deben limitarse las niveladas a 10 metros, extremando la equidistancia del aparato.

15. Debe comprobar de cuando en cuando y siempre que la mira sufra algún golpe, final de transporte por ferrocarril, etc., el nivel esférico de la mira por medio de la plomada.

16. Comprobará al hacer las lecturas la horizontalidad de los hilos.

17. Comprobará antes de hacer las lecturas la exacta colocación del ocular y del retículo.

18. Suspenderá los trabajos durante las horas en que la ondulación de la imagen tenga una amplitud superior a 1,5 milímetros, y acortará la longitud de la nivelada siempre que aquélla se haga sensible, teniendo la precaución en estos casos de colocar el aparato lo más alto posible, y que la visual no cruce el balastro ni carriles cuando los trabajos se lleven por la vía.

19. En cada estación efectuará 12 lecturas en el orden siguiente: hilos estadimétricos, mira de espalda; hilo nivelador sobre la graduación izquierda (menor) de la mira de espalda, dos veces; hilo nivelador sobre la graduación derecha (mayor) de la mira de espalda, dos veces; hilo nivelador sobre la mira de frente, graduación izquierda, dos veces; hilo nivelador sobre la mira de frente y graduación derecha (mayor), dos veces; hilos estadimétricos, mira de frente.

20. Comprobará diariamente al empezar y terminar el trabajo la corrección del aparato y siempre que este sufra algún golpe.

Normas para el portamiras.

1.ª Sentará fuertemente el apoyo de la mira, cuando esta no se coloque sobre señal fija, ayudándose con la mano.

2.ª Colocará la mira con el trípode o bastones de modo que la burbuja quede

centrada con la circunferencia que trazada en negro, tiene el casquete del nivel, inmovilizando la mira cuando esto esté conseguido.

3.ª Cuidará al girar la mira (para pasar a la nivelada siguiente) de que el pivote del apoyo no tropiece en el anillo del talón que empleará siempre.

4.ª Si se hace uso de bastones para la fijación de la mira, debe ejercer sobre éstos, principalmente, su esfuerzo.

5.ª Al paso de cualquier vehículo levantará la mira de su apoyo.

6.ª Cuando la mira se apoye sobre señales incrustadas en piedra, etc., observará atentamente si al girar la mira su talón tropieza en la piedra, etc., por efecto de una mala colocación de la señal, para en este caso hacer la estación sin anillo.

CAPÍTULO IV

MÉTODO ANALÍTICO PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS ERRORES ACCIDENTALES Y SISTEMÁTICOS

Representemos por

L la longitud expresada en kilómetros de una línea aislada o lado de un polígono.

Δ la discordancia entre dos nivelaciones, entre dos señales consecutivas.

Δ' ídem íd. íd., después de eliminar la parte sistemática.

S la discordancia sistemática total, para una línea o lado de polígono.

s ídem íd. kilométrica, ídem íd. íd.

f la separación de cierre de un polígono después de aplicarle la corrección ortométrica.

r la separación entre dos señales consecutivas.

N_r número de señales de una línea.

N_p ídem de polígonos de una red, comprendiendo el polígono envolvente.

N_R ídem total de señales de una red comprendiendo $(N_R + N_p - 1)$ intervalos.

τ_{ik} el error accidental probable kilometrico de la media de dos nivelaciones de una línea.

τ_{ir} el error accidental probable kilométrico de la media correspondiente a una red.

τ_{iR} ídem íd. íd., deducido de las separaciones de cierre de los polígonos, incluyendo el polígono envolvente.

$\tau_{ik'}$ el error accidental probable de la media de dos nivelaciones entre dos señales consecutivas.

σ la discordancia sistemática media por kilómetro.

σ_k el error sistemático probable kilométrico de una línea.

σ_r ídem íd. íd. obtenido de una red.

σ_R el error sistemático probable kilométrico obtenido de una red por comparación de las separaciones de cierre con el error accidental medio.

$\left.\begin{matrix}\tau_{ik}^{*2} \\ \tau_{iR}^{*2} \\ \tau_{ir}^{*2}\end{matrix}\right\}$ los cuadrados $\left\{\begin{matrix}\tau_{ik} \\ \tau_{iR} \\ \tau_{ir}\end{matrix}\right\}$ afectados de los pesos proporcionales al número de niveladas o desarrollos de las líneas correspondientes.

Fórmulas fundamentales.

Siendo

$$\eta_{k'} = \pm \frac{\Delta'}{3}$$

en un kilómetro que comprende $\frac{1}{r}$ niveladas, el error será

$$\eta_k = \pm \eta_{k'} \sqrt{\frac{1}{r}} = \pm \frac{\Delta'}{3\sqrt{r}}$$

para una sección o línea de L kilómetros

$$\eta_k = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \eta_k^2}{N_r - 1}} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\Sigma \frac{\Delta'^2}{r}}{N_r - 1}}; \qquad [1]$$

pero

$$\Delta = \Delta' + \sigma r; \qquad \Delta^2 = \Delta'^2 + 2\Delta' \sigma r + \sigma^2 r^2; \qquad \frac{\Delta^2}{r} = \frac{\Delta'^2}{r} + 2\Delta' \sigma + \sigma^2 r;$$

$$\Sigma \frac{\Delta^2}{r} = \Sigma \frac{\Delta'^2}{r} + 2\sigma \Sigma \Delta' + \sigma^2 \Sigma r,$$

y siendo Δ' indiferentemente positiva o negativa

$$\Sigma \Delta' = 0,$$

además

$$\sigma = \frac{S}{L}; \qquad \Sigma r = L,$$

de donde

$$\Sigma \frac{\Delta^2}{r} = \Sigma \frac{\Delta'^2}{r} + 0 + \frac{S^2}{L^2} L,$$

o sea

$$\Sigma \frac{\Delta'^2}{r} = \Sigma \frac{\Delta^2}{r} - \frac{S^2}{L},$$

valor que sustituído en [1] da

$$\eta_k = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\Sigma \frac{\Delta^2}{r} - \frac{S^2}{L}}{N_r - 1}},$$

despreciando $\frac{S^2}{L}$, que será una cantidad muy pequeña comparada con $\Sigma \frac{\Delta^2}{r}$, se tendrá:

$$\eta_k = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\Sigma \frac{\Delta^2}{r}}{N_r - 1}} \qquad \text{ó} \qquad \eta_k^2 = \frac{1}{9(N_r - 1)} \Sigma \frac{\Delta^2}{r} \qquad [1]$$

Procediendo análogamente para una red comprendiendo $(N_R + N_p - 1)$ intervalos, tendremos:

$$\eta_r^2 = \frac{1}{9\,(N_R + N_p - 1)} \Sigma \frac{\Delta^2}{r} \qquad \textbf{[II]}$$

Si representamos por δ el error probable de la diferencia media de nivel entre los extremos de una línea o sección, tendremos que la separación probable de cierre de un polígono será:

$$f_p = \pm \sqrt{\Sigma \delta^2}$$

y el error kilométrico correspondiente

$$\varepsilon_k = \frac{f_p}{\sqrt{P}}.$$

Para una red compuesta de N_p mallas o polígonos

$$\eta_R = \sqrt{\frac{\Sigma \frac{f^2}{P}}{N_p}}, \qquad \eta_R^2 = \frac{1}{N_p} \Sigma \frac{f_p^2}{P}. \qquad \textbf{[2]}$$

Ahora bien: ya sabemos que la separación real de cierre f es igual a la separación media f_m de cierre; se verificará, por tanto,

$$f = f_m = \frac{3}{2} f_p$$

de donde

$$f_p = \frac{2}{3} f_m = \frac{2}{3} f,$$

expresión que sustituída en [**2**] da

$$\eta_R^2 = \frac{1}{N_p} \Sigma \frac{4f^2}{9P} = \frac{4}{9N_p} \Sigma \frac{f^2}{P}. \qquad \textbf{[III]}$$

Ahora bien: estas fórmulas [**I**], [**II**] y [**III**] tienen el defecto de estar deducidas dando a las discordancias el mismo peso, sea cual fuere la longitud correspondiente de sus trozos, cuando lo lógico y racional es afectar a dichas discordancias de pesos proporcionales al número de niveladas o desarrollos correspondientes.

Un ejemplo aclarará y pondrá más palpablemente de manifiesto este concepto.

Sea una línea constituída por dos trozos limitados por tres señales: el primero de 20 kilómetros, comprendiendo 200 niveladas de 100 metros, y el segundo de 100 metros, constituído por una nivelada de 100 metros.

Sean 10 milímetros y 2 milímetros, respectivamente, las discordancias reales correspondientes a los trozos primero y segundo. Las discordancias medias correspondientes por nivelada serán:

Primer trozo..... $\frac{10}{\sqrt{200}} = 0,^{mm}72$

Segundo ídem..... $= 2,^{mm}0$

Aplicando el procedimiento análogo al seguido en la obtención de las fórmulas [**I**], [**II**] y [**III**], se tendría que la discordancia media correspondiente a la línea entera compuesta de los dos citados trozos sería

$$\sqrt{\frac{0{,}72^2 + 2{,}0^2}{2}} = 1^{mm}{,}50,$$

es decir, que por agregar a las 200 niveladas del primer trozo una sola nivelada (segundo trozo) de algo menos precisión que las correspondientes al primer trozo, se ha duplicado la discordancia media y, por lo tanto, duplicado el error probable por nivelada. Esto es debido a haber dado el mismo peso a la discordancia proviniente de 100 niveladas que a la que procede de una, lo que a todas luces es injusto.

Aplicando, conforme la lógica nos dice, pesos proporcionales al número de niveladas o desarrollo correspondiente, se tendrá para la discordancia media correspondiente a la línea entera

$$\sqrt{\frac{0{,}72^2 \times 200 + 2^2 \times 1}{201}} = 0{,}^{mm}73;$$

Aplicando la regla precedente a las fórmulas [**I**], [**II**] y [**III**], suponiendo prácticamente iguales los intervalos r y perímetro P, se obtiene

$$\eta_k'^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{9L} \qquad [\mathbf{IV}]$$

$$\eta_r'^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{9\Sigma L} \qquad [\mathbf{V}]$$

$$\eta_R'^2 = \frac{2\Sigma f^2}{9\Sigma L} \qquad [\mathbf{VI}]$$

teniendo en cuenta que figurando en el total dos veces cada sección se verifica

$$\Sigma P = 2\Sigma L.$$

Siendo

$$\sigma_k = \frac{1}{3}\frac{S}{L}$$

para un conjunto de línea la media correspondiente σ_r, se obtendrá aplicando a los cuadrados del error sistemático σ_k pesos proporcionales a sus respectivas longitudes, obteniéndose

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L}\Sigma\frac{S^2}{L} \qquad [\mathbf{VII}]$$

Obtenidas estas fórmulas fundamentales, pasemos a la obtención de las que nos han de servir para la determinación de los errores correspondientes, según los casos.

1.° Cálculo del error accidental probable η_r en el caso de un grupo de líneas constituyendo o no polígonos cerrados, libre del error sistemático.

Ya sabemos que

$$\Delta = \Delta' + \frac{S}{L}r \qquad \text{y} \qquad \sigma_k = \frac{1}{3}\frac{S}{L},$$

de donde

$$\Delta = \Delta' + 3\sigma_k r, \qquad \Delta^2 = \Delta'^2 + 9\sigma_k^2 r^2 + 6\Delta'\sigma_k r, \qquad \Sigma\Delta^2 = \Sigma\Delta'^2 + 9\sigma_k^2 \Sigma r^2$$

por ser $\Sigma\Delta' = 0$; sustituyendo en la fórmula [**IV**] $\Sigma\Delta^2$ por $\Sigma\Delta'^2$, se obtiene

$$\eta_k^2 = \frac{1}{9L}(\Sigma\Delta^2 - 9\sigma_k^2 \Sigma r^2);$$

análogamente la fórmula [**V**] da

$$\eta_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L}(\Sigma\Delta^2 - 9\sigma_r^2 \Sigma r^2),$$

y sustituyendo el valor de σ_r por su igual

$$\frac{1}{9\Sigma L}\Sigma\frac{S^2}{L}$$

se obtiene

$$\eta_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L}\left(\Sigma\Delta^2 - \frac{9}{9\Sigma L}\Sigma\frac{S^2}{L}\Sigma r^2\right) = \frac{1}{9}\left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2}\Sigma\frac{S^2}{L}\right]. \qquad [\mathbf{A}]$$

2.° Cálculo del error sistemático probable en el caso de un grupo de líneas no formando red.

Ya hemos obtenido anteriormente

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L}\Sigma\frac{S^2}{L}; \qquad [\mathbf{B}]$$

3.° Cálculo del error sistemático probable en el caso de una red compuesta por lo menos por 10 polígonos.

La fórmula [**V**], ya obtenida, puede considerarse exenta de error sistemático por estar deducida de las discordancias entre señal y señal, mientras que la [**VI**] contiene dicho error sistemático con toda su influencia por ser $\eta_R'^2$ función de las separaciones de cierre de las mallas.

Por otra parte, el error sistemático medio kilómetro tiene por valor $\frac{3}{2}\sigma_R$; luego el error medio sistemático para una línea de L kilómetros será $\frac{3}{2}\sigma_k L$. Por consiguiente, la parte sistemática que contiene la fórmula [**VI**] $\eta_R'^2$ será

$$2 \times \frac{9}{4}\sigma_R^2 \Sigma L^2.$$

Por lo tanto, restando a Σf^2 en dicha ecuación [**VI**]

$$\left(\eta_R'^2 = \frac{2\Sigma f^2}{9\Sigma L}\right), \qquad 2 \times \frac{9}{4}\sigma_R^2 \Sigma L^2$$

la obtendremos libre de los errores sistemáticos, y entonces el valor resultante para $\eta_{iR}^{\prime 2}$ será igual al dado por la fórmula [**V**] para $\eta_r^{\prime 2}$, verificándose, por consiguiente,

$$\eta_r^{\prime 2} = \frac{2}{9\Sigma L}\left(\Sigma f^2 - \frac{9}{2}\sigma_R^2 \Sigma L^2\right) = \frac{2}{9}\frac{\Sigma f^2}{\Sigma L} - \sigma_R^2 \frac{\Sigma L^2}{\Sigma L},$$

pero la [**VI**] da

$$\eta_R^{\prime 2} = \frac{2\Sigma f^2}{9\Sigma L},$$

de las que se deduce

$$\eta_r^{\prime 2} = \eta_R^{\prime 2} - \sigma_R^2 \frac{\Sigma L^2}{\Sigma L} \qquad \text{y} \qquad \sigma_R^2 \times \frac{\Sigma L^2}{\Sigma L} = \eta_R^{\prime 2} - \eta_r^{\prime 2}$$

o sea

$$\sigma_R^2 = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2}(\eta_R^{\prime 2} - \eta_r^{\prime 2});$$

sustituyendo en esta expresión los valores de $\eta_{iR}^{\prime 2}$ y η_{ir}^2 por sus expresiones

$$\eta_R^{\prime 2} = \frac{2\Sigma f^2}{9\Sigma L} \qquad \text{y} \qquad \eta_r^{\prime 2} = \eta_{ir}^2,$$

se tiene

$$\sigma_R^2 = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2}\left(\frac{2\Sigma f^2}{9\Sigma L} - \eta_{ir}^2\right) = \frac{1}{\Sigma L^2}\left(\frac{2}{9}\Sigma f^2 - \eta_{ir}^2 \Sigma L\right), \qquad [\mathbf{C}]$$

fórmula esta [**C**] que, en unión de las [**A**] y [**B**], son las aprobadas por la Asociación Geodésica Internacional para el cálculo de los errores en cada uno de los tres casos considerados.

Vemos por lo expuesto que para la aplicación de las fórmulas [**A**] y [**B**] hácese preciso determinar la parte sistemática S, para lo que pueden seguirse varios procedimientos. Para formarse idea clara de dicho error sistemático consideremos (fig. 30) una línea de longitud L dividida en n trozos por señales fijas separadas entre sí $r_1\,(r_2\, r_3 \ldots\ldots r_n)$ nivelada dos veces (ida y vuelta). Si tomamos como abscisas las longitudes r_1, $(r_1 + r_2)$, $(r_1 + r_2 + r_3)$ ....., etc., y como ordenadas las discordancias acumuladas $\Sigma\Delta$ entre los desniveles obtenidos para cada trozo en dichas dos nivelaciones, obtendremos una curva $ABCDO'$, que en el supuesto de que sólo existan errores accidentales quedará dividida por el eje de las X en partes iguales, es decir, dividida de tal modo que la suma de las áreas determinada por dicho eje y las partes de curva correspondientes a las Y positivas será igual a la suma de las áreas comprendidas entre el citado eje y las partes de curvas correspondientes a las Y negativas, puesto que el caso supuesto (ausencia de errores sistemáticos) Δ será indistintamente positivo y negativo. Si suponemos ahora que en los trabajos de nivelación existen o se cometen errores accidentales y sistemáticos, ya no se verificará aquella compensación y se obtendrá una curva (representativa de las discordancias en función de las longitudes de los trozos correspondientes) de forma tal como indica la figura 31, curva que nos pone de manifiesto la existencia de un error sistemático S. Para determinar

este error sistemático S podemos seguir dos procedimientos. (Por error aparece en las figuras 30, 31, 32 y 33 la letra ε en lugar de la Σ.)

1.° *Procedimiento analítico.*—Como $\Sigma\Delta$ debe ser 0 (por ser indiferentemente positivo o negativo) si no existiesen más que errores accidentales, bastará efectuar dicha suma algebraica $\Sigma\Delta$ y su valor nos dará el error sistemático total cometido.

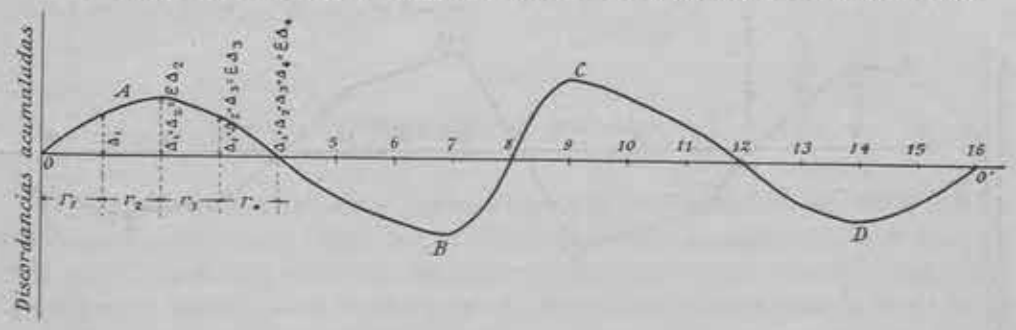


Figura 30.

2.° *Procedimiento gráfico.*—Construida (fig. 31) la curva $OA'B'C'D'O'$ trácese la recta OO' de tal modo que la suma de las áreas comprendidas entre dicha línea y las partes de curva que queden por encima sea igual a las áreas comprendidas por dicha línea y las partes de curva que quedan por debajo. Resultará de este modo que el trián-

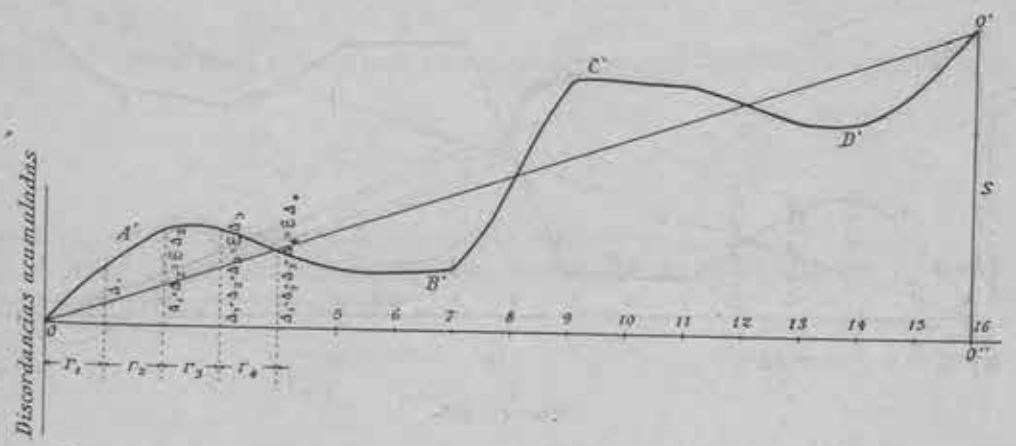


Figura 31.

gulo $OO'O''$ tendrá igual área que la figura $OA'B'C'D'O'O''O$ y, por consiguiente, la altura $O'O''$ de aquel triángulo representará el error sistemático total. Esta altura la determinaremos dividiendo el área de la figura $OA'B'C'D'O'O''O$ por la mitad de la base OO''. El área de la figura $OA'B'C'D'O'O''O$ se calculará haciendo uso de un planímetro o aplicando la conocida fórmula

$$A = \frac{1}{2}[r_1\Sigma\Delta_1 + r_2(\Sigma\Delta_1 + \Sigma\Delta_2)] + \ldots . r_n(\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n).$$

Claro es que, en el supuesto de que los errores accidentales se compensen regular y totalmente (*), los dos procedimientos conducen al mismo resultado (véanse estados 1.° y 2.°: $S=\frac{2a}{L}=0$ y $\Sigma\Delta=0$ en el 1.°, y $S=\frac{2a}{L}=8$ y $\Sigma\Delta=8$ en el 2.°), no sucediendo lo mismo cuando tal compensación no se verifica (figuras 32 y 33), exis-

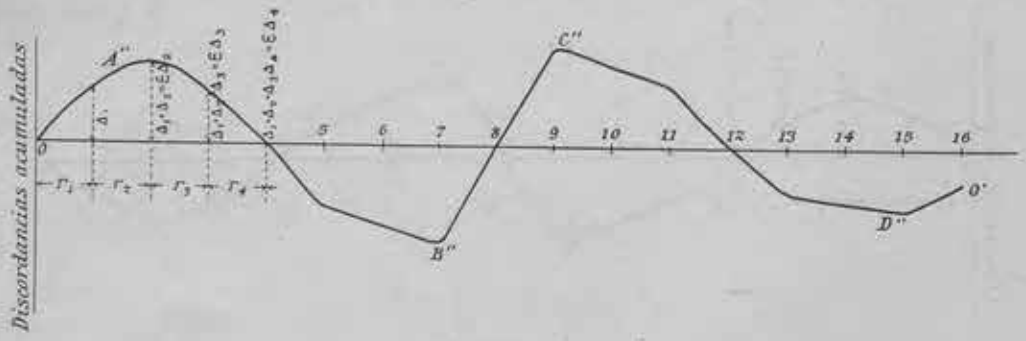


Figura 32.

tiendo entonces una diferencia entre los resultados dados por uno y otro procedimiento (véanse estados 3.° y 4.°: $S=\frac{2a}{L}=0$ y $\Sigma\Delta=1$ en el 3.°, y $S=\frac{2a}{L}=8$ y $\Sigma\Delta=7$ en el 2.°); diferencia despreciable cuando el error probable es de poca importancia comparado con el sistemático total. El primero de los procedimientos es defectuoso;

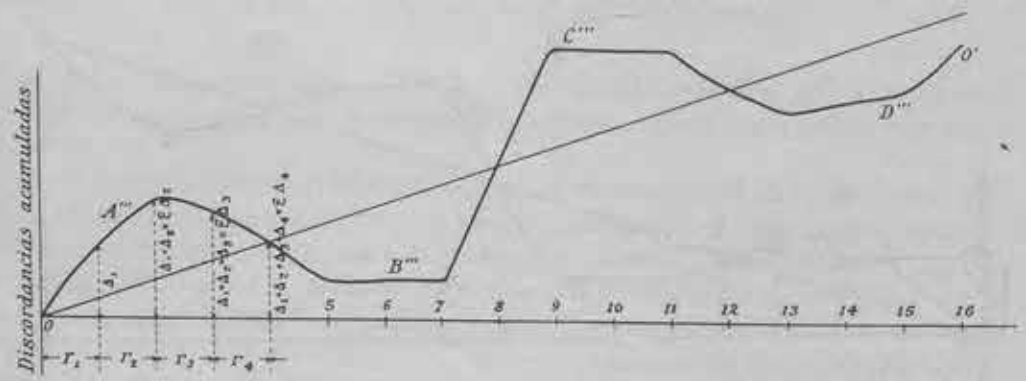


Figura 33.

debiéndose emplear el segundo procedimiento, y en éste el cálculo del área de la figura formada por el eje de las X, la curva y la ordenada final se calculará por el procedimiento gráfico indicado, según acuerdo de la Asociación Geodésica Internacional; acuerdo que indudablemente debió tomarse por considerar que ambos proce-

(*) Entiéndase por compensación regular aquella en que la curva representativa de las discordancias pueda cortarse por una recta que, cumpliendo la condición de que la diferencia de las ordenadas en sus puntos extremos (los interceptados por las ordenadas extremas de la curva) sea igual a la ordenada final de la curva, determine, con las partes de la curva situadas por encima y debajo de dicha línea, sumas de áreas iguales.

dimientos (gráfico y analítico) dan análogos resultados y que el segundo da dos valores distintos, según que se calcule la nivelación en el sentido de la ida o en el de la vuelta.

Para mayor claridad en la aplicación de las fórmulas [**A**] y [**B**], los estados 1.°, 2.°, 3.° y 4.°, que corresponden, respectivamente, a las figuras 30, 31, 32 y 33, contienen los cálculos correspondientes.

Observaciones generales.

El procedimiento adoptado y expuesto para la determinación del error sistemático no es absolutamente riguroso, pues la manera rigurosamente exacta de trazar la recta que cortando a la curva de las discordancias determine la parte S sería, según demostración hecha por el Profesor von F. Baeschilin, haciendo que la suma de los cuadrados de las longitudes de las ordenadas comprendidas entre la curva y la recta a trazar fuese un mínimum. Pero esta manera de determinar la parte sistemática S es de bastante más trabajo que la expuesta, sin que con ella se consiga una mayor precisión apreciable en los resultados.

El Profesor Jordan, considerando que todos los

$$\frac{\Delta_1^2}{r}, \quad \frac{\Delta_2^2}{r^2} \cdots\cdots \frac{\Delta_n^2}{r_n}$$

tienen el mismo peso, obtuvo para expresión del error accidental medio probable

$$\eta_r^2 = \frac{1}{9}\,\frac{1}{n}\left(\Sigma\,\frac{\Delta^2}{r} - \Sigma\,\frac{S^2}{L}\right) \qquad \text{ó} \qquad \eta_r^2 = \frac{1}{9}\,\frac{\Sigma\,\dfrac{\Delta^2}{r}}{n}$$

si se supone la total ausencia de los errores sistemáticos.

Durante varios años (1869 a 1876) se discutió cuál de las fórmulas, la de Jordan o las anteriormente expuestas [**A**],

$$\eta_r^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2}\,\Sigma\,\frac{S^2}{L}\right] \qquad \text{ó} \qquad \eta_r^2 = \frac{1}{9}\,\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L}$$

(en ausencia de los errores sistemáticos) era más correcta, hasta que Helmert demostró que tanto unas como otras son correctas, si bien la de Jordan era más exacta, por lo que quedaron estas últimas universalmente adoptadas. Esto no obstante, considerando sin duda alguna la Asociación Geodésica Internacional que la práctica ha demostrado que ambas fórmulas dan prácticamente el mismo resultado y que las [**A**] son más sencillas que las de Jordan, adoptó aquéllas [**A**] para el cálculo del error accidental medio probable de las nivelaciones de alta precisión.

1.º—Determinación de los errores.

(Corresponde a la figura 30.)

Desnivel ida.	Desnivel vuelta.	Discordancia $= \Delta$	Δ^2	$\Sigma\Delta$	$\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n$	r	$r(\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n)$	r^2
+ 1242,38	— 1241,38	+ 1,00	1,0	+ 1,0	+ 1,0	1,0	+ 1,0	1,0
— 947,50	+ 948,00	+ 0,5	0,25	+ 1,5	+ 2,5	1,0	+ 2,5	1,0
— 1110,60	+ 1110,10	— 0,5	0,25	+ 1,0	+ 2,5	1,0	+ 2,5	1,0
+ 843,60	— 844,60	— 1,0	1,0	0	+ 1,0	1,0	+ 1,0	1,0
— 1930,20	+ 1929,20	— 1,0	1,0	— 1,0	— 1,0	1,0	— 1,0	1,0
— 1420,70	+ 1420,20	— 0,5	0,25	— 1,5	— 2,5	1,0	— 2,5	1,0
+ 840,30	— 840,80	— 0,5	0,25	— 2,0	— 3,5	1,0	— 3,5	1,0
+ 100,50	— 98,50	+ 2,0	4,0	0	— 2,0	1,0	— 2,0	1,0
— 1100,90	+ 1102,90	+ 2,0	4,0	+ 2,0	+ 2,0	1,0	+ 2,0	1,0
— 1420,60	+ 1420,10	— 0,5	0,25	+ 1,5	+ 3,5	1,0	+ 3,5	1,0
+ 1228,50	— 1229,00	— 0,5	0,25	+ 1,0	+ 2,5	1,0	— 2,5	1,0
— 1420,60	+ 1419,60	— 1,0	1,0	0	+ 1,0	1,0	+ 1,0	1,0
+ 998,20	— 999,20	— 1,0	1,0	— 1,0	— 1,0	1,0	— 1,0	1,0
+ 1000,10	— 1000,60	— 0,5	0,25	— 1,5	— 2,5	1,0	— 2,5	1,0
— 1122,20	+ 1122,70	+ 0,5	0,25	— 1,0	— 2,5	1,0	— 2,5	1,0
+ 1309,00	— 1308,00	+ 1,0	1,0	0	— 1,0	1,0	— 1,0	1,0
			16,00			16,0	$2a = 0$	

$$S = \frac{2a}{16,0} = \frac{0}{16,0} = 0; \quad s = \frac{1}{2}\frac{0,0}{16,0} = 0,0; \quad \frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} = \frac{16}{16} = 1,0; \quad \frac{2r^2}{(\Sigma L)^2} = \frac{16}{16^2} = 0,0625;$$

$$\frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} \times \Sigma\frac{S^2}{L} = 0; \quad \nu_r^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2}\Sigma\frac{S^2}{L}\right] = \frac{1}{9} = 0,11; \quad \nu_r = \pm 0,33;$$

$$s_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L}\Sigma\frac{S^2}{L} = 0; \quad s_r = 0.$$

2.º—Determinación de los errores.

(Corresponde a la figura 31.)

Desnivel ida.	Desnivel vuelta.	Discordancia $= \Delta$	Δ^2	$\Sigma\Delta$	$\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n$	r	$r(\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n)$	r^2
+ 1033,90	— 1032,40	+ 1,5	2,25	+ 1,5	1,5	1,0	1,5	1,0
— 1355,38	+ 1356,38	+ 1,0	1,00	+ 2,5	4,0	1,0	4,0	1,0
— 864,60	+ 864,60	+ 0,0	0,00	+ 2,5	5,0	1,0	5,0	1,0
— 933,00	+ 932,50	— 0,5	0,25	+ 2,0	4,5	1,0	4,5	1,0
+ 1246,00	— 1246,50	— 0,5	0,25	+ 1,5	3,5	1,0	3,5	1,0
— 1154,20	+ 1154,20	— 0,0	0,00	+ 1,5	3,0	1,0	3,0	1,0
+ 99,50	— 99,50	— 0,0	0,00	+ 1,5	3,0	1,0	3,0	1,0
+ 867,70	— 865,20	+ 2,5	6,25	+ 4,0	5,5	1,0	5,5	1,0
— 1366,00	+ 1368,50	+ 2,5	6,25	+ 6,5	10,5	1,0	10,5	1,0
+ 1142,60	— 1142,60	— 0,0	0,00	+ 6,5	13,0	1,0	13,0	1,0
+ 1264,20	— 1264,20	— 0,0	0,00	+ 6,5	13,0	1,0	13,0	1,0
+ 989,90	— 990,40	— 0,5	0,25	+ 6,0	12,5	1,0	12,5	1,0
— 1111,00	+ 1110,50	— 0,5	0,25	+ 5,5	11,5	1,0	11,5	1,0
— 1564,20	+ 1564,20	— 0,0	0,00	+ 5,5	11,0	1,0	11,0	1,0
+ 969,60	— 968,60	+ 1,0	1,00	+ 6,5	12,0	1,0	12,0	1,0
+ 1067,00	— 1065,50	+ 1,5	2,25	+ 8,0	14,5	1,0	14,5	1,0
			20,00			16,0	$128,0 = 2a$	

$$S = \frac{2a}{16,0} = \frac{128}{16,0} = 8,0; \qquad z = \frac{1}{2}\,\frac{8}{16} = 0,25; \qquad \frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} = \frac{20}{16} = 1,25; \qquad \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} = \frac{16}{256} = 0,0625;$$

$$\frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} \times \Sigma\frac{S^2}{L} = 0,0625 \times \frac{S^2}{16} = 0,0625 \times 4 = 0,2500;$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2}\,\Sigma\frac{S^2}{L}\right] = \frac{1}{9}\,(1,25 - 0,25) = \frac{1}{9} = 0,11; \qquad \sigma_r = \pm 0,33;$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L}\,\Sigma\frac{S^2}{L} = \frac{1}{9 \times 16} \times \frac{64}{16} = 0,02777; \qquad \sigma_r = 0,166.$$

3.º—Determinación de los errores.

(Corresponde a la figura 32.)

Desnivel ida.	Desnivel vuelta.	Discordancia $= \Delta$	Δ^2	$\Sigma\Delta$	$\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n$	r	$r(\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n)$	r^2
+ 1140,10	— 1138,60	+ 1,5	2,25	+ 1,50	+ 1,50	1,0	+ 1,50	1,0
+ 1045,70	— 1045,20	+ 0,5	0,25	+ 2,00	+ 3,50	1,0	+ 3,50	1,0
— 984,90	+ 984,10	— 0,8	0,64	+ 1,20	+ 3,20	1,0	+ 3,20	1,0
+ 457,10	— 458,30	— 1,2	1,44	0	+ 1,20	1,0	+ 1,20	1,0
— 1267,00	+ 1265,50	— 1,5	2,25	— 1,50	— 1,50	1,0	— 1,50	1,0
— 1080,50	+ 1080,00	— 0,5	0,25	— 2,00	— 3,50	1,0	— 3,50	1,0
+ 1356,00	— 1356,50	— 0,5	0,25	— 2,50	— 4,50	1,0	— 4,50	1,0
— 968,30	+ 970,80	+ 2,5	6,25	0	— 2,50	1,0	— 2,50	1,0
+ 868,00	— 865,50	+ 2,5	6,25	+ 2,50	+ 2,50	1,0	+ 2,50	1,0
— 1075,80	+ 1075,30	— 0,5	0,25	+ 2,00	+ 4,50	1,0	+ 4,50	1,0
+ 1455,10	— 1455,60	— 0,5	0,25	+ 1,50	+ 3,50	1,0	+ 3,50	1,0
+ 973,70	— 975,20	— 1,5	2,25	0	+ 1,50	1,0	+ 1,50	1,0
+ 1077,30	— 1078,50	— 1,2	1,44	— 1,20	— 1,20	1,0	— 1,20	1,0
— 910,30	+ 910,20	— 0,1	0,01	— 1,30	— 2,50	1,0	— 2,50	1,0
— 1068,80	+ 1068,40	— 0,4	0,16	— 1,70	— 3,00	1,0	— 3,00	1,0
+ 1356,70	— 1356,00	+ 0,7	0,49	— 1,00	— 2,70	1,0	— 2,70	1,0
			24,68			16,0	$2a = 0$	

$$S = \frac{2a}{16{,}0} = \frac{0}{16{,}0} = 0\,; \qquad \sigma = \frac{1}{2}\,\frac{0}{16} = 0\,; \qquad \frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} = \frac{24{,}68}{16} = 1{,}5425\,;$$

$$\frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} = \frac{16}{16^2} = 0{,}0625\,; \qquad \frac{-\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} \times \Sigma\frac{S^2}{L} = 0{,}0625 \times \frac{0}{16} = 0\,; \qquad \sigma_r^2 = \frac{1}{9 \times 16} \times \frac{0}{16} = 0\,;$$

$$\eta_r^2 = \frac{1}{9}\,1{,}5425 = 0{,}1713\,; \qquad \sigma_r = 0\,; \qquad \eta_r = 0{,}413.$$

4.º – Determinación de los errores.

(Corresponde a la figura 33.)

Desnivel ida.	Desnivel vuelta.	Discordancia $= \Delta$	Δ^2	$\Sigma\Delta$	$\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n$	r	$r(\Sigma\Delta_{n-1} + \Sigma\Delta_n)$	r^2
— 1043,50	+ 1045,50	+ 2,0	4,00	+ 2,0	+ 2,0	1,0	2,0	1,0
+ 965,20	— 964,20	+ 1,0	1,00	+ 3,0	+ 5,0	1,0	5,0	1,0
— 865,80	+ 865,50	— 0,3	0,09	+ 2,7	+ 5,7	1,0	5,7	1,0
+ 1145,90	— 1146,60	— 0,7	0,49	+ 2,0	+ 4,7	1,0	4,7	1,0
+ 1264,30	— 1265,30	— 1,0	1,00	+ 1,0	+ 3,0	1,0	3,0	1,0
— 764,50	+ 764,50	0	0	+ 1,0	+ 2,0	1,0	2,0	1,0
+ 881,80	— 881,80	0	0	+ 1,0	+ 2,0	1,0	2,0	1,0
— 1242,00	+ 1245,00	+ 3,0	9,00	+ 4,0	+ 5,0	1,0	5,0	1,0
— 1160,20	+ 1163,20	+ 3,0	9,00	+ 7,0	+ 11,0	1,0	11,0	1,0
— 1045,50	+ 1045,50	0	0	+ 7,0	+ 14,0	1,0	14,0	1,0
+ 961,00	— 961,00	0	0	+ 7,0	+ 14,0	1,0	14,0	1,0
+ 899,50	— 900,50	— 1,0	1,00	+ 6,0	+ 13,0	1,0	13,0	1,0
— 1062,10	+ 1061,40	— 0,7	0,49	+ 5,3	+ 11,3	1,0	11,3	1,0
— 1263,10	+ 1263,50	+ 0,4	0,16	+ 5,7	+ 11,0	1,0	11,0	1,0
+ 1465,10	— 1465,00	+ 0,1	0,01	+ 5,8	+ 11,5	1,0	11,5	1,0
+ 981,70	— 980,50	+ 1,2	1,44	+ 7,0	+ 12,8	1,0	12,8	1,0
			27,68			16,0	$128,0 = 2a$	

$$S = \frac{128,0}{16} = 8,000; \qquad s = \frac{1}{2}\frac{8}{16} = 0,25;$$

$$\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} = \frac{27,68}{16} = 1,73; \qquad \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} = 0,0625; \qquad \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2}\Sigma\frac{S^2}{L} = 0,0625 \times \frac{8^2}{16} = 0,25 \ldots\ldots 0,2500;$$

$$s_r^2 = \frac{1}{9}\,1,4800 = 0,164; \qquad s_r^2 = \frac{1}{9 \times 16}\,\frac{8^2}{16} = 0,02777;$$

$$s_r = 0,40; \qquad s_r = 0,167.$$

CAPITULO V

TEORÍAS ORTOMÉTRICA Y DINÁMICA

Se llama altitud de un punto la distancia entre éste y la superficie del nivel medio del mar prolongado imaginativamente bajo los continentes y contada sobre la vertical trazada desde aquél a ésta, llamándose diferencia de nivel entre dos puntos a la distancia comprendida entre uno de ellos y la superficie de nivel que pasa por el otro contada sobre la vertical trazada desde aquél a ésta o, dicho de otro modo, la distancia que separa a las superficies de nivel que pasan por uno y otro y contada sobre la vertical común. Esto supone implícitamente el paralelismo entre todas las superficies de nivel. Como consecuencia de estas definiciones y supuesto, la diferencia de nivel entre dos puntos es independiente del itinerario o camino que se siga para obtenerla. Esto no es cierto por ser erróneo el supuesto admitido. En efecto: sean AB y $A'B'$ (fig. 34) dos superficies de nivel infinitamente próximas, H y H' las verticales en A y B, y g y g' las aceleraciones de la pesantez en A y B. Se tiene $gh = g'h'$ (puesto que el trabajo de la pesantez es independiente del camino seguido), y siendo $g \gtrless g'$, tiene que ser $H \lesseqgtr H'$; luego las superficies de nivel no son paralelas, no existiendo, por consiguiente, la supuesta equidistancia geométrica. Vemos, pues, que para conservar las definiciones dadas de altitud y para que éstas representen, efectivamente, las distancias verticales de los puntos correspondientes a la superficie media de los mares o superficie de nivel 0, es preciso corregir los resultados obtenidos por los trabajos de nivelación (que en lo sucesivo llamaremos altitudes y cotas naturales), afectándolos de las correcciones ortométricas.

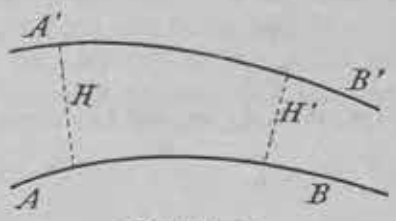


Figura 34.

Cálculo de las correcciones ortométricas.

Sean (fig. 35) A_0A_0' la superficie de nivel 0, $AMNB$ el itinerario nivelado, H_0, H, H' y H'' las altitudes ortométricas de los puntos AMN y B. Supongamos conocida la altitud ortométrica del punto M y la diferencia de nivel MM' existente entre

dos estaciones inmediatas M y N. Para obtener la altitud ortométrica del punto N estableceremos

$$H' = H + MM' + (Nn_0 - M'm_0) = H + MM' - (M'm_0 - Nn_0).$$

Para determinar la cantidad entre paréntesis, descompongamos las $M'm_0$ y Nn_0 en elementos infinitamente próximos por medio de superficies de nivel y sean mn y $m'n'$ dos de éstos, si $mm_0 = h$, $mm' = dh$; entre mn y $m'n'$ se verifica $gdh = k$.

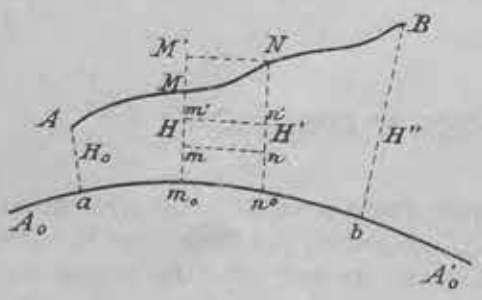


Figura 35.

Diferenciando esta expresión con relación a l (l = latitud del punto m) se tiene

$$gd^2h + (dg)_l dh = 0, \qquad d^2h = -\frac{(dg)_l}{g} dh, \quad [1]$$

$$(d^2h = mm' - nn').$$

Pero la fórmula de Clairaut-Bouguer

$$g = g_e^\circ (1 - \alpha \cos 2l - \beta h),$$

en la que

$$\alpha = 0{,}00264 \quad \text{y} \quad \beta = 0{,}000000196,$$

diferenciándola con relación a l da

$$(dg)_l = 2\alpha g_e^\circ \operatorname{sen} 2l\, dl,$$

valor que sustituido en la expresión [1] se obtiene

$$d^2h = \frac{-2\alpha g_e^\circ \operatorname{sen} 2l\, dl}{g_e^\circ (1 - \alpha \cos 2l - \beta h)}$$

y despreciando las cantidades sumamente pequeñas del orden de α^2, β^2, $\alpha\beta$ resulta

$$d^2h = -2\alpha \operatorname{sen} 2l \cdot dh,$$

e integrando esta expresión entre los límites 0 y H' (para la altura $Nn_0 = H'$) se tiene

$$\Sigma_M^N = \int_0^{H'} d^2h = (= M_0'm - Nn_0) = -2\alpha \operatorname{sen} 2l\, dl \int_0^{H'} dH' = 2H' \operatorname{sen} 2l\, dl.$$

Vemos, pues, que para transformar las altitudes naturales (obtenidas directamente por los trabajos de campo) en altitudes ortométricas basta agregar a cada diferencia parcial de nivel la corrección

$$\Sigma = -2\alpha H \operatorname{sen} 2l\, dl;$$

corrección que como se ve es proporcional a H, nula en el ecuador y en los polos, alcanzando un valor máximo en la latitud de 45°. Es positiva cuando el itinerario seguido se dirige al S. ($dl < 0$) y negativa cuando se dirige hacia el N. ($dl > 0$).

Para obtener la corrección total entre el punto inicial A y el extremo B de la línea o sección bastará integrar la expresión citada entre los límites l_0 y l correspondientes a los puntos A y B, considerando a H como una función de l definida por el itinerario seguido en la nivelación, obteniéndose

$$\Sigma_A^B = -2\alpha \int_{l_0}^{l_1} H \operatorname{sen} 2l\, dl.$$

Esta integral puede representarse de un modo gráfico y calcularse mecánicamente en la forma siguiente: constrúyase el perfil anamorfósico del itinerario A....., MN....., B....., tomando por abscisas los valores

$$x = -\alpha \cos 2l$$

y por ordenadas los valores de H correspondientes; así se obtendrá una curva tal, que el área limitada por ella, el eje de la X y dos ordenadas consecutivas tendrá por expresión

$$dA = H dx = H \cdot 2\alpha \operatorname{sen} 2l\, dl,$$

que es precisamente el valor de la corrección de que se trata.

Por consiguiente, para calcular las correcciones ortométricas de una línea nivelada, constrúyase el perfil anamorfósico de la misma y calcúlense las áreas formadas de manera análoga a la indicada o hágase uso para evitar este cálculo de un aparato integrador. Agregando (con su signo) estas correcciones a las altitudes o a las cotas naturales, obtendremos las altitudes o las cotas ortométricas.

Para abreviar el trazado del perfil anamorfósico indicado, se ha calculado la tabla 1.ª, que tiene su representación gráfica en una regla que hemos graduado al efecto, que contiene los valores de X multiplicados por 1 000 000 (de dos en dos minutos) correspondientes a los límites 36° y 45° entre cuyas latitudes está comprendida nuestra Península.

Teoría dinámica.

Como consecuencia del no paralelismo de las superficies de nivel, resulta que entre dos puntos dados se obtendrán tantas diferencias de nivel como itinerarios distintos se sigan al ejecutar la nivelación. Esto, que a todas luces es una gran anomalía, desaparece aplicando a los desniveles obtenidos la teoría ortométrica expuesta y la teoría dinámica que vamos a exponer.

La teoría dinámica está basada en la constancia de potencial en las superficies de nivel, y consiste en reemplazar la separación geométrica entre dos de estas superficies infinitamente próximas por el trabajo que desarrollaría la pesantez sobre la masa de unidad de peso, pasando de una superficie de nivel a la otra.

Si representamos por $g^{\circ}_{45^{\circ}}$ la aceleración de la pesantez en el nivel del mar y latitud de 45°, la masa de la unidad de peso será $\frac{1}{g^{\circ}_{45^{\circ}}}$ y el trabajo para elevar la cantidad dH

será $\frac{1}{g^{\circ}_{45^{\circ}}} g\,dH$ (representando por g la aceleración de la gravedad en el punto considerado). Entre los puntos A y B el trabajo total llamado diferencia dinámica de nivel será

$$\Delta_A^B = \int_A^B \frac{g}{g^{\circ}_{45^{\circ}}}\, dH. \qquad [2]$$

La diferencia de nivel natural sería

$$\Delta'^B_A = \int_A^B dH.$$

Si A estuviese o perteneciese a la superficie de nivel 0, la expresión primera nos daría la cota dinámica del punto B que sería

$$C = \int_0^B \frac{g}{g^{\circ}_{45^{\circ}}}\, dH.$$

La expresión [1] puede escribirse

$$\Delta_A^B = \int_0^B \frac{g}{g^{\circ}_{45^{\circ}}}\, dH - \int_0^A \frac{g}{g^{\circ}_{45^{\circ}}}\, dH,$$

que nos dice que la diferencia dinámica de nivel entre dos puntos es igual a la diferencia de sus cotas dinámicas.

Obtención de las cotas dinámicas.

Sustituyendo en la expresión [2] $\frac{g}{g^{\circ}_{45^{\circ}}}$ por $1 + \gamma$, de la que se deduce

$$\gamma = \frac{g - g^{\circ}_{45^{\circ}}}{g^{\circ}_{45^{\circ}}},$$

se tendrán

$$\Delta = \int_A^B (1+\gamma)\, dH = \int_A^B \gamma\, dH = \Delta'^B_A + \int_A^B \gamma\, dH,$$

que nos dice: para obtener la diferencia dinámica de nivel entre dos puntos A y B basta agregar a la diferencia de nivel natural que entre ellos existe la corrección

$$\Sigma'^B_A = \int_A^B \gamma\, dH. \qquad [3]$$

Si se dispusiera de un aparato por el que obtuviéramos la variación relativa de g en los puntos de estación del itinerario A ..... B, se calcularía fácilmente la expresada

integral construyendo el perfil anamorfósico que tuviera por abscisas los valores sucesivos de γ en las estaciones del itinerario seguido en la nivelación y por ordenadas las altitudes naturales de los dichos puntos de estación, y calculando las áreas de las figuras limitadas por el eje de las Y dos abscisas consecutivas y la curva perfil, pudiéndose hacer uso para verificar estos cálculos de un integrador. Pero como el aparato antes indicado no existe (quizás no esté lejos el día en que se tenga), se puede hacer uso para obtener aquella variación relativa de la fórmula de Clairaut-Bouguer

$$g = g_{45^\circ}^{\circ}(1 - \alpha \cos 2l - \beta H),$$

de la que se deduce

$$\frac{g}{g_{45^\circ}^{\circ}} = 1 - \alpha \cos 2l - \beta H,$$

pero

$$1 + \gamma = \frac{g}{g_{45^\circ}^{\circ}},$$

luego

$$\gamma = -\alpha \cos 2l - \beta H,$$

valor que sustituido en [3] da

$$\Sigma_A^B = -\alpha \int_A^B \cos 2l\, dH - \beta \int_A^B H\, dH = -\alpha \int_A^B \cos 2l\, dH - \beta \frac{H_B^2 - H_A^2}{2}.$$

El primer término del segundo miembro puede calcularse o determinarse construyendo el perfil anamorfósico que tenga por abscisas los valores de $-\alpha \cos 2l$ y por ordenadas los correspondientes de H, y calculando después las áreas de las figuras formadas o limitadas por el perfil, el eje de las Y y dos abscisas consecutivas. En cuanto al segundo término del segundo miembro (que es fácilmente calculable), si se quiere evitar su cálculo se puede hacer uso de la doble escala (fig. 36) que al efecto hemos construído y que contiene los valores de dicho término correspondientes a las altitudes medias comprendidas entre 0 metros y 2 000 metros.

Esta escala (fig. 36) se ha construído fundándonos en las transformaciones siguientes:

$$\Sigma = -\beta \frac{H_B^2 - H_A^2}{2} = -\beta \frac{H_B + H_A}{2} \times (H_B - H_A) = -\beta \left(\frac{H_A + H_B}{2} \right) \Delta_A^B,$$

que nos dice que es proporcional a la altitud media y a la diferencia de nivel natural.

Haciendo $H_A = 0$, suponiendo que el punto A pertenece a la superficie de nivel 0, tendremos

$$\Sigma_1 = -\frac{\beta}{2} H_B^2,$$

es decir, proporcional al cuadrado de la altitud natural del punto B y que nos ha permitido calcular o construir la escala (fig. 36).

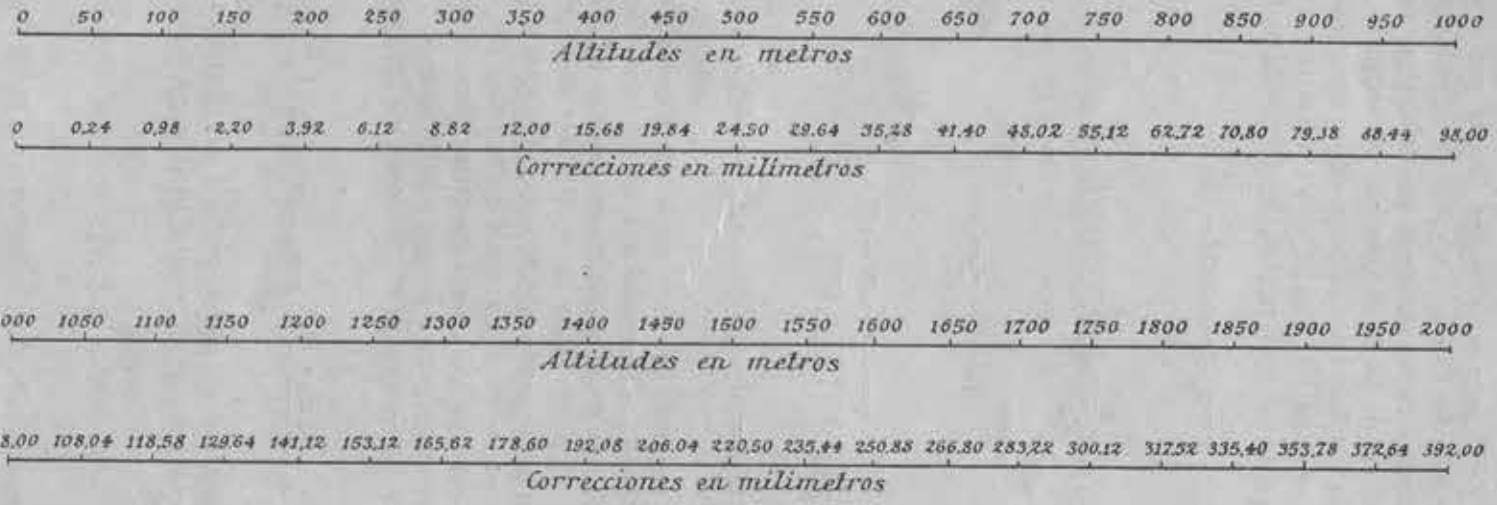

0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750 800 850 900 950 1000
Altitudes en metros
0 0,24 0,98 2,20 3,92 6,12 8,82 12,00 15,68 19,84 24,50 29,64 35,28 41,40 48,02 55,12 62,72 70,80 79,38 88,44 98,00
Corrección en milímetros
1000 1050 1100 1150 1200 1250 1300 1350 1400 1450 1500 1550 1600 1650 1700 1750 1800 1850 1900 1950 2000
Altitudes en metros
98,00 108,04 118,58 129,64 141,12 153,12 165,62 178,60 192,08 206,04 220,50 235,44 250,88 266,80 283,22 300,12 317,52 335,40 353,78 372,64 392,00
Corrección en milímetros

Figura 36.

Pero más cómodo y rápido que estos cálculos resultará, una vez obtenidas las correcciones ortométricas, determinar la nueva corrección que deben sufrir las cotas ortométricas para convertirlas en cotas dinámicas.

Considerando que la cota dinámica para una estación B tiene por expresión

$$C = \int_0^B \frac{g}{g_{45^\circ}} dH = \int_0^B dH - \alpha \cos 2l \int_0^B dH - \beta \int_0^B H dH \qquad [4]$$

y que la corrección ortométrica entre todos los puntos de una misma vertical es nula por ser o permanecer constante la latitud, se tiene que $\int_0^B dH$ representa la cota ortométrica del punto B y la expresión [4] será

$$C = H - \alpha H \cos 2l - \frac{\beta}{2} H^2,$$

de donde deducimos que la diferencia entre las cotas dinámicas y ortométricas $C - H$ (que llamaremos paso ortométrico-dinámico) será

$$C - H = -\alpha H \cos 2l - \frac{\beta}{2} H^2, \qquad [5]$$

que es la nueva corrección que buscamos, es decir, la corrección que tiene que sufrir las cotas ortométricas para convertirlas en dinámicas y que se puede representar o traducir en un ábaco, para lo cual bastará tomar sobre dos ejes rectangulares X e Y valores respectivamente proporcionales a $-\alpha \cos 2l$ y a H; y resolviendo la ecuación [5] dando a $(C - H)$ valores de 1^{mm}, 2^{mm}....., etc., etc., deduciremos los pares de valores de l y H que conjuntamente la satisfacen, y uniendo por un trazo continuo los sistemas de valores de l y H que convienen a un mismo valor de $(C - H)$ fijado *a priori*, tendremos una serie de curvas (hipérbolas) cuyas ecuaciones serán

$$Hx - \frac{\beta}{2} H^2 = -\alpha H \cos 2l - \frac{\beta}{2} H^2;$$

es decir, que será la expresión gráfica de la fórmula [5] *(pasos ortométrico-dinámicos)*. Estas hipérbolas tienen por asíntotas las determinadas por la condición $C - H = 0$ o sea

$$0 = -\alpha H \cos 2l - \frac{\beta}{2} H^2,$$

y estarán representadas por

$$H = 0,$$

o sea el eje de las X, y

$$\alpha H \cos 2l = \frac{\beta}{2} H^2, \qquad x = \frac{\beta}{2} H^2,$$

recta oblicua que corta el eje de las X en el punto correspondiente a $l = 45^\circ$

$$(\alpha H \cos 2l = 0).$$

Estando nuestra Península comprendida entre los 36° y 45° de latitud, se ve por la expresión [5] que los pasos ortométrico-dinámicos son siempre negativos. Cons-

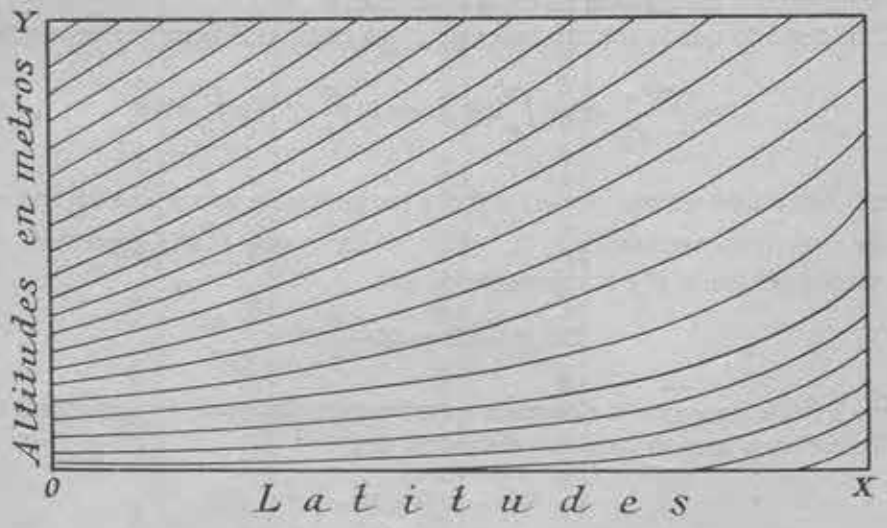


Figura 37.

truidas esa serie de hipérbolas para determinar el paso que corresponde a un punto o estación definido por su altitud y latitud, bastará trazar las ordenadas y abscisas que

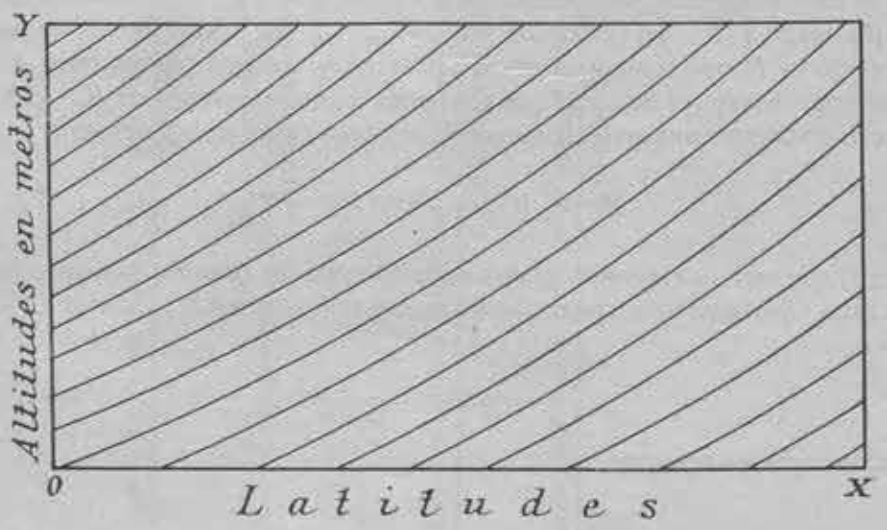


Figura 38.

a éstos corresponden, y el punto de intersección así determinado corresponderá a una hipérbola cuyo paso ortométrico-dinámico será la corrección que buscamos.

En la tabla 2.ª están los resultados correspondientes a los cálculos de las diversas hipérbolas que hemos construído y que figuran en el ábaco cuya reducción se representa en las figuras 37 y 38.

Tabla 1.ª

Valores de X (multiplicados por 1 000 000) para el trazado de perfiles anamorfósicos correspondientes al cálculo de las correcciones ortométricas.

Latitudes.	cos 2*l*	Latitudes.	cos 2*l*	Latitudes.	cos 2*l*
36° 00'	815,80	37° 00'	727,69	38° 00'	638,66
02	812,88	02	724,74	02	635,68
04	809,96	04	721,78	04	632,70
06	807,04	06	718,82	06	629,72
08	804,11	08	715,86	08	626,74
10	801,18	10	712,90	10	623,76
12	798,25	12	709,94	12	620,78
14	795,32	14	706,98	14	617,79
16	792,39	16	704,02	16	614,80
18	789,46	18	701,06	18	611,81
20	786,53	20	698,10	20	608,82
22	783,60	22	695,14	22	605,83
24	780,67	24	692,18	24	602,84
26	777,74	26	689,22	26	599,85
28	774,80	28	686,25	28	596,86
30	771,86	30	683,28	30	593,87
32	768,92	32	680,31	32	590,88
34	765,98	34	677,34	34	587,89
36	763,04	36	674,37	36	584,90
38	760,10	38	671,40	38	581,90
40	757,16	40	668,43	40	578,90
42	754,22	42	665,46	42	575,90
44	751,28	44	662,49	44	572,90
46	748,34	46	659,52	46	569,90
48	745,39	48	656,54	48	566,90
50	742,44	50	653,56	50	563,90
52	739,49	52	650,58	52	560,90
54	736,54	54	647,60	54	557,90
56	733,59	56	644,62	56	554,90
58	730,64	58	641,60	58	551,90
60	727,69	60	638,66	60	548,89

Latitudes.	cos 2*l*	Latitudes.	cos 2*l*	Latitudes.	cos 2*l*
39° 00'	548,89	40° 00'	458,43	41° 00'	367,42
02	545,88	02	455,40	02	364,37
04	542,87	04	452,38	04	361,33
06	539,87	06	449,35	06	358,29
08	536,86	08	446,33	08	355,25
10	533,85	10	443,30	10	352,21
12	530,84	12	440,27	12	349,16
14	527,83	14	437,24	14	346,12
16	524,82	16	434,21	16	343,07
18	521,81	18	431,18	18	340,02
20	518,80	20	428,15	20	336,97
22	515,79	22	425,12	22	333,92
24	512,78	24	422,09	24	330,88
26	509,77	26	419,06	26	327,83
28	506,75	28	416,02	28	324,78
30	503,73	30	412,98	30	321,73
32	500,72	32	409,95	32	318,68
34	497,70	34	406,92	34	315,64
36	494,68	36	403,88	36	312,59
38	491,67	38	400,84	38	309,54
40	488,65	40	397,81	40	306,48
42	485,63	42	394,78	42	303,43
44	482,61	44	391,74	44	300,38
46	479,59	46	388,70	46	297,33
48	476,57	48	385,66	48	294,28
50	473,55	50	382,62	50	291,23
52	470,53	52	379,54	52	288,18
54	467,51	54	376,54	54	285,12
56	464,48	56	373,50	56	282,06
58	461,46	58	370,46	58	279,01
60	458,43	60	367,42	60	275,96

Latitudes.	cos 2*l*	Latitudes.	cos 2*l*	Latitudes.	cos 2*l*
42° 00'	275,96	43° 00'	184,16	44° 00'	92,13
02	272,90	02	181,09	02	89,06
04	269,84	04	178,03	04	85,99
06	266,79	06	174,96	06	82,92
08	263,73	08	171,90	08	79,85
10	260,68	10	168,83	10	76,78
12	257,62	12	165,77	12	73,71
14	254,56	14	162,70	14	70,64
16	251,50	16	159,63	16	67,57
18	248,45	18	156,57	18	64,50
20	245,39	20	153,50	20	61,43
22	242,33	22	150,44	22	58,36
24	239,27	24	147,37	24	55,29
26	236,21	26	144,30	26	52,22
28	233,15	28	141,24	28	49,15
30	230,09	30	138,17	30	46,07
32	227,03	32	135,10	32	43,00
34	223,97	34	132,03	34	39,93
36	220,91	36	128,96	36	36,86
38	217,85	38	125,89	38	33,75
40	214,78	40	122,83	40	30,71
42	211,73	42	119,76	42	27,64
44	208,66	44	116,69	44	24,57
46	205,60	46	113,62	46	21,50
48	202,54	48	110,55	48	18,43
50	199,48	50	107,48	50	15,36
52	196,41	52	104,41	52	12,29
54	193,35	54	101,34	54	9,22
56	190,28	56	98,27	56	6,14
58	187,22	58	95,20	58	3,07
60	184,16	60	92,13	58' 59'	1,54
				59' 30'	0,72
				60'	0,00

Tabla 2.ª

Valores obtenidos para los puntos de paso en la determinación de las correcciones ortométrico-dinámicas

$$\sigma = -\alpha H \cos 2I - \frac{\beta}{2} H^2.$$

Hipérbola de 1 mm.

$H =$	1.....	$I =$ 33° 59'
	2.....	39 33
	3.....	41 23
	4.....	42 18
	6.....	43 12
	10.....	43 55
	20.....	44 29
	40.....	44 46
	60.....	44 53
	80.....	44 57

Hipérbola de 5 mm.

$H =$	6.....	$I =$ 35° 48'
	8.....	38 10
	10.....	39 33
	15.....	41 23
	20.....	42 18
	40.....	43 41
	60.....	44 10
	80.....	44 25
	100.....	44 34
	120.....	44 40
	140.....	44 46
	160.....	44 50
	180.....	44 54
	200.....	44 57

Hipérbola de 10 mm.

$H =$	12.....	$I =$ 35° 49'
	14.....	37 10
	16.....	38 10
	20.....	39 34
	26.....	40 50
	30.....	41 24
	40.....	42 19 30''
	60.....	43 15
	80.....	44 44
	100.....	44 01
	120.....	44 13
	140.....	44 23
	160.....	44 30
$H =$	200.....	$I =$ 44° 40'
	240.....	44 48
	260.....	44 52
	300.....	44 57

Hipérbola de 15 mm.

$H =$	18.....	$I =$ 35° 49'
	20.....	36 46
	22.....	37 33
	26.....	38 43
	30.....	39 34
	40.....	40 58
	50.....	41 47
	60.....	42 21
	70.....	42 45
	80.....	43 03
	100.....	43 29
	120.....	43 46
	140.....	43 59
	160.....	44 09
	180.....	44 17
	200.....	44 24
	220.....	44 30
	260.....	44 39
	300.....	44 47
	320.....	44 50
	360.....	44 56

Hipérbola de 20 mm.

$H =$	24.....	$I =$ 35° 50'
	26.....	36 34
	30.....	37 43
	36.....	38 58
	38.....	39 18
	40.....	39 35
	50.....	40 41
	60.....	41 26
	70.....	41 58
	80.....	42 22
	90.....	42 41
	100.....	42 56
	120.....	43 20
	140.....	43 36

$H =$	160.....	$I =$	43°	49'
	180.....		43	59
	220.....		44	15
	240.....		44	21
	260.....		44	27
	300.....		44	36
	360.....		44	47
	400.....		44	53

HIPÉRBOLA DE 25 MM.

$H =$	30.....	$I =$	35°	51'	
	34.....		36	57	
	36.....		37	25	
	40.....		38	12	
	50.....		39	36	
	60.....		40	32	
	80.....		41	41	
	100.....		42	23	
	120.....		42	52	
	140.....		43	13	
	160.....		43	29	
	180.....		43	41	
	200.....		43	51	
	220.....		44	30	
	240.....		44	07	30"
	260.....		44	14	
	280.....		44	20	
	300.....		44	25	
	320.....		44	30	
	350.....		44	36	
	380.....		44	41	
	420.....		44	48	
	450.....		44	53	

HIPÉRBOLA DE 30 MM.

$H =$	36.....	$I =$	35°	59'	
	40.....		36	47	30"
	50.....		38	29	
	60.....		39	36	
	70.....		40	24	
	80.....		41	00	
	100.....		41	51	
	120.....		42	25	
	140.....		42	49	
	160.....		43	08	
	180.....		42	33	30
	200.....		43	35	
	220.....		43	45	
	240.....		43	54	
	260.....		44	02	
	280.....		44	08	
	300.....		44	14	
$H =$	320.....	$I =$	44°	10'	
	350.....		44	27	
	380.....		44	33	
	440.....		44	44	
	500.....		44	53	

HIPÉRBOLA DE 40 MM.

$H =$	48.....	$I =$	35°	51'	
	60.....		37	45	
	80.....		39	37	30"
	120.....		41	30	
	140.....		42	03	
	160.....		42	27	
	180.....		42	47	
	220.....		43	16	
	260.....		43	36	30
	320.....		43	59	
	340.....		44	05	
	360.....		44	11	
	380.....		44	15	30
	420.....		44	25	
	440.....		43	27	
	450.....		44	31	
	480.....		43	45	
	550.....		44	48	

HIPÉRBOLA DE 50 MM.

$H =$	70.....	$I =$	37°	13'	30"
	80.....		38	14	30
	120.....		40	35	
	160.....		41	52	
	220.....		42	46	30
	240.....		42	59	30
	260.....		43	11	
	280.....		43	21	
	320.....		43	39	
	340.....		43	40	
	360.....		43	52	30
	380.....		43	59	
	450.....		44	16	30
	480.....		42	10	30
	550.....		44	36	
	650.....		44	51	

HIPÉRBOLA DE 60 MM.

$H =$	72.....	$I =$	35°	52'	
	80.....		36	50	
	120.....		39	40	
	140.....		40	29	
	160.....		41	05	
	180.....		41	33	
	220.....		42	17	

$H = 240$	$I = 42°$	33'	
260	42	46	
280	42	58	30''
320	43	18	
340	43	27	
360	43	35	
380	43	41	
440	43	59	
480	44	09	30
550	44	26	
650	44	41	

HIPÉRBOLA DE 70 MM.

$H = 84$	$I = 35°$	53'	
120	38	45	
140	39	41	30''
160	40	24	
180	40	57	
220	41	47	
240	42	05	
260	42	21	
280	42	35	
320	42	58	
340	43	07	
360	43	16	
380	43	24	
440	43	44	
480	43	56	
550	44	12	
650	44	31	
750	44	47	

HIPÉRBOLA DE 80 MM.

$H = 96$	$I = 35°$	54'	
120	37	49	
140	38	54	
160	39	41	
180	40	21	
220	41	17	
240	41	38	
260	41	56	
280	42	11	30''
320	42	37	30
340	42	48	30
360	42	58	
380	43	07	
440	43	29	30
480	43	42	
550	44	00	30
650	44	21	
750	44	37	30
850	44	53	

HIPÉRBOLA DE 90 MM.

$H = 110$	$I = 36°$	06'	
120	36	53	30''
140	38	06	30
160	39	01	30
180	39	44	
200	40	18	30
220	40	47	
240	41	10	30
260	41	31	
280	41	48	
300	42	03	30
320	42	17	30
340	42	29	
360	42	40	
380	42	50	
400	42	59	
460	43	22	
480	43	28	30
500	43	34	30
520	43	40	30
560	43	51	30
600	44	00	30
650	44	11	30
700	44	21	
750	44	29	30
800	44	38	
850	44	45	
900	44	52	30

HIPÉRBOLA DE 100 MM.

$H = 120$	$I = 35°$	56'	
140	37	18	30''
160	38	20	
180	39	07	30
200	39	46	30
220	40	18	
240	40	43	30
260	41	06	30
280	41	24	30
300	41	42	
320	41	57	30
340	42	10	
360	42	22	
380	42	33	
400	42	43	
420	42	52	30
440	43	00	
460	43	08	
480	43	15	30
500	43	22	
520	43	28	

$H =$	540.....	$I =$ 43°	34'	
	560.....	43	39	30"
	580.....	43	45	
	600.....	43	50	
	650.....	44	01	30
	700.....	44	11	30
	750.....	44	21	
	800.....	44	30	
	850.....	44	37	30
	900.....	44	45	
	950.....	44	52	

HIPÉRBOLA DE 120 MM.

$H =$	140.....	$I =$ 35°	49'	30"
	160.....	36	55	30
	180.....	37	53	30
	200.....	38	39	30
	220.....	39	17	
	240.....	39	48	
	260.....	40	15	
	280.....	40	38	30
	300.....	40	58	
	320.....	41	19	
	340.....	41	32	
	360.....	41	46	
	380.....	41	59	
	400.....	42	10	
	420.....	42	20	30
	440.....	42	30	30
	460.....	42	40	'
	480.....	42	48	
	500.....	42	55	30
	520.....	43	03	
	540.....	43	10	
	560.....	43	16	
	580.....	43	22	
	600.....	43	28	
	650.....	43	41	30
	700.....	43	53	
	750.....	44	04	
	800.....	44	13	30
	850.....	44	22	30
	900.....	44	31	
	950.....	44	37	30
	1000.....	44	45	30
	1050.....	44	52	30

HIPÉRBOLA DE 140 MM.

$H =$	180.....	$I =$ 36°	38'	
	200.....	37	32	
	220.....	38	17	
	240.....	38	53	

$H =$	260.....	$I =$ 39°	24'	
	280.....	39	51	
	300.....	30	14	
	320.....	40	35	
	340.....	40	53	
	360.....	41	09	
	380.....	41	24	30"
	400.....	41	37	30
	420.....	41	50	
	440.....	42	01	
	460.....	42	11	
	480.....	42	21	
	500.....	42	30	
	520.....	42	39	30
	540.....	42	46	30
	560.....	42	53	30
	580.....	43	00	
	600.....	43	06	30
	650.....	43	21	30
	700.....	43	34	30
	750.....	43	46	30
	800.....	43	57	30
	850.....	44	07	30
	900.....	44	16	
	950.....	44	25	
	1000.....	44	33	
	1050.....	44	40	
	1100.....	44	48	30
	1150.....	44	54	

HIPÉRBOLA DE 160 MM.

$H =$	200.....	$I =$ 36°	24'	
	220.....	37	17	
	240.....	37	57	30'
	260.....	38	33	
	280.....	39	04	
	300.....	39	30	
	320.....	39	54	
	340.....	40	14	
	360.....	40	32	30
	380.....	40	50	
	400.....	41	04	30
	420.....	41	18	30
	440.....	41	31	
	460.....	41	42	30
	480.....	41	53	30
	500.....	42	03	30
	520.....	42	13	
	540.....	42	22	
	560.....	42	29	30
	580.....	42	37	30
	600.....	42	44	30
	650.....	43	01	30

$H =$	700.....	$l =$	43°	16'
	750.....		43	19 30''
	800.....		43	41
	850.....		43	52 30
	900.....		44	02 30
	950.....		44	11 30
	1000.....		44	20
	1050.....		44	28
	1100.....		44	35 30
	1150.....		44	43
	1200.....		44	50

HIPÉRBOLA DE 180 MM.

$H =$	220.....	$l =$	36°	14' 30''
	240.....		37	01
	260.....		37	41
	280.....		38	16
	300.....		38	46
	320.....		39	12
	340.....		39	35
	360.....		39	56
	380.....		40	15
	400.....		40	31 30
	420.....		40	47
	440.....		41	01
	460.....		41	14
	480.....		41	26
	500.....		41	37
	520.....		41	48
	540.....		41	57
	560.....		42	06
	580.....		42	15
	600.....		42	22
	650.....		42	41
	700.....		42	57 30
	750.....		43	12 30
	800.....		43	24 30
	850.....		43	36 30
	900.....		43	40
	950.....		43	58
	1000.....		44	07
	1050.....		44	16
	1100.....		44	24 30
	1150.....		44	32 30
	1200.....		44	39
	1250.....		44	46
	1300.....		44	53
	1355.....		45	00

HIPÉRBOLA DE 200 MM.

$H =$	240.....	$l =$	36°	04'
	260.....		36	49
	280.....		37	28
$H =$	300.....	$l =$	38°	01'
	320.....		38	30
	340.....		38	56
	360.....		39	19
	380.....		39	40
	400.....		39	58 30''
	420.....		40	16
	440.....		40	31
	460.....		40	45 30
	480.....		40	59
	500.....		41	11
	520.....		41	22 30
	540.....		41	33
	560.....		41	43
	580.....		41	52
	600.....		42	01
	650.....		42	21
	700.....		42	38 30
	750.....		42	54
	800.....		43	08
	850.....		43	21
	900.....		43	33
	950.....		43	44
	1000.....		43	54
	1050.....		44	03
	1100.....		44	12
	1150.....		44	20
	1200.....		44	28
	1250.....		44	35 30
	1300.....		44	43
	1350.....		44	50 30
	1400.....		44	56 30

HIPÉRBOLA DE 220 MM.

$H =$	280.....	$l =$	36°	39' 30''
	300.....		37	17
	320.....		37	46 30
	340.....		38	17
	360.....		38	42
	380.....		39	05
	400.....		39	25 30
	420.....		39	44
	440.....		40	01
	460.....		40	17
	480.....		40	31 30
	500.....		40	44 30
	520.....		40	56 30
	540.....		41	08 30
	560.....		41	19 30
	580.....		41	30
	600.....		41	39
	650.....		42	01
	700.....		42	20

$H =$	750	$I =$	42°	37'
	800		42	52
	850		43	06
	900		43	18 30''
	950		43	30
	1000		43	40 30
	1050		43	51
	1100		44	00
	1150		44	08 30
	1200		44	17 30
	1250		44	25 30
	1300		44	32 30
	1350		44	40
	1400		44	47
	1450		44	53 30
	1498		45	00

HIPÉRBOLA DE 240 MM.

$H =$	300	$I =$	36°	31'
	320		37	06
	340		37	37 30''
	360		38	05
	380		38	30
	400		38	52
	420		39	12 30
	440		39	31
	460		39	48
	480		40	04
	500		40	18
	520		40	32
	540		40	44
	560		40	56
	580		41	57
	600		41	17 30
	650		41	41
	700		42	00
	750		42	18 30
	800		42	35 30
	850		42	52
	900		43	04
	950		43	16
	1000		43	27 30
	1050		43	38
	1100		43	48
	1150		43	37 30
	1200		44	06 30
	1250		44	14 30
	1300		44	22 30
	1350		44	30 30
	1400		44	37 30
	1450		44	44 30
	1500		44	51 30
	1558		45	00

HIPÉRBOLA DE 260 MM.

$H =$	320	$I =$	36°	24'
	340		36	58
	360		37	28
	380		37	54 30''
	400		38	19
	420		38	41
	440		39	01
	460		39	18
	480		39	36
	500		39	52
	520		40	06 30
	540		40	20
	560		40	32 30
	580		40	44 30
	600		40	55 30
	650		41	21
	700		41	42 30
	750		42	02
	800		42	19 30
	850		42	35
	900		42	49 30
	950		43	02 30
	1000		43	13 30
	1050		43	26
	1100		43	36 30
	1150		43	46 30
	1200		43	55 30
	1250		44	04 30
	1300		44	13
	1350		44	21
	1400		44	28 30
	1450		44	36
	1500		44	43
	1550		44	49 30
	1600		44	56 30
	1623		45	00

HIPÉRBOLA DE 280 MM.

$H =$	340	$I =$	36°	17' 30''
	360		36	50
	380		37	19
	400		37	45
	420		38	09
	440		38	30 30
	460		38	50 30
	480		39	08 30
	500		39	25
	520		39	41
	540		39	55 30
	560		40	09
	580		40	22
	600		40	33 30

$H =$	650	$I =$	41° 00'	30''
	700		41 24	
	750		41 44	30
	800		42 03	
	850		42 20	
	900		42 34	30
	950		42 48	30
	1000		43 01	30
	1050		43 13	30
	1100		43 24	30
	1150		43 35	
	1200		43 44	30
	1250		43 54	
	1300		44 03	
	1350		44 11	
	1400		44 19	
	1450		44 27	
	1500		44 34	30
	1550		44 41	30
	1600		44 48	
	1650		44 58	30
	1684		45 00	

HIPÉRBOLA DE 300 MM.

$H =$	360	$I =$	36° 12'	
	380		36 43	30''
	400		37 11	30
	420		37 37	
	440		38 00	
	460		38 21	30
	480		38 41	
	500		38 59	
	520		39 15	30
	540		39 31	
	560		39 45	30
	580		39 59	
	600		40 11	30
	650		40 40	
	700		41 05	
	750		41 27	
	800		41 46	30
	850		42 04	
	900		42 20	
	950		42 35	
	1000		42 48	30
	1050		43 01	
	1100		43 13	
	1150		43 24	
	1200		43 34	
	1250		43 44	
	1300		43 53	
	1350		44 02	
	1400		44 10	
	1450		44 18	
	1500		44 26	
	1550		44 33	
	1600		44 40	
	1650		44 47	
	1700		44 54	
	1750		45 00	

HIPÉRBOLA DE 320 MM.

$H =$	380	$I =$	36° 08'	
	400		36 38	
	420		37 08	
	440		37 29	30''
	460		37 52	
	480		38 13	30
	500		38 32	
	520		38 50	
	540		39 06	
	560		39 22	
	580		39 36	
	600		39 49	30
	650		40 20	
	700		40 46	
	750		41 09	30
	800		41 30	
	850		41 49	
	900		42 06	
	950		42 21	
	1000		42 35	30
	1050		42 48	30
	1100		43 01	
	1150		43 12	
	1200		43 23	
	1250		43 33	
	1300		43 43	
	1350		43 52	
	1400		44 01	
	1450		44 09	
	1500		44 17	
	1550		44 25	
	1600		44 32	
	1650		44 39	
	1700		44 46	
	1750		44 53	
	1807		45 00	

HIPÉRBOLA DE 340 MM.

$H =$	400	$I =$	36° 03'	30''
	420		36 32	30
	440		36 59	
	460		37 23	
	480		37 45	

H =	500	l =	38°	05'
	520		38	24
	540		38	41 30''
	560		38	58
	580		39	13
	600		39	27 30
	650		40	00 30
	700		40	27 30
	750		40	52
	800		41	14
	850		41	33 30
	900		41	51
	950		42	08
	1000		42	22 30
	1050		42	36
	1100		42	49
	1150		43	01
	1200		43	12
	1250		43	22 30
	1300		43	33
	1350		43	42
	1400		43	51 30
	1450		44	00
	1500		44	08
	1550		44	16
	1600		44	24
	1650		44	31
	1700		44	38 30
	1750		44	45 30
	1800		44	52
	1863		45	00

HIPÉRBOLA DE 360 MM.

H =	420	l =	36°	03'
	440		36	28
	460		36	53 30''
	480		37	17
	500		37	38 30
	520		37	58 30
	540		38	17
	560		38	34
	580		38	50
	600		39	05
	650		39	39
	700		40	08 30
	750		40	34 30
	800		40	57 30
	850		41	18
	900		41	37
	950		41	54
	1000		42	09
	1050		42	24
	1100		42	37 30
	1150		42	49 30''
	1200		43	01
	1250		43	12
	1300		43	22 30
	1350		43	33
	1400		43	42
	1450		43	51
	1500		43	59 30
	1550		44	08
	1600		44	16
	1650		44	23 30
	1700		44	31
	1750		44	38
	1800		44	45
	1850		44	51 30
	1900		44	58

HIPÉRBOLA DE 380 MM.

H =	460	l =	36°	24'
	480		36	49
	500		37	11 30''
	520		37	32 30
	540		37	52
	560		38	10
	580		38	27
	600		38	43
	650		39	19
	700		39	50
	750		40	17
	800		40	41
	850		41	02 30
	900		41	22
	950		41	40
	1000		41	56
	1050		42	11
	1100		42	25
	1150		42	38
	1200		42	50 30
	1250		43	01 30
	1300		43	13
	1350		43	23
	1400		43	33
	1450		43	42
	1500		43	51
	1550		43	59
	1600		44	07 30
	1650		44	15 30
	1700		44	22 30
	1750		44	30 30
	1800		44	37 30
	1850		44	44 30
	1900		44	51
	1950		44	58

Hipérbola de 400 mm.

H =	480	l =	36°	20' 30"
	500		36	44
	550		37	37
	600		38	21
	650		38	58 30
	700		39	31
	750		39	59
	800		40	25
	850		40	47
	900		41	07 30
	950		41	26
	1000		41	43
	1050		41	59
	1100		42	13 30
	1150		42	27
	1200		42	39 30
	1250		42	51 30
	1300		43	02 30
	1350		43	13 30
	1400		43	23 30
	1450		43	33
	1500		43	42
	1550		43	51
	1600		43	59 30
	1650		44	07 30
	1700		44	15 30
	1750		44	23
	1800		44	30
	1850		44	36 30
	1900		44	44
	1950		44	51
	2000		44	57 30

Hipérbola de 420 mm.

H =	500	l =	36°	17'
	520		36	40 30"
	540		37	02
	560		37	22
	580		37	41
	600		37	58 30
	650		38	38
	700		39	12
	750		39	41 30
	800		40	08
	850		40	31 30
	900		40	53
	950		41	12
	1000		41	30
	1050		41	46
	1100		42	01 30
H =	1150	l =	42°	15' 30"
	1200		42	28 30
	1250		42	41
	1300		42	53
	1350		43	04
	1400		43	14 30
	1450		43	24
	1500		43	33 30
	1550		43	42 30
	1600		43	51
	1650		44	00
	1700		44	08
	1750		44	15 30
	1800		44	23
	1850		44	30 30
	1900		44	37 30
	1950		44	44 30
	2000		44	51

Hipérbola de 440 mm.

H =	520	l =	36°	14'
	540		36	37
	560		36	58
	580		37	18
	600		37	36
	650		38	17
	700		38	53
	750		39	24
	800		39	51 30"
	850		40	16
	900		40	38
	950		40	58 30
	1000		41	17
	1050		41	34
	1100		41	49 30
	1150		42	04
	1200		42	18
	1250		42	30 30
	1300		42	42 30
	1350		42	54
	1400		43	05
	1450		43	15
	1500		43	25
	1550		43	34
	1600		43	43
	1650		43	52
	1700		44	00
	1750		44	08
	1800		44	16
	1850		44	23 30
	1900		44	31
	1950		44	38
	2000		44	44 30

HIPÉRBOLA DE 460 MM.

$H =$	540.....	$I =$	36°	12'
	560.....		36	34
	580.....		36	54
	600.....		37	13 30"
	650.....		37	56 30
	700.....		38	34
	750.....		39	06
	800.....		39	35
	850.....		40	00 30
	900.....		40	23 30
	950.....		40	44 30
	1000.....		41	04
	1050.....		41	21 30
	1100.....		41	38
	1150.....		41	53
	1200.....		42	07
	1250.....		42	20
	1300.....		42	32 30
	1350.....		42	44
	1400.....		42	55 30
	1450.....		43	06
	1500.....		43	16
	1550.....		43	26
	1600.....		43	35
	1650.....		43	44
	1700.....		43	52 30
	1750.....		44	00 30
	1800.....		44	08 30
	1850.....		44	16
	1900.....		44	24
	1950.....		44	31
	2000.....		44	38

HIPÉRBOLA DE 480 MM.

$H =$	560.....	$I =$	36°	09' 30"
	580.....		36	31
	600.....		36	51
	650.....		37	36
	700.....		38	15
	750.....		38	48 30
	800.....		39	18
	850.....		39	45
	900.....		40	09
	950.....		40	31
	1000.....		40	50 30
	1050.....		41	09
	1100.....		41	26
	1150.....		41	41 30
	1200.....		41	56 30
	1250.....		42	09 30
	1300.....		42	22 30
	1350.....		42	34 30
$H =$	1400.....	$I =$	42°	46'
	1450.....		42	57
	1500.....		43	07 30"
	1550.....		43	17
	1600.....		43	26 30
	1650.....		43	36
	1700.....		43	44
	1750.....		43	53
	1800.....		44	01 30
	1850.....		44	09
	1900.....		44	17
	1950.....		44	24
	2000.....		44	31 30

HIPÉRBOLA DE 500 MM.

$H =$	580.....	$I =$	36°	07' 30"
	600.....		36	28 30
	650.....		37	15
	700.....		37	56 30
	750.....		38	30 30
	800.....		39	02
	850.....		39	29 30
	900.....		39	54
	950.....		40	17
	1000.....		40	38 30
	1050.....		40	56
	1100.....		41	14
	1150.....		41	30
	1200.....		41	45
	1250.....		41	59
	1300.....		42	12 30
	1350.....		42	25
	1400.....		42	37
	1450.....		42	48
	1500.....		42	59
	1550.....		43	09
	1600.....		43	19
	1650.....		43	28
	1700.....		43	37
	1750.....		43	46
	1800.....		43	54
	1850.....		44	02
	1900.....		44	10
	1950.....		44	18
	2000.....		44	25

HIPÉRBOLA DE 520 MM.

$H =$	600.....	$I =$	36°	07'
	650.....		36	54
	700.....		37	36
	750.....		38	13
	800.....		38	45
	850.....		39	14

$H =$	900	$l =$	39°	39' 30"
	950		40	03
	1000		40	24
	1050		40	44
	1100		41	02
	1150		41	18 30
	1200		41	34
	1250		41	49
	1300		42	02 30
	1350		42	15
	1400		42	27 30
	1450		42	39
	1500		42	50
	1550		43	00 30
	1600		43	10 30
	1650		43	20
	1700		43	29 30
	1750		43	38
	1800		43	47
	1850		43	55
	1900		44	03
	1950		44	11
	2000		44	18 30

HIPÉRBOLA DE 540 MM.

$H =$	650	$l =$	36°	34' 30"
	700		37	17
	750		37	55
	800		38	28
	850		38	58
	900		39	25
	950		39	49
	1000		40	11
	1050		40	31
	1100		40	50
	1150		41	07
	1200		41	33
	1250		41	38
	1300		41	52
	1350		42	05 30
	1400		42	18
	1450		42	30
	1500		42	41
	1550		42	52
	1600		43	02
	1650		43	12
	1700		43	21 30
	1750		43	31
	1800		43	40
	1850		43	48
	1900		43	56
	1950		44	04
	2000		44	12

HIPÉRBOLA DE 560 MM.

$H =$	650	$l =$	36°	12' 30"
	700		36	57
	750		37	37
	800		38	11
	850		38	42 30
	900		39	10
	950		39	35
	1000		39	58
	1050		40	18 30
	1100		40	38
	1150		40	56
	1200		41	12
	1250		41	28
	1300		41	42
	1350		41	56
	1400		42	09
	1450		42	21
	1500		42	32 30
	1550		42	43 30
	1600		42	54
	1650		43	04 30
	1700		43	14
	1750		43	23 30
	1800		43	32 30
	1850		43	41
	1900		43	49 30
	1950		43	58
	2000		44	05 30

HIPÉRBOLA DE 580 MM.

$H =$	700	$l =$	36°	38'
	750		37	19
	800		37	55
	850		38	26
	900		38	55
	950		39	21
	1000		39	44 30"
	1050		40	06
	1100		40	26
	1150		40	44
	1200		41	01
	1250		41	17
	1300		41	32
	1350		41	46
	1400		41	59 30
	1450		42	12
	1500		42	24
	1550		42	35
	1600		42	46
	1650		42	56 30
	1700		43	06 30

H = 1750.....	l = 43°	16'	
1800.....	43	25	
1850.....	43	34	
1900.....	43	42	30''
1950.....	43	51	
2000.....	43	59	

HIPÉRBOLA DE 600 MM.

H = 700.....	l = 36°	19'	
750.....	37	01	
800.....	37	38	
850.....	38	11	
900.....	38	40	30''
950.....	39	07	
1000.....	39	31	
1050.....	39	53	30
1100.....	40	14	
1150.....	40	33	
1200.....	40	50	
1250.....	41	07	
1300.....	41	22	
1350.....	41	36	30
1400.....	41	50	
1450.....	42	03	
1500.....	42	15	
1550.....	42	27	
1600.....	42	38	
1650.....	42	48	30
1700.....	42	59	
1750.....	43	08	30
1800.....	43	18	
1850.....	43	27	
1900.....	43	36	
1950.....	43	44	
2000.....	43	52	30

HIPÉRBOLA DE 620 MM.

H = 750.....	l = 36°	43'	
800.....	37	21	
850.....	37	55	
900.....	38	26	
950.....	38	53	
1000.....	39	18	
1050.....	39	41	
1100.....	40	02	
1150.....	40	21	
1200.....	40	39	30''
1250.....	40	56	
1300.....	41	12	
1350.....	41	27	
1400.....	41	41	
1450.....	41	54	

H = 1500.....	l = 42°	06'	30''
1550.....	42	18	
1600.....	42	29	30
1650.....	42	40	30
1700.....	42	51	
1750.....	43	01	
1800.....	43	11	
1850.....	43	20	
1900.....	43	29	
1950.....	43	37	30
2000.....	43	46	

HIPÉRBOLA DE 640 MM.

H = 750.....	l = 36°	25'	
800.....	37	04	
850.....	37	39	30''
900.....	38	11	
950.....	38	39	
1000.....	39	05	
1050.....	39	27	30
1100.....	39	50	
1150.....	40	10	
1200.....	40	28	30
1250.....	40	46	
1300.....	41	02	
1350.....	41	17	
1400.....	41	31	
1450.....	41	45	
1500.....	41	58	
1550.....	42	10	
1600.....	42	21	30
1650.....	42	33	
1700.....	42	43	30
1750.....	42	53	30
1800.....	43	03	30
1850.....	43	13	
1900.....	43	22	
1050.....	43	31	
2000.....	43	39	30

HIPÉRBOLA DE 660 MM.

H = 750.....	l = 36°	03'	30''
800.....	36	47	
850.....	37	22	30
900.....	37	56	
950.....	38	25	
1000.....	38	51	30
1050.....	39	15	30
1100.....	39	37	30
1150.....	39	58	
1200.....	40	17	30
1250.....	40	35	

H = 1300	l =	40°	52′	
1350		41	07	
1400		41	22	
1450		41	36	
1500		41	49	
1550		42	01	30″
1600		42	13	30
1650		42	25	
1700		42	36	
1750		42	46	
1800		42	57	
1850		43	06	
1900		43	15	
1950		43	24	
2000		43	33	

HIPÉRBOLA DE 680 MM.

H = 800	l =	36°	30′	
850		37	07	30″
900		37	41	
950		38	11	
1000		38	38	
1050		39	03	
1100		39	26	
1150		39	47	
1200		40	06	30
1250		40	24	30
1300		40	41	30
1350		40	57	30
1400		41	12	30
1450		41	27	
1500		41	40	
1550		41	53	
1600		42	05	
1650		42	17	
1700		42	28	
1750		42	39	
1800		42	49	
1850		42	59	
1900		43	08	30
1950		43	17	30
2000		43	26	

HIPÉRBOLA DE 700 MM.

H = 800	l =	36°	13′	
850		36	52	
900		37	26	
950		37	57	
1000		38	25	
1050		38	50	
1100		39	14	
1150		39	34	30″

H = 1200	l =	39°	55′	
1250		40	14	
1300		40	31	30″
1350		40	48	
1400		41	03	
1450		41	18	
1500		41	31	30
1550		41	44	30
1600		41	57	
1650		42	09	
1700		42	24	
1750		42	31	
1800		42	42	
1850		42	52	
1900		43	01	30
1950		43	10	30
2000		43	20	

HIPÉRBOLA DE 720 MM.

H = 850	l =	36°	36′	
900		37	11	
950		37	43	
1000		38	11	
1050		38	37	30″
1100		39	01	30
1150		39	23	30
1200		39	44	
1250		40	03	30
1300		40	21	
1350		40	38	
1400		40	54	
1450		41	09	
1500		41	23	
1550		41	36	
1600		41	49	
1650		42	01	
1700		42	12	30
1750		42	24	
1800		42	34	
1850		42	45	
1900		42	54	30
1950		43	04	
2000		43	13	

HIPÉRBOLA DE 740 MM.

H = 850	l =	36°	20′	
900		36	56	
950		37	28	30″
1000		37	58	
1050		38	25	
1100		38	49	30
1150		39	12	

$H =$	1200	$l =$	39°	33'
	1250		39	53
	1300		40	11
	1350		40	28
	1400		40	44 30"
	1450		40	59 30
	1500		41	14
	1550		41	28
	1600		41	41
	1650		41	53
	1700		42	05
	1750		42	16
	1800		42	27
	1850		42	37 30
	1900		42	47 30
	1950		42	57 30
	2000		43	06 30

HIPÉRBOLA DE 760 MM.

$H =$	850	$l =$	36°	04' 30"
	900		36	41
	950		37	14
	1000		37	44 30
	1050		38	12
	1100		38	37 30
	1150		39	00 30
	1200		39	22
	1250		39	42
	1300		40	01
	1350		40	18 30
	1400		40	35
	1450		40	50 30
	1500		41	05
	1550		41	19
	1600		41	32 30
	1650		41	45
	1700		41	57
	1750		42	08 30
	1800		42	20
	1850		42	30 30
	1900		42	40 30
	1950		42	50 30
	2000		43	00

HIPÉRBOLA DE 780 MM.

$H =$	900	$l =$	36°	26'
	950		37	00
	1000		37	31
	1050		37	59
	1100		38	25
	1150		38	49
	1200		39	11
$H =$	1250	$l =$	39°	32'
	1300		39	51
	1350		40	09
	1400		40	25 30"
	1450		40	41 30
	1500		40	56
	1550		41	10 30
	1600		41	24
	1650		41	37
	1700		41	48 30
	1750		42	01
	1800		42	12 30
	1850		42	23 30
	1900		42	34
	1950		42	44
	2000		42	54

HIPÉRBOLA DE 800 MM.

$H =$	900	$l =$	36°	10' 30"
	950		36	46
	1000		37	17 30
	1050		37	46 30
	1100		38	13
	1150		38	37 30
	1200		39	00
	1250		39	21
	1300		39	41
	1350		39	59
	1400		40	16
	1450		40	32 30
	1500		40	48
	1550		41	02
	1600		41	16
	1650		41	29
	1700		41	42
	1750		41	53 30
	1800		42	05 30
	1850		42	16
	1900		42	27
	1950		42	37 30
	2000		42	47

HIPÉRBOLA DE 820 MM.

$H =$	950	$l =$	36°	31' 30"
	1000		37	04
	1050		37	34
	1100		38	01
	1150		38	26
	1200		38	49
	1250		39	10 30
	1300		39	30 30
	1350		39	49
	1400		40	07

$H =$ 1450	$l =$	40°	23'	
1500		40	39	
1550		40	54	
1600		41	08	
1650		41	21	30''
1700		41	33	
1750		41	46	30
1800		41	58	
1850		42	09	30
1900		42	20	
1950		42	30	30
2000		42	40	30

HIPÉRBOLA DE 840 MM.

$H =$ 950	$l =$	36°	17'	
1000		36	50	30''
1050		37	21	
1100		37	49	
1150		38	14	
1200		38	38	
1250		39	00	
1300		39	20	
1350		39	39	
1400		39	57	
1450		40	14	
1500		40	30	
1550		40	45	
1600		41	00	
1650		41	13	
1700		41	26	30
1750		41	39	
1800		41	51	
1850		42	02	
1900		42	13	
1950		42	23	30
1000		42	34	

HIPÉRBOLA DE 860 MM.

$H =$ 950	$l =$	36°	03'	
1000		36	37	
1050		37	08	
1100		37	36	30''
1150		38	02	30
1200		38	26	30
1250		38	49	
1300		39	11	30
1350		39	29	30
1400		39	47	30
1450		40	05	
1500		40	21	30
1550		40	36	30
1600		40	51	
1650		41	05	

$H =$ 1700	$l =$	41°	18'	30''
1750		41	31	30
1800		41	43	30
1850		41	55	
1900		42	06	30
1950		42	17	
2000		42	27	30

HIPÉRBOLA DE 880 MM.

$H =$ 1000	$l =$	36°	23	
1050		36	55	
1100		37	24	
1150		37	51	
1200		38	15	30''
1250		38	38	30
1300		39	00	
1350		39	19	30
1400		39	38	30
1450		39	56	
1500		40	12	30
1550		40	28	
1600		40	43	
1650		40	57	30
1700		41	11	
1750		41	24	
1800		41	36	
1850		41	48	
1900		41	59	30
1950		42	10	30
2000		42	21	

HIPÉRBOLA DE 900 MM.

$H =$ 1000	$l =$	36°	09'	30''
1050		36	42	
1100		37	12	
1150		37	39	
1200		38	04	30
1250		38	28	
1300		38	49	30
1350		39	09	30
1400		39	29	
1450		39	47	
1500		40	04	
1550		40	19	30
1600		40	35	
1650		40	49	30
1700		41	03	
1750		41	16	30
1800		41	29	
1850		41	41	
1900		41	53	
1950		42	04	
2000		42	14	30

HIPÉRBOLA DE 920 MM.

H = 1000	l =	35°	56′	
1050		36	29	
1100		36	59	30″
1150		37	27	30
1200		37	53	
1250		38	17	
1300		38	39	
1350		39	00	
1400		39	19	30
1450		39	38	
1500		39	54	30
1550		40	11	30
1600		40	27	
1650		40	41	30
1700		40	55	30
1750		41	09	
1800		41	22	
1850		41	34	30
1900		41	46	
1950		41	57	
2000		42	08	

HIPÉRBOLA DE 940 MM.

H = 1050	l =	36°	16′	
1100		36	47	
1150		37	17	30″
1200		37	42	
1250		38	06	
1300		38	29	
1350		38	50	
1400		39	10	
1450		39	29	
1500		39	46	
1550		40	02	30
1600		40	18	30
1650		40	33	30
1700		40	47	30
1750		41	01	30
1800		41	14	30
1850		41	27	
1900		41	39	
1950		41	50	30
2000		42	00	30

HIPÉRBOLA DE 960 MM.

H = 1050	l =	36°	03′	
1100		36	35	
1150		37	04	
1200		37	30	30″
1250		37	55	30
1300		38	19	
H = 1350	l =	38°	40′	
1400		39	00	30″
1450		39	19	30
1500		39	37	
1550		39	54	
1600		40	10	
1650		40	25	30
1700		40	39	30
1750		40	54	
1800		41	07	
1850		41	20	
1900		41	32	
1950		41	44	
2000		41	54	30

HIPÉRBOLA DE 980 MM.

H = 1100	l =	36°	22′	
1150		36	52	
1200		37	19	30″
1250		37	44	30
1300		38	08	30
1350		38	30	
1400		38	51	
1450		39	10	
1500		39	28	30
1550		39	46	
1600		40	02	
1650		40	17	30
1700		40	31	30
1750		40	46	
1800		41	00	
1850		41	13	
1900		41	25	30
1950		41	37	
2000		41	48	

HIPÉRBOLA DE 1000 MM.

H = 1100	l =	36°	10′	
1150		36	40	30″
1200		37	08	
1250		37	34	
1300		37	58	
1350		38	20	30
1400		38	41	30
1450		39	01	
1500		39	19	30
1550		39	37	
1600		39	54	
1650		40	09	
1700		40	24	30
1750		40	39	
1800		40	52	30

H = 1850	I =	41°	05'	30"
1900		41	18	
1950		41	30	
2000		41	42	

HIPÉRBOLA DE 1020 MM.

H = 1100	I =	35°	58'	
1150		36	28	30"
1200		36	57	
1250		37	23	
1300		37	47	30
1350		38	10	
1400		38	32	
1450		38	52	
1500		39	11	
1550		39	29	
1600		39	45	30
1650		40	01	30
1700		40	16	30
1750		40	31	
1800		40	45	
1850		40	58	30
1900		41	11	30
1950		41	23	30
2000		41	35	

HIPÉRBOLA DE 1040 MM.

H = 1150	I =	36°	17'	
1200		36	46	
1250		37	12	30"
1300		37	37	
1350		38	00	30
1400		38	22	
1450		38	43	
1500		39	02	
1550		39	20	
1600		39	37	
1650		39	53	
1700		40	09	
1750		40	24	30
1800		40	38	
1850		40	51	30
1900		41	04	
1950		41	17	
2000		41	29	

HIPÉRBOLA DE 1060 MM.

H = 1150	I =	36°	05'	
1200		36	34	
1250		37	01	30"
1300		37	27	
H = 1350	I =	37°	51'	
1400		38	13	
1450		38	33	30"
1500		38	53	
1550		39	10	30
1600		39	28	30
1650		39	45	30
1709		40	01	
1750		40	16	
1800		40	30	30
1850		40	44	
1900		40	57	30
1950		41	10	
2000		41	22	

HIPÉRBOLA DE 1080 MM.

H = 1200	I =	36°	23'	
1250		36	51	
1300		37	16	30"
1350		37	40	30
1400		38	03	
1450		38	24	
1500		38	44	
1550		39	03	
1600		39	20	30
1650		39	37	30
1700		39	53	30
1750		40	08	30
1800		40	23	
1850		40	37	
1900		40	50	30
1950		41	03	
2000		41	15	30

HIPÉRBOLA DE 1100 MM.

H = 1200	I =	36°	11'	30"
1250		36	40	30
1300		37	06	
1350		37	31	
1400		37	53	30
1450		38	15	
1500		38	35	
1550		38	54	
1600		39	12	
1650		39	29	30
1700		39	45	30
1750		40	01	
1800		40	16	30
1850		40	30	
1900		40	43	30
1950		40	56	30
2000		41	09	

HIPÉRBOLA DE 1120 MM.

H = 1200	I =	36°	00'	
1250		36	29	
1300		36	56	
1350		37	21	
1400		37	44	
1450		38	06	
1500		38	26	
1550		38	45	30"
1600		39	04	
1650		39	21	
1700		39	38	
1750		39	53	30
1800		40	08	30
1850		40	23	
1900		40	37	
1950		40	50	
2000		41	02	30

HIPÉRBOLA DE 1140 MM.

H = 1250	I =	36°	18'	
1300		36	45	30"
1350		37	11	
1400		37	34	30
1450		37	56	30
1500		38	17	30
1550		38	37	
1600		38	55	30
1650		39	13	
1700		39	30	
1750		39	46	30
1800		40	01	
1850		40	16	30
1900		40	30	
1950		40	43	
2000		40	56	

HIPÉRBOLA DE 1160 MM.

H = 1250	I =	36°	07'	
1300		36	35	
1350		37	01	
1400		37	25	
1450		37	47	
1500		38	08	30"
1550		38	28	30
1600		38	47	
1650		39	05	
1700		39	22	
1750		39	38	30
1800		39	54	
H = 1850	I =	40°	08'	30"
1900		40	23	
1950		40	36	
2000		40	49	

HIPÉRBOLA DE 1180 MM.

H = 1300	I =	36°	24'	30"
1350		36	51	
1400		37	15	
1450		37	38	
1500		37	59	30
1550		38	20	
1600		38	39	
1650		38	57	
1700		39	14	30
1750		39	30	30
1800		39	46	30
1850		40	01	30
1900		40	15	30
1950		40	29	30
2000		40	43	

HIPÉRBOLA DE 1200 MM.

H = 1300	I =	36°	14'	30"
1350		36	41	
1400		37	06	
1450		37	29	
1500		37	50	30
1550		38	11	
1600		38	30	30
1650		38	48	30
1700		39	06	30
1750		39	23	
1800		39	39	
1850		39	54	
1900		40	09	
1950		40	23	
2000		40	36	

HIPÉRBOLA DE 1220 MM.

H = 1300	I =	36°	03'	30"
1350		36	30	30
1400		36	56	
1450		37	19	30
1500		37	41	30
1550		38	02	30
1600		38	22	
1650		38	41	
1700		38	59	
1750		39	16	
1800		39	32	

H = 1850.....	l = 39°	47'
1900.....	40	02 30"
1950.....	40	16
2000.....	40	29 30

HIPÉRBOLA DE 1240 MM.

H = 1350.....	l = 36°	20'
1400.....	36	46
1450.....	37	09 30"
1500.....	37	32 30
1550.....	37	53 30
1600.....	38	13 30
1650.....	38	33
1700.....	38	51
1750.....	39	08
1800.....	39	24
1850.....	39	40
1900.....	39	54 30
1950.....	40	09
1000.....	40	22 30

HIPÉRBOLA DE 1260 MM.

H = 1350.....	l = 36°	10'
1400.....	36	36
1450.....	37	01
1500.....	37	23 30"
1550.....	37	45
1600.....	38	05 30
1650.....	38	25
1700.....	38	43
1750.....	39	00 30
1806.....	39	17
1850.....	39	33
1900.....	39	48
1950.....	40	02 30
2000.....	40	16

HIPÉRBOLA DE 1280 MM.

H = 1400.....	l = 36°	26' 30"
1450.....	36	51
1500.....	37	14 30
1550.....	37	36 30
1600.....	37	57
1650.....	38	16 30
1700.....	38	35
1750.....	38	52 30
1800.....	39	09 30
1850.....	39	25 30
1900.....	39	41
1950.....	39	55 30
2000.....	40	09 30

HIPÉRBOLA DE 1300 MM.

H = 1400.....	l = 36°	17'
1450.....	36	42
1500.....	37	05 30"
1550.....	37	28
1600.....	37	49
1650.....	38	08 30
1700.....	38	27
1750.....	38	45
1800.....	39	02
1850.....	39	18 30
1900.....	39	34
1950.....	39	49
2000.....	40	03

HIPÉRBOLA DE 1320 MM.

H = 1400.....	l = 36°	09'
1450.....	36	32 30"
1500.....	36	56 30
1550.....	37	19
1600.....	37	40
1650.....	38	00 30
1700.....	38	19 30
1750.....	38	37 30
1800.....	38	54 30
1850.....	39	11
1900.....	39	27
1950.....	39	43
2000.....	39	56 30

HIPÉRBOLA DE 1340 MM.

H = 1450.....	l = 36°	23'
1500.....	36	47 30"
1550.....	37	10
1600.....	37	32
1650.....	37	52
1700.....	38	11 30
1750.....	38	30
1800.....	38	47 30
1850.....	39	04
1900.....	39	20
1950.....	39	35
2000.....	39	50

HIPÉRBOLA DE 1360 MM.

H = 1450.....	l = 36°	13' 30"
1500.....	36	38 30
1550.....	37	01 30
1600.....	37	23 30
1650.....	37	44

$H =$ 1700	$I =$ 38°	03' 30"
1750	38	22
1800	38	40
1850	38	56 30
1900	39	13
1950	39	28 28
2000	39	43

HIPÉRBOLA DE 1380 MM.

$H =$ 1450	$I =$ 36°	04' 30"
1500	36	29 30
1550	36	53
1600	37	15
1650	37	36
1700	37	56
1750	38	15
1800	38	33
1850	38	50
1900	39	06
1950	39	22
2000	39	36 30

HIPÉRBOLA DE 1400 MM.

$H =$ 1500	$I =$ 36°	20'
1550	36	43 30
1600	37	06 30
1650	37	28
1700	37	47 30
1750	38	07
1800	38	25
1850	38	42 30
1900	38	59
1950	39	14 30
2000	39	30

HIPÉRBOLA DE 1420 MM.

$H =$ 1500	$I =$ 36°	11'
1550	36	35 30"
1600	36	58
1650	37	20
1700	37	40
1750	37	59
1800	38	18
1850	38	35
1900	38	52
1950	39	08
2000	39	22 30

HIPÉRBOLA DE 1440 MM.

$H =$ 1500	$I =$ 36°	02'
1550	36	26 30"
1600	36	49 30"
1650	37	11 30
1700	37	32
1750	37	51 30
1800	38	10
1850	38	28
1900	38	45
1950	39	01
2000	39	16

HIPÉRBOLA DE 1460 MM.

$H =$ 1550	$I =$ 36°	18'
1600	36	41
1650	37	03
1700	37	24
1750	37	44
1800	38	03
1850	38	21
1900	38	38
1950	38	54
2000	39	10

HIPÉRBOLA DE 1480 MM.

$H =$ 1550	$I =$ 36°	09'
1600	36	32 30"
1650	36	55
1700	37	16
1750	37	36
1800	37	55
1850	38	13 30
1900	38	30 30
1950	38	47 30
2000	39	03

HIPÉRBOLA DE 1500 MM.

$H =$ 1550	$I =$ 36°	00'
1600	36	24
1650	36	47
1700	37	08
1750	37	28 30"
1800	37	48
1850	38	06
1900	38	24
1950	38	41
2000	38	57

HIPÉRBOLA DE 1520 MM.

$H =$ 1600	$I =$ 36°	15' 30"
1650	36	38 30
1700	37	00
1750	37	20 30

H = 1800	l = 37° 40'	30''
1850	37	59
1900	38	16 30
1950	38	33 30
2000	38	50

HIPÉRBOLA DE 1540 MM.

H = 1600	l = 36° 07'	
1650	36	30
1700	36	52
1750	37	13
1800	37	33
1850	37	52
1900	38	10
1950	38	27
2000	38	43 30''

HIPÉRBOLA DE 1560 MM.

H = 1650	l = 36° 22'	
1700	36	44
1750	37	05 30''
1800	37	25 30
1850	37	44 30
1900	38	02 30
1950	38	20
2000	38	36 30

HIPÉRBOLA DE 1580 MM.

H = 1650	l = 36° 14'	
1700	36	37
1750	36	58
1800	37	18
1850	37	37
1900	37	56
1950	38	13
2000	38	30

HIPÉRBOLA DE 1600 MM.

H = 1650	l = 36° 06'	
1700	36	28 30''
1750	36	50
1800	37	10 30
1850	37	30
1900	37	48 30
1950	38	06 30
2000	38	23 30

HIPÉRBOLA DE 1620 MM.

H = 1700	l = 36° 20'	
1750	36	42
H = 1800	l = 37° 03'	
1850	37	23
1900	37	41 30''
1950	37	59 30
2000	38	17

HIPÉRBOLA DE 1640 MM.

H = 1700	l = 36° 12'	
1750	36	34 30''
1800	36	55 30
1850	37	15 30
1900	37	34 30
1950	37	52 30
2000	38	10

HIPÉRBOLA DE 1660 MM.

H = 1700	l = 36° 04'	
1750	36	27
1800	36	48
1850	37	08
1900	37	27 30''
1950	37	46
2000	38	03

HIPÉRBOLA DE 1680 MM.

H = 1750	l = 36° 19'	
1800	36	40
1850	37	01
1900	37	20
1950	37	39
2000	37	56 30''

HIPÉRBOLA DE 1700 MM.

H = 1750	l = 36° 11'	
1800	36	33
1850	36	53 30''
1900	37	13
1950	37	32
2000	37	50

HIPÉRBOLA DE 1720 MM.

H = 1750	l = 36° 03'	
1800	36	25
1850	36	46
1900	37	06
1950	37	25
2000	37	43

HIPÉRBOLA DE 1740 MM.

H = 1800	l = 36° 18'	
1850	36	39

$H =$ 1900.....	$l =$ 36°	59'
1950.....	37	18
2000.....	37	36

HIPÉRBOLA DE 1760 MM.

$H =$ 1800.....	$l =$ 36°	10'
1850.....	36	30 30"
1900.....	36	51 30
1950.....	37	11
2090.....	37	30

HIPÉRBOLA DE 1780 MM.

$H =$ 1800.....	$l =$ 36°	02'
1850.....	36	24
1900.....	36	44 30"
1950.....	37	04
2000.....	37	23

HIPÉRBOLA DE 1800 MM.

$H =$ 1850.....	$l =$ 36°	17'
1900.....	36	37 30"
1950.....	36	57
2000.....	37	16

HIPÉRBOLA DE 1820 MM.

$H =$ 1850.....	$l =$ 36°	09'
1900.....	36	30
1950.....	36	50
2000.....	37	09 30"

HIPÉRBOLA DE 1840 MM.

$H =$ 1850.....	$l =$ 36°	02'
1900.....	36	23
1950.....	36	43 30"
2000.....	37	03

HIPÉRBOLA DE 1860 MM.

$H =$ 1900.....	$l =$ 36°	16'
1950.....	36	36 30"
2000.....	36	56

HIPÉRBOLA DE 1880 MM.

$H =$ 1900.....	$l =$ 36°	09'
1950.....	35	29 30"
2000.....	36	49

HIPÉRLOLA DE 1900 MM.

$H =$ 1950.....	$l =$ 36°	22' 30"
2000.....	36	42

HIPÉRBOLA DE 1920 MM.

$H =$ 1950.....	$l =$ 36°	15' 30"
2000.....	36	35 30

HIPÉRBOLA DE 1940 MM.

$H =$ 1950.....	$l =$ 36°	08'
2000.....	36	29

HIPÉRBOLA DE 1960 MM.

$H =$ 1950.....	$l =$ 36°	01' 30"
2000.....	36	21 30

HIPÉRBOLA DE 1980 MM.

$H =$ 2000..... $l =$ 36° 15'

HIPÉRBOLA DE 2000 MM.

$H =$ 2000..... $l =$ 36° 08'

CAPÍTULO VI

INSTRUCCIONES PARA LA COMPARACIÓN DE LAS MIRAS METÁLICAS

Como son varias las miras que intervienen en los trabajos, es indispensable conocer la longitud de cada una de ellas, así como las pequeñas variaciones que esta longitud pueda experimentar bajo la influencia de agentes exteriores. Si esto no se hiciera, no sería posible, sin cometer errores, utilizar los resultados obtenidos por las observaciones. Estos errores tienen poca importancia en las regiones llanas, pero su influencia es decisiva cuando los trabajos se desarrollan en un país tan montañoso como el de España. Afortunadamente, para las miras con cinta de Invar, la variabilidad que pueden experimentar durante las operaciones bajo la influencia de la temperatura y de la humedad es muy reducida; pero como también es muy reducido el límite de error impuesto a los trabajos, es posible, si concurren circunstancias desfavorables, que los resultados no puedan utilizarse si no se corrigen teniendo en cuenta la verdadera longitud del metro de mira, y esto únicamente se consigue estudiando las miras en el comparador.

El comparador recientemente adquirido por el Instituto Geográfico dispone de todos los elementos que permiten hacer ese estudio en las condiciones más favorables, y como es análogo al que emplea el Servicio Topográfico Federal Suizo con el mismo objeto, utilizando también miras metálicas exactamente iguales a las nuestras, se ha creído conveniente exponer a continuación el resultado de las experiencias practicadas personalmente en Berna, en colaboración con los Ingenieros Gasmann y Favre, durante la comisión del servicio que la Dirección general tuvo a bien confiarme.

Se emplea un comparador de trazos con un microscopio de puntería, sin tornillo micrométrico, fijo en un extremo del comparador, y otro microscopio de lectura, con su tambor correspondiente, que puede desplazarse a voluntad hasta poderlo colocar al lado del microscopio que está fijo, con objeto de poder observar todos los intervalos de la mira por pequeños que sean. El patrón es una medida de acero de tres metros de longitud, con sección en forma de H. Ha sido construido en la Société Genevoise, y está dividido en milímetros, y cifrado en centímetros, en toda su longitud.

Primeramente se hizo una comparación del patrón en los intervalos 0 - 1000^{mm}, 0 - 2000^{mm} y 0 - 3000^{mm} en el Bureau internacional de pesas y medidas. Posterior-

mente, en el Servicio de pesas y medidas de Berna, se hizo una segunda comparación en la que se determinaron todos los decímetros.

En la comparación se apoya el patrón sobre dos soportes de acero que distan 66 centímetros de los extremos.

Los microscopios están dotados de un par de hilos cuya separación está en armonía con el grueso de las divisiones del patrón, y de otro par de hilos perfectamente simétricos con el primero, y cuya separación es mayor para poder observar las divisiones de la mira de Invar, que tiene 0,8 milímetros de espesor.

Las miras de Invar se colocan dos horas antes, por lo menos, de empezar la comparación en el comparador, para que la cinta metálica y el patrón de acero tengan igual temperatura al empezar las observaciones.

La cinta metálica de las miras tiene dos divisiones cifradas en medios decímetros, y su estudio comprende la comparación de todos los decímetros en una y en otra división con los intervalos correspondientes del patrón.

La comparación de un decímetro de la mira con el correspondiente intervalo del patrón se hace de la manera siguiente:

Primeramente se leen las temperaturas en los dos termómetros del patrón normal y se anota la hora. Después se coloca el patrón de acero debajo de los microscopios, de manera que se puedan enfocar las divisiones del intervalo que se va a comparar, y se hacen las lecturas correspondientes. Se repiten tres veces estas lecturas independientemente y los tres valores se combinan. Después se coloca la mira debajo de los microscopios y se ejecutan las lecturas en la misma forma que se ha hecho con el patrón. Después se cambian los observadores para eliminar el influjo de la ecuación personal y se vuelven a hacer las tres lecturas sobre la mira, y, por último, se registran otras tres lecturas sobre el patrón. Se vuelven a leer las temperaturas anotando la hora, y la comparación del intervalo de la mira con el correspondiente intervalo del patrón queda terminada y dispuesta para el cálculo.

En esta forma se comparan, en una y en otra división de la mira, el primer decímetro del patrón con el decímetro correspondiente de la mira; los dos primeros decímetros del patrón con el intervalo correspondiente de la mira, y así sucesivamente hasta el intervalo de 29 decímetros del patrón con el correspondiente de la mira, que es el intervalo más grande en decímetros de que se puede disponer en la mira para poderlo observar con los microscopios.

Ejecutada esta comparación de todos los decímetros en las dos divisiones de la mira, encontraremos para estos intervalos su longitud en función de la longitud perfectamente conocida de los intervalos correspondientes del patrón. Estos valores encontrados discreparán de los valores nominales, en más o en menos, a consecuencia de los errores sistemáticos y accidentales que forzosamente hay que cometer al hacer la división de las miras, y si, por lo tanto, se registran como abscisas los valores absolutos métricos expresados en decímetros hasta el 29, que es el intervalo máximo que se ha comparado, y como ordenadas las diferencias encontradas por la observación expresadas en micrones, la curva que una todos estos puntos proporcionará la manera de reducir en el trabajo de nivelación cada visual a su verdadera longitud; pero esto prácticamente es muy complicado e innecesario, siendo preferible contentarse con un valor medio, sustituyendo la curva por una recta que pase entre los puntos que deter-

minan la curva, de tal manera que cumpla con una condición que se fija de antemano para que quede perfectamente determinada. Generalmente se impone como condición el que la suma algebraica de sus errores positivos y negativos sea cero y que sea mínimum la suma de sus cuadrados, y esto únicamente se justifica por la sencillez de su expresión matemática.

El defecto de este método, que es el de los mínimos cuadrados, es el de exagerar la influencia de los errores groseros, cometidos en las experiencias especialmente malas, que lógicamente debían desecharse sin hacerlas entrar en la combinación, y como el objeto principal es el de trazar esa recta de manera que quede perfectamente determinada, puede escogerse el procedimiento que más convenga, basándose en el método anterior, o en los centros de gravedad, trazándola gráficamente de manera que sea igual a cero la suma algebraica de las superficies que quedan limitadas por la curva a uno y otro lado de la recta que se considera.

Esta recta no pasará por el origen, debido a que el punto de partida de las divisiones de la mira, que hemos tenido en cuenta, tendrá también su error de división correspondiente, es decir, que su ecuación tendrá la forma

$$y = a \cdot x + b,$$

en la que b representa el citado error, que es la ordenada de la recta, cuando corta al eje de las Y, y a el coeficiente angular, o sea la tangente del ángulo que la inclinación de la recta forma con la parte positiva del eje de las X. Una vez trazada la recta conoceremos inmediatamente los valores de estas dos constantes expresados en micrones, y la ecuación general de la recta para el error más grande de 29 divisiones de la abscisa vendrá expresada por la fórmula

$$y = a \cdot 29^{dm} + b \pm c,$$

en la que c representa el error en micrones inherente a la operación.

En la comparación ejecutada en Berna se obtuvo para ecuación de la recta, por el método de los mínimos cuadrados,

$$y = a \cdot x + b \pm c = + 16^{\mu},797\, X + 15^{\mu},97 \pm 18^{\mu},6,$$

en la que X representa un número de decímetros, y, por lo tanto, para el metro de mira la ecuación será

$$y = + 167^{\mu},97 + 15^{\mu},97 \pm 18^{\mu},6,$$

que es el número de micrones que hay que añadir al valor nominal para tener la longitud que efectivamente tiene la mira entre las divisiones que limitan un metro.

La comparación, en la forma que queda expuesta, de todos los decímetros de las divisiones que tiene la mira es lo que se llama una comparación principal y su objeto, además de determinar la verdadera longitud del metro de mira, permite conocer el error medio cometido al dividir las miras, que importa por término medio, según las experiencias ejecutadas en Berna, 25 micrones.

Esta comparación principal debe ejecutarse todos los años en la primavera y en el otoño, es decir, antes y después de los trabajos de campo, pero una vez que se conoce con todo detalle el comportamiento de las cintas de Invar no habrá necesidad de compararlas con tanta frecuencia y será fácil evitarlas recurriendo a un artificio que permite de una manera rápida deducir el valor del metro de mira, en función de este mismo valor obtenido en una época anterior.

Para esto se graban en el metal de la cinta, a medio decímetro de sus extremos, dos señales muy finas de la mejor manera posible, para que puedan observarse con facilidad con los hilos del microscopio.

Estas señales, que se llaman de marca, comprenderán aproximadamente un intervalo de 29 decímetros de mira, y si se compara con el intervalo correspondiente del patrón, antes o después de hacer una comparación principal de todos los decímetros, y si designamos por M la longitud del metro medio obtenido en una época anterior, por AB la separación de señales correspondientes, por $A'B'$ la separación de señales últimamente obtenidas y por M' la longitud del metro medio que deseamos conocer, resultará que la diferencia $A'B' - AB$ expresará la variabilidad que ha sufrido la cinta metálica en el transcurso de esa época entre las dos señales de marca distanciadas 29 decímetros, y, por lo tanto, el metro medio de mira M' diferirá del antiguo valor M obtenido por el resultado de una comparación principal de todos los decímetros, según la cantidad $\frac{A'B' - AB}{2{,}90}$, y, por lo tanto, el nuevo valor que se busca, en función del valor antiguo, podrá ponerse bajo la forma

$$M' = M + \frac{A'B' - AB}{2{,}90},$$

siendo válida esta relación, porque suponemos que la variabilidad experimentada por la cinta afecta uniformemente a toda la longitud.

Se puede, por lo tanto, deducir de una manera rápida y sencilla de la separación entre las señales de marca el metro medio de mira.

Al mismo tiempo que se graban estas señales, se graban otras a la misma altura aproximadamente, pero en la madera de la mira, y por el resultado de las comparaciones sucesivas que se hagan con el intervalo correspondiente del patrón se pondrá de manifiesto las alteraciones inevitables que habrá sufrido la mira en su longitud, debidas a la madera, y que no deben influir en la cinta metálica si, como es de esperar, el dispositivo con que se sujeta en la mira responde perfectamente a su objeto, manteniéndola suelta e independiente para que no la afecten las contracciones y dilataciones que forzosamente tiene que sufrir la madera bajo la influencia de la temperatura y la humedad.

Estas señales de marca, grabadas en la cinta y en la madera, además de que permiten deducir rápidamente el valor del metro medio sin necesidad de hacer una comparación principal, también se utilizan, por lo tanto, para poner de manifiesto constantemente la poca variabilidad de la longitud de las cintas de Invar, debido a lo pequeño de su coeficiente de dilatación, que a la temperatura de 18 grados y en una tensión de 25 kilogramos, que es aproximadamente la de las cintas de las miras, es igual a $0^m{,}0000019$, esto es, inferior a dos micrones por metro y por grado. Por lo

tanto, la comparación de estas miras perderá el carácter de investigaciones independientes con objeto de encontrar un nuevo valor, y se limitará más bien a vigilar la constancia de un valor antiguamente obtenido, asegurándose de la invariabilidad de la longitud del metro medio.

Si estas señales se graban con habilidad en la cinta metálica, puede aceptarse que el error medio de una sola comparación de su intervalo es igual a tres micrones, y por eso se repite, para la comparación entre señales, la comparación descrita anteriormente para un intervalo único, tomando después la media de ambos valores.

En el Servicio suizo se graban estas señales en las dos divisiones de la mira, es decir, que se graban cuatro señales en la cinta metálica, dos a la derecha en la división que tiene las cifras pequeñas, y otras dos a la izquierda en la división que tiene las cifras grandes, y otras cuatro señales en los mismos lados sobre la madera, y se hace la comparación de los intervalos correspondientes inmediatamente antes y después de la comparación principal de todos los decímetros, y en el siguiente orden:

1.° Intervalo en la cinta en las cifras pequeñas.
2.° Intervalo en la cinta en las cifras grandes.
3.° Intervalo en la madera en las cifras pequeñas.
4.° Intervalo en la madera en las cifras grandes.
5.° Intervalo en la cinta en las cifras pequeñas.
6.° Comparación principal de todos los decímetros de las cifras pequeñas.
7.° Comparación principal de todos los decímetros de las cifras grandes.
8.° Intervalo en la cinta en las cifras pequeñas.
9.° Intervalo en la cinta en las cifras grandes.
10. Intervalo en la madera en las cifras pequeñas.
11. Intervalo en la madera en las cifras grandes.
12. Intervalo en la cinta en las cifras pequeñas.

Esta serie de comparaciones, por el orden que acaba de ser expuesto, es lo que constituye el estudio completo de una mira tal como se practica en el Servicio de Nivelación de Precisión de Suiza, ejecutándose seis lecturas independientes cuando se estudian los decímetros y doce lecturas independientes cuando se comparan los intervalos entre las señales de marca. Estas observaciones pueden ordenarse agrupando las observaciones correspondientes a cada microscopio o las que corresponden a cada regla; de cualquier manera que sea, su número ha sido escogido de modo que la precisión con que se obtiene la longitud del metro medio a consecuencia de estas experiencias guarde relación con el comportamiento de las miras durante los trabajos de campo, en que los resultados de la nivelación tienen marcado de antemano sus límites de error, que no pueden exceder.

Claro que a primera vista parece que no hay necesidad de grabar las señales de marca en ambos costados de la mira, pues si su objeto es acusar la variabilidad que puede tener la cinta en el transcurso de algunos meses, como esta cinta es de una sola pieza y suponemos además que esa variabilidad afecta de una manera uniforme a toda ella, podremos siempre conocerla sin necesidad de disponer más que de las dos señales correspondientes a una de las divisiones, y lo mismo puede decirse respecto de las señales grabadas en la madera, siendo lo único que parece que justifica tantas precauciones tomadas en el Servicio suizo el afán de conocer de una manera

irreprochable la verdadera longitud del metro de mira, que tanta influencia puede tener, como es sabido, en los resultados de la nivelación cuando estos trabajos se ejecutan en terrenos tan montañosos como el de Suiza.

Por eso en ese Servicio se ejecutan, también excepcionalmente, comparaciones durante las operaciones en el campo, es decir, que se admite que en determinadas ocasiones, a pesar del coeficiente de dilatación tan pequeño que tiene el Invar de las cintas, puedan éstas, bajo la influencia de temperaturas extremas, influir de una manera sensible en los resultados.

De todas maneras, por el estudio de las primeras comparaciones, podrá conocerse al detalle el comportamiento de las cintas de Invar, y marcar entonces las normas a que debe sujetarse para que la precisión con que hay que obtener su verdadera longitud esté en armonía con la precisión de los trabajos que se realizan en el campo, poniéndose, si se quiere, en el caso más desfavorable, teniendo en cuenta el terreno y las temperaturas extremas para no exceder innecesariamente la precisión de las comparaciones.

Una comparación de miras no es una comparación de metrología de precisión y, por lo tanto, no hay necesidad, en el comparador recientemente adquirido, de tomar todas aquellas precauciones que son necesarias en un estudio de dilataciones. Las observaciones se hacen desde luego en el medio ambiente, sin necesidad de proceder a ese estudio tan penoso y complicado de los termómetros y de los microscopios. En los primeros únicamente hace falta saber que son comparables sus lecturas y en los segundos no es necesario hacer el estudio de los errores periódicos y progresivos de sus tornillos, sino únicamente, fiándose en la garantía de su construcción, determinar con el mayor esmero el valor de una vuelta del tambor, sobre todo de aquéllas que se encuentran próximas y afectan al centro del peine, y que son las que siempre deben utilizarse al hacer las observaciones; claro que es indispensable conocer la longitud absoluta del patrón a determinada temperatura, así como su coeficiente de dilatación, y el coeficiente de dilataciones de la cinta de Invar de las miras.

El patrón que ha sido adquirido para el estudio de las miras es de Invar, de tres metros, y está dividido en medios decímetros en toda su longitud. Construído en la Société Genevoise y remitido directamente a Madrid probablemente no vendrá con su ecuación, y si en Ginebra se ha hecho alguna determinación habrá que acogerla con toda reserva, pues en la Société Genevoise no se dispone de instalación adecuada ni de comparador para regla de tres metros, y aun cuando haya sido remitido al Bureu de pesas y medidas de Berna para su estudio, únicamente se habrán determinado los tres intervalos de metro, no quedando, por lo tanto, otro remedio que hacer aquí, en Madrid, el estudio de todos sus decímetros, que es necesario para comparar las miras en la forma que hemos expuesto. Su coeficiente de dilatación puede proporcionarlo la Société Genevoise, no porque lo haya determinado, sino por datos que posea relacionados con el bloque de donde haya sido construído, y en cuanto al coeficiente de dilatación de las cintas de Invar de las miras recién adquiridas, por datos suministrados por la Casa constructora (Zeiss, de Jena), es próximo a dos micrones por metro y por grado de temperatura ($0^m,00000212$).

Afortunadamente el comparador permite, con sus propios elementos, efectuar todas estas determinaciones.

El estudio de las cintas de Invar en la forma que acaba de ser descrita es tal como se practica en las nivelaciones de precisión de Suiza, sin que esto quiera decir que haya que tomarlo como una norma fija para nuestros trabajos; es el resultado de las prácticas ejecutadas con los Ingenieros suizos, y seguramente es susceptible de modificaciones provechosas, y únicamente como un guía hay que considerarlo en nuestros trabajos preliminares para poder deducir después las instrucciones definitivas para la comparación de las miras de Invar que se emplean en los trabajos de alta precisión.

Aplicación del método de los mínimos cuadrados a la comparación de las miras.

En las instrucciones para comparación de las miras de Invar habíamos indicado que una vez obtenidos por las experiencias en el comparador una serie de puntos $(x_0 y_0')$, $(x_1 y_1')$, $(x_2 y_2')$ ....., en lugar de considerar la función $y' = f(x)$, que representa la curva que une todos estos puntos, era preferible contentarse con un valor medio, sustituyendo esa curva por una recta que pase a través de esos puntos, de tal manera que la suma algebraica de sus errores $(y_0 - y_0')$, $(y_1 - y_1')$, $(y_2 - y_2')$ ..... sea igual a cero y que sea un mínimum la suma de sus cuadrados.

Esta manera de operar, que se conoce con el nombre de método de los mínimos cuadrados, necesariamente da lugar a cálculos un poco complicados, pero muy sencillos por su expresión matemática, sobre todo en nuestro caso particular, en que únicamente son dos los parámetros que se tienen que determinar.

Efectivamente la ecuación de la recta que buscamos, que no pasará por el origen, será de la forma $y = Ax + B$, en la que A, que es el coeficiente angular, y B, que representa el valor de la ordenada cuando la abscisa es cero, son las dos cantidades que hay que determinar. Como el número de puntos $(x_0 y_0')$, $(x_1 y_1')$ ..... proporcionado por las experiencias es mucho más grande que los dos valores A y B desconocidos, tendremos en nuestro caso un sistema de 29 ecuaciones con dos incógnitas, excesivamente determinado, y que no podrá quedar satisfecho para los mismos valores de A y de B por los errores cometidos en la comparación; es decir, que la recta $y = F(x)$ que buscamos no podrá pasar exactamente por todos los puntos de la curva $y' = f(x)$ proporcionada por la observación, y de ahí que se imponga una condición para los errores que permita a la recta estar fuera de los puntos de la curva experimental $y' = f(x)$ y, sin embargo, quedar perfectamente determinada. Esto siempre puede conseguirse, es decir, que vamos a demostrar que es fácil calcular los valores exactos de los parámetros A y B que satisfagan las condiciones impuestas, con tal de que se conozcan valores aproximados de esos parámetros.

En la práctica siempre se conocen estos valores aproximados por tanteos o por analogías; en nuestro caso de las miras, conocidos, por ejemplo, los valores A' y B' de una comparación hecha anteriormente, y si esto no fuera posible, eligiendo dos ecuaciones cualquiera del sistema y resolviéndolas con respecto a A y B o por una construcción gráfica; obtenidos estos valores aproximados, supongamos que $A = a + \alpha$

y $B = b + \beta$, en la que α y β serán cantidades sumamente pequeñas y, por consiguiente, la ecuación de la recta $y = f(x, A, B)$ podrá ponerse bajo la forma

$$y = f[x(a+\alpha)\cdot(B+\beta)] = f(x\,a\,b) + \alpha\frac{df}{da} + \beta\frac{df}{db},$$

y llamando, para simplificar,

$$f(x_0\,a\,b) = f_0; \qquad \frac{df(x\,a\,b)}{da} = f_0^a, \ldots, \text{etc.},$$

tendremos

$$\begin{aligned} y_0 &= f_0 + \alpha f_0^a + \beta f_0^b \\ y_1 &= f_1 + \alpha f_1^a + \beta f_1^b \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m + \alpha f_m^a + \beta f_m^b; \end{aligned}$$

y llamando $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ los errores correspondientes

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= y_0 - y_0' = (f_0 - y_0') + \alpha f_0^a + \beta f_0^b \\ \varepsilon_1 &= y_1 - y_1' = (f_1 - y_1') + \alpha f_1^a + \beta f_1^b \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_m &= y_m - y_m' = (f_m - y_m') + \alpha f_m^a + \beta f_m^b, \end{aligned}$$

en las que únicamente son desconocidas las cantidades α y β, pues todas las demás se conocen por la observación.

Habíamos dicho antes que la condición que se impone es que la suma de los cuadrados de los errores sea un mínimum; por lo tanto, si elevamos al cuadrado las ecuaciones anteriores y las sumamos, tendremos, llamando δ los términos de la forma $(f - y')$,

$$\Sigma_m^0 \varepsilon^2 = \Sigma_m^0 \delta^2 + 2\alpha\Sigma_m^0 \delta f^a + 2\beta\Sigma_m^0 \delta f^b + \alpha^2\Sigma_m^0 f^a f^a + \beta^2\Sigma_m^0 f^b f^b + 2\alpha\beta\Sigma_m^0 f^a f^b;$$

escribir que esta suma es un mínimum equivale a igualar a 0 sus derivadas tomadas sucesivamente, primero con relación a α y después con relación a β y, por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} \alpha\Sigma_m^0 f^a f^a + \beta\Sigma_m^0 f^a f^b &= -\Sigma\delta f^a \\ \alpha\Sigma_m^0 f^b f^a + \beta\Sigma_m^0 f^b f^b &= -\Sigma\delta f^b \end{aligned}\right\},$$

que es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas muy sencillo de resolver. Una vez obtenidos los valores α y β, conoceremos inmediatamente los valores de los parámetros que buscábamos

$$A = a + \alpha \qquad \text{y} \qquad B = b + \beta$$

y, por consiguiente, la recta pedida

$$y = A \cdot x + B$$

quedará perfectamente determinada a través de la curva

$$y' = f(x)$$

proporcionada por las experiencias.

Expuesto sucintamente el método de los mínimos cuadrados, vamos a aplicarlo a un caso concreto de una comparación de una mira Invar en la misma forma que yo la practiqué en el Servicio Geodésico Suizo, en colaboración con los Ingenieros del mismo señores Gasmmann y Favre, al hacer el estudio en el comparador de la mira de Invar núm. 72, de la casa Zeiss, exactamente igual a las adquiridas para nuestro Servicio.

Como resultado de las experiencias ejecutadas en el comparador al estudiar, en la forma que hemos indicado, los decímetros de la mira, en la división de las cifras pequeñas se obtuvieron para x y para y' los valores que a continuación se expresan, que permiten representar gráficamente un sistema de puntos referidos a un sistema de ejes coordenados, en donde las abscisas, en escala de 1 : 10, representan magnitudes absolutas en decímetros, y las ordenadas, expresadas en micrones, son las diferencias obtenidas en la comparación entre las magnitudes absolutas y las que realmente tiene la mira.

Valores de x:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.

Valores de y':

0, 21, 49, 67, 105, 121, 154, 153, 169, 171, 174, 162, 198, 185, 183, 266, 270, 301, 334, 344, 330, 370, 412, 405, 410, 442, 418, 438, 446, 461.

La curva que une todos estos puntos es la curva experimental y se trata de hacer pasar a través de ella una recta

$$y = Ax + B,$$

siguiendo el método de los mínimos cuadrados.

Como valores aproximados de A y de B, que son las incógnitas que hay que determinar, se utilizaron los resultados obtenidos al comparar la misma mira en una época anterior. Entonces se obtuvo para ecuación de la recta

$$y = a \cdot x + b = 15^{\mu} \cdot x + 31^{\mu},$$

siendo, por consiguiente, las cantidades 15^{μ} y 31^{μ} valores aproximados de los parámetros A y B y que podrán, por lo tanto, ponerse bajo la forma

$$A = 15 + \alpha \qquad y \qquad B = 31 + \beta,$$

y la ecuación se transformará en

$$y = (15 + \alpha)\, x + (31 + \beta),$$

en las que α y β, necesariamente muy pequeños, serán las verdaderas incógnitas que vamos a determinar. Si en esta ecuación damos sucesivamente a x todos los valores en decimetros que puede tomar desde 0 hasta 29, tendremos los correspondientes valores $x_0\, x_1\, x_2 \ldots\ldots x_{29}$ para y, y por lo tanto los errores $\varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_{29}$, que son las diferencias entre las coordenadas $y_0 y_1 y_2 \ldots\ldots y_{29}$ y las correspondientes $y'_0 y'_1 y'_2 \ldots\ldots y'_{29}$ de la curva experimental, serán los siguientes:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= y_0 - y'_0 = \xi + 31\\
\varepsilon_1 &= y_1 - y'_1 = (15+\alpha)\cdot 1 + (31+\beta) - 21 = \alpha + \beta + 25\\
\varepsilon_2 &= y_2 - y'_2 = (15+\alpha)\cdot 2 + (31+\beta) - 49 = 2\alpha + \beta + 12\\
\varepsilon_3 &= y_3 - y'_3 = (15+\alpha)\cdot 3 + (31+\beta) - 67 = 3\alpha + \beta + 9\\
\varepsilon_4 &= y_4 - y'_4 = (15+\alpha)\cdot 4 + (31+\beta) - 105 = 4\alpha + \beta - 14\\
\varepsilon_5 &= y_5 - y'_5 = (15+\alpha)\cdot 5 + (31+\beta) - 121 = 5\alpha + \beta - 15\\
\varepsilon_6 &= y_6 - y'_6 = (15+\alpha)\cdot 6 + (31+\beta) - 154 = 6\alpha + \beta - 33\\
\varepsilon_7 &= y_7 - y'_7 = (15+\alpha)\cdot 7 + (31+\beta) - 153 = 7\alpha + \beta - 17\\
\varepsilon_8 &= y_8 - y'_8 = (15+\alpha)\cdot 8 + (31+\beta) - 169 = 8\alpha + \beta - 18\\
\varepsilon_9 &= y_9 - y'_9 = (15+\alpha)\cdot 9 + (31+\beta) - 171 = 9\alpha + \beta - 5\\
\varepsilon_{10} &= y_{10} - y'_{10} = (15+\alpha)\cdot 10 + (31+\beta) - 174 = 10\alpha + \beta + 7\\
\varepsilon_{11} &= y_{11} - y'_{11} = (15+\alpha)\cdot 11 + (31+\beta) - 162 = 11\alpha + \beta + 34\\
\varepsilon_{12} &= y_{12} - y'_{12} = (15+\alpha)\cdot 12 + (31+\beta) - 198 = 12\alpha + \beta + 13\\
\varepsilon_{13} &= y_{13} - y'_{13} = (15+\alpha)\cdot 13 + (31+\beta) - 185 = 13\alpha + \beta + 41\\
\varepsilon_{14} &= y_{14} - y'_{14} = (15+\alpha)\cdot 14 + (31+\beta) - 183 = 14\alpha + \beta + 58\\
\varepsilon_{15} &= y_{15} - y'_{15} = (15+\alpha)\cdot 15 + (31+\beta) - 266 = 15\alpha + \beta - 10\\
\varepsilon_{16} &= y_{16} - y'_{16} = (15+\alpha)\cdot 16 + (31+\beta) - 270 = 16\alpha + \beta + 1\\
\varepsilon_{17} &= y_{17} - y'_{17} = (15+\alpha)\cdot 17 + (31+\beta) - 301 = 17\alpha + \beta - 15\\
\varepsilon_{18} &= y_{18} - y'_{18} = (15+\alpha)\cdot 18 + (31+\beta) - 334 = 18\alpha + \beta - 33\\
\varepsilon_{19} &= y_{19} - y'_{19} = (15+\alpha)\cdot 19 + (31+\beta) - 344 = 19\alpha + \beta - 28\\
\varepsilon_{20} &= y_{20} - y'_{20} = (15+\alpha)\cdot 20 + (31+\beta) - 330 = 20\alpha + \beta + 1\\
\varepsilon_{21} &= y_{21} - y'_{21} = (15+\alpha)\cdot 21 + (31+\beta) - 370 = 21\alpha + \beta - 24\\
\varepsilon_{22} &= y_{22} - y'_{22} = (15+\alpha)\cdot 22 + (31+\beta) - 412 = 22\alpha + \beta - 51\\
\varepsilon_{23} &= y_{23} - y'_{23} = (15+\alpha)\cdot 23 + (31+\beta) - 405 = 23\alpha + \beta - 29\\
\varepsilon_{24} &= y_{24} - y'_{24} = (15+\alpha)\cdot 24 + (31+\beta) - 410 = 24\alpha + \beta - 19\\
\varepsilon_{25} &= y_{25} - y'_{25} = (15+\alpha)\cdot 25 + (31+\beta) - 442 = 25\alpha + \beta - 36\\
\varepsilon_{26} &= y_{26} - y'_{26} = (15+\alpha)\cdot 26 + (31+\beta) - 418 = 26\alpha + \beta + 3\\
\varepsilon_{27} &= y_{27} - y'_{27} = (15+\alpha)\cdot 27 + (31+\beta) - 438 = 27\alpha + \beta - 2\\
\varepsilon_{28} &= y_{28} - y'_{28} = (15+\alpha)\cdot 28 + (31+\beta) - 446 = 28\alpha + \beta + 5\\
\varepsilon_{29} &= y_{29} - y'_{29} = (15+\alpha)\cdot 29 + (31+\beta) - 461 = 29\alpha + \beta + 5
\end{aligned}$$

y elevando al cuadrado:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{1}^{2} &= \beta^{2} + 2\times 31\beta + \overline{31}^{2}\\
\varepsilon_{4}^{2} &= \alpha^{2} + \beta^{2} + 2\alpha\beta + 2\times 25\alpha + 2\times 25\beta + \overline{25}^{2}\\
\varepsilon_{9}^{2} &= 2^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 4\alpha\beta + 4\times 12\alpha + 2\times 12\beta + \overline{12}^{2}\\
\varepsilon_{16}^{2} &= 3^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 6\alpha\beta + 6\times 9\alpha + 2\times 9\beta + \overline{9}^{2}\\
\varepsilon_{25}^{2} &= 4^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 8\alpha\beta - 8\times 14\alpha - 2\times 14\beta + \overline{14}^{2}\\
\varepsilon_{36}^{2} &= 5^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 10\alpha\beta - 10\times 15\alpha - 2\times 15\beta + \overline{15}^{2}\\
\varepsilon_{49}^{2} &= 6^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 12\alpha\beta - 12\times 33\alpha - 2\times 33\beta + \overline{33}^{2}\\
\varepsilon_{64}^{2} &= 7^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 14\alpha\beta - 14\times 17\alpha - 2\times 17\beta + \overline{17}^{2}\\
\varepsilon_{81}^{2} &= 8^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 16\alpha\beta - 16\times 18\alpha - 2\times 18\beta + \overline{18}^{2}\\
\varepsilon_{100}^{2} &= 9^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 18\alpha\beta - 18\times 5\alpha - 2\times 5\beta + \overline{5}^{2}\\
\varepsilon_{121}^{2} &= 10^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 20\alpha\beta + 20\times 7\alpha + 2\times 7\beta + \overline{7}^{2}\\
\varepsilon_{144}^{2} &= 11^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 22\alpha\beta + 22\times 34\alpha + 2\times 34\beta + \overline{34}^{2}\\
\varepsilon_{169}^{2} &= 12^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 24\alpha\beta + 24\times 13\alpha + 2\times 13\beta + \overline{13}^{2}\\
\varepsilon_{196}^{2} &= 13^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 26\alpha\beta + 26\times 41\alpha + 2\times 41\beta + \overline{41}^{2}\\
\varepsilon_{225}^{2} &= 14^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 28\alpha\beta + 28\times 58\alpha + 2\times 58\beta + \overline{58}^{2}\\
\varepsilon_{256}^{2} &= 15^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 30\alpha\beta - 30\times 10\alpha - 2\times 10\beta + \overline{10}^{2}\\
\varepsilon_{289}^{2} &= 16^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 32\alpha\beta + 32\times 1\alpha + 2\times 1\beta + \overline{1}^{2}\\
\varepsilon_{324}^{2} &= 17^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 34\alpha\beta - 34\times 15\alpha - 2\times 15\beta + \overline{15}^{2}\\
\varepsilon_{361}^{2} &= 18^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 36\alpha\beta - 36\times 33\alpha - 2\times 33\beta + \overline{33}^{2}\\
\varepsilon_{400}^{2} &= 19^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 38\alpha\beta - 38\times 28\alpha - 2\times 28\beta + \overline{28}^{2}\\
\varepsilon_{441}^{2} &= 20^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 40\alpha\beta + 40\times 1\alpha + 2\times 1\beta + \overline{1}^{2}\\
\varepsilon_{484}^{2} &= 21^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 42\alpha\beta - 42\times 24\alpha - 2\times 24\beta + \overline{24}^{2}\\
\varepsilon_{529}^{2} &= 22^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 44\alpha\beta - 44\times 51\alpha - 2\times 51\beta + \overline{51}^{2}\\
\varepsilon_{576}^{2} &= 23^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 46\alpha\beta - 46\times 29\alpha - 2\times 29\beta + \overline{29}^{2}\\
\varepsilon_{625}^{2} &= 24^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 48\alpha\beta - 48\times 19\alpha - 2\times 19\beta + \overline{19}^{2}\\
\varepsilon_{676}^{2} &= 25^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 50\alpha\beta - 50\times 36\alpha - 2\times 36\beta + \overline{36}^{2}\\
\varepsilon_{729}^{2} &= 26^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 52\alpha\beta + 52\times 3\alpha + 2\times 3\beta + \overline{3}^{2}\\
\varepsilon_{784}^{2} &= 27^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 54\alpha\beta - 54\times 2\alpha - 2\times 2\beta + \overline{2}^{2}\\
\varepsilon_{841}^{2} &= 28^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 56\alpha\beta + 56\times 5\alpha + 2\times 5\beta + \overline{5}^{2}\\
\varepsilon_{900}^{2} &= 29^{2}\alpha^{2} + \beta^{2} + 58\alpha\beta + 58\times 5\alpha + 2\times 5\beta + \overline{5}^{2}
\end{aligned}
$$

Efectuando las sumas de estas ecuaciones y designando por C, D, F, G los coeficientes numéricos de los términos en α^2, β^2, $\alpha\beta$, α y β, y por M el término independiente, el resultado total será una ecuación de la forma

$$\sum_{30}^{n} \varepsilon^{2} = C\alpha^{2} + D\beta^{2} + E\alpha\beta \pm F\alpha \pm G\beta + M.$$

Esta ecuación representa la suma de los cuadrados de los errores, y ya hemos dicho que tiene que cumplir con la condición de que sea un mínimo, que ya sabemos

que se cumple con los valores que anulan sus derivadas tomadas sucesivamente con relación a α y con relación a β.

Por lo tanto, anulando primeramente la derivada de la ecuación con respecto a α y haciendo lo mismo respecto a β, tendremos las dos ecuaciones finales

$$2C\alpha + E\beta \pm F = 0$$
$$2D\beta + E\alpha \pm G = 0$$

cuya resolución nos proporcionará los valores que buscamos de las incógnitas.

Efectivamente, hechas las operaciones numéricas con los coeficientes de los distintos términos, resultan los siguientes valores para C, D, E, F, G y M

$$C = 8555; \quad D = 30; \quad E = 870; \quad F = -6902; \quad G = -208; \quad M = 18316,$$

y para la ecuación total o suma de los cuadrados de los errores

$$\Sigma \varepsilon^2 = 8555\alpha^2 + 30\beta^2 + 870\alpha\beta - 6902\alpha - 208\beta - 18316,$$

igualando a 0 sus derivadas con respecto a α y β, tendremos las dos ecuaciones

$$\frac{d\Sigma\varepsilon^2}{d\alpha} = 17110\alpha + 870\beta - 6902 = 0$$
$$\frac{d\Sigma\varepsilon^2}{d\beta} = 870\alpha + 60\beta - 208 = 0,$$

o sea

$$17110\alpha + 870\beta = 6902; \qquad 8555\alpha + 435\beta = 3451$$
$$870\alpha + 60\beta = 208; \qquad 435\alpha + 30\beta = 104,$$

que dan para α y β los valores

$$\alpha = +0^{\mu},864 \qquad y \qquad \beta = -9^{\mu},06,$$

que sustituidos en la ecuación provisional de la recta

$$y = (15 + \alpha)x + (31 + \beta)$$

nos dan la ecuación definitiva que buscábamos

$$y = Ax + B = 15^{\mu},864\,x + 21^{\mu},94.$$

Esta recta, obtenida por el método de los mínimos cuadrados, pasa a través de los puntos de la curva experimental, quedando perfectamente determinada, y su ecuación nos dice que no pasa por el origen, debido a que el punto inicial que hemos tenido en cuenta en la mira al hacer las experiencias, tiene también su error de división correspondiente. Si en la citada ecuación

$$y = 15^{\mu},864\,x + 21^{\mu},94,$$

damos a x los diferentes valores que puede tener, y deducimos los correspondientes para y, tendremos el cálculo compensado para los distintos intervalos de la división

de la mira que se ha comparado; esto es, los diferentes valores de las ordenadas de la recta sobre el eje de las X, valores medios que, en el caso particular de esta mira, hay que añadir siempre a las longitudes absolutas para conocer la longitud que realmente tiene el intervalo correspondiente de la mira, de manera que para el intervalo de 10 decímetros el metro de mira excederá del metro absoluto en $158^{\mu},64 + 21^{\mu},94$, siendo, por lo tanto, la longitud del metro medio de mira, expresado en micrones, $= 1000000 + 158^{\mu},64 + 21^{\mu},94$ más o menos el error cometido en la determinación de la recta. Para deducir este error pongamos a continuación los distintos valores de las ordenadas de la curva experimental, los de las ordenadas de la recta, las diferencias entre unos y otros, que serán los errores cometidos, y una cuarta columna con sus cuadrados para deducir la suma de todos ellos.

Valores de y	Valores de y'	Valores de z	Valores de z^2
0	21,9	+ 21,9	480
21	37,8	+ 16,8	282
49	53,7	+ 4,7	22
67	69,5	+ 2,5	6
105	85,4	— 19,6	384
121	101,3	— 19,7	388
154	117,1	— 36,9	1 362
153	133,0	— 20,0	400
169	148,9	— 20,1	404
171	164,7	— 6,3	40
174	180,6	+ 6,6	44
162	196,4	+ 34,4	1 183
198	212,3	+ 14,3	204
185	228,2	+ 43,2	1 866
183	244,0	+ 61,0	3 721
266	259,9	— 6,1	37
270	275,8	+ 5,8	34
301	291,6	— 9,4	88
334	307,5	— 26,5	702
344	323,4	— 20,6	424
330	339,2	+ 9,2	85
370	355,1	— 14,9	222
412	370,9	— 41,1	1 689
405	386,8	— 18,2	331
410	402,7	— 7,3	53
442	418,5	— 23,5	552
418	434,4	+ 16,4	269
438	450,3	+ 12,3	151
446	466,1	+ 20,1	404
461	482,0	+ 21,0	441

El error medio cometido en la determinación de la recta

$$y = ax + b,$$

siendo 30 los intervalos observados y dos el número de las incógnitas (a y b), viene expresado por la fórmula

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{(\varepsilon\varepsilon)}{m-2}},$$

en la que $(\varepsilon\varepsilon)$ representa la suma de los cuadrados de los errores; sustituyendo, por lo tanto, los valores correspondientes, tendremos como valor del error medio de la recta

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{16268}{30-2}} = \pm 24^{\text{lt}},1.$$

Para deducir ahora de este error total el que corresponde a cada una de las incógnitas

$$a = 15{,}864 \qquad \text{y} \qquad b = 21{,}94,$$

que como se sabe vienen expresados por las fórmulas

$$\varepsilon_a = \varepsilon\sqrt{q'} \qquad \varepsilon_b = \varepsilon\sqrt{q''},$$

no hay más que deducir los valores de q' y q'' de los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} 855q' + 435q'' &= 1 \qquad & 855q' + 435q'' &= 0 \\ 435q' + 30q'' &= 0 \qquad & 435q' + 30q'' &= 1, \end{aligned}$$

que son las ecuaciones finales ya establecidas, en las que se han sustituído las incógnitas α y β por los coeficientes q', q'' y los términos independientes por 1 y 0 y 0 y 1, respectivamente. Del primer sistema se deduce el valor de

$$q' = 0{,}000444$$

y del segundo el valor de

$$q'' = 0{,}127,$$

que sustituidos en las fórmulas correspondientes dan para los errores de los parámetros a y b de la recta

$$\varepsilon_a = \varepsilon\sqrt{q'} = \pm 0^{\text{lt}},508 \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_b = \varepsilon\sqrt{q''} = \pm 8^{\text{lt}},6.$$

La ecuación de la recta para toda su longitud será, por lo tanto,

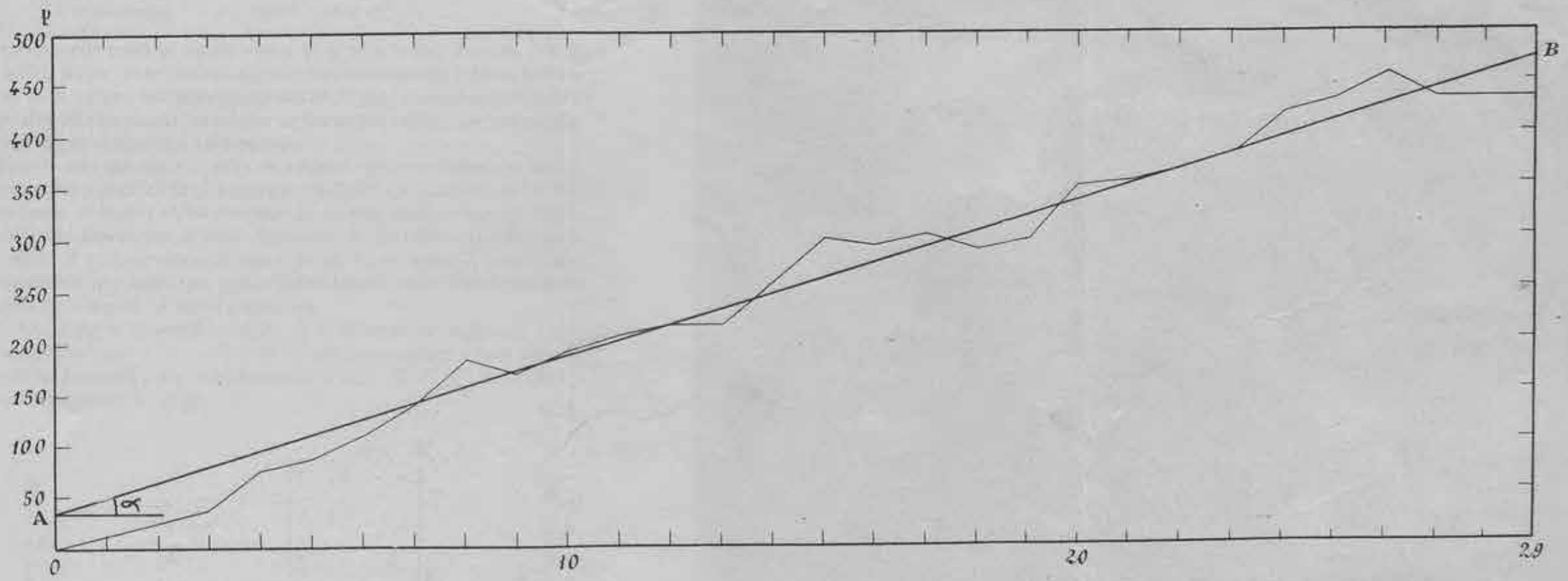
$$y = ax + b \pm \varepsilon; \qquad y = +15^{\text{lt}},86430^{\text{dm}} + 21^{\text{lt}},94 \pm 24^{\text{lt}},1,$$

y para una longitud cualquiera y descomponiendo el error total ($\pm 24^{\text{lt}},1$), en la que son inherentes a las dos incógnitas a y b, tendremos:

$$y = (+15^{\text{lt}},864\, x^{\text{dm}} \pm 0^{\text{lt}},508\, x^{\text{dm}}) + (21^{\text{lt}},94 \pm 8^{\text{lt}},6),$$

en la que el segundo término representa el error inicial del talón de la mira y el primer término la corrección aditiva en esta mira, que hay que sumar a una longitud absoluta cualquiera expresada en decímetros para obtener la que realmente tiene la

Mira núm. 72.—Gráfico de las discordancias.



Eje de las X = magnitudes absolutas en decímetros.—Escala: 1 cm. = 1 dm. de mira.

Eje de las Y = diferencias en micrones obtenidas en la comparación, entre las magnitudes absolutas y las que realmente tiene la mira.—Escala: 1 cm. = 50 μ.

Línea quebrada = gráfico de las divisiones de la mira que se ha comparado.

Línea recta (AB) = recta trazada a través de los puntos de la línea quebrada, de manera que la suma de sus ordenadas positivas y negativas sea igual a cero y de que sea un mínimo la suma de sus cuadrados, es decir,

$$\Sigma(v) = 0; \qquad \Sigma(vv) = \text{mínimo.}$$

Ecuación de la recta:

$$y = ax + b \pm c; \qquad a = \text{tang}\,\alpha; \qquad b = A0; \qquad c = \text{error de la operación.}$$

Fórmula obtenida como resultado de una comparación ejecutada en Berna con una mira, en la división que corresponde a las cifras pequeñas:

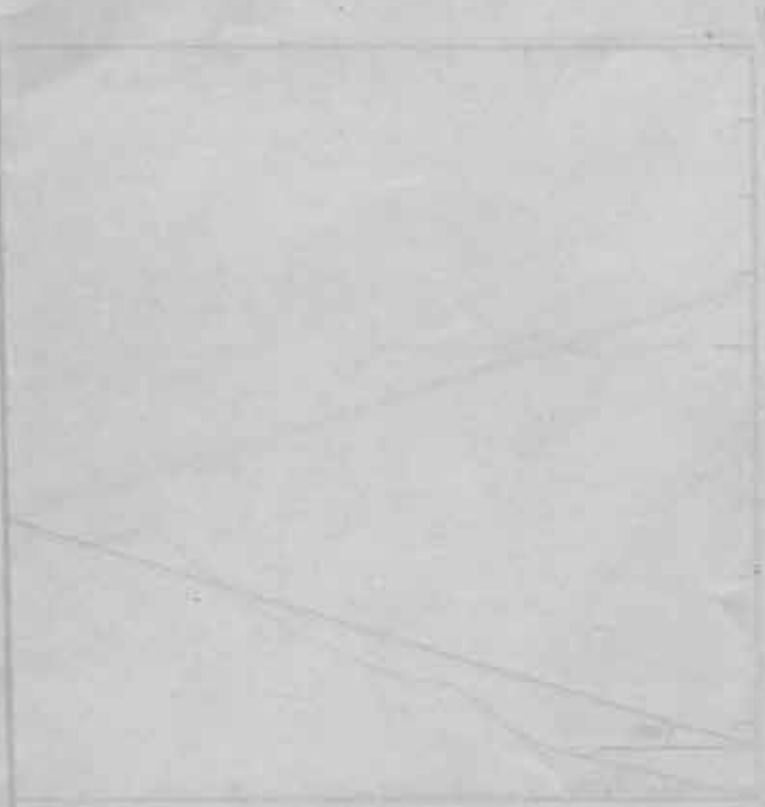
$$y = ax + b \pm c = 15^{\mu},864\,x + 21^{\mu},94 \pm 24^{\mu},1\,.$$

x representa un número de decímetros y por consiguiente la corrección para el metro será

$$y = +158^{\mu},64 + 21^{\mu},94 \pm 24^{\mu},1\,,$$

y la ecuación del metro medio de la mira que se ha comparado en la división de las cifras pequeñas

$$M = 1000000^{\mu} + 158^{\mu},64 + 21^{\mu},94 \pm 24^{\mu},1\,.$$



mira y, por consiguiente, la longitud del metro medio de mira expresado en milímetros, prescindiendo del error inicial, que no hay que tener en cuenta para corregir los desniveles, será haciendo

$$x = 10 \text{ decímetros}; \qquad y = 1000^{mm},15864 \pm 0^{mm},005.$$

Este valor corresponde a una de las divisiones de la mira; la otra división, que se compara en la misma forma, tiene también su valor correspondiente, y como los trabajos se ejecutan en el terreno haciendo uso de dos miras, hay que corregir los resultados obtenidos, teniendo en cuenta los valores de los cuatro metros que intervienen en las operaciones según se expone a continuación.

Si no se empleara más que una sola mira, es evidente que para obtener el verdadero desnivel entre dos puntos no habría más que multiplicar el obtenido de las dos lecturas de mira (suma de lectura en las niveladas de espalda menos sumas de lecturas en las niveladas de frente) por el valor del metro de la mira empleada; pero usándose dos miras, el procedimiento a seguir ya no es tan sencillo, puesto que fácilmente se comprende que habrá que aplicar separadamente la corrección indicada teniendo en cuenta cada una de las miras empleadas.

Sea (fig. 39) $ABCDEF$ el itinerario nivelado, M_1 y M_2 las miras empleadas, x e y los valores de los metros medios (promedios de los correspondientes a cada una de las dos escalas) de las miras M_1 y M_2 respectivamente, y E, F, E', F', E'', F'' ....., etcétera, las lecturas hechas sobre las miras.

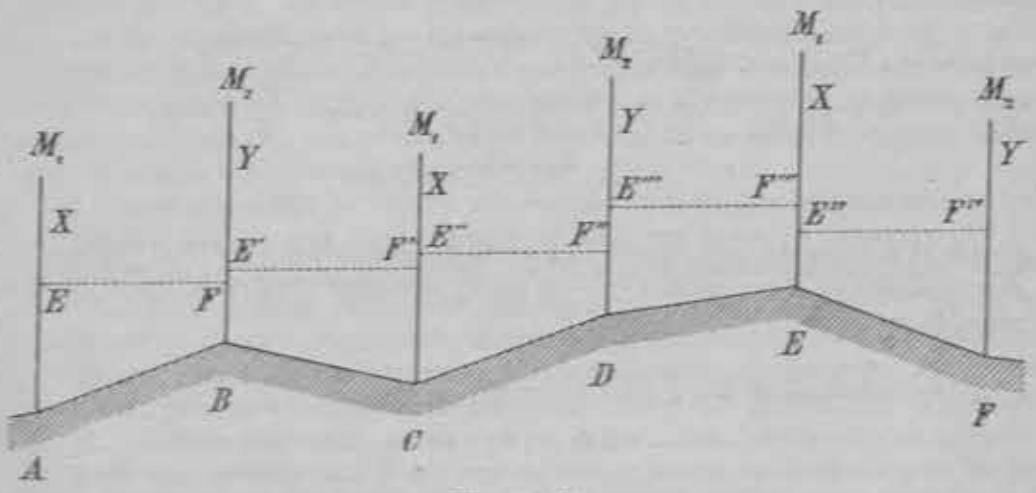


Figura 39.

Los desniveles verdaderos o corregidos parciales entre A y B, B y C, C y D, D y E, E y F, serán $Ex - Fy, E'y - F'x, E''x - F''y, E'''y - F'''x, E^{IV}x - F^{IV}y$..... y el desnivel total entre A y F será

$$\left.\begin{aligned} D &= Ex + E'y + E''x + E'''y + E^{IV}x - Fy - F'x - F''y - F'''x - F^{IV}y = \\ &= x(E + E'' + E^{IV} - F' - F''') + y(E' + E''' - F - F'' - F^{IV}) = \\ &= x(\Sigma E_1 - \Sigma F_1) + y(\Sigma E_2 - \Sigma F_2) \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

Expresión que como se ve origina un cálculo muy laborioso; ahora bien: considerando que las nivelaciones de precisión han sido proyectadas a lo largo de los ferrocarriles y carreteras principales, que se trabaja con equidistancia entre las niveladas de frente y espalda, y que el promedio de cada una de éstas es de unos 35 metros, se puede suponer, para los efectos de que se trata, constante la pendiente del itinerario nivelado, sin que ello perjudique prácticamente a los resultados obtenidos, toda vez que el error que se puede cometer es sumamente pequeño por ser de carácter accidental y por ser casi idénticos los valores de x e y en las miras empleadas (1).

Con estos supuestos y teniendo presente que la altura del instrumento es práctica y continuamente constante, la expresión [1] se simplifica notablemente, puesto que entonces resultará

$$\Sigma E_1 - \Sigma F_1 = \Sigma E_2 - \Sigma F_2,$$

siendo par el número de estaciones, es decir, terminando con la misma mira que se empiece.

La expresión [1] se convertirá, pues, en

$$D = x\,(\Sigma E_1 - \Sigma F_1) + y\,(\Sigma E_2 - \Sigma F_2) = x\,\frac{d}{2} + y\,\frac{d}{2} = \frac{x+y}{2}\,d$$

(llamando d al desnivel obtenido directamente de las lecturas de la mira).

Si el número de estaciones fuese impar puede también aplicarse la expresión anterior, puesto que el error cometido será

$$= \frac{x+y}{2}\,\frac{d}{n} - (x E_n - y F_n) = \frac{x+y}{2}\,(E_n - F_n) - (x E_n - y F_n) =$$

$$= E_n\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - x\right) - F_n\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - y\right) = \frac{E_n}{2}\,(y-x) - \frac{F_n}{2}\,(x-y) =$$

$$= (y-x)\,\frac{E_n + F_n}{2} = (y-x)\,H$$

(siendo H la altura del instrumento, totalmente despreciable por ser $H = 1{,}50$ metros aproximadamente y no exceder $(y - x)$ de algunas centésimas de milímetro en las miras de precisión).

---

(1) En confirmación de esto, se aplicó la corrección rigurosa

$$D = -\,x\,(\Sigma E_1 - \Sigma F_1) + y\,(\Sigma E_2 - \Sigma F_2)$$

al polígono de ensayo, que tiene 50 kilómetros de desarrollo y muy fuertes y variables pendientes, y la deducida con los citados supuestos

$$D = \frac{x+y}{2}\,d;$$

obteniéndose, a pesar de todas estas circunstancias sumamente desfavorables, solamente una diferencia de décimas de milímetro.

CAPÍTULO VII

PROYECTO DE SEÑALES METÁLICAS QUE PUEDEN UTILIZARSE EN LOS TRABAJOS Y MANERA DE ESTABLECERLAS

Entre todas las operaciones que han de intervenir en los trabajos de nivelaciones de alta precisión, seguramente la más importante y que más influencia decisiva puede ejercer sobre los resultados que se obtengan, es la que está relacionada con el establecimiento de las señales en el campo. El carácter de permanencia y de estabilidad que han de tener las señales que se establezcan, son las dos cualidades más importantes que han de prevalecer sobre todas las demás en esta delicada operación, y de tal manera hay que reconocer su influencia, que una vez elegido el modelo de señal más conveniente para los trabajos debe procederse a su instalación, sin tener en cuenta otras consideraciones, que, como las de tiempo y las de orden económico, deben quedar siempre subordinadas a las anteriores.

La acción destructora del tiempo y el vandalismo de los hombres (tan desarrollado en nuestro país) ejercen continuamente su influencia sobre las señales y por eso muchas veces, sacrificando los mejores itinerarios para ejecutar los trabajos, se impone la conveniencia de elegir otros donde pueden quedar mejor vigiladas. Por esto, principalmente en el nuevo proyecto de nivelaciones de alta precisión, se han elegido, con preferencia a las carreteras, las vías férreas, reconociendo, sin embargo, que los trabajos de nivelación a lo largo de las carreteras ofrecen más garantía para la precisión de los resultados desde el punto de vista de la inmovilidad de las señales; pero por una parte la pendiente suave y uniforme de las vías férreas, tan favorable para los trabajos, la mayor facilidad para las rectificaciones que sean necesario ejecutar y para la vigilancia y conservación de las señales, utilizando medios rápidos de comunicación y sobre todo poder establecerlas bajo el amparo de los ferrocarriles, donde indudablemente quedan mejor defendidas que en las carreteras contra la mala intención de las voluntades inconscientes, sobre todo por parte de los carreteros, a quienes hay que atribuir la mayor parte de las señales que desaparecen, es lo que ha influído en el criterio que se ha seguido en este servicio, cuando, con preferencia a las carreteras, se han elegido los itinerarios a lo largo de las vías férreas al hacer el proyecto de la red de Nivelaciones de alta precisión.

Es sumamente difícil establecer de antemano un criterio que permita definir con carácter general cuál es el modelo que puede ser empleado con éxito en los trabajos de nivelación de alta precisión. Este problema es esencialmente local, pues el clima, la naturaleza del terreno, la cultura del país, etc., etc., influyen poderosamente, no permitiendo, por lo tanto, elegir anticipadamente un modelo único que con carácter general pueda satisfacer las exigencias de los trabajos en todo el territorio, no habiendo más remedio que tener en cuenta las condiciones locales para con arreglo a ellas elegir en cada caso el tipo de señal más conveniente.

Sin embargo, la práctica de estos trabajos en distintos países ha permitido con sus enseñanzas establecer algunas normas que fijan entre límites algo reducidos el criterio más conveniente a seguir en cada caso particular al elegir el tipo de señal y la forma de establecerla.

Entre las substancias metálicas más convenientes que pueden ser empleadas en la construcción de las señales pueden citarse el bronce, latón, zinc, acero-níquel, cobre-rojo, hierro galvanizado, fundición oxidada, etc., etc.; todas tienen sus ventajas y sus inconvenientes, pero indudablemente la que reune mejores condiciones por la economía e inalterabilidad, y que por eso ha sido adoptada con preferencia a las demás en los trabajos de nivelación de precisión de casi todos los países, es la señal metálica de bronce. El único inconveniente que presenta es que no es tan dura como las demás y está, por lo tanto, más expuesta a ser deteriorada, pero su precio económico de producción la impone en los trabajos, considerando la frecuencia con que ha de establecerse y la codicia que despertarían si tuvieran un positivo valor, como sucedería, por ejemplo, si fueran de acero niquelado. Afectan generalmente la forma de discos o de sencillos pernos de tamaño más pequeño, terminados unos y otros en un casquete esférico para servir de apoyo al talón plano de la mira, y están destinados a ser incrustados indistintamente en el terreno o en las paredes verticales de los edificios.

El resultado de las experiencias ejecutadas en distintos países pone de manifiesto que las señales metálicas incrustadas en el terreno, en la roca viva cuidadosamente elegida, son las que únicamente pueden ser consideradas como permanentes.

Si esto no fuera posible no hay más remedio que recurrir a obras de fábrica o edificios de reconocida solidez, pero teniendo presente, de acuerdo con numerosas estadísticas, que unas y otras no pueden ser consideradas sino como semipermanentes, y que dentro de este carácter ofrecen más estabilidad las señales verticales de pared que las que se incrustan verticalmente. Como la mayor parte del éxito de los trabajos de nivelación de alta precisión descansa principalmente, como hemos indicado antes, en la permanencia y estabilidad que tengan las señales que se establezcan, y muchas veces no será posible encontrar la roca viva que realice ese ideal por no permitirlo la naturaleza del terreno, ni tampoco obras de fábrica de reconocida solidez donde puedan incrustarse las señales intermedias, como así sucede, efectivamente, en la Mancha en grandes extensiones de terreno, se hace necesario proponer, marcando normas precisas, el mejor procedimiento para que la señal metálica pueda fijarse de una manera permanente cuando se opere en esta clase de terreno. En estas condiciones no hay más remedio que hacer uso de sillares de piedra y preferentemente de hormigón, de altura suficiente para que, quedando la cara superior donde

se incrusta la señal rasante con el terreno, penetre en el suelo a alguna profundidad y no se altere su posición con los movimientos de elevación que experimentan las capas superficiales del suelo bajo la acción de las heladas. Con arreglo a las condiciones del clima de España, una altura de poco más de un metro se considera suficiente para conseguir el objetivo que nos proponemos. El poste (fig. 40) puede afectar indistintamente la forma truncocónica o la forma recta con ensanchamiento en la base;

Escala $\frac{1}{20}$

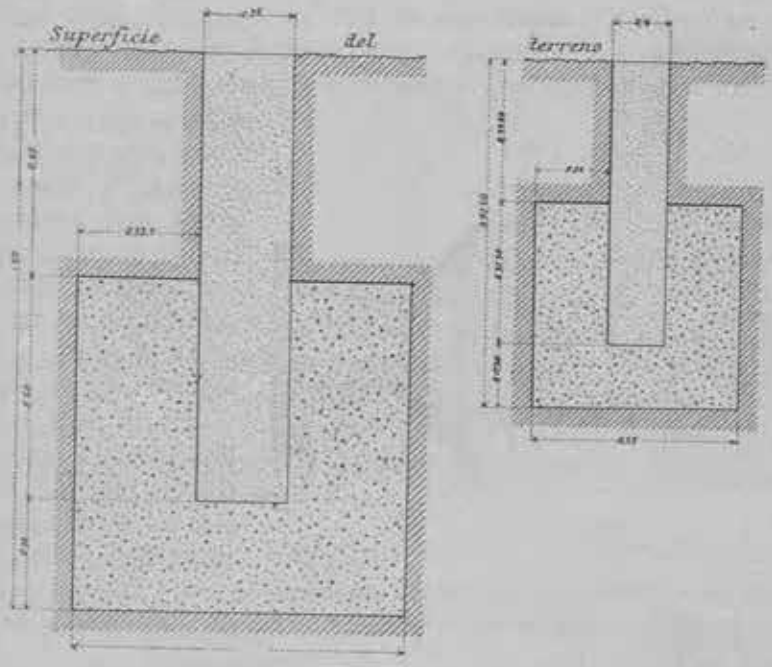


Figura 40.

una y otra forma son favorables para resistir el levantamiento que se produce en las capas superficiales del terreno en la época de las nieves; también con este objeto hay que tener cuidado de que los ángulos exteriores de la base no estén redondeados y que la parte superior del pilar resulte perfectamente pulimentada, sin ángulos salientes que pudieran favorecer ese levantamiento cerca de la superficie del terreno. Los moldes pueden ser de palastro o de madera, teniendo por lo menos una inclinación de un 5 por 100. Cortados a tamaño conveniente, con las junturas bien unidas, pueden llevarse dispuestos a ser empleados en el momento necesario.

Lo más importante de la fabricación del hormigón es que los materiales que se hayan de utilizar estén perfectamente limpios e íntimamente mezclados antes de añadir el agua, y después que la mezcla no resulte demasiado húmeda, pero, en cambio, bien comprimida dentro de su molde. Hay que tener presente que una cantidad de impurezas, por pequeña que sea, produce siempre una resquebrajadura en la fabricación del hormigón. Si únicamente se utiliza la arena y el cemento, la proporción más con-

veniente es de una parte de cemento por dos o tres de arena, y si, además, se emplea mampostería, las proporciones pueden variar muy bien entre 1, 2, 4 ó 1, 3, 5, sobreentendiéndose, naturalmente, que en los dos casos hay que reservar para la parte superior del poste la proporción más rica en cemento. Generalmente no es necesario reforzar el hormigón con varillas de hierro o con alambre, y con objeto de prevenir las resquebrajaduras cuando sobrevenga una desecación demasiado rápida, basta cubrirlo con papel o con trapos, sujetándolos con tierra durante unas cuarenta y ocho horas.

Si no hay necesidad de tener en cuenta los gastos de transportes, los pilares no deben tener menos de 0,35 centímetros de lado en la base. Su parte superior debe sobresalir cinco o diez centímetros del terreno, excepto en los sitios de mucho tráfico, donde sería conveniente colocarlo rasante con el suelo. Deben profundizar en el terreno más allá de donde pueda llegar la acción de las heladas. Su límite más conveniente está comprendido entre 0,75 centímetros y 1,20 metros, pero en todos los casos la dirección del servicio resolverá con arreglo a las particularidades que se presenten.

Escala $\frac{1}{2}$

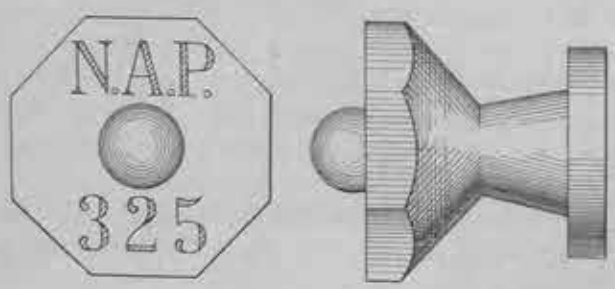


Figura 41.

En la parte superior del pilar quedará incrustada la señal metálica (fig. 41) que ha sido adoptada para estos trabajos. Este poste, tal como lo acabamos de describir, ha sido adoptado recientemente (año 1922) con extraordinario exito por el Servicio geodésico de los Estados Unidos para los trabajos de nivelación de alta precisión.

Señales metálicas horizontales.

Como las miras que han sido adquiridas para los trabajos de nivelación de alta precisión no terminan, como las antiguas, en un pivote sino en un talón plano, no ha habido más remedio que sustituir las antiguas señales (figuras 42 y 43) que venían usándose por otras (figuras 41 y 44), provistas en su parte alta de una protuberancia o de una depresión en forma de casquete esférico, con objeto de recibir el talón plano de la mira, en el segundo caso, naturalmente, por el intermedio de una pequeña esfera de acero que se ajusta perfectamente en el casquete. Como los nuevos trabajos han de seguir en varias ocasiones los mismos itinerarios que han sido nivelados con anterioridad, para evitar la confusión de señales en el campo se ha construido en forma octogonal la parte exterior de las nuevas para distinguirlas de las antiguas, que tienen la forma circular. Como los nuevos trabajos que se ejecuten han de enlazarse necesariamente con los antiguos, para deducir provechosas enseñanzas a la vista de las dis-

cordancias que resulten, con objeto de evitar la dificultad que se presentaría al colocar las miras en las antiguas señales de superficie plana, se empleará un pequeño casquete esférico de acero, sobre el que se apoyará el talón plano de la mira. La altura de este casquete está calculada de manera que sea la misma que la altura sobre el plano de la señal del extremo superior de la pequeña esfera de acero, cuando está metida en su alojamiento. Esto se hace con el objeto de utilizar en las señales nuevas el casquete esférico de acero cuando el centro de la señal se encuentre deteriorado. Como al escoger los modelos de señales y planear su distribución debe hacerse de manera que responda a las necesidades presentes y futuras del trabajo, y a las de otros servicios complementarios, es por lo que indistintamente deben establecerse estas señales con la protuberancia o con la depresión, con objeto de que las miras de las nivelaciones topográficas y otras que se utilizan en el país, que generalmente terminan en pivote esférico, puedan encontrar con la frecuencia necesaria señales de referencia para sus trabajos, que pertenezcan a la nivelación de alta precisión.

Escala $\frac{1}{2}$

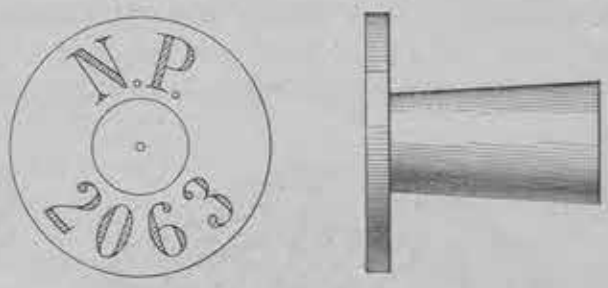


Figura 42.

Además de esta señal que acabamos de describir y que es la señal horizontal principal, es necesario utilizar otras señales horizontales de carácter secundario (fig. 44) para los puntos intermedios, incrustándolas verticalmente con preferencia en aquellos edificios que ofrezcan carácter de permanencia. Están constituídas por sencillos pernos de bronce de tamaño más pequeño, terminadas también en forma de casquete esférico y proyectadas exclusivamente para los trabajos de alta precisión.

Escala $\frac{1}{2}$



Figura 43.

Escala $\frac{1}{2}$

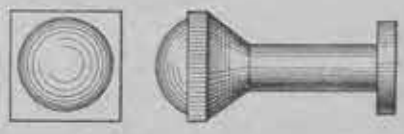


Figura 44.

Señales metálicas verticales.

De la misma manera que en las señales horizontales, las señales verticales de pared que se proponen para los trabajos son también principales (fig. 45) y secundarias (fig. 46), y en ambas la altitud estará siempre relacionada con la generatriz superior del cilindro que sobresale de la pared y que sirve de apoyo a la mira. Son asimismo de bronce y deben incrustarse horizontalmente en las piedras fundamentales de los edificios de sólida construcción a cierta altura del suelo para resguardarlas de la humedad, pero siempre inferior a un metro, para tener facilidad durante las operaciones, de poder colocar la mira sobre ellas en posición vertical. Las principales llevarán también la cifra indicadora de la altitud, y únicamente se establecerán en los edificios de construcción sólida y permanente de reconocida importancia oficial, y en forma que no puedan ser objeto de ningún desplazamiento por posibles modificaciones o reparaciones en la construcción del edificio. Deben quedar sólidamente fijas con cemento, grabando en su parte anterior, de una manera explícita, la responsabilidad criminal (multa o prisión) en que incurra la persona que perturbe la señal.

Escala $\frac{1}{2}$

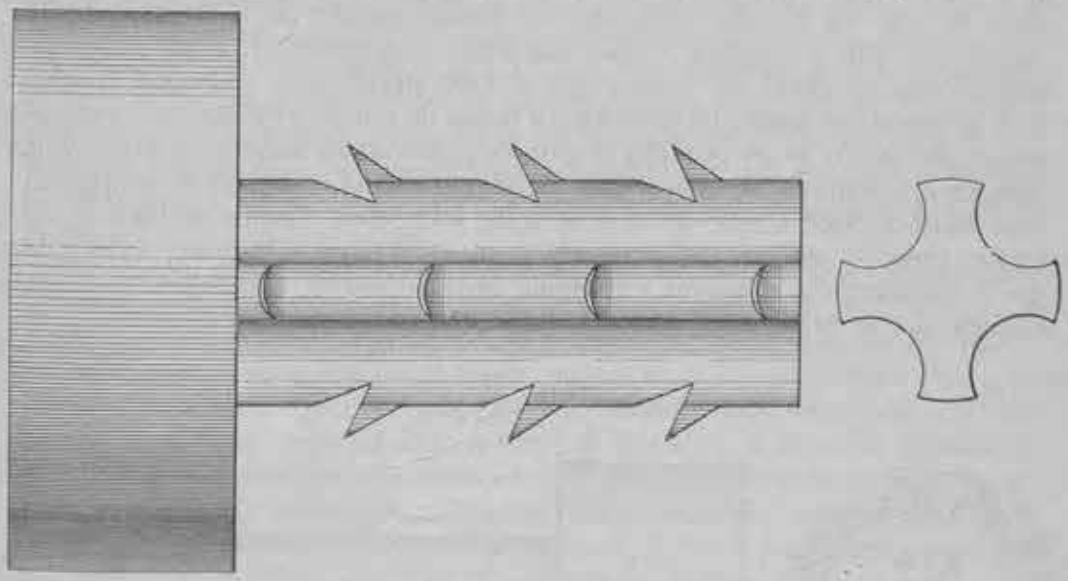


Figura 45.

Las señales verticales secundarias (fig. 46) son más pequeñas y están también formadas por un eje de bronce que se incrusta horizontalmente en la roca o en las paredes verticales de las construcciones, y terminan en un medallón cilíndrico que sobresale cinco centímetros de la pared vertical y en la cara anterior lleva grabado el número de la señal.

Establecimiento de las señales.

Al escoger los tipos de señales que hayan de emplearse hay que tener muy en cuenta que su número y distribución tienen que responder a las necesidades presentes y futuras de estos trabajos y también de los de aquellos otros complementarios que se ejecuten en el país, pero de la manera más económica posible. Deben ser accesibles para toda clase de trabajos de Ingeniería, tanto oficiales como particulares,



Proyección de la figura 45.

permanentes, resistentes a la desintegración y con una gran seguridad, en el momento de establecerlas, de que no pueden ser perturbadas en su posición por muy ligeramente que sea. Deben ser reconocidas con facilidad e identificadas con absoluta certeza. La mejor manera para tener la seguridad de que la señal que acaba de utilizarse en un nuevo trabajo ha sido bien identificada y que no ha sufrido movimiento alguno en la posición original, es relacionarla con otra señal antigua próxima a ella y comparar la diferencia de nivel con la obtenida en los antiguos trabajos. Por eso es muy conveniente establecer las señales principales de tres en tres, y así se hace en varios países, colocando las señales de un grupo, siempre que sea posible, de manera que no se encuentren bajo la acción de los mismos efectos destructores y distanciándolas convenientemente para que pueda hacerse entre ellas una o dos estaciones de nivel; generalmente estos grupos se establecen en el terreno de dos en dos kilómetros, y en los trabajos que hoy día se realizan en Suiza todavía se reduce más esta distancia (1 200 a 1 300 metros), y además en lugar de tres se establecen grupos de cinco señales metálicas. Atendiendo a razones de orden económico no es posible aceptar para los trabajos que se ejecutan en nuestro país tanta prodigalidad en el establecimiento de señales, y únicamente por esta razón se propone que el grupo de señales princi-

pales se coloque cada tres kilómetros, no habiendo necesidad de indicar que siempre que haya que suspender el trabajo para reanudarlo a la campaña siguiente, indefectiblemente habrá que hacerlo en uno de esos grupos. Estas señales principales (horizontales o verticales) hay que colocarlas con anterioridad a los trabajos (dos o tres meses de anticipación) con objeto de que tomen su posición definitiva de equilibrio cuando llegue el momento de las operaciones, siendo preciso para ello reconocer previamente el itinerario, llevando las hojas del Mapa cuando estén publicadas, y si no puede ser, la planimetría en escala de 1:25 000 para señalar sobre ella los puntos que en el terreno se elijan para las señales. Se levantará una reseña minuciosa de cada una de ellas, señalando con mucho cuidado las referencias por lo menos a tres puntos próximos y bien establecidos a su alrededor. Tanto estas referencias como el punto del terreno que se haya elegido para establecer la señal debe marcarse con cincel, las primeras en forma de cruces y el sitio del emplazamiento por medio de un pequeño taladro encerrado en un triángulo grabado en la roca. En el croquis de las referencias se indicará el rumbo y la distancia medida con cinta metálica desde el sitio de la señal a sus referencias. Cuando se trate de las señales verticales de pared, únicamente se marcará sobre la fachada, en el sitio que se haya elegido, el taladro y triángulo correspondiente, y en todos los casos, después que se hayan recogido todos estos datos, se tomará una fotografía o, en

Escala $\frac{1}{2}$

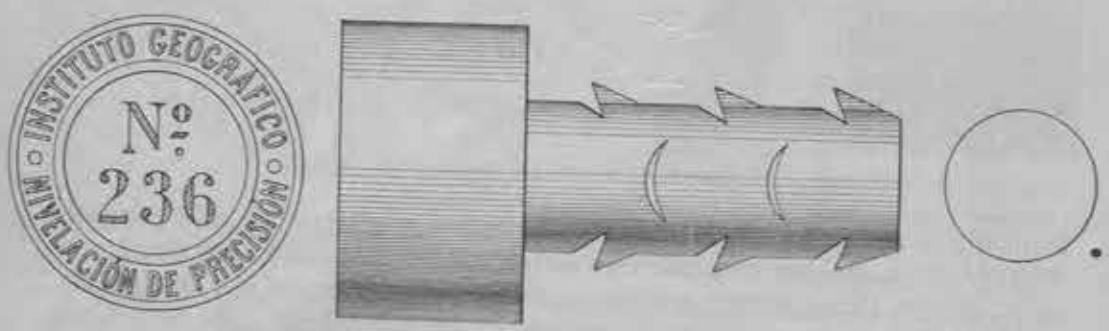


Figura 46.

su defecto, un croquis panorámico de la posición. Proyectadas en esta forma las señales que han de establecerse por grupos, de tres en tres kilómetros, los Ingenieros del Servicio dictaminarán con rapidez, haciendo la clasificación definitiva y señalando en el Mapa en el sitio preciso, a uno y otro lado del itinerario (ferrocarril o carretera), la clase y unión de las señales correspondientes, para que con urgencia un Topógrafo operador, acompañado de un obrero cantero experto en saber trabajar la piedra y con el molde correspondiente para las señales de hormigón, proceda a su establecimiento definitivo.

Estas señales, como ya hemos indicado, deben establecerse con dos o tres meses de anticipación, aprovechando los meses del invierno en que no se hacen los trabajos.

Señales secundarias.

Simultáneamente con las operaciones, no hay más remedio que establecer entre cada grupo de señales principales un cierto número de señales intermedias por ser necesarias para los trabajos e indispensables en los cálculos de gabinete para poder evaluar los errores accidentales y sistemáticos cometidos en la doble nivelación.

Esto no puede hacerse sin disponer de un cierto número de puntos fijos que sirvan de apoyo a la mira en la nivelación de ida y en la de vuelta, y que permitan comparar las discordancias; comparación que será tanto más provechosa, como es natural, cuanto mayor sea el número de ellas, pero por la misma razón de orden económico que hemos apuntado antes, no es posible llegar como sucede, por ejemplo, en Suiza, a establecer estas señales en el terreno cada 200 ó 300 metros, y se propone, en vista de esto, sean establecidas cada kilómetro, que será, por lo tanto, la cantidad máxima de trabajo que será preciso repetir cuando se disponga una rectificación por una causa determinada.

No pueden darse reglas fijas para establecerlas, pero siempre será posible reparar al tiempo de hacer el trabajo entre las señales permanentes, en un cierto número de puntos que reunan buenas condiciones, y entonces con poco gasto pueden quedar establecidas, pero sin que se pueda confiar mucho en la permanencia de ellas, y en términos generales siempre será más económico dedicar todos los esfuerzos, el tiempo y el dinero a establecer las mejores clases de señales en la forma que hemos indicado al principio, y colocar estas señales intermedias, aprovechando las horas en que no se pueda nivelar, *únicamente en aquellos edificios* colocados casualmente cerca del itinerario y que ofrezcan carácter de permanencia, y desde luego siempre que por una causa cualquiera haya necesidad de suspender el trabajo.

Conservación de las señales.

La conservación de las señales es el complemento indispensable de su establecimiento. Sin un servicio debidamente organizado con ese objeto, la red de nivelación no tardaría en sufrir profundas alteraciones bajo la acción destructora del tiempo y de los hombres. La oxidación que corroe las señales, la demolición de los edificios, la incultura del país, etc., etc., ejercen su acción perturbadora en detalle, y continuamente y sin una vigilancia incesante seguida de oportunas reparaciones, la existencia de la red se vería seriamente comprometida, como lo prueba, por desgracia, la experiencia en nuestro país. La mayor parte de las señales que desaparecen, lo son por la negligencia de las autoridades de los pueblos. Se impone, por tanto, la necesidad de establecer un servicio para la vigilancia y conservación de las señales que se establezcan en los nuevos trabajos de alta precisión, confiándolo a las autoridades locales, a los Ingenieros de Obras públicas en las provincias respectivas y a los de las divisiones de ferrocarriles de las Compañías interesadas, las cuales, como resultado de su visita a las respectivas señales, deben estar obligadas a remitir todos los años a esta Direc-

ción general detallado informe dando cuenta de las alteraciones observadas para que por los Ingenieros de este Servicio se proceda en el acto a remediarlas, sin perjuicio de colocar también en las señales permanentes, a semejanza de lo que se hace en los Estados Unidos, una inscripción por la que se condena a una fuerte multa o a prisión, a quien perturbe la señal, recabando, naturalmente, de los poderes públicos la eficacia de esa disposición.

Las planchas indicadoras de la altitud (fig. 47), que hasta ahora han venido usándose por la Dirección general del Instituto Geográfico, ofrecen muchos inconvenientes a causa de su peso (18 kilogramos), dimensiones y forma de colocarlas, y en muchas ocasiones han motivado abierta y justificada oposición por parte de los propietarios a que sean colocadas en sus fincas, no solamente por la materialidad de la instalación, que obliga a hacer cuatro perforaciones en la fachada, sino también alegando razones de estética; como, por otra parte, ya no resulta apropiada la inscripción de «Instituto Geográfico y Estadístico», y puede conseguirse el mismo objetivo utilizando otros modelos que, como el que se proyecta, es más sencillo y más a propósito para las nuevas necesidades, sería conveniente no seguir utilizándolos para los nuevos trabajos de nivelaciones de alta precisión.



Figura 47.

Posteriormente a la presentación de este proyecto, que ha sido aprobado por la Dirección y a consecuencia de la comisión del servicio realizada últimamente en Suiza, he sido informado detalladamente de un modelo de señal metálica que con éxito completo se emplea en los trabajos de nivelación de precisión y que puede ser empleado indistintamente en las paredes verticales de los edificios o en los terrenos horizontales.

Entre todos los modelos sancionados por la práctica es éste el que reune mejores condiciones para resistir, sobre todo, el deterioro causado por la mala intención de las gentes.

Está constituido (fig. 48) por un perno de bronce de 120 milímetros de longitud, en cuyo extremo se atornilla una tapa del mismo metal que tiene 40 milímetros de diámetro. Se incrusta fijándolo con cemento en las paredes verticales u horizontales, con la tapa bien atornillada, hasta que la superficie de ésta enrase con la superficie de la pared. Cuando haya necesidad de emplearlos se destornilla la tapa y se introduce un vástago de acero para sostener la mira que ajusta perfectamente con el orificio central que tiene la cabeza del perno. La forma de este vástago es distinta, según que la señal esté incrustada en una superficie vertical u horizontal; en el primer caso, la altitud se refiere al eje del perno, y en el segundo caso, al centro de la superficie de su

cara superior. En el primer caso, si la mira se apoya en el vástago de acero, no hay que hacer ninguna corrección, pero en el segundo caso, habrá que descontar 20 milímetros, que es la altura de la cabeza del vástago.

La tapa se atornilla y destornilla con facilidad mediante una llave, que también se representa en el croquis.

En la actualidad han sido colocadas en el polígono de experiencias, donde ya han dado principio los nuevos trabajos, un cierto número de estas señales, y todo hace presumir, por las experiencias que se han hecho con ellas, un éxito completo para los trabajos.

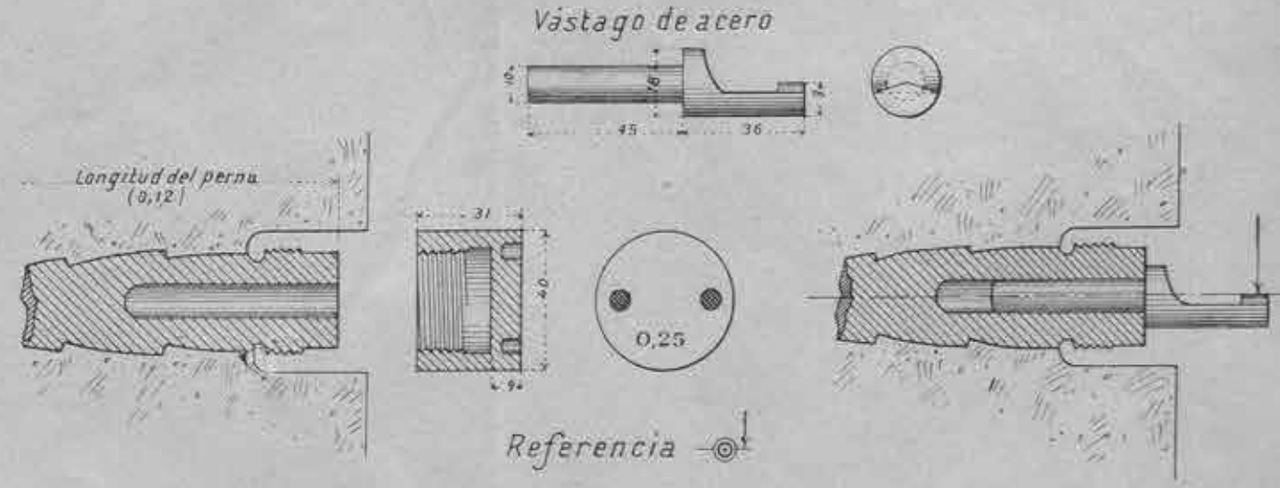
Se establecerán con preferencia en las paredes de los edificios permanentes, pues su precio elevado (32 pesetas) aconseja no prodigarlas demasiado, reservando, por el contrario, las señales corrientes (fig. 41), mucho más económicas para la superficie del terreno.

BIBLIOGRAFÍA

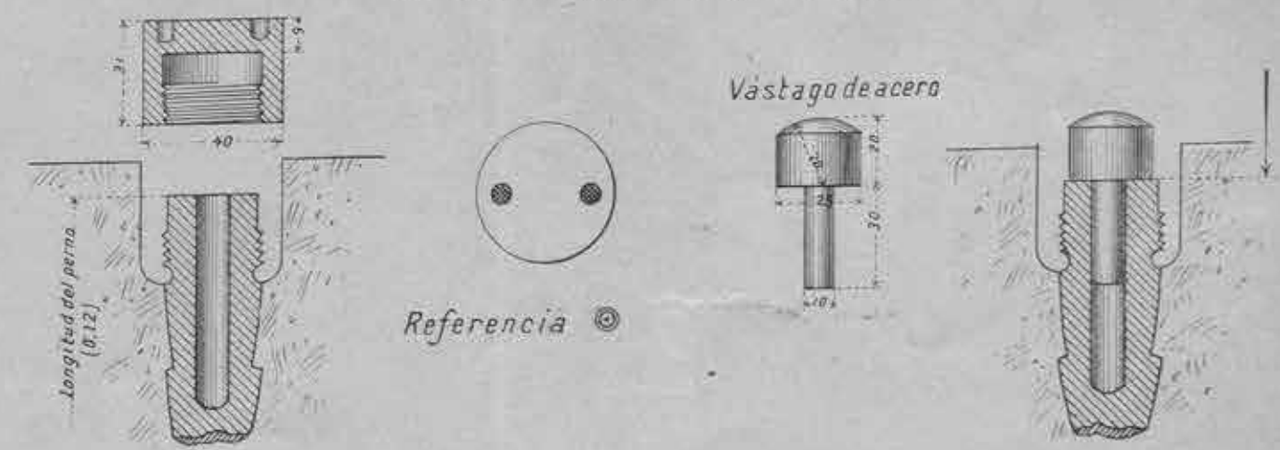
Instrucciones para los trabajos de Nivelación de alta precisión en los Servicios geodésicos de Francia, Italia, Suiza y Estados Unidos.

Escala $\frac{1}{2}$

EN SUPERFICIES VERTICALES



EN SUPERFICIES HORIZONTALES



LLAVE PARA ATORNILLAR Y DESTORNILLAR LA TAPA

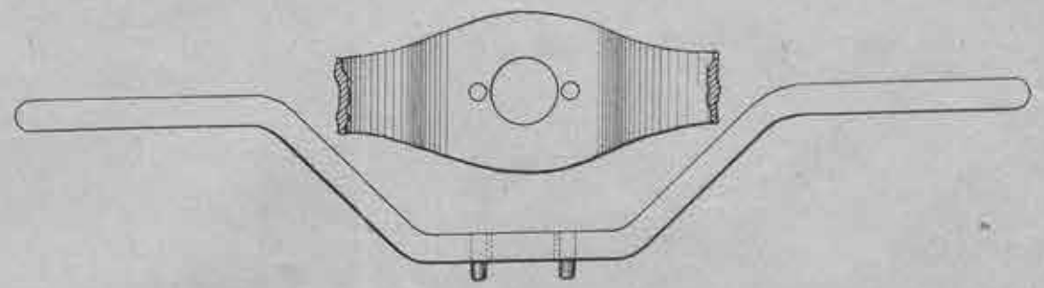


Figura 48.

ÍNDICE

	Páginas.
Descripción general del proyecto	1
Instrumentos	25
Estudio de los errores	43
Normas para los trabajos	62
Determinación de los errores	67
Teorías ortométrica y dinámica	81
Comparación de las miras metálicas	115
Señales metálicas para los trabajos	131
Establecimiento de las señales	137
Conservación de las señales	139

POLÍGONO A.



SECCIONES			Kilómetros
A.B.	Cuenca a Teruel	(C.1ª orden)	148
A.C.	Teruel a Sagunto	(F.C.)	137
A.R.	Albacete a Cuenca	(C.2ª orden)	152
A.V.	Alicante a Albacete	(F.C.)	117
A.M.	Sagunto a Valencia	(F.C.)	29
	Valencia a Cullera	(f. c.)	39
	Cullera a Gandia	(C.2ª orden)	27
	Gandia a Alicante	(f. c.)	124
	Total		773

POLÍGONO B.

SECCIONES		Kilometros
B.C. Calatayud a Teruel	(F.C.)	132
B.G. Jadraque a Calatayud	(F.C.)	140
B.H. Madrid a Jadraque	(F.C.)	105
B.N. Aranjuez a Madrid	(F.C.)	49
B.R. Cuenca a Aranjuez	(F.C.)	152
B.A. Teruel a Cuenca	(C.1ª orden)	148
	Total	726



POLIGONO C.



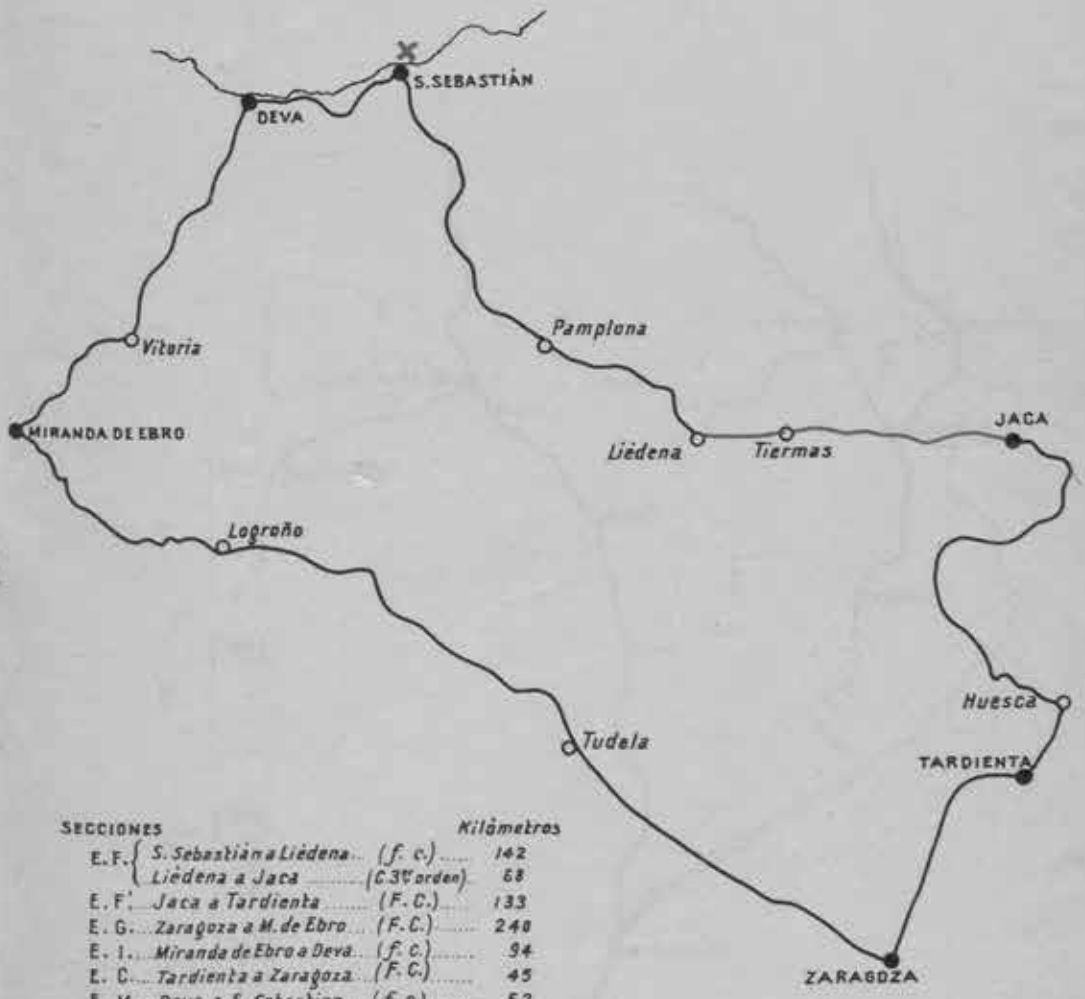
SECCIONES			Kilómet.
C. D.	Lérida a Tarragona	(F. C.)	103
C. E.	Zaragoza a Tardienta	(F. C.)	52
C. F.	Tardienta a Lérida	(F. C.)	131
C. G	Calatayud a Zaragoza	(F. C.)	96
C. A.	Sagunto a Teruel	(F. C.)	131
C. B.	Teruel a Calatayud	(F. C.)	132
C. M.	Tarragona a Sagunto	(F. C.)	246
		Total	891

POLIGONO D.

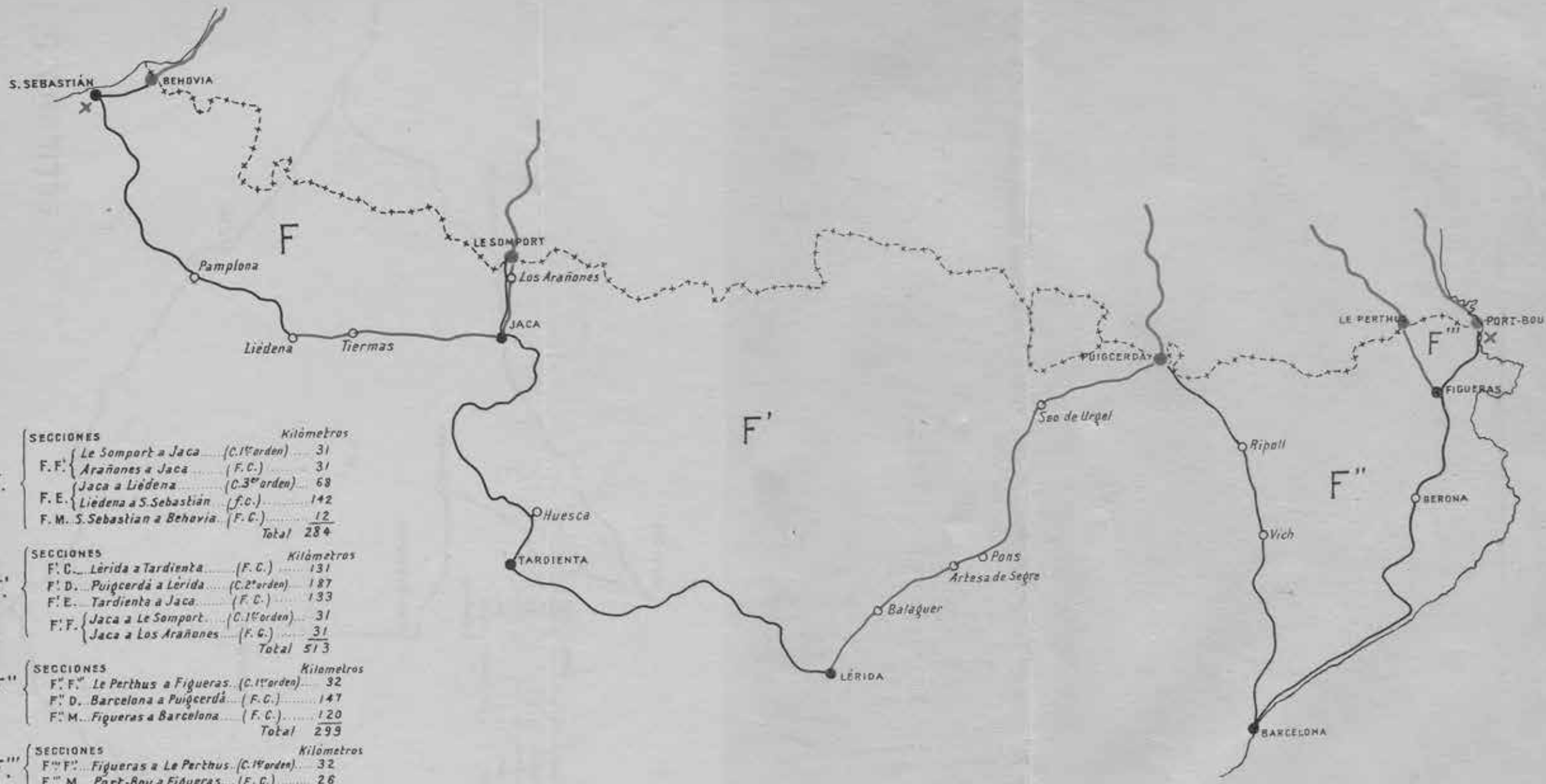


SECCIONES			Kilómetros
D. F.ª	Lérida a Puigcerdá	(C. 2ª orden)	187
D. F.ª	Puigcerdá a Barcelona	(F. C.)	120
D. C.	Tarragona a Lérida	(F. C.)	103
D. M.	Barcelona a Tarragona	(F. C.)	91
		Total	501

POLIGONO E.



SECCIONES			Kilómetros
E. F.	S. Sebastián a Liédena	(f. c.)	142
	Liédena a Jaca	(C. 3ª orden)	68
E. F'.	Jaca a Tardienta	(F. C.)	133
E. G.	Zaragoza a M. de Ebro	(F. C.)	240
E. I.	Miranda de Ebro a Deva	(f. c.)	94
E. C.	Tardienta a Zaragoza	(F. C.)	45
E. M.	Deva a S. Sebastian	(f. c.)	52
		Total	774



F.

SECCIONES			Kilómetros
F. F.	Le Somport a Jaca	(C. 1er orden)	31
	Arañones a Jaca	(F. C.)	31
F. E.	Jaca a Liédena	(C. 3er orden)	68
	Liédena a S. Sebastian	(f. C.)	142
F. M.	S. Sebastian a Behovia	(F. C.)	12
		Total	284

F'

SECCIONES			Kilómetros
F'. C.	Lérida a Tardienta	(F. C.)	131
F'. D.	Puigcerdá a Lérida	(C. 2ª orden)	187
F'. E.	Tardienta a Jaca	(F. C.)	133
F'. F.	Jaca a Le Somport	(C. 1er orden)	31
	Jaca a Los Arañones	(F. C.)	31
		Total	513

F''

SECCIONES			Kilómetros
F''. F''.	Le Perthus a Figueras	(C. 1er orden)	32
F''. D.	Barcelona a Puigcerdá	(F. C.)	147
F''. M.	Figueras a Barcelona	(F. C.)	120
		Total	299

F'''

SECCIONES			Kilómetros
F'''. F'''.	Figueras a Le Perthus	(C. 1er orden)	32
F'''. M.	Port-Bou a Figueras	(F. C.)	26
		Total	58

POLIGONO G.



SECCIONES		Kilometros
G. H. Jadraque a Burgos	(C. 1ª y 2ª orden)	255
G. I. Burgos a Mª de Ebro	(F. C.)	90
G. B. Calatayud a Jadraque	(F. C.)	140
G. C. Zaragoza a Calatayud	(F. C.)	96
G. E. Mª de Ebro a Zaragoza	(F. C.)	240
	Total	821

SECCIONES			Kilómetros
H. I.	Venta de Baños a Burgos	(F. C.)	84
H. J.	M. del Campo a V. de Baños	(F. C.)	79
H. N.	Madrid a Medina del Campo	(F. C.)	194
H. B.	Jadraque a Madrid	(F. C.)	105
H. G.	Burgos a Jadraque	(C. 1ª y 2ª orden)	255
		Total	717

POLÍGONO H.



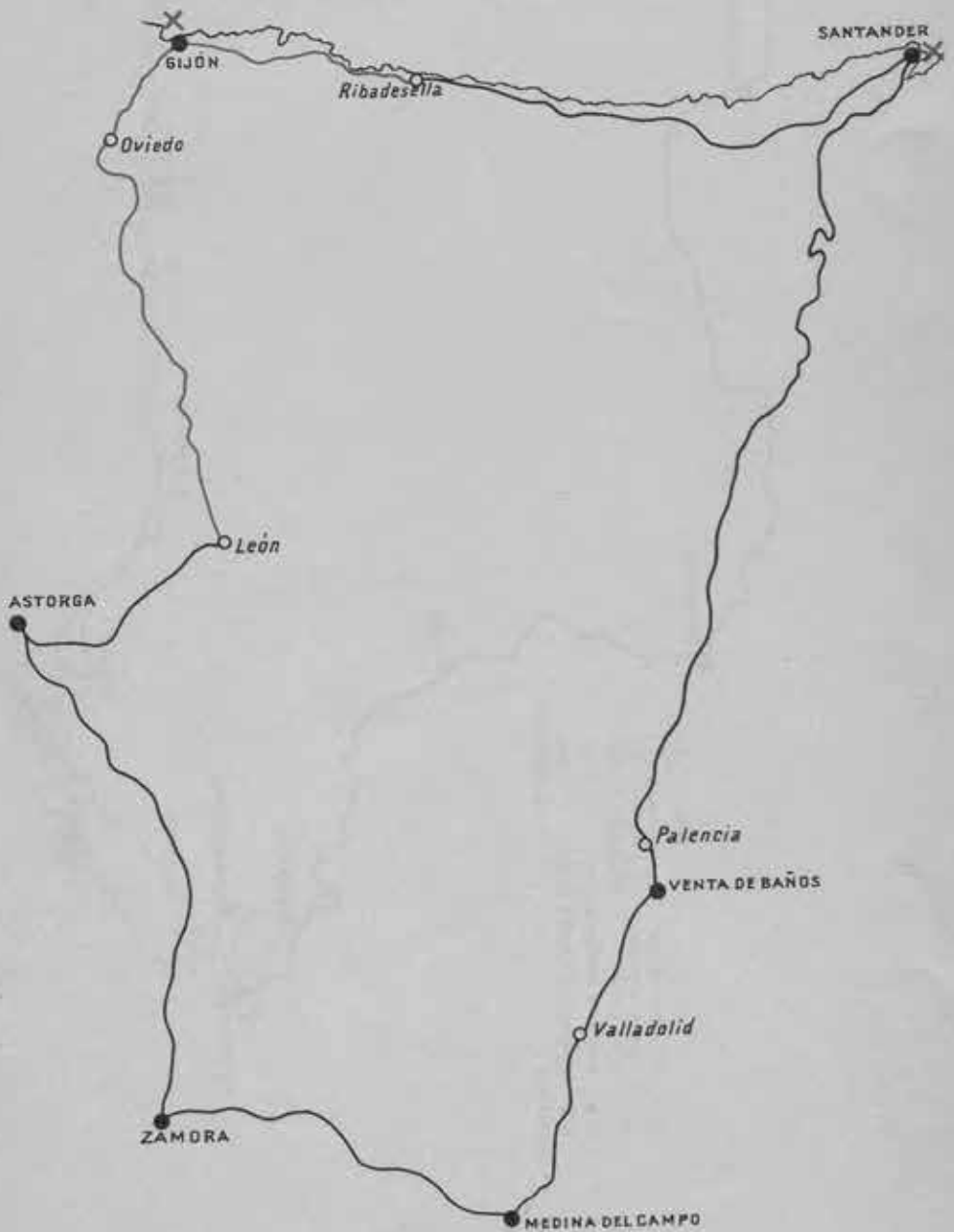
POLÍGONO I.



SECCIONES			Kilómetros
I. J.	Venta de Baños a Santander	(F. C)	230
I. E.	Deva a Miranda de Ebro	(f. c.)	94
I. G.	Miranda de Ebro a Burgos	(F. C)	90
I. H.	Burgos a Venta de Baños	(F. C)	84
I. M.	Santander a Bilbao	(f. c.)	119
	Bilbao a Deva	(C. 3er orden)	64
		Total	681

POLÍGONO J.

SECCIONES			Kilómetros.
J. N.	Medina del Campo a Zamora	(F. C.)	90
J. P.	Zamora a Astorga	(F. C.)	119
J. K.	Astorga a León	(F. C.)	52
	León a Gijón	(C. 1ª orden)	150
J. H.	Venta de Baños a Mª del Campo	(F. C.)	79
J. I.	Santander a Venta de Baños	(F. C.)	230
J. M.	Gijón a Ribadesella	(C. 3ª orden)	67
	Ribadesella a Santander	(f. c.)	131
		Total	918



POLÍGONO K.



SECCIONES			Kilómetros
K.L.	Monforte a La Coruña	(F.C.)	186
K.P.	Astorga a Monforte	(F.C.)	186
K.J.	Gijón a León	(C. 1ª orden)	150
	León a Astorga	(F.C.)	52
K.M.	La Coruña a Gijón	(C. 2ª y 3ª orden)	383
		Total	957

POLÍGONO L.



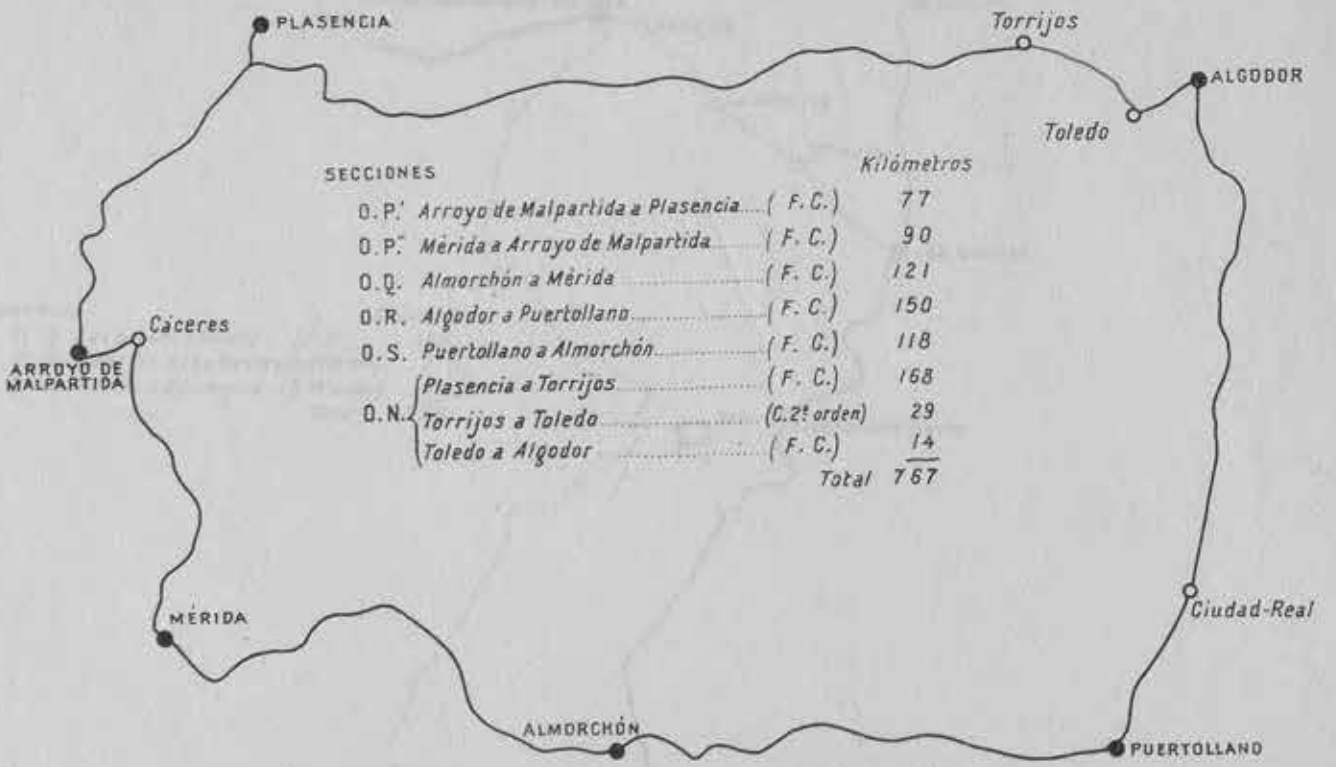
SECCIONES			Kilómetros
L.P.	Monforte a Guillarey y ramal a Tuy	(F.C.)	144
L.K.	La Coruña a Monforte	(F.C.)	186
L.M.	Guillarey a Santiago y ramal a Vigo	(F.C.)	130
	Santiago a La Coruña	(C.2ª orden)	62
		Total	522

POLÍGONO N.

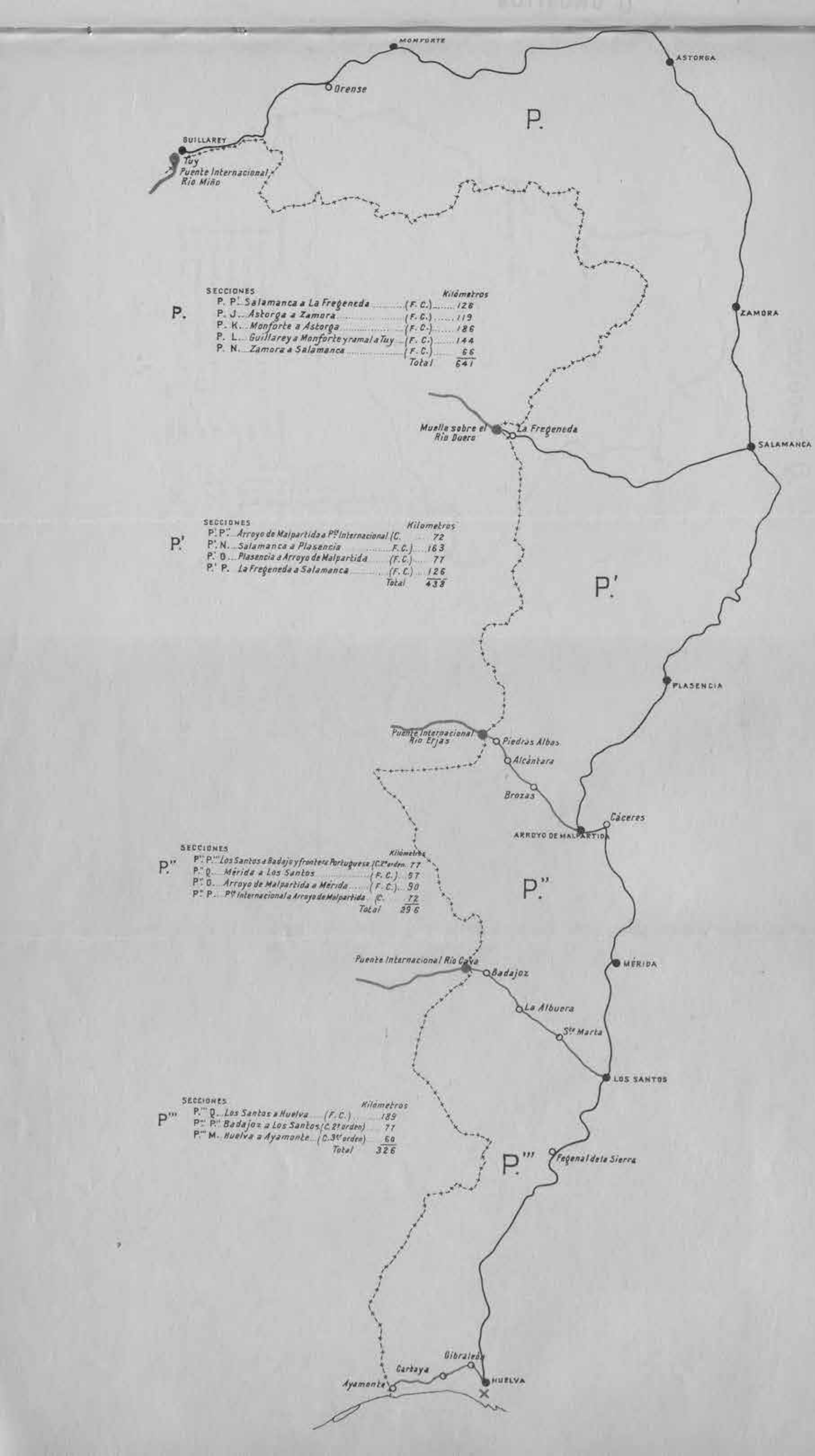


SECCIONES			Kilómetros
N.P.	Salamanca a Zamora	(F.C.)	66
N.P'.	Plasencia a Salamanca	(F.C.)	163
N.R.	Aranjuez a Algodor	(F.C.)	42
N.B.	Madrid a Aranjuez	(F.C.)	49
N.H.	M. del Campo a Madrid por Segovia	(F.C.)	194
N.J.	Zamora a Medina del Campo	(F.C.)	90
N.O.	Algodor a Toledo	(F.C.)	14
	Toledo a Torrijos	(C. 2ª orden)	29
	Torrijos a Plasencia	(F.C.)	168
		Total	815

POLÍGONO O.



SECCIONES			Kilómetros
O.P.'	Arroyo de Malpartida a Plasencia	(F. C.)	77
O.P."	Mérida a Arroyo de Malpartida	(F. C.)	90
O.Q.	Almorchón a Mérida	(F. C.)	121
O.R.	Algodor a Puertollano	(F. C.)	150
O.S.	Puertollano a Almorchón	(F. C.)	118
O.N.	Plasencia a Torrijos	(F. C.)	168
	Torrijos a Toledo	(C. 2ª orden)	29
	Toledo a Algodor	(F. C.)	14
		Total	767

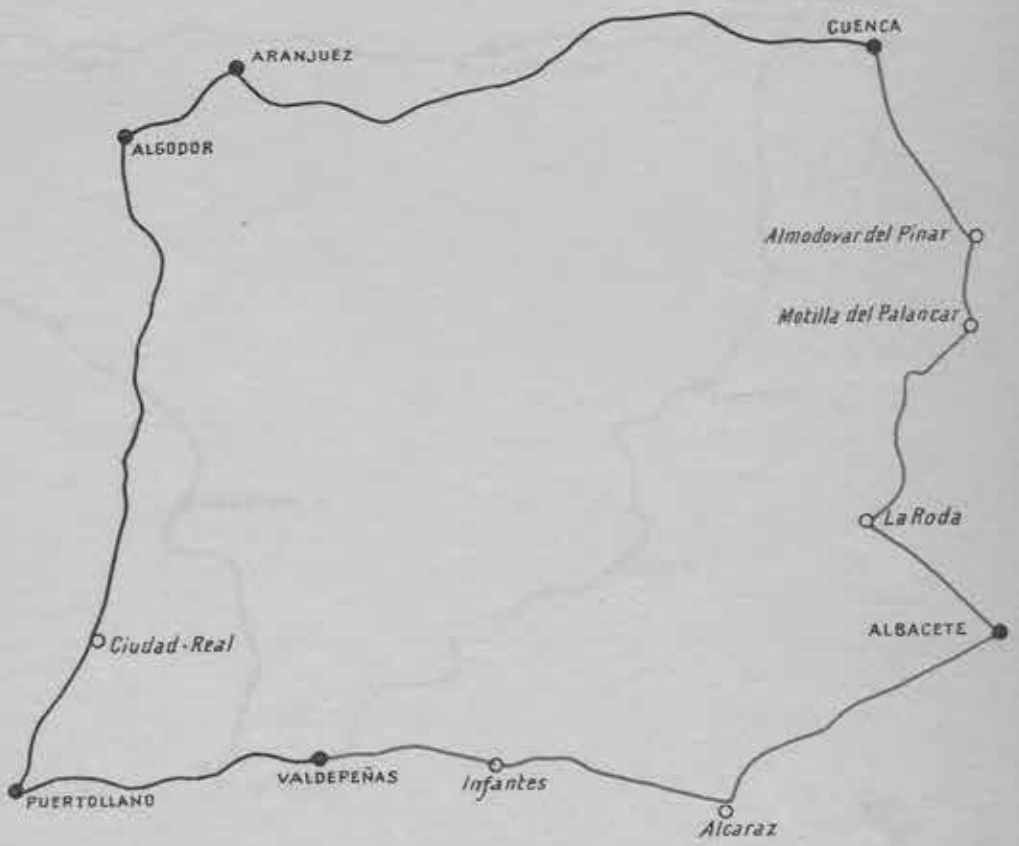

MONFORTE
ASTORGA
Orense
P.
GUILLAREY
Tuy
Puente Internacional Rio Miño
SECCIONES
Kilómetros
P. P'. Salamanca a La Fregeneda (F. C.) 126
P. J. Astorga a Zamora (F. C.) 119
P. K. Monforte a Astorga (F. C.) 186
P. L. Guillarey a Monforte y ramal a Tuy (F. C.) 144
P. N. Zamora a Salamanca (F. C.) 66
Total 641
ZAMORA
Muelle sobre el Rio Duero
La Fregeneda
SALAMANCA
SECCIONES
Kilometros
P' P''. Arroyo de Malpartida a Pº Internacional (C. 72
P' N. Salamanca a Plasencia (F. C.) 163
P' O. Plasencia a Arroyo de Malpartida (F. C.) 77
P' P. La Fregeneda a Salamanca (F. C.) 126
Total 438
P'
P'.
PLASENCIA
Puente Internacional Rio Erjas
Piedras Albas
Alcántara
Brozas
Cáceres
ARROYO DE MALPARTIDA
SECCIONES
Kilometros
P'' P'''. Los Santos a Badajoz y frontera Portuguesa (C. 2ª orden. 77
P'' Q. Mérida a Los Santos (F. C.) 57
P'' O. Arroyo de Malpartida a Mérida (F. C.) 90
P'' P. Pº Internacional a Arroyo de Malpartida (C. 72
Total 296
P''
P''.
Puente Internacional Rio Caya
Badajoz
MÉRIDA
La Albuera
Stª Marta
LOS SANTOS
SECCIONES
Kilometros
P''' Q. Los Santos a Huelva (F. C.) 189
P''' P''. Badajoz a Los Santos (C. 2ª orden) 77
P''' M. Huelva a Ayamonte (C. 3ª orden) 60
Total 326
P'''
P'''.
Fegenal de la Sierra
Gibraleón
Cartaya
Ayamonte
HUELVA

POLÍGONO Q.



SECCIONES		Kilómetros
Q. S. Almorchón a Córdoba	(F. C.)	135
Q. T. Córdoba a Sevilla	(F. C.)	132
Q. O. Mérida a Almorchón	(F. C.)	121
Q. P.ª Los Santos a Mérida	(F. C.)	57
Q. P.ª Huelva a Los Santos	(F. C.)	189
Q. M. Sevilla a Huelva	(F. C.)	110
	Total	744

POLÍGONO R.



SECCIONES			Kilómetros
R. S.	Valdepeñas a Puertollano	(F. C.)	76
R. V.	Albacete a Valdepeñas	(C. 2ª orden)	171
R. A.	Cuenca a Albacete	(C. 2ª y 3ª orden)	152
R. B.	Aranjuez a Cuenca	(F. C.)	152
R. N.	Algodor a Aranjuez	(F. C.)	42
R. O	Puertollano a Algodor	(F. C.)	150
		Total	743

POLÍGONO S.



SECCIONES			Kilómetros
S.T.	Puente Genil a Córdoba	(F. C.)	77
S.U.	Linares a Puente Genil	(F. C.)	134
S.V.	Valdepeñas a Linares	(F. C.)	90
S.O.	Almorchón a Puertollano	(F. C.)	118
S.Q.	Cordoba a Almorchón	(F. C.)	135
S.R.	Puertollano a Valdepeñas	(F. C.)	76
		Total	680

POLIGONO T.

SECCIONES			Kilómetros
T. U.	Puente Genil a Málaga	(F.C.)	116
T. Q.	Sevilla a Córdoba	(F.C.)	132
T. S.	Córdoba a Puente Genil	(F.C.)	77
T. M.	Málaga a Cádiz	(C. 2ª orden)	267
T. M.	Cádiz a Sevilla	(F.C.)	153
		Total	745



POLÍGONO U.



SECCIONES			Kilómetros
U.V.	Linares a Almería	(F.C.)	242
U.S.	Puente Genil a Linares	(F.C.)	184
U.T.	Málaga a Puente Genil	(F.C.)	116
U.M.	Almería a Málaga	(C. 2ª orden)	225
		Total	767

POLÍGONO V.



SECCIONES			Kilómetros
V. A.	Albacete a Alicante	(F. C.)	177
	Valdepeñas a Albacete	(C. 2ª orden)	171
V. S.	Linares a Valdepeñas	(F. C.)	90
V. U.	Almería a Linares	(F. C.)	242
V. M.	Alicante a La Unión	(C. 3ª orden)	96
	La Unión a Aguilas	(f. c.)	107
	Aguilas a Almería	(C. 2ª y 3ª orden)	131
		Total	1014

PROYECTO DE NIVELACIONES DE ALTA PRECISIÓN


FRANCIA
PORTUGAL
LA CORUÑA
SANTANDER
S.SEBASTIAN
OVIEDO
BILBAO
VITORIA
PAMPLONA
LUGO
LEÓN
PONTEVEDRA
ORENSE
BURGOS
LOGROÑO
HUESCA
PALENCIA
ZAMORA
VALLADOLID
ZARAGOZA
LÉRIDA
GERONA
BARCELONA
TARRAGONA
SALAMANCA
SEGOVIA
GUADALAJARA
MADRID
TERUEL
CUENCA
CASTELLÓN
VALENCIA
TOLEDO
CÁCERES
BADAJOZ
CIUDAD-REAL
ALBACETE
ALICANTE
CÓRDOBA
JAÉN
SEVILLA
HUELVA
CÁDIZ
MÁLAGA
ALMERIA
GRANADA
K
L
P
J
I
F
E
F'
F''
G
D
H
C
B
N
P'
P''
P'''
O
R
A
S
V
U
T
Santiago
Villagarcía
Redondela
Vigo
Tuy
Puente Internacional Río Miño
Campesanços
Benavente
Astorga
Ponferrada
Monforte
Orense
Reinosa
Arbas
Miranda de Ebro
Izarra
Durango
Deva
Irún
Roncesvalles
Lizdena
Tiermas
Jaca
Le Sompart
Los Arañones
Boltaña
Sort
Seo de Urgel
Puigcerdá
Le Perthus
Port-Bou
Figueras
Llansa
Ripoll
Vich
Tudela
Barbastro
Tardienta
Artesa de Segre
Pons
Balaguer
Salas de los Infantes
Venta de Baños
S. Leonardo
Soria
El Burgo de Osma
Aranda de Duero
Almazán
Medina del Campo
Coca
Olmedo
Cuellar
Segovia
Sigüenza
Jadraque
Calatayud
Daroca
Caspe
Alcañiz
Roquetas
Salou
Villalba
Torrijos
Aranjuez
Algodor
Almodovar del Pinar
Motilla del Palancar
Cañete
Requena
Sagunto
Desierto
Cullera
Gandia
Denia
Játiva
Alcazar de S. Juan
La Roda
Almansa
Infantes
Alcaraz
Valdepeñas
Puertollano
Almorchón
Peñarroya
Pozoblanco
Fuente Ovejuna
Hinojosa del Duque
Belmez
Cortegana
Fregenal de la Sierra
Zafra
Llerena
Mérida
Don Benito
Almendralejo
La Almunia
Sta. María
Los Santos
Río Eriñas
Piedras Albas
Alcántara
Brozas
Arroyo de Malpartida
Río Caya
Puente Internacional Río Caya
Ayamonte
Gibraleón
Cartaya
Moguer
Huelva
Sevilla
Utrera
Ecija
Puente Genil
Lucena
Baza
Huescar
Lorca
Cartagena
La Unión
Vera
Águilas
Sorbas
Tíjola
Almería
Motril
Torre del Mar
Nerja
Ronda
Adra
Málaga
Marbella
Estepona
Algeciras
San Roque
Tarifa
Cádiz
San Fernando
Vejer
Duque
Ayamonte
Huelva
Gibraleón
Cartaya
Moguer
Palos
Huelva
Ayamonte

Dirección general del Instituto Geográfico.

Tomo XV

III

LA BALANZA DE TORSIÓN EÖTVÖS-SCHWEYDAR Y SUS APLICACIONES

POR

GUILLERMO SANS HUELIN

Comandante de Artillería e Ingeniero Geógrafo.



MADRID

Talleres del Instituto Geográfico.

1924

INSTITUTO GEOGRÁFICO BIBLIOTECA

NOTA PRELIMINAR

Habiendo sido encargado por la Superioridad para hacerme cargo de la Balanza de torsión Eötvös, modificada por el Profesor Schweydar, del Instituto Geodésico de Potsdam, construída en los talleres Bamberg, de Berlín, tuve que trasladarme a dicha capital en el mes de Mayo de 1923, con el fin de efectuar en la fábrica constructora las pruebas de recepción de dicho aparato, en las que iban además incluídas la determinación de constantes del mismo. Duraron cinco semanas las prácticas, dirigidas por el Ingeniero Herr Reinecke, efectuando al final de las mismas una estación de ensayo en un jardín próximo a la fábrica, esta vez bajo la inmediata dirección del eminente Profesor Schweydar, con quien tuve además ocasión de celebrar varias entrevistas en su oficina del Instituto, en Potsdam, en las que, a mi requerimiento, me proporcionó algunos datos sobre el desarrollo de los cálculos y empleo del aparato en el campo. En las páginas que siguen resumiré lo que aprendí como fruto de mi comisión y de mis estudios.

INSTITUTO GEOGRÁFICO BIBLIOTECA

LA BALANZA DE TORSIÓN EÖTVÖS-SCHWEYDAR

Y SUS APLICACIONES

Variómetro de curvatura y su fundamento.

Me ocuparé primeramente de la forma primitiva de la balanza, adoptada por el Barón von Eötvös, y su principio.

Al extremo de un hilo de platino iridio, de 0,04 milímetros de diámetro, cuelga un tubo de aluminio de 40 centímetros de longitud, provisto en sus dos extremos de dos pesos de 28 gramos (fig. 1.ª). Si se la separa de su posición de equilibrio, tenderá a recuperarla en oscilaciones horizontales producidas por la fuerza de torsión del hilo. La fuerza de torsión de éste, artificialmente envejecido, es tan pequeña, que las más pequeñas fuerzas exteriores bastarán para sacar al brazo de la balanza de su posición de equilibrio y hacer sufrir una torsión al delgadísimo hilo de suspensión.

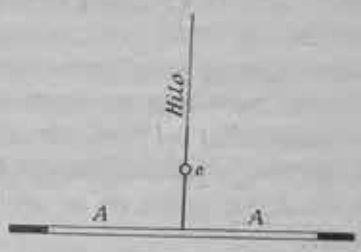


Figura 1.ª

Como protección contra las corrientes de aire y cambios bruscos de temperatura que influencien el hilo, se encierran éste y el brazo en una envolvente metálica de dobles paredes. El conjunto puede girar alrededor de un eje vertical, de modo que ocupe la dirección que se desee el brazo de la balanza.

La finalidad de la observación consiste en determinar la situación que ocupará el brazo (en su posición de equilibrio), respecto a la caja que lo contiene, para diversas posiciones de ésta. Con este fin sirve el espejo *e*, unido al brazo de la balanza, y un anteojo con escala, fijo a la caja de la misma. Desde luego se concibe que el anteojo se puede reemplazar por una placa fotográfica, sobre la que quede registrada, por una disposición óptica adecuada, la posición de equilibrio, modificación adoptada posteriormente por Hecker y perfeccionada por Schweydar.

Aceptemos que las fuerzas de la gravedad a lo largo del brazo de la balanza sean con todo rigor iguales y paralelas. Su efecto equivaldrá al de una sola fuerza aplicada

al centro de gravedad del brazo y contrarrestada por la tensión del hilo. Dichas fuerzas no pueden producir ningún giro del brazo ni torsión del hilo, tomando el brazo para todas las posiciones de la caja de la balanza la misma situación respecto a ésta, que será precisamente la situación en que el hilo está sin torsión. Lo mismo sucederá cuando la superficie de nivel de la gravedad sea esférica, caracterizada, como es sabido, por ser perpendicular a la dirección de la gravedad. Las fuerzas de la gravedad a lo largo del brazo no serán en este caso paralelas, pero estarán asimismo contenidas en el plano determinado por el hilo y el brazo, no produciendo, por lo tanto, torsión del hilo.

A causa de la forma general de la Tierra y de las masas perturbadoras situadas por encima y debajo de la superficie terrestre, no son las mencionadas fuerzas de gravedad a lo largo del brazo ni iguales ni paralelas; la superficie de nivel en cada punto se separa más o menos de la forma esférica. El efecto de estas fuerzas es equivalente a una sola fuerza, que, como antes, actúa en el centro de gravedad y es equilibrada por la tensión del hilo y a un par de fuerzas, cuyo plano es perpendicular a la fuerza única, y que produce el giro del brazo y la torsión del hilo.

Imaginemos la superficie de nivel que atraviesa por *A*. Todos los planos que pasando por *A* contengan al mismo tiempo la normal a la superficie de nivel en *A* cortan a ésta según curvas. De entre todos estos planos (que son infinitos), se destacan dos por la particularidad de ser *perpendiculares entre sí* y por contener sus secciones con la superficie de nivel *los radios mayor y menor de curvatura* entre todos los de las infinitas secciones. Se denominan estas secciones, *secciones principales*, y sus radios de curvatura, *radios de curvatura principales*. Si por medio del giro de conjunto del aparato se llevan el brazo y el hilo a estos dos planos especiales, no experimentará en ellos ningnna torsión el alambre, consiguiéndose la posición de equilibrio del brazo sin torsión, toda vez que las fuerzas de gravedad en los extremos del brazo actúan entonces en el plano que contiene al brazo y a la dirección de la gravedad en *A*, de modo que no aparece ninguna componente horizontal (1). En cualquiera otra orientación del brazo (fuera de las secciones principales) se producirá una torsión del alambre, y esta torsión y la desviación del brazo consiguiente se producirá en el sentido de las agujas de un reloj o en el contrario, según la orientación del instrumento.

Esta distribución de la fuerza de la gravedad en el sitio de observación origina que el brazo tome para cada azimut una desviación distinta con respecto al punto de referencia (en la escala o en la placa fotográfica). La medida de estas desviaciones proporciona datos para deducir por el cálculo algunas particularidades de la forma de la superficie de nivel.

Antes de dar las fórmulas correspondientes, conviene recordar la noción de *función de fuerzas* en un campo y su aplicación al campo de fuerzas gravífico-terrestre. Se dice que existe una *función de fuerzas* en un campo, cuando las componentes de la de cada punto, referidas a un sistema de tres ejes coordenados, son las derivadas parciales con relación a x, y, z de una determinada función U de estas coordenadas, propiedad que se expresa también diciendo que las fuerzas tienen un potencial U.

(1) Schweydar: «Die Bedeutung der Drehwage von Eötvös für die geologische Forschung».

En Mecánica racional se demuestra que en el campo gravífico-terrestre existe una función de fuerzas que tiene por expresión

$$U = f\int\frac{dm}{e} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,w^2, \qquad [1]$$

en la que f es la constante de gravitación, w la velocidad angular de rotación de la tierra y e la distancia entre un punto de masa 1 y otro de masa dm.

Esta función U está ligada con los radios de curvatura principales ρ_1 y ρ_2 correspondientes a una superficie de nivel, por la siguiente fórmula (Helmert, *Geodesia superior):*

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{g}\left(\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{1}{\cos 2\lambda}, \qquad [2]$$

en la que λ es el ángulo que forma con el meridiano el plano normal correspondiente al radio ρ_2, ángulo que se calcula por la fórmula

$$\operatorname{tang} 2\lambda = -\frac{2\frac{d^2U}{dx\,dy}}{\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}} \qquad [3]$$

Ahora bien, tomando como origen de coordenadas el centro de gravedad de la balanza, referido a un sistema de ejes rectangulares en el que eje de las z sea la vertical contada hacia abajo, el plano de las x, y será horizontal, y escogiendo como eje de las x el dirigido hacia el Norte, Eötvös establece la siguiente fórmula de equilibrio:

$$F = K\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2}\left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}\right) + K\cos 2\alpha\frac{d^2U}{dx\,dy} \qquad [4]$$

que liga a las magnitudes gravíficas representadas por las segundas derivadas de las función de fuerzas con el *momento* F del par de torsión, con el *momento de inercia* K de la balanza y con el *ángulo* α conocido que forma el eje del tubo con el de las x. Por ser F igual al producto $\delta\tau$ del ángulo de torsión δ y coeficiente de torsión τ, la fórmula anterior se convierte en

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{K\operatorname{sen} 2\alpha}{\tau}\left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}\right) + \frac{K\cos 2\alpha}{\tau}\frac{d^2U}{dx\,dy}. \qquad [5]$$

Designando por n la lectura en unidades de la escala, de la posición de equilibrio de la balanza, y por n_0 la desconocida que correspondería al caso de que el hilo de suspensión no estuviese sometido a ningún esfuerzo de torsión, se puede establecer

$$\frac{n - n_0}{2D} = \delta,$$

siendo D la distancia entre el espejo y la escala (constante del instrumento) y δ el ángulo de torsión. Substituyendo este valor en la fórmula [5] se transforma en la siguiente:

$$n - n_0 = D\frac{K\operatorname{sen} 2\alpha}{\tau}\left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}\right) + 2D\frac{K\cos 2\alpha}{\tau}\frac{d^2U}{dx\,dy}, \qquad [6]$$

en la que K y τ son asimismo constantes instrumentales, y n el dato que proporciona el aparato, quedando en consecuencia tres incógnitas por despejar. Precisan, pues, lecturas del instrumento en tres azimutes α distintos para obtener las incognitas en cuestión.

Despejadas $\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}$ y $\frac{d^2U}{dx\,dy}$, se conocerá el valor de la diferencia de los inversos de los radios de curvatura $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$ por la fórmula [2], o sea lo que en el punto considerado difiere la superficie de nivel de la forma esférica, razón que justifica el nombre de *variómetro de curvatura*, dado por Eötvös a este su primer modelo de balanza de torsión. De la fórmula [3] se deducirá el valor de λ, que determina la dirección de las secciones principales de la superficie de nivel.

Variómetro horizontal y su principio.

La segunda forma adoptada por Eötvös para su balanza está representada por la figura 2.ª Se diferencia del primer modelo en que el peso de una de las extremidades del brazo cuelga al extremo de un hilo delgado metálico, de unos 60 centímetros de longitud. Así se consigue medir, en dos direcciones perpendiculares entre sí, el *gradiente horizontal de la gravedad*. Este gradiente nos indica en qué proporción varía la gravedad para un centímetro de desplazamiento en sentido horizontal. La palabra *gradiente* tiene en Gravimetría la misma significación que en Meteorología. Si consideramos un punto de una superficie de nivel en que la intensidad de la gravedad sea g, las derivadas $\frac{dg}{dx}$, $\frac{dg}{dy}$ y $\frac{dg}{dz}$ indican *la variación de la gravedad*, o sea de g en la dirección de cada uno de los ejes coordenados x, y, z.

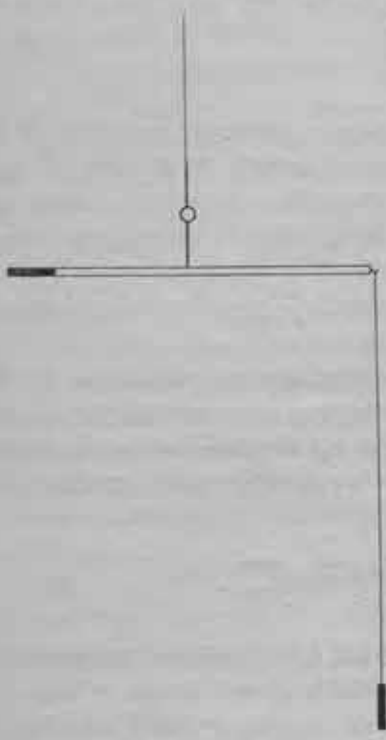


Figura 2.ª

A partir del punto hay una dirección s, en la que la variación de g es *máxima:* esta es la dirección del gradiente en dicho punto; en cuanto a su magnitud, es lo que aumenta g en *dinas* cuando nos separamos *un centímetro* del punto en la dirección s, o sea $\frac{dg}{ds}$. El gradiente se puede representar por un vector que arranque del punto en la dirección s, y cuya longitud sea proporcional a $\frac{dg}{ds}$.

Supongamos que el brazo de la balanza B (fig. 3.ª) esté dirigido de Este a Oeste, el peso colgante m_1 esté al Este, y que la fuerza de la gravedad varíe sólo en la dirección Sur-Norte, aumentando, cual sería el caso, si la forma general de la Tierra fuese la de un elipsoide de revolución.

Las superficies de nivel N_1 y N_2, que pasan por los centros de gravedad m_1 y m_2, no son paralelas; su separación disminuye en la dirección Norte, puesto que según se demuestra en Mecánica racional, las distancias entre dos superficies de nivel próximas, medidas en la dirección de la normal, varían en *razón inversa* de la fuerza de gravedad. Las fuerzas de gravedad en m_1 y m_2 tienen direcciones distintas: la correspondiente a m_1 es paralela a g_1, la m_2 coincide con g_2. De aquí que la última tenga, respecto a la primera, una componente horizontal m_2H, cuya magnitud es proporcional al pequeño ángulo que forman entre sí las direcciones de g_1 y g_2, que es igual al ángulo que entre sí forman las dos superficies de nivel. Este último indica en qué proporción disminuye en la unidad de longitud, contada en la dirección Norte, la separación entre las superficies de nivel, o lo que es lo mismo, en qué cantidad aumenta la fuerza de gravedad en la unidad de longitud, contada en dirección Norte, que es precisamente el gradiente horizontal en ese sentido.

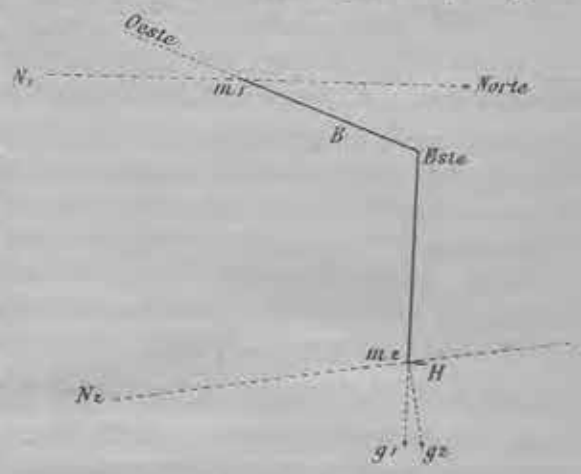


Figura 3.ª

La componente horizontal m_2H produce un giro del brazo de la balanza en sentido contrario de las agujas de un reloj, que es, por consiguiente, proporcional al gradiente horizontal de la gravedad en la dirección Norte. Si se gira el brazo de la balanza 180°, de manera que el peso colgante caiga al Oeste, se producirá el giro en dirección contraria y se calculará el gradiente con el dato de la diferencia de situación del brazo de la balanza en ambas posiciones. Si se coloca la balanza en la dirección Norte-Sur, se obtiene asimismo, con dos observaciones, una con el peso colgante al Norte y otra con el mismo al Sur, el gradiente en la dirección Este-Oeste, en el caso en que éste exista producido por la presencia de masas perturbadoras.

Las dos magnitudes que con la primera forma de la balanza pueden calcularse ejercen también su acción en la segunda forma. En la determinación indicada de los ángulos de torsión producidos por los gradientes se ha supuesto que aquellas magnitudes son nulas, lo cual no sucederá en general. La segunda forma de la balanza permite, por consiguiente, calcular cuatro magnitudes, a saber: *la diferencia de los inversos de los radios principales de curvatura, la dirección de las secciones principales y los gradientes horizontales de la gravedad en dos direcciones perpendiculares entre sí.*

Representando por l la longitud del semibrazo de la balanza, por h la distancia del centro de gravedad del contrapeso m al punto de suspensión del mismo, por m el peso en gramos del contrapeso, establece Eötvös, para expresión del momento F del par de torsión en esta segunda forma de la balanza, la siguiente:

$$F = K\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2}\left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}\right) + K\cos 2\alpha\,\frac{d^2U}{dx\,dy} - mhl\operatorname{sen}\alpha\,\frac{d^2U}{dx\,dz} + mhl\cos\alpha\,\frac{d^2U}{dy\,dz}, \quad [7]$$

o su similar

$$n - n_0 = a \operatorname{sen} 2\alpha \left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2} \right) + 2a \cos 2\alpha \frac{d^2U}{dx\,dy} - b \operatorname{sen} \alpha \frac{d^2U}{dx\,dz} + b \cos \alpha \frac{d^2U}{dy\,dz}, \quad [8]$$

en la que $a = \frac{D}{\tau} K$; $b = \frac{2D}{\tau} mlh$ y D es la distancia del espejo a la escala.

Puesto que la situación sin torsión n_0 de la balanza con respecto a su caja es desconocida, resultan ser cinco las incógnitas que figuran en la ecuación [8], por lo que precisa efectuar medidas en cinco posiciones distintas de la balanza para obtener un sistema resoluble de cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

Eötvös empleó una doble balanza del segundo modelo montada en un mismo soporte, con brazos paralelos y contrapesos colgantes en direcciones opuestas, con la que las mediciones precisas se reducen a las correspondientes a tres azimutes.

Obtenidos los gradientes horizontales de la gravedad $\frac{d^2U}{dx\,dz}$, $\frac{d^2U}{dy\,dz}$ en dos direcciones perpendiculares, según el eje de las x y el de las y, respectivamente, puede deducirse el *gradiente máximo horizontal* y su dirección, *o sea saberse en qué dirección y en cuánto la fuerza de la gravedad tiene un máximo de aumento o disminución.*

La balanza de Eötvös es tan sensible que las cuatro magnitudes que con la misma se determinan pueden calcularse con una aproximación de 1×10^{-9} C. g. S. Este segundo modelo se conoce también con el nombre de *variómetro horizontal.*

Doble variómetro Eötvös-Schweydar.—Descripción.

El aparato construido para este Instituto marcado con la letra *Q* está representado en la fotografía 1.ª Es una balanza doble de Eötvös funcionando bajo el mismo principio y protegida por una triple envolvente metálica.

El aparato consta de tres partes esenciales que se separan para el transporte del mismo en el campo y que rápidamente pueden acoplarse en el sitio escogido para estación (véanse las fotografías 2.ª y 3.ª, que muestran al instrumento en diversos grados de acoplamiento de las partes integrantes). La parte inferior consiste en una columna hueca *b* provista de tres tornillos nivelantes *d* y de un volante *e* que acciona a un mangito de expansión y permite, una vez aflojado, el encaje de la parte media unida al eje general de giro del instrumento.

Sobre esta parte media se monta el cuerpo superior *i* que contiene las balanzas y la disposición óptica para la observación de éstas. A dicho cuerpo se atornillan los tubos de triple envuelta t_1 y t_2.

Ajustado al extremo superior del eje va un platillo de aluminio *f* y sobre él un aparato de relojería *m*, que por medio de una rueda dentada engrana con una corona dentada fija debajo del platillo sobre un disco, el cual puede a voluntad hacerse solidario del platillo accionando unas palancas *p*. El aparato de relojería es asimismo susceptible de embragarse o desembragarse de la corona manipulando un botón *n*. Desembragado, se obtiene el movimiento rápido, a mano, del platillo y, embragado, el lento automático. Convenientemente espaciados sobre el disco de la corona aparecen

diez tornillos-topes *h*, que al ser atornillados tropiezan con unos trinquetes accionables que producen la detención del movimiento automático de giro. Los topes están distribuidos en un círculo de menor radio que la corona y pueden combinarse entre sí para producir la parada en tres, cuatro o cinco posiciones. En el interior de la caja *m* que contiene el aparato de relojería existe, asimismo, un núcleo electromagnético cuya armadura vertical, al ser atraída, suelta al trinquete correspondiente que por su agarre en ella producía la parada del instrumento. A cada hora se cierra el circuito del electroimán con el auxilio de un reloj eléctrico de contactos, visible en la fotografía 4.ª, que permite el paso de la corriente de un acumulador el tiempo suficiente para salvar el obstáculo del trinquete, al cabo del cual se desimanta la armadura y cae por su peso, quedando preparada para engancharse en el trinquete siguiente y efectuándose mientras tanto un giro suave y lento del instrumento con lo que las balanzas apenas entran en conmoción, bastando ese período de una hora para que tomen la posición de equilibrio que corresponde a cada azimut.

Los hilos de torsión de platino con 10 por 100 de iridio tienen un diámetro de 0,04 milímetros. Estos hilos los adquiere de fábrica el Profesor Schweydar y luego los somete en su laboratorio de Potsdam a un tratamiento especial, cuyo detalle mantiene secreto, con el fin de envejecerlos artificialmente, pues de este modo se consigue que la tendencia que los hilos adquiridos en fábrica muestran a separarse de su posición de equilibrio, disminuye hasta hacerse inapreciable, efecto que en los hilos nuevos sólo se consigue con el tiempo, al cabo de un año, a veces. El principio del tratamiento consiste en lastrar los hilos con un peso igual al que han de sufrir en el aparato y en someterlos a elevaciones graduales de temperatura y a enfriamientos lentos. Schweydar determina, asimismo, el coeficiente de torsión y el coeficiente térmico de cada uno de los hilos que proporciona a los talleres Bamberg para las balanzas en construcción. De cada hilo *H* pende el brazo de la balanza correspondiente (fotografía 5.ª), que es un tubo de aluminio de 40 centímetros de longitud *B*, unido rígidamente por su centro a una varita vertical *V*, donde va fijo un espejito rectangular *S*. Uno de los extremos del brazo lo forma un cilindro horizontal de oro *O*, de 30 gramos, mientras que del extremo opuesto cuelga, al final de un alambre de cobre de 62 centímetros, un contrapeso de latón *C*, relleno de plomo, también de 30 gramos.

Las dos balanzas del aparato adquirido por nuestro Instituto se distinguen una de otra con las letras Q_I y Q_{II}, grabadas sobre las cámaras que contienen los brazos, sobre éstos y sobre los contrapesos de latón respectivos.

El brazo horizontal de cada balanza se mueve dentro de una cámara de oscilación, cuyo fondo, movible en sentido vertical, está constituido por una plancha metálica que apoya sobre dos excéntricas acopladas, que pueden accionarse girando hacia la derecha o hacia la izquierda el botón *r* (fot. 4.ª). A su vez, cerca de los extremos de cada brazo van montadas dos piezas-travesaños, perpendiculares al brazo, de modo que girando el botón a la derecha, empieza a remontarse el fondo hasta tropezar con los travesaños, deteniéndose entonces la oscilación del brazo sin basculeos, y continuando el giro se descarga el hilo de torsión, cesando el movimiento cuando los travesaños tropiezan con el techo de la cámara. Esta es la posición de transporte del instrumento, con las balanzas subidas, que se adopta asimismo, siempre que no esté en funcionamiento.

El hilo de torsión va soldado a dos plaquitas con ranuras, que se fijan con tornillos a una cabeza de torsión y al extremo superior de la varita vertical del brazo.

Las cabezas de torsión gemelas *T* son susceptibles de cuatro movimientos, que en el Apéndice se detallan, y sirven para colocar los brazos de las balanzas en la posición inicial debida.

La observación de los ángulos de torsión se hace por registro fotográfico sobre la parte superior del instrumento. Debajo del aparato registrador están dispuestas dos lamparitas eléctricas Osram *L* (fot. 4.ª), que por el intermedio de prismas de reflexión total envían cada una su luz, filtrada a través de un objetivo circular, de diámetro muy reducido, a dos espejos planos regulables (llamados bock-spiegel, en alemán, que podríamos traducir por *espejos de caballete*, por la forma de ir montados), uno de los cuales es el designado con la letra s_1 en el corte de una de las balanzas, representado en la fotografía 6.ª Ese espejo envía rayos luminosos, a través de una lente, al espejito *s*, del brazo de la balanza y al espejito s_2, fijo a la envolvente más interior. Devueltos esos rayos al espejo s_1, los dirige éste sobre la placa sensible, donde quedan impresionados dos puntos. Análogamente existe para la otra balanza otro espejo similar al s_1, que manda sobre la placa otros dos puntos luminosos, correspondientes a las reflexiones sobre el espejito de la varilla de dicha balanza y sobre otro espejo termómetro, fijo a una placa bimetálica de cobre y hierro. Sobre la placa sensible aparecen los puntos espaciados en una misma línea 1, 2, 3, 4 (fig. 4.ª), una vez hecha la debida corrección de imágenes. Interceptando la marcha de los cuatro rayos reflejados ascendentes, por medio de un espejo que gira a charnela y que se acciona con el botón *s* (fot. 4.ª), se proyectan los puntos sobre una escala graduada de cristal deslustrado *t*, que se observa desde el exterior. La placa fotográfica 6,5 × 9, antihalo, está montada sobre un bastidor, que un aparato de relojería hace mover a la velocidad de tres milímetros por hora. Como los registros de los cuatro puntos se hace de hora en hora, queda así la suficiente separación de una hilera a la siguiente. Cada lamparita va ligada a una resistencia regulable para variar la intensidad del rayo luminoso.



Figura 4.ª

Como elementos complementarios del instrumento existen dos niveles en ángulo recto, uno de ellos designado con la letra *l* en la fotografía 1.ª, una brújula *o* (fot. 4.ª), para la orientación de las balanzas, y una armadura de alambre *g*, sobre la que se monta una cubierta aisladora, de pluma de ganso, que se fija con presillas alrededor del cuerpo superior *i* y de los tubos t_1 y t_2.

El reloj eléctrico *R* (fot. 4.ª) está dispuesto para enviar corriente a las lamparitas durante el minuto 59-60 de cada hora, impresionándose cuatro puntos sobre la placa. Al llegar el minutero al minuto 60 se corta el circuito de las lamparitas y entra en acción el que produce el movimiento azimutal del aparato. Estableciendo un puente entre los dos reóforos r_1 y r_2 del mismo reloj, se obtiene luz permanente en las lamparitas, necesaria para la corrección de las imágenes. Al aparato acompañan tres

dobles enchufes señalados con las letras *B*, *L* y *A*, que ligan entre sí al acumulador, reloj y variómetro, como indica la figura 5.ª

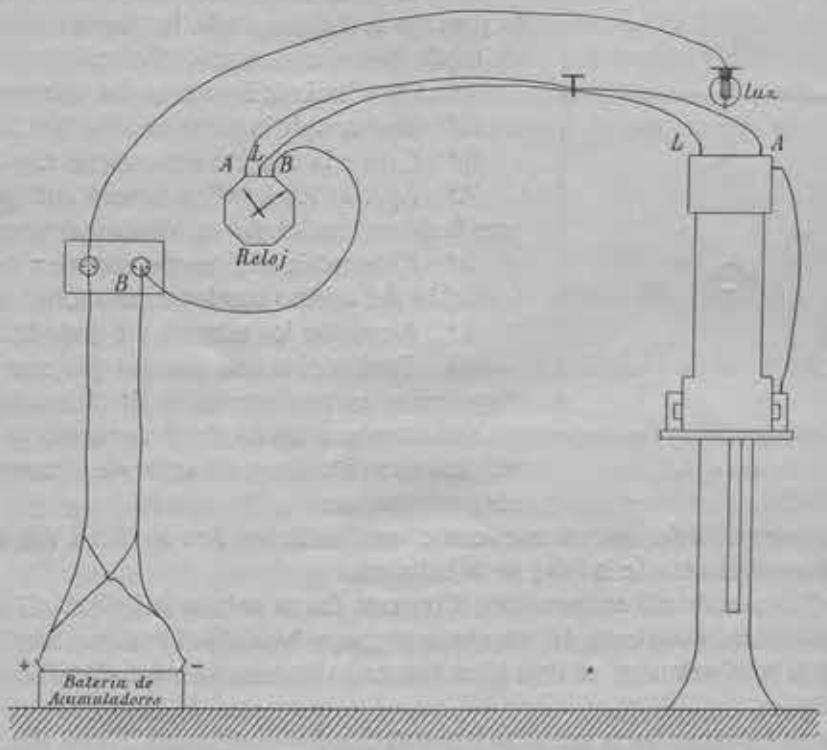


Figura 5.ª

Montura del aparato y funcionamiento.

A continuación expondremos metódicamente la serie de operaciones necesarias para la instalación del variómetro en una estación en el campo.

1.ª Se escoge el punto para estacionar, de modo que en un radio de dos metros, el terreno sea aproximadamente llano. Si la pendiente de éste fuese fuerte por necesidad, se remueve la tierra hasta allanar el terreno, teniendo después cuidado de apisonarlo bien.

2.ª En el punto *O*, centro de la estación, se coloca una plantilla de aluminio (figura 6.ª), clavando en su centro un piquete y comprobando la horizontalidad de dicha plantilla con un nivel de carpintero. Se coloca una brújula (la misma del aparato sirve) encima y se orienta la plantilla hacia el Norte astronómico. Se señala el sitio del terreno sobre el que cae cada uno de los agujeros de la plantilla, y una vez retirada ésta, se clava en cada uno una estaca, procurando introducirlas de modo que las tres caras superiores de las mismas determinen aproximadamente un solo plano horizontal que quede a unos 25 centímetros del terreno. Las estacas deben ser de sección cuadrada en su mitad superior y conviene tener juegos de distinta longitud

para emplearlos según la consistencia del terreno. Sobre las estacas se coloca la plancha de aluminio *a* (fot. 2.ª) que se acaba de nivelar con el nivel de carpintero.

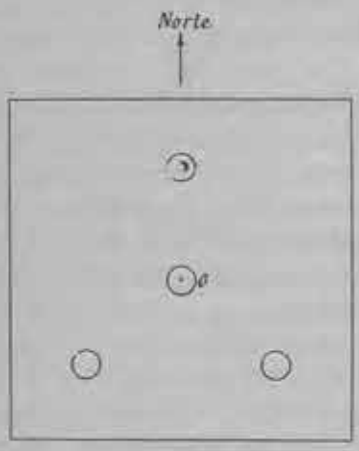


Figura 6.ª

3.ª Colocación de la columna *b* (fot. 2.ª) sobre la plancha *a* distribuyendo los tejos *c* sobre ésta, de modo que vengan a caer encima de cada estaca.

4.ª Giro hacia la izquierda del volante *e*.

5.ª Montura de la parte media *f* (fot. 3.ª).

6.ª Giro a la derecha del volante *e*.

7.ª Apretar los tornillos-topes *h* indispensables para la detención del giro en los azimutes necesarios.

8.ª Colocación del cuerpo superior *i* (fot. 1.ª) y fijación del mismo con los cuatro tornillos *K*.

9.ª Atornillar los tubos t_1 y t_2 (fot. 4.ª).

10. Probar si el instrumento gira suavemente. Regulación, en caso necesario, de dicho movimiento, accionando a través de la ventanilla *g* (fot. 3.ª) sobre un tornillo de graduación de la carga del eje sobre su rangua.

11. Nivelación del instrumento con el auxilio de los dos niveles *l* del mismo y los tornillos nivelantes de la base de la columna.

12. Orientación del instrumento. Con este fin se coloca la brújula *O* sobre su alojamiento correspondiente del cuerpo superior, y bajando el botón *n*, una vez dada la cuerda al reloj azimutal, se deja girar al aparato hasta su parada automática al llegar al tope 0°.

Se giran entonces hacia fuera las tres palancas *p* y se orienta al Norte astronómico asiendo con las manos al disco de la corona dentada. Concluída la orientación se vuelven a girar hacia dentro las tres palancas *p*.

13. Colgar los contrapesos de las balanzas. Para esto se quitan sucesivamente las tres cubiertas de las cámaras de oscilación para dejar al descubierto los extremos de los brazos de las balanzas. El alambre de cobre, del que pende el contrapeso, va soldado por el extremo opuesto a una horquilla que se engancha con una palanquita de forma adecuada y se encaja en una ranura que presenta el extremo del brazo de cada balanza.

14. Establecer las conexiones eléctricas y dar cuerda a los tres aparatos de relojería correspondientes al movimiento azimutal, al bastidor de la placa y al reloj de contactos. Respecto a este reloj, conviene advertir que sus agujas deben girarse siempre en el sentido de la marcha. Un giro en sentido contrario estropearía el mecanismo de los contactos.

15. Soltar las balanzas girando lentamente hacia la izquierda los botones *r* correspondientes hasta que encajen en sus seguros respectivos. Durante todo el movimiento de giro deben agarrarse bien los botones, toda vez que en su interior existen unos muelles, que producirían el retroceso rápido de los botones si éstos se soltasen antes de tiempo, originándose fácilmente la rotura de los hilos de platino. La misma precaución hay que tener cuando los botones se giren a la derecha para detener las balanzas.

16. Conectar con un alambre corto los dos reóforos r_1 y r_2 del reloj de contactos (fot. 4.ª) para tener luz permanente en las lamparitas y observar la situación de los puntos luminosos sobre la escala, una vez girado el botón *s*, que acciona al espejo hasta la palabra «visual», grabada en la envuelta exterior. La escala está dividida en milímetros y numerada en *unidades* (1/2 milímetros). Los cuatro puntos deben aparecer sobre las divisiones 53, 96, 144 y 180, contados de derecha a izquierda, mirando a la escala desde el Norte (fig. 7.ª). La corrección de las imágenes, caso de no coincidir con estas divisiones, es operación prolija, por lo general, que exige el concurso de dos personas. En el Apéndice se da el detalle de esta corrección.



Figura 7.ª

17. Detener las balanzas, girar el botón *s* hasta la palabra «Photo» y cortar el circuito que da luz permanente a las lamparitas.

18. Colocar las cubiertas de pluma sobre las distintas partes del aparato, atornillando previamente la armadura de alambre *a*.

19. Comprobar, por última vez, la nivelación y después el buen funcionamiento del instrumento, a cuyo fin se pasa con la mano el minutero del reloj a una hora exacta y se observa si el aparato gira de la posición I (0°) a la II (120°), y con otro giro de otra hora del minutero, de la II a la III (240°). Al pasar el minutero sobre el minuto 59 se enciende la luz de las lámparas durante el tiempo que tarda en recorrerse ese minuto, y conviene retardar un poco la velocidad con que se gire al minutero al llegar a dicho minuto 59.

Una vez en la posición III se quita la cubierta superior *u* del aparato, se coloca un chasis con placa, se saca la corredera de éste, se vuelve a colocar la cubierta, se quitan las resistencias de las lámparas, caso de estar introducidas para la corrección de imágenes, y se bajan, por último, las balanzas.

Se vuelve a pasar con la mano otra hora del reloj, con lo que el aparato girará a la posición I y se anota entonces la hora de un reloj de bolsillo. Durante una hora el aparato estará quieto, necesitándose ese tiempo para que las balanzas, sacudidas por el último giro, queden en reposo, y transcurrida dicha hora, automáticamente pasará el aparato a la posición II, habiéndose marcado sobre la placa cuatro puntos, correspondientes, como sabemos, a las dos balanzas, espejo fijo y espejo-termómetro, durante el minuto 59-60. Para distinguir unos de otros los puntos señalados por cada balanza, que pueden entrecruzarse con fuertes gradientes, pueden seguirse dos procedimientos. Uno consiste en introducir un poco de resistencia a una de las lámparas, con lo que los puntos correspondientes sobre la placa serán más débiles. Otros operadores emplean un diafragma en el objetivo con taladro de mayor diámetro para una de las balanzas, obteniéndose así puntos más gruesos. Es más recomendable el primer sistema.

Para desmontar el aparato se procede en orden inverso.

Desarrollo del cálculo.

Designemos por n y n' (fig. 8.ª) las distancias (en milímetros y décimas de milímetro) de los puntos marcados de hora en hora por las balanzas Q_I y Q_{II} a los puntos de referencia correspondientes al espejo fijo. Situado el observador al Norte del aparato en su posición inicial, mirando hacia la escala, la balanza Q_{II} cae a su derecha y la Q_I a su izquierda, de modo que a no ser para fuertes ángulos de torsión, las distancias n, traducidas con una escala de cristal que construye Fuess, serán mayores que las n'.

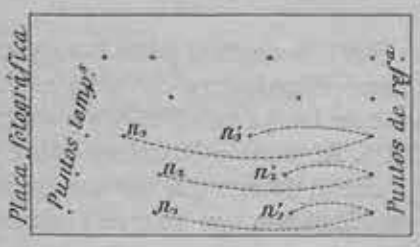


Figura 8.ª

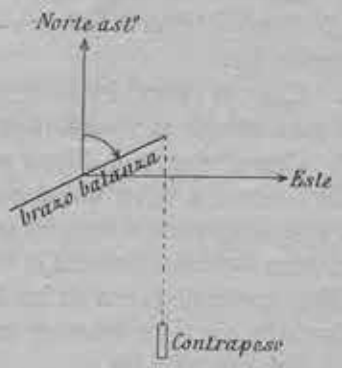


Figura 9.ª

Llamemos n_0 y n'_0 las distancias (incógnitas) que corresponden a la posición de ambas balanzas *sin torsión* de los hilos.

La fórmula para el cálculo es, según ya dijimos, la [**8**], o sea

$$n - n_0 = a \operatorname{sen} 2\alpha \left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2} \right) + 2a \cos 2\alpha \frac{d^2U}{dxdy} - b \operatorname{sen} \alpha \frac{d^2U}{dxdz} + b \cos \alpha \frac{d^2U}{dydz}.$$

En esta fórmula designa α el azimut, contando desde el Norte hacia el Este (fig. 9.ª). Hay que efectuar medidas de n y de n' en tres posiciones de las balanzas. Sobre una de las cubiertas de las cámaras de las balanzas va grabada la letra *N*. El cálculo se desarrolla como sigue:

		Balanza Q_I	Balanza Q_{II}
Posición I.....	*N* en el Norte astronómico.	$\alpha_1 = 180°, n_1$	$\alpha_1 = 0°, n'_1$
Posición II.....	*N* en azimut 120°.....	$\alpha_2 = 300°, n_2$	$\alpha_2 = 120°, n'_2$
Posición III.....	*N* en azimut 240°.....	$\alpha_3 = 60°, n_3$	$\alpha_3 = 240°, n'_3$

INSTITUTO GEOGRÁFICO BIBLIOTECA

$$n_0 = \frac{1}{3}(n_1 + n_2 + n_3), \qquad n'_0 = \frac{1}{3}(n'_1 + n'_2 + n'_3)$$

$$\left.\begin{aligned} n_1 - n_0 &= \Delta_1 \\ n_2 - n_0 &= \Delta_2 \\ n_3 - n_0 &= \Delta_3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} n'_1 - n'_0 &= \Delta'_1 \\ n'_2 - n'_0 &= \Delta'_2 \\ n'_3 - n'_0 &= \Delta'_3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \\ &\\ &\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 10^{+9} \times \frac{d^2U}{dx\,dz} &= U_{xz} = \frac{dg}{dx} = \frac{a'}{2\,\mathrm{sen}\,60^\circ\,(a'b + ab')}\left[\Delta_2 - \Delta_3 - \frac{a}{a'}(\Delta'_2 - \Delta'_3)\right] \\ 10^{+9} \times \frac{d^2U}{dy\,dz} &= U_{yz} = \frac{dg}{dy} = \frac{a'}{a'b + ab'}\left[\Delta_2 - \Delta_3 - \frac{a}{a'}(\Delta'_2 + \Delta'_3)\right] \\ 10^{+9} \times \frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2} &= U_\Delta = -\frac{b'}{2\,\mathrm{sen}\,60^\circ\,(ab' + a'b)}\left[\Delta_2 - \Delta_3 + \frac{b}{b'}(\Delta'_2 - \Delta'_3)\right] \\ 10^{+9} \times \frac{d^2U}{dx\,dy} &= U_{xy} = -\frac{b'}{2(ab' + a'b)}\left[\Delta_2 + \Delta_3 + \frac{b}{b'}(\Delta'_2 + \Delta'_3)\right] \end{aligned}\right\}, \quad [9]$$

Las constantes a, b, a', b', se calculan por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{D}{\tau} K \\ b &= \frac{2D}{\tau} m l h \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a' &= \frac{D}{\tau'} K' \\ b' &= \frac{2D}{\tau'} m' l h' \end{aligned}\right\}, \qquad [10]$$

en las que representan:

K y K' los momentos de inercia de las balanzas;

τ y τ' los momentos de torsión de los hilos de platino;

m y m' los gramos que pesan los contrapesos;

l la distancia del eje de giro de cada balanza al punto de suspensión de los contrapesos;

h y h' las distancias de los centros de gravedad de los contrapesos a sus puntos de suspensión;

D la distancia del espejo de cada balanza a la placa fotográfica.

Todas estas cantidades se expresan en el sistema C. G. S. (centímetros, gramos, segundos).

Determinación de K y K', o sea de K_{Q_I} y $K_{Q_{II}}$.

Se emplea una balanza auxiliar cuyo alambre de torsión es de latón, estando determinado previamente su coeficiente de torsión que figura como constante y dato de dicha balanza.

El valor de

$$K_{Q_I} = \frac{t^2_{Q_I}}{\pi^2} \times \tau_a \qquad \text{y} \qquad K_{Q_{II}} = \frac{t^2_{Q_{II}}}{\pi^2} \times \tau_a, \qquad [11]$$

en las que t_{Q_I} y $t_{Q_{II}}$ son los valores de las duraciones de oscilación de las balanzas Q_I y Q_{II} suspendidas del alambre de latón de coeficiente conocido τ_a. Estas duracio-

nes se aprecian con un anteojo provisto de escala, cuyas divisiones se leen mirando al espejito de la balanza auxiliar que envía reflejada la imagen de la escala.

El Ingeniero que suscribe auxilió durante varios días al de los talleres Bamberg Herr Reimecke, en la determinación de los valores K_{Q_I} y $K_{Q_{II}}$.

Se tomó como valor de τ_a el de

$$\tau_a = \pi^2 \times 170162,$$

y los promedios de varias observaciones de duraciones de oscilación para cada balanza fueron

$$t_{Q_I} = 38^s,991 \qquad \text{y} \qquad t_{Q_{II}} = 38^s,928,$$

con los que resultan para valores de los momentos de inercia

$$K_{Q_I} = 25789,7 \qquad \text{y} \qquad K_{Q_{II}} = 25794,4.$$

Determinación de τ y τ', o sea de τ_{Q_I} y $\tau_{Q_{II}}$.

En el Apéndice puede verse el método que siguen en los talleres Bamberg para averiguar los coeficientes de torsión de los alambres de platino-iridio de las balanzas que se construyen. Ahora bien, los valores de los coeficientes así determinados deben coincidir con los que Schweydar calcula para los mismos alambres y que desde luego proporciona. Para la balanza Q sólo hay un valor medio de τ para las dos balanzas, toda vez que por provenir los dos alambres del mismo carrete poseen indéntico coeficiente de torsión. Este es

$$\tau = 0,541.$$

Las demás cantidades necesarias para el cálculo de las a, b, a' y b', tienen los siguientes valores para la balanza Q:

$$\left.\begin{array}{l} m_{Q_I} = 30,16 \text{ gr.} \\ m_{Q_{II}} = 30,23 \text{ gr.} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} h_{Q_I} = h_{Q_{II}} = 63,3 \text{ cm.} \\ l_{Q_I} = l_{Q_{II}} = 20 \text{ cm.} \end{array}\right\} \quad D = 1581,4 \text{ unidades (medios milímetros).}$$

En posesión de estos datos pueden calcularse las fórmulas [**10**], obteniéndose los siguientes resultados:

$$\left.\begin{array}{l} a = 0,0754 \times 10^9 \\ b = 0,2197 \times 10^9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a' = 0,0754 \times 10^9 \\ b' = 0,2202 \times 10^9 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas [**9**] y calculando los coeficientes funciones de a, b, a' y b', obtendremos las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(cm.) } U_{xz} = 1,31 \times [\Delta_2 - \Delta_3 - (\Delta'_2 - \Delta'_3)] \times 10^{-9} \\ \text{(cm.) } U_{yz} = 2,27 \times [\Delta_2 + \Delta_3 - (\Delta'_2 + \Delta'_3)] \times 10^{-9} \\ \text{(cm.) } U_{\Delta} = -3,83 \times [\Delta_2 - \Delta_3 + 0,9977\,(\Delta'_2 - \Delta'_3)] \times 10^{-9} \\ \text{(cm.) } U_{xy} = -3,32 \times [\Delta_1 + \Delta_3 + 0,9977\,(\Delta'_2 + \Delta'_3)] \times 10^{-9} \end{array}\right\}. \qquad [12]$$

En la práctica se simplifica el empleo de estas fórmulas considerando igual a 1 los coeficientes 0,9977.

Ejemplo práctico.

Adjunta reproducimos una de las placas tiradas en Berlín, el 22 de Junio de 1923 (fig. 10). La balanza se montó en el interior de una caseta de madera instalada en un jardín contiguo a los talleres Bamberg. El aparato funcionó durante cuatro horas seguidas, marcándose cuatro hileras de cuatro puntos en la placa. Traducidas las distancias n, n' sobre la placa con una escala Fuess, se dispuso el cálculo como sigue:

Estado I.

HORA	POSICIÓN	BALANZA Q_I					BALANZA Q_{II}					TEMPERATURAS	
		Unidades.	n_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Unidades.	n'_0	Δ'_1	Δ'_2	Δ'_3	Unidades.	Grados.
1,10	I	100,0	(100,0)	− 0,4			31,6	(34,1)	− 2,5			126,6	10,0
2,10	2	95,0	100,7		− 5,7		38,9	34,1		+ 4,8		125,3	9,35
3,10	3	107,0	101,0			+ 6,0	31,9	34,1			− 2,2	124,2	8,80
4,10	1	100,9	(101,2)	− 0,3			31,5	(34,1)	− 2,6			123,5	8,45
				− 0,3	− 5,7	+ 6,0			− 2,6	+ 4,8	− 2,2		

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \qquad \Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 - \Delta_3 &= -11{,}7 \\ \Delta'_2 - \Delta'_3 &= +\ 7{,}0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \Delta_2 + \Delta_3 &= +0{,}3 \\ \Delta'_2 + \Delta'_3 &= +2{,}6 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta_2 - \Delta_3 - (\Delta'_2 - \Delta'_3) = -18{,}7 \qquad -2{,}3 = \Delta_2 + \Delta_3 - (\Delta'_2 + \Delta'_3)$$

$$\Delta_2 - \Delta_3 + (\Delta'_2 - \Delta'_3) = -\ 4{,}7 \qquad +2{,}9 = \Delta_2 + \Delta_3 + (\Delta'_2 + \Delta'_3)$$

$$\Delta_2 - \Delta_3 - (\Delta'_2 - \Delta'_3) \times \ 1{,}31 = -24{,}5 \times 10^{-9} = U_{xz}$$

$$\Delta_2 + \Delta_3 - (\Delta'_2 + \Delta'_3) \times \ 2{,}27 = -\ 5{,}2 \times 10^{-9} = U_{yz}$$

$$\Delta_2 - \Delta_3 + (\Delta'_2 - \Delta'_3) \times -3{,}83 = +18{,}0 \times 10^{-9} = U_{\Delta}$$

$$\Delta_2 + \Delta_3 + (\Delta'_2 + \Delta'_3) \times -3{,}32 = -\ 9{,}6 \times 10^{-9} = U_{xy}$$

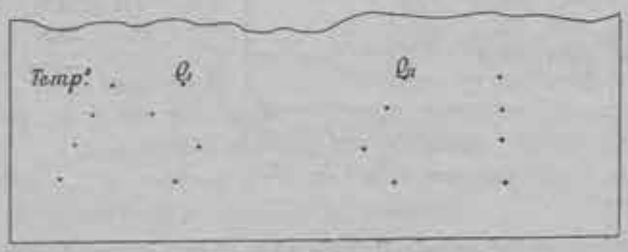


Figura 10.

Para deducir estos valores de las U se ha prescindido de corregir las distancias n, n' de la variación que experimentan por la variación de temperatura durante el funcionamiento de la balanza. Ordinariamente, y para cambios poco bruscos de tem-

peratura, puede prescindirse de esta corrección. Conviene, sin embargo, indicar la manera de calcular dicha influencia de la temperatura para cuando convenga tenerla en cuenta.

Los valores de n y n' en cada posición se reducen a la temperatura inicial. Para esto hay que tener en cuenta que por cada grado de aumento o disminución que experimenta en su temperatura la placa bimetálica, el punto marcado por el espejo correspondiente se corre una división a la izquierda o a la derecha de su posición inicial, 180, sobre la escala. Se puede, pues, establecer la equivalencia siguiente:

$$1^\circ >< 1 \text{ división escala} \quad \text{ó} \quad 2 \text{ unidades.}$$

Por otra parte los coeficientes térmicos para los alambres de torsión montados en el aparato son:

$$\text{Balanza } Q_I = -0{,}52 \text{ unidades.} \qquad \text{Balanza } Q_{II} = -0{,}48 \text{ unidades.}$$

Estos coeficientes indican la corrección de las n y n' por variación de 1° en la temperatura.

En la experiencia del día 22 de Junio antes mencionada, puede observarse que los puntos sucesivos de temperaturas correspondientes a cada hora no están en la misma vertical, sino que se inclinan hacia la derecha, indicando una disminución sucesiva de temperatura. Para la reducción a la temperatura inicial, o sea la correspondiente a los puntos señalados en la primera hora, que en dicho día fué de 10° C., se procede como sigue:

Estado II.

TEMPERATURAS		BALANZA Q_I						BALANZA Q_{II}					
Unidades.	Grados.	Unidades.	Corregidas.	n_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Unidades.	Corregidas.	n'_0	Δ'_1	Δ'_2	Δ'_3
126,6	10°,00	100,0	100,0	(100,4)	— 0,4			31,6	31,6	(33,7)	— 2,1		
125,3	9 ,35	95,0	94,7	100,4		— 5,7		38,9	38,6	33,8		+ 4,8	
124,2	8 ,80	107,0	106,4	100,4			+ 6,0	31,9	31,3	33,6			— 2,3
123,5	8 ,45	100,9	100,1	(100,4)	— 0,3			31,5	30,8	(33,7)	— 2,9		
					— 0,3	— 5,7	+ 6,0				— 2,5	+ 4,8	— 2,3
					$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0$						$\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = 0$		

La primera columna del estado II indica las distancias en la placa de los puntos señalados por el espejo-termómetro a los puntos de referencia del espejo fijo.

La segunda columna se deduce estableciendo las siguientes proporciones:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si a 2 unidades corresponde 1° de variación,}\\ \text{a 1,3 unidades} = 126{,}6 - 125{,}3 \text{ corresponderá } x\end{array}\right\} \; x = 0^\circ{,}65,$$

luego la temperatura correspondiente será 10° — 0°,65 o sea 9°,35. Análogamente se tendrá para la III y la I posición repetida

$$\left.\begin{array}{ll} 2 \text{ unidades} \ldots\ldots & 1^{\circ} \\ 1{,}1 \ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}\right\} x = -0^{\circ},55 \qquad \left.\begin{array}{ll} 2 \text{ unidades} \ldots\ldots & 1^{\circ} \\ 0{,}7 \ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}\right\} x = -0^{\circ},35.$$

Teniendo ahora en cuenta los valores de los coeficientes térmicos se establecerán otra serie de nuevas proporciones

$$\left.\begin{array}{ll} -0^{\circ},52 \ldots\ldots & 1^{\circ} \\ x \ldots\ldots\ldots\ldots & 0^{\circ},65 \end{array}\right\} x = -0^{\circ},34 \qquad \left.\begin{array}{ll} -0^{\circ},48 \ldots\ldots & 1^{\circ} \\ x \ldots\ldots\ldots\ldots & 0^{\circ},65 \end{array}\right\} x = -0^{\circ},31$$

que son las cantidades en que hay que corregir las distancias 95,0 y 38,9 deducidas para las dos balanzas en la posición II.

Análogamente para 8°,80 y 8°,45, las correcciones serán, respectivamente,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Balanza } Q_{\text{I}} \ldots\ldots\ldots & -0{,}62 \\ \text{Balanza } Q_{\text{II}} \ldots\ldots\ldots & 0{,}58 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} \text{Balanza } Q_{\text{I}} \ldots\ldots\ldots & -0{,}81 \\ \text{Balanza } Q_{\text{II}} \ldots\ldots\ldots & -0{,}74 \end{array}$$

Aplicando estas correcciones se obtienen las columnas encabezadas con la palabra «Corregidas» del estado II. El cálculo se prosigue después del mismo modo que en el estado I, pudiendo apreciarse que en este caso se obtienen los mismos valores para las Δ y Δ', se tenga en cuenta o no la temperatura.

Cálculo de la acción del terreno.

Con los valores de las U así deducidos con auxilio de la balanza podrían calcularse el gradiente gravífico, radio de curvatura, etc., que corresponden al sitio de observación, pero las magnitudes gravíficas que así se dedujesen no interesan al geodesta, toda vez que son perturbadas por la acción de las masas próximas a la estación. Precisa, pues, calcular dicha influencia que Eötvös denomina *acción del terreno*. Llamando *valor total* de las U el que resulta de las observaciones y en el que se reflejan todas las acciones, se denomina *valor topográfico* el que resulta de restar del valor total la acción del terreno.

Para el cálculo de dicha acción, hay necesidad de efectuar en cada estación una serie de nivelaciones radiales en ocho direcciones, y colocando la mira en círculos que distan 5, 20, 50 y 100 metros de la estación, como se indica en la figura 11. En la práctica, una vez orientada la plantilla que fija la separación de las estacas en cada estación, se clava a cinco metros del centro de dicha plantilla, y en la dirección Norte, un piquete, a partir del cual se empieza la nivelación.

Para ello se quita la plantilla colocando en su lugar un teodolito y anotando la altura del aparato. Sucesivamente se sitúa la mira en los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 de cada círculo. Las diferencias de altura de los puntos 1, 2, 3 ..... 8 respecto a la estación, se designan con las letras ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ..... ξ_8, que se consideran positivas cuando el terreno circundante es más alto que la estación, y negativas en caso contrario. Se necesita llevar dos cuadros en cada estación, de esta forma:

Cuadro I.

	Altura teodolito = 55 cm.			
	LECTURAS DE MIRA			
	$\rho = 5$ m.	$\rho = 20.$	$\rho = 50.$	$\rho = 100.$
0°	68	41	22	33
45°	80	43	46	27
90°	25	52	33	44
135°	23	68	56	57
180°	24	33	58	59
225°	25	45	70	33
270°	40	66	68	45
315°	52	70	44	63

Cuadro II.

	Azimut.	$\rho = 5$ m.	$\rho = 20.$	$\rho = 50.$	$\rho = 100.$
		cm.			
ξ_1	0°	− 13	+ 14	+ 33	+ 22
ξ_2	45°	− 25	+ 12	+ 9	+ 28
ξ_3	90°	+ 30	+ 3	+ 17	+ 11
ξ_4	135°	+ 32	− 13	− 1	− 2
ξ_5	180°	+ 31	+ 22	− 3	− 4
ξ_6	225°	+ 31	+ 10	− 15	+ 26
ξ_7	270°	+ 15	− 11	− 13	+ 10
ξ_8	315°	+ 3	− 15	+ 11	− 8



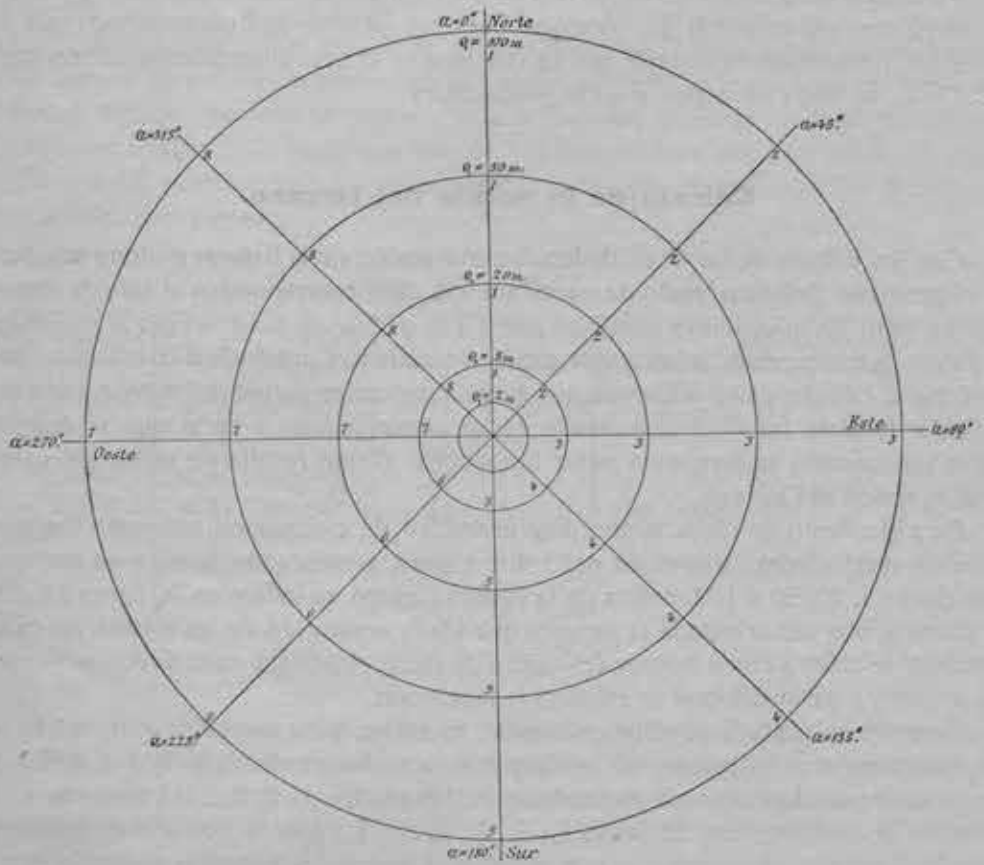


Figura 11.

En las fórmulas que Eötvös da para calcular la acción del terreno figuran, además de la ξ las cantidades ε y k que representan: inclinación en dirección Norte-Sur de la superficie del terreno en un radio de dos metros a partir del punto de estación, y k la inclinación de la misma superficie en dirección Este-Oeste. Prácticamente se deducen en cada estación los valores correspondientes de ε y k, apoyando horizontalmente la mira sobre la plancha de aluminio y midiendo el desnivel del terreno con respecto a la mira, como indica la figura 12.

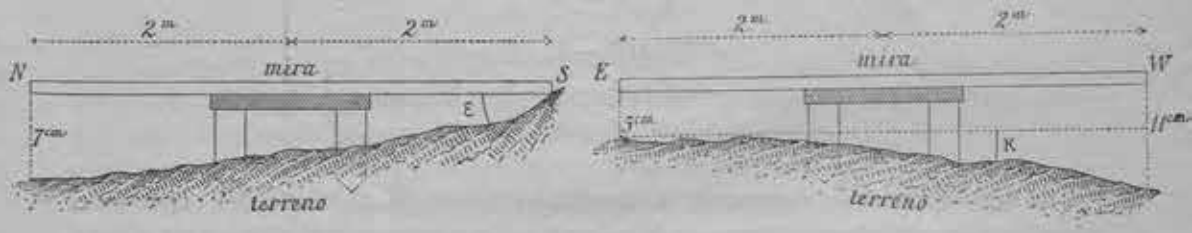


Figura 12

$$N\text{-}S \begin{cases} 2\text{ m.... } 7\text{ cm.} \\ 2\text{ m.... } 0\text{ cm.} \end{cases} \operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{7}{400} \qquad \varepsilon = -1°,00$$

$$E\text{-}W \begin{cases} 2\text{ m.... } 11\text{ cm.} \\ 2\text{ m.... } 5\text{ cm.} \end{cases} \operatorname{tg}k = +\frac{11-5}{400} \qquad k = +51'\text{-}30''$$

Los valores de ε y k no deben exceder de 1°.

Las fórmulas propuestas por Eötvös para terrenos donde la pendiente no exceda de 7° a 8° y que aparecen publicadas en la página 24 de su folleto *Bestimung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit hülfe der Drehwage,* han sido ligeramente modificadas por el profesor Schweydar. Son como siguen:

$$\begin{aligned} U_{xz} \times 10^{+9} = \frac{\sigma}{1{,}8} \Big[& 5{,}79\,\varepsilon^0 + \Big\{ 0{,}0379\,\varepsilon\,(\xi_1 + \xi_5) + 0{,}0061\,\varepsilon\,(\xi_3 + \xi_7) + \\ & + 0{,}0221\,\varepsilon\,(\xi_2 + \xi_4 + \xi_6 + \xi_8) + 0{,}016\,k\,(\xi_2 + \xi_6 - \xi_4 - \xi_8) \Big\}_{\rho = 5\text{ m.}} \\ & + \Big\{ 0{,}1305\,(\xi_1 - \xi_5) + 0{,}0922\,(\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 - \xi_6) \Big\}_{\rho = 5\text{ m.}} \\ & + \Big\{ 0{,}0117\,(\xi_1 - \xi_5) + 0{,}0083\,(\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 - \xi_6) \Big\}_{\rho = 20\text{ m.}} \\ & + \Big\{ 0{,}0011\,(\xi_1 - \xi_5) + 0{,}00077\,(\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 - \xi_6) \Big\}_{\rho = 50\text{ m.}} \\ & + \Big\{ 0{,}00028\,(\xi_1 - \xi_5) + 0{,}00020\,(\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 - \xi_6) \Big\}_{\rho = 100\text{ m.}} \Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{yz} \times 10^{+9} = \frac{\sigma}{1{,}8} \Big[& 5{,}79\,k^0 + \Big\{ 0{,}0379\,k\,(\xi_3 + \xi_7) + 0{,}0061\,k\,(\xi_1 + \xi_5) + \\ & + 0{,}0221\,k\,(\xi_2 + \xi_4 + \xi_6 + \xi_8) + 0{,}016\,\varepsilon\,(\xi_2 + \xi_6 - \xi_4 - \xi_8) \Big\}_{\rho = 5\text{ m.}} \\ & + \Big\{ 0{,}1305\,(\xi_3 - \xi_7) + 0{,}0922\,(\xi_2 + \xi_4 - \xi_6 - \xi_8) \Big\}_{\rho = 5\text{ m.}} \\ & + \Big\{ 0{,}0117\,(\xi_3 - \xi_7) + 0{,}0083\,(\xi_2 + \xi_4 - \xi_6 - \xi_8) \Big\}_{\rho = 20\text{m.}} \\ & + \Big\{ 0{,}0011\,(\xi_3 - \xi_7) + 0{,}00077\,(\xi_2 + \xi_4 + \xi_6 - \xi_8) \Big\}_{\rho = 50\text{ m.}} \\ & + \Big\{ 0{,}00028\,(\xi_3 - \xi_7) + 0{,}00020\,(\xi_2 + \xi_4 + \xi_6 - \xi_8) \Big\}_{\rho = 100\text{ m.}} \Big] \end{aligned} \qquad [13]$$

$$
\left.\begin{aligned}
U'_{\Delta} \times 10^{+9} = &- 0{,}4826\,(\xi_1 - \xi_3 + \xi_5 - \xi_7)_{\rho = 5\ \text{m.}} \\
&- 0{,}0819\,(\xi_1 - \xi_3 + \xi_5 - \xi_7)_{\rho = 20\ \text{m.}} \\
&- 0{,}0318\,(\xi_1 - \xi_3 + \xi_5 - \xi_7)_{\rho = 50\ \text{m.}} \\
&- 0{,}0308\,(\xi_1 - \xi_3 + \xi_5 - \xi_7)_{\rho = 100\ \text{m.}} \\
&- 0{,}00403\,(\xi_1 \quad \xi_3 + \xi_5 - \xi_7)_{\rho = 1.000\ \text{m.}} \\
2U'_{xy} \times 10^{+9} = &+ 2413\,(\xi_2 - \xi_4 + \xi_6 - \xi_8)_{\rho = 5\ \text{m.}} \\
&+ 0{,}0410\,(\xi_2 - \xi_4 + \xi_6 - \xi_8)_{\rho = 20\ \text{m.}} \\
&+ 0{,}0159\,(\xi_2 - \xi_4 + \xi_6 - \xi_8)_{\rho = 50\ \text{m.}} \\
&+ 0{,}0154\,(\xi_2 - \xi_4 + \xi_6 - \xi_8)_{\rho = 100\ \text{m.}} \\
&+ 0{,}0021\,(\xi_2 - \xi_4 + \xi_6 - \xi_8)_{\rho = 1.000\ \text{m.}}
\end{aligned}\right\} \quad [13]
$$

En estas fórmulas σ representa la densidad del terreno deducida del examen de rocas, arenas, etc., que aparecen en la superficie. Puede deducirse el valor de σ consultando las tablas de Gauss.

Gradiente máximo horizontal.

Supongamos que aplicadas las fórmulas [13] a una estación determinada, se obtienen los siguientes valores:

$$
\left.\begin{aligned} U'_{xz} &= -28{,}2 \\ U'_{yz} &= -\ 2{,}2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} U'_{\Delta} &= -3{,}5 \\ U'_{xy} &= -6{,}7 \end{aligned}\right\}
$$

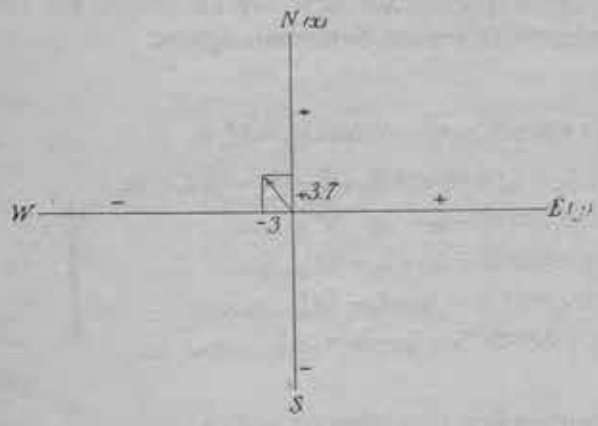


Figura 13.

Sean las U que corresponden a la misma

$$
\left.\begin{aligned} U_{xz} &= -24{,}5 \\ U_{yz} &= -\ 5{,}2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} U_{\Delta} &= +\ 18 \\ U_{xy} &= -\ 9{,}6 \end{aligned}\right\}
$$

Restando las U' de las U se obtienen los siguientes *valores topográficos:*

$$
\left.\begin{aligned} U_{xz} - U'_{xz} &= +3{,}7 \\ U_{yz} - U'_{yz} &= -3{,}0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} U_{\Delta} - U'_{\Delta} &= +21{,}5 \\ U_{xy} - U'_{xy} &= -\ 2{,}9 \end{aligned}\right\}
$$

Con estos valores topográficos se representa gráficamente el gradiente. Como escala para el mismo se adopta 1 mm. $= 1{,}10^{-9}$, con lo cual los valores de $U_{xz} = \frac{dg}{dx}$ y de $U_{yz} = \frac{dg}{dy}$ se pueden construir con una regla graduada en milímetros. En el

ejemplo que consideramos, el gradiente estará representado en magnitud y dirección por la flecha dibujada en la figura 13. Numéricamente vale $\sqrt{3{,}7^2 + 3^2}$ y se denomina, como dijimos, *gradiente máximo horizontal.*

Determinación del Δg y deducción del valor de la gravedad.

Estos gradientes máximos, deducidos en cada estación, nos permiten calcular, *sub conditione,* el valor de g en cada una, partiendo de una estación donde se haya determinado previamente la gravedad por observaciones pendulares.

En teoría es evidente que si se determinase el gradiente para cada uno de los puntos de una superficie de nivel, las diferencias de la gravedad Δg de uno a otro punto, cantidades de naturaleza finita, se calcularían por integración. Como no es humanamente posible estacionar con la balanza en todos y cada uno de los puntos de una superficie de nivel, dichas diferencias Δg sólo cabe calcularlas aproximadamente, cuando estén lo suficientemente próximas una de otra las estaciones, para que el gradiente entre dos consecutivas pueda considerarse como función lineal de las coordenadas. El Δg entre dos estaciones consecutivas será igual entonces al producto de la semisuma de las proyecciones de los gradientes en dichas estaciones sobre la recta que las une por la distancia entre ambas.

Supongamos, por ejemplo, que partimos de Madrid, donde g es conocido, y determinamos una serie de estaciones 1, 2, etc. con la balanza (fig. 14). Como no se

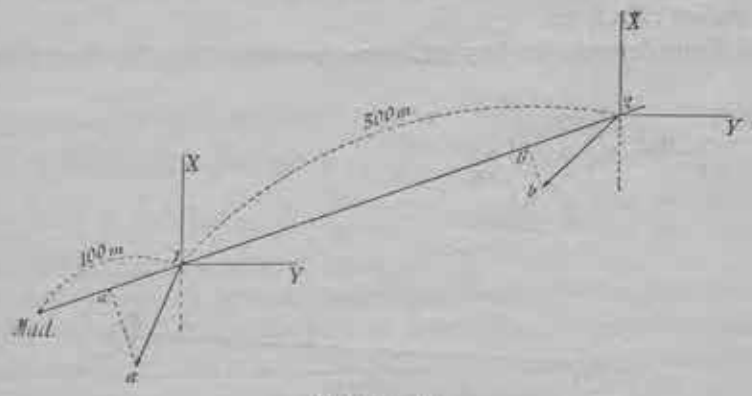


Figura 14.

puede estacionar con este aparato en el mismo local del péndulo, pues su empleo exige alejarse de todo edificio, la primera estación de la balanza estará a una cierta distancia de la pendular, aceptando para ésta el valor del gradiente en aquélla. Unamos con una recta las estaciones 1 y 2 y proyectemos con una escuadra los extremos de los gradientes a y b sobre aquélla. Los valores de las proyecciones $1 - a'$ y $2 - b'$ se determinan con la misma regla de milímetros que sirve para dibujar los gradientes

máximos. Sean $1 - a' = -18$ y $2 - b' = -22$. Admitamos para la estación 3 el valor $3 - c' = -35$. Tendremos entonces:

	s = distancia.	Gradientes.		Valor medio.	Δg
Estación.... 1 ⟶ 2	500 m.	−18	−22	−20	−0,001
Idem..... 2 ⟶ 3	500 m.	−22	−35	−28	−0,001

Δg entre las estaciones 1 y 2 se obtiene multiplicando el valor medio de los gradientes en 1 y 2 por la distancia en centímetros. $\Delta g = -20.10^{-9} \times 50000$ centímetros $= -10^{-3} = -0{,}001$ cm./seg. Análogamente se deduce Δg entre 2 y 3.

Deducidos los Δg se pueden calcular las g. La fórmula correspondiente es:

$$(g)_{est\,1} = g_{Mad} + \overbrace{s^{cm.}_{Mad.1} \times \text{grad}_{est\,1}}^{\Delta g} + \Delta h^{cm.} \times \frac{dg}{dz}, \qquad [14]$$

en la que g es la gravedad observada;
s representa la distancia entre Madrid y la estación 1;
Δh es la diferencia de altura entre Madrid y la estación 1;
$\frac{dg}{dz} = 3086.10^{-9}$.

Para la estación 2, la fórmula es:

$$(g)_{est\,2} = g_{est\,1} + \overbrace{\tfrac{1}{2}(\text{grad}_{est\,1} + \text{grad}_{est\,2}) \times s_{1.2}}^{\Delta g} + \Delta h_{1.2} \times \frac{dg}{dz}, \qquad [15]$$

en la que $s_{1.2}$ indica la distancia entre las estaciones 1 y 2 ó $\Delta h_{1.2}$ la diferencia de alturas entre ambas estaciones.

Ejemplo: Considerando las tres estaciones sucesivas (fig. 15), Madrid (pendular) y

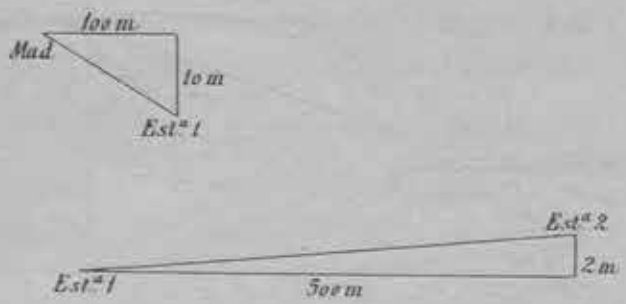


Figura 15.

las 1 y 2 con la balanza, cuyos perfiles longitudinales se representan adjuntos con los valores de los gradientes que quedan consignados más arriba, se calcularán las g como sigue:

$$g_{est\,1} = 979{,}981\ (g\,\text{Madrid}) + 10000^{cm.} \times -18^{-9} + 1000^{cm.} \times 3086.10^{-9} = 979{,}984$$
$$g_{est\,2} = 979{,}984 - 0^{cm.}{,}001\ (\Delta g) - 200 \times 3086.10^{-9} = 979{,}982.$$

La distancia normal entre dos estaciones es de unos 500 a 1.500 metros. Cuando se trate de ligar por medio de las observaciones con la balanza dos puntos en los que se haya determinado g con el péndulo, aconseja Schweydar cerciorarse en las primeras estaciones del paralelismo de los gradientes, mediante estaciones repetidas con intervalos de 50 a 100 metros. Si resultase dicho paralelismo partiendo de una primera estación doble, se efectuará la siguiente, también doble, a 500 metros de la primera y se calcula el resultado. Si siguiesen paralelos los gradientes puede ya seguirse con estaciones sencillas a la distancia corriente. Pero si en la estación resultase un gradiente en la dirección a y el otro en la b (fig. 16), debe buscarse un terreno mejor para operar con la balanza. Supongamos que se conozca el valor de la gravedad en las estaciones A y B (fig. 17) que se ligan entre sí por seis estaciones de balanza. Sean a 1, c 2, g 3, p 4, q 5, y t 6 los valores topográficos de los gradientes máximos.

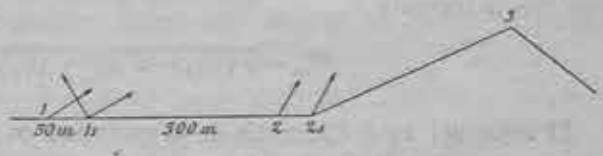


Figura 16.

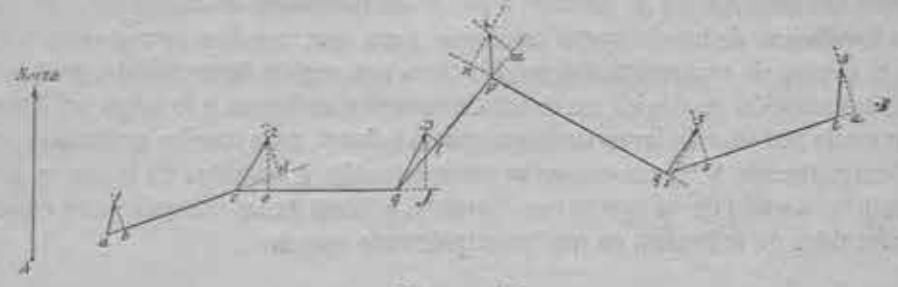


Figura 17.

Las proyecciones de estos gradientes sobre la recta que une cada dos estaciones consecutivas son: para las estaciones a y c $\left\{\begin{matrix} ab \longrightarrow \\ cd \longrightarrow \end{matrix}\right\}$, para las c y g $\left\{\begin{matrix} ce \longrightarrow \\ gf \longrightarrow \end{matrix}\right\}$, para las g y p $\left\{\begin{matrix} gf \longrightarrow \\ pm \longrightarrow \end{matrix}\right\}$, para las p y q $\left\{\begin{matrix} pn \longleftarrow \\ qr \longrightarrow \end{matrix}\right\}$ y para las q y t $\left\{\begin{matrix} qs \longrightarrow \\ tu \longrightarrow \end{matrix}\right\}$. Con estas proyecciones así tomadas se calculan los Δg.

El valor que se deduzca para B, como consecuencia de las observaciones con la balanza, debe ser igual al que dé para B la observación pendular. Generalmente habrá una diferencia entre los dos valores debido a la acumulación de errores. Cuando se trate de una diferencia o error admisible se repartirá por igual entre los Δg, lo mismo que en una nivelación.

Se puede seguir también el procedimiento de cálculo, desde luego más exacto que el gráfico, para deducir los valores de los Δg.

La dirección del gradiente gravimétrico respecto al meridiano astronómico, se deduce de la fórmula

$$\text{tang } \omega = \frac{U_{yz} - U'_{yz}}{U_{xz} - U'_{xz}}, \qquad \textbf{[16]}$$

resultando determinado el cuadrante de ω por las relaciones

$$\cos\omega = \frac{U_{xz} - U'_{xz}}{G_m} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{U_{yz} - U'_{yz}}{G_m}, \qquad [17]$$

en las que G_m indica el gradiente máximo horizontal, determinado, como antes se dijo, por la fórmula

$$G_m = \sqrt{(U_{xz} - U'_{xz})^2 + (U_{yz} - U'_{yz})^2}. \qquad [18]$$

El valor del Δg o diferencia de la gravedad en sentido vertical entre dos estaciones sucesivas A y B, se obtiene por la expresión

$$\left.\begin{aligned} \Delta g = g_B - g_A = \frac{d}{2}\Big[&\Big\{(U_{xz} - U'_{xz})_B + (U_{xz} - U'_{xz})_A\Big\}\cos\theta + \\ &+ \Big\{(U_{yz} - U'_{yz})_B + (U_{yz} - U'_{yz})_A\Big\}\operatorname{sen}\theta\Big] \end{aligned}\right\}, \qquad [19]$$

en la que A denota la estación origen, d la distancia en centímetros entre A y B y θ el azimut del lado AB en A, contado a partir del meridiano astronómico.

La condición deducida como necesaria para que puedan averiguarse los Δg, limita el campo de esta aplicación geodésica en una región determinada, pues precisa que su constitución geológica sea lo suficientemente uniforme a lo largo del itinerario determinado por las estaciones sucesivas con la balanza, para que los gradientes varíen proporcionalmente a las coordenadas entre estación y estación. El barón v. Eötvös sacó mucho partido de su aparato en Hungría, a causa de las excepcionales condiciones favorables de la llanura en que principalmente operó.

Representación gráfica de las magnitudes $\left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}\right)$ y $\frac{d^2U}{dxdy}$.

Anteriormente se han indicado las fórmulas [2] y [3]. Estas permiten realizar una representación gráfica de las cantidades $\left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}\right)$ y $\frac{d^2U}{dxdy}$, obtenidas también como resultado de la observación con la balanza.

Con este fin, si ρ_1 y ρ_2 designan, respectivamente, el menor y mayor de los radios principales de curvatura y establecemos la relación

$$g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = R,$$

en la que R es una cantidad siempre positiva, resultará:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2} &= -R\cos 2\lambda \\ \frac{d^2U}{dxdy} &= \frac{1}{2}R\operatorname{sen}2\lambda \end{aligned}\right\}. \qquad [20]$$

De estas dos ecuaciones se deducirán los valores de R y λ. Calculados los valores de R' y λ' correspondientes a la acción del terreno por medio de las U'_{Δ} y U'_{xy} dados por las fórmulas [**12**], deduciremos los valores topográficos de estas dos magnitudes que se prestan bien para una interpretación gráfica que dé una imagen clara de los términos de curvatura. En el croquis adjunto (fig. 18), tomado de la Memoria fundamental de Eötvös, ya citada, representan los circulitos las estaciones con la balanza en la región del Arad. Para cada una de dichas estaciones se ha trazado una línea recta cuya longitud es proporcional a R y su dirección corresponde al valor de λ.

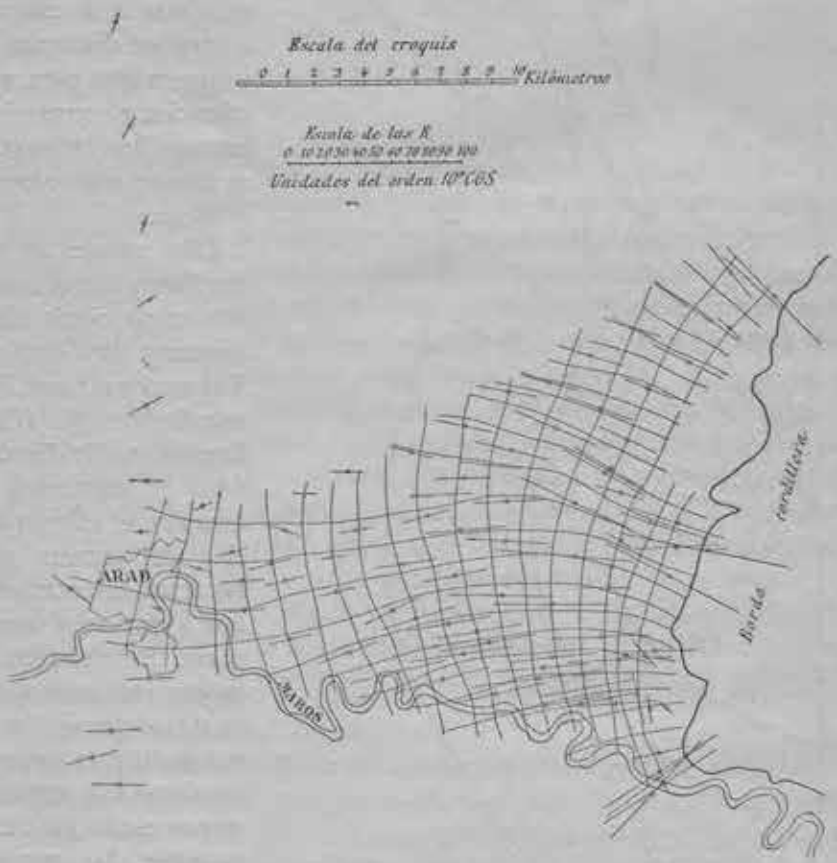


Figura 18.

La manifiesta regularidad con que estas rectas resultaron en el croquis, permitió trazar sobre éste dos series de líneas de curvatura principales. Primeramente aquellas tangentes a los trozos de rectas R, o sea que siguen la dirección del radio mayor principal de curvatura, y a continuación las normales a las anteriores.

Acción cartográfica y normal.

Para las aplicaciones de carácter geofísico de la balanza no bastan los valores topográficos. Precisa deducir de éstos los valores correspondientes a la acción que ejercen las elevaciones y depresiones del terreno, no ya próximas a la estación sino a mayores distancias de ésta, y que exigen para su determinación el conocimiento cartográfico, razón por la que se denominan *valores cartográficos.*

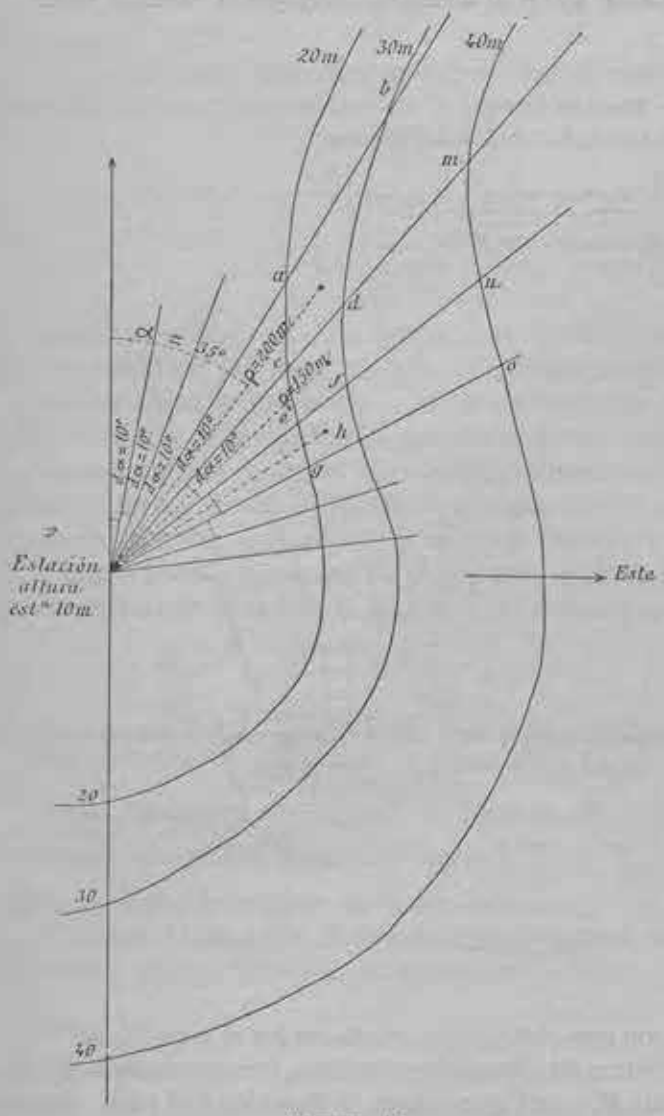


Figura 19.

Estos valores se deducen por fórmulas que inserta Eötvös en su citada obra *Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hülfe der Drehwage,* dividiendo el terreno en segmentos radiales como en el cálculo de la acción del terreno próximo, explicado anteriormente, sólo que a distancias mucho mayores. Se necesitan utilizar mapas con curvas de nivel en diferentes escalas; de mayor escala para distancias más próximas a la estación, y de menor escala para distancias mayores. Así, por ejemplo, Eötvös utilizó en sus observaciones en la llanura de Hungría los siguientes mapas: 1:25.000 para distancias menores de 12 kilómetros, 1:75.000 hasta 30 kilómetros y 1:900.000 para las distancias superiores a 30 kilómetros. Las equidistancias de las curvas de nivel correspondientes a esos mapas eran, respectivamente, de 40, 100 y 400 metros. El número de segmentos considerados fué el de 36.

Como no está explicado en la Memoria de Eötvös el modo de aplicar los datos tomados de los mapas a las fórmulas en cuestión, vamos a procurar hacer aplicación de una cualquiera de ellas, al ejemplo representado en la figura 19.

Las fórmulas son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2U}{dy^2}-\frac{d^2U}{dx^2} &= -3G\sigma\xi\times\frac{d\rho\cos 2\alpha\, d\alpha}{\rho^2}\\
\frac{d^2U}{dxdy} &= +\frac{3}{2}G\sigma\xi\times\frac{d\rho\,\operatorname{sen}2\alpha\, d\alpha}{\rho^2}\\
\frac{d^2U}{dxdz} &= -\frac{3}{2}G\sigma\xi\times\frac{d\rho\cos\alpha\, d\alpha}{\rho^2}\\
\frac{d^2U}{dydz} &= -\frac{3}{2}G\sigma\xi\times\frac{d\rho\,\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{\rho^2}
\end{aligned}\right\} \quad [21]$$

En estas fórmulas representan: G, la constante de gravitación, igual a 66×10^{-9}; σ, la densidad de la masa perturbadora; ξ, la altura de la misma sobre el plano horizontal que pasa por el pie de la balanza, considerada positiva hacia arriba; ρ, la distancia horizontal del punto de estación al centro del segmento considerado; α, el ángulo que la recta, que une la estación con el centro del segmento, forma con el eje de las x, dirigido hacia el Norte; $d\alpha$, la amplitud angular de la masa comprendida dentro de un segmento, y $d\rho$, la longitud de la misma masa.

Tomando como centro la estación, se divide el plano, que debe de estar provisto de curvas de nivel, en segmentos. Escogiendo 36, como hace Eötvös, para la vuelta de horizonte, resulta $d\alpha = 10° = 0{,}1745$. Hay que calcular la influencia de las masas que quedan en cada segmento, comprendidas entre dos curvas de nivel y dos radios, o sean, de las masas *abcd*, *cdef*, *efgh*, etc., después la de las *dmfn*, *fnho*, y así sucesivamente. En cada uno de estos cuadriláteros curvilíneos se calcula la altura media del mismo (semisuma de las curvas de nivel que lo limitan) y su diferencia con la altura de la estación será la cantidad ξ. La semisuma de los lados rectilíneos de cada cuadrilátero es el $d\rho$ correspondiente, o sea, $d\rho = \frac{1}{2}(ab + cd)$ para el cuadrilátero *abcd*, y lo mismo para los demás.

Supongamos que para el cálculo de la influencia del segmento *abcd* tenemos los siguientes datos:

$\xi = 1500$ cm., $\rho = 20000$ cm., $d\rho = 50$ m. $= 5000$ cm., $\alpha = 35°$, $d\alpha = 0{,}1745$ y $\sigma = 2{,}0$.

Con estos datos

$$\frac{d^2U}{dxdz} = -\frac{3}{2}\cdot 66\cdot 10^{-9}\cdot 2\cdot 1500^3\cdot\frac{5000\cdot 0{,}819\cdot 0{,}1745}{20000^3} = -0{,}04\cdot 10^{-9},\ \text{aproximadamente.}$$

Análogamente se resuelven las demás fórmulas y se calculan los otros cuadriláteros, siguiendo los contornos de las curvas y sumando algebraicamente al final todas las influencias parciales para llegar a obtener la acción cartográfica total.

En la práctica se dibuja sobre una hoja de papel tela, suficientemente translúcida,

un reticulado, compuesto de 36 direcciones a 10° una de otra, que irradian de un punto y que vienen cortadas por círculos trazados con centro en el mismo punto y con radios crecientes de kilómetro en kilómetro dibujados a la misma escala que el plano topográfico, sobre el que se ha de usar el reticulado. En dicho plano estarán previamente marcados los puntos de estación con la balanza, y sucesivamente se va colocando sobre cada uno de éstos el centro del reticulado y deduciendo para cada segmento, interceptado por éste, los valores de α, ρ, $d\alpha$, $d\rho$ y de la altitud media ξ.

La acción cartográfica ejerce poca influencia sobre el gradiente, siendo mayor su influjo sobre las magnitudes $\frac{d^2U}{dy^2}$, $\frac{d^2U}{dx^2}$ y $\frac{d^2U}{dxdy}$.

Calculando para el elipsoide de Bessel, por medio de la fórmula debida a Helmert, los valores de la *acción normal*, valores que presenta Eötvös tabulados para las diversas magnitudes gravíficas en su obra antes mencionada, correspondientes a diversos valores de la latitud, tendremos elementos suficientes para calcular las siguientes *perturbaciones:*

Perturbación total igual a la diferencia entre el *valor total* deducido directamente por la observación y el *valor normal;*

Perturbación topográfica igual a la diferencia entre el *valor topográfico* y *valor normal*, y

Perturbación subterránea o diferencia entre la *perturbación topográfica* y el *valor cartográfico*. Es decir, que el valor de la perturbación subterránea, refiriéndonos al gradiente, se obtiene restando del valor proporcionado directamente por la balanza los siguientes factores: acción terreno, acción cartográfica y acción normal.

Investigación de masas subterráneas.

Si nos fuesen conocidas la densidad, forma, extensión y profundidad de una masa perturbadora en un cierto lugar de la Tierra, se podría desde luego calcular la perturbación de la gravedad sobre la superficie terrestre. Pero la recíproca no es tan fácil de resolver. De la diferencia entre el valor observado de la gravedad en un punto y su valor teórico o de las diferencias de las fuerzas de la gravedad en varios puntos, no se pueden sacar conclusiones definitivas sobre las masas perturbadoras por entrar en función cuatro factores: la diferencia de densidad, la forma, la extensión y la profundidad. Sin embargo, en casos determinados puede ser de gran valor el conocimiento de las perturbaciones de la gravedad cuando, por ejemplo, la geología general de un trozo de territorio sea conocida y se trate de averiguar los límites o formas de las masas perturbadoras que están en íntima relación con las magnitudes que proporciona la balanza. Así ésta es apropiada para indicar pliegues de estratos rocosos bajo los aluviones de una llanura y los límites de acumulaciones de determinadas masas, como sal y filones metálicos. Una principal ventaja de la balanza radica en que por medio de la dirección del máximo gradiente horizontal señala el camino para encontrar y estudiar cualquier perturbación que exista, aunque siempre será misión del geólogo, según Schweydar, el traducir los resultados de las mediciones con la balanza.

Los siguientes ejemplos aclararán la manera de obrar de diversas masas perturbadoras.

Imaginemos una masa yacente horizontal de gran longitud y de densidad 5,5 embutida en una capa de densidad de 2,6. Supongamos cuadrada su sección *abcd* (fig. 20); sea su anchura *ab* de 500 metros, pequeña en relación con su longitud, y su altura *ac* de 1.000 metros. La profundidad de la cara *ab* bajo la superficie sea de 1.300 metros. La dirección OO_1 la consideramos como positiva y calculamos a partir de *O* la distancia *D* de las estaciones con la balanza sobre la superficie OO_1. Designemos por *G* los gradientes contados en la dirección OO_1 y por *R* una magnitud proporcional a la diferencia de los inversos de los radios de curvatura, expresados en unidades de 1×10^{-9} C. G. S. Obtendremos los siguientes resultados para diversas distancias:

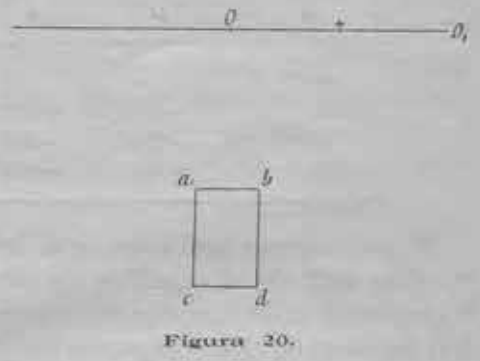


Figura 20.

D	*G*	*R*	*D*	*G*	*R*
metros.			metros.		
— 1450	+ 35,7	+ 6,6	+ 250	— 17,7	+ 58,8
— 1050	+ 40,2	+ 20,9	+ 650	— 36,3	+ 42,7
— 650	+ 36,3	+ 42,7	+ 1050	— 40,2	+ 20,9
— 250	+ 17,7	+ 58,8	+ 1450	— 35,7	+ 6,6
0	0,0	+ 62,9			

Estos resultados son tan grandes, comparados con la unidad de medida 1×10^{-9}, que acusan claramente la presencia de la masa perturbadora. El gradiente cambia de signo al pasar por encima del eje longitudinal de la masa, no presentándose su máximo sobre los bordes ($D = \pm 250$ m.) por ser pequeña la anchura *ab* comparada con la profundidad bajo la superficie. A la izquierda de *O* son positivos los gradientes, porque la masa es más densa que el terreno que la rodea. El valor máximo de las *R* se presenta sobre el eje medio.

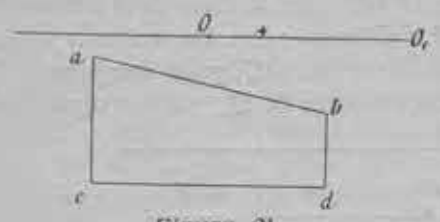


Figura 21.

Consideremos ahora la sección transversal representada en la figura 21. La masa subterránea es, como en el caso anterior, muy larga comparada con su anchura. Se supone que la arista *a* yace a 100 metros, la *b* a 400 metros, bajo la superfie OO_1 y que los valores de *bd* y *cd* son, respectivamente, de 1.000 y 3.000 metros, Sea 2,3 la densidad de la masa y 2,6 la del terreno circundante. Aceptando para *D*, *G* y *R* la misma

significación que en el primer ejemplo, el siguiente cuadro contiene los valores del gradiente y de R para diversas distancias:

D	G	R	D	G	R
metros.			metros.		
— 1800	— 55,1	+ 20,4	0	+ 9,8	— 45,6
— 1500 (borde)	— 94,0	— 25,0	1500 (borde)	+ 51,0	— 7,5
— 1200	— 44,2	— 61,7	1800	+ 42,2	+ 9,7

El gradiente no cambia de signo sobre el eje medio sino antes de llegar a éste, por estar inclinada la superficie ab. Alcanza dos máximos sobre los bordes, siendo el máximo de la derecha más pequeño porque la masa en ese lado yace más profunda. A la izquierda de O son negativos los gradientes por ser la masa perturbadora menos densa que el terreno que la rodea. A pesar de la pequeña diferencia de densidades, las mediciones reflejan con gran claridad la masa subyacente.

Supongamos otro caso, dice Schweydar en su folleto *Die Bedeutung der Drehwage von Eötvös für die geologische Forschung*, del que transcribimos los ejemplos acabados de exponer: el de haber a 50 metros de profundidad de la superficie, en estratos rocosos de densidad 2,5, un hueco cuya anchura sea de 50 metros y su altura de 30. El gradiente sobre los bordes, en dirección perpendicular a la longitud del hueco, vale $59{,}4 \times 10^{-9}$ C. G. S., y a 16 metros de distancia de los bordes (hacia el exterior) alcanza el valor máximo de 74×10^{-9}. Si el hueco estuviese a 100 metros de profundidad, el máximo del gradiente valdría $21{,}1 \times 10^{-9}$. Dada la exactitud de las medidas, la existencia de semejante hueco sería facilmente comprobada, siempre que no sea de difícil constitución geológica el terreno circundante.

Como último ejemplo, consideremos el representado en la figura 22, en el que se supone que bajo los aluviones de una llanura de densidad 1,8, se extiende en sentido horizontal una larga capa rocosa plegada de 2,6 de densidad, siendo ab al sección transversal de ésta. Se supone que la parte sin plegar de la capa yace a 500 metros de profundidad y que se eleva en el perfil bajo el punto O hasta 250 metros de profundidad. La distancia entre los puntos a y b es de 5.000 metros. Los gradientes contados en la dirección OO_1 y las magnitudes R para las distancias D, contadas en ambos sentidos a partir de O_1, son los siguientes:

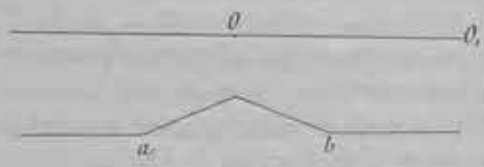


Figura 22.

D	G	R	D	G	R
Kms.			Kms.		
— 3	+ 5,3	— 9,5	+ 1	— 22,7	+ 14,5
— 2	+ 21,2	— 4,8	+ 2	— 21,2	— 4,8
— 1	+ 22,7	+ 14,5	+ 3	— 5,3	— 9,5
0	0	+ 45,6			

Si en una región determinada se han efectuado un número crecido de observaciones con la balanza y se han deducido los valores de los Δg tomados todos ellos con respecto a una estación de origen, donde se conozca el valor de g por observación pendular, se podrán unir por una línea continua las estaciones en que sea igual el valor de g deducido de los Δg. Las curvas que así resultan se denominan *isógamas*. Si los Δg están calculados con los valores de las perturbaciones subterráneas del gradiente, se obtendrán, al trazar las curvas, las *isógamas de las perturbaciones subterráneas*, que pueden dar indicaciones acerca del nivel de las masas rocosas subterráneas, en la hipótesis de ser éstas más densas que el terreno que las rodea.

La fórmula que emplea Eötvös para este fin es

$$\Delta g = 2\pi G (\sigma' - \sigma) h, \qquad [22]$$

en la que G es la constante de gravitación, σ' la densidad de la masa rocosa, σ la del terreno circundante y h la profundidad buscada.

Hagamos aplicación de la anterior fórmula a un caso concreto, al de la llanura húngara en la región de Arad estudiada por Eötvös, que aparece limitada en su parte oriental por una cadena montañosa. La dirección de los gradientes en las proximidades de ésta, hacia el borde de la cadena, demostró que en dicha dirección había una masa subterránea más densa que el terreno aluvial que constituye la llanura, o sea que la masa rocosa de la montaña se prolonga con cierta pendiente por debajo de la superficie. Admitiendo para la capa aluvial la densidad $\sigma = 2{,}0$ y para la masa rocosa $\sigma' = 2{,}7$, la fórmula [**22**] nos dice que para un decremento Δg de la gravedad de 0,001 C. G. S. la profundidad será de 38 metros. Si las isógamas están trazadas de 0,002 en 0,002 C. G. S., como lo están en la región de Arad, dichas líneas pueden asimilarse a curvas de nivel cuya equidistancia sea de 76 metros, y pueden dar idea del nivel subterráneo de la masa perturbadora.

La balanza puede ser prácticamente útil cuando al Ingeniero de Minas le interese conocer los límites de una masa subterránea, como la de un yacimiento de sal, por ejemplo, que hasta ahora sólo podían determinarse por medio de barrenados costosos. Suponiendo en un distrito determinado limitada una masa perturbadora, de naturaleza desconocida, por medio de la dirección y magnitud de los gradientes, bastará un solo taladro para conocer su naturaleza. En el año 1917 emprendió el Profesor Schweydar las primeras observaciones con la balanza en Alemania. Su objeto fué principalmente estudiar su utilidad práctica en Geología. La idea partió del director del Deutsche Bank Herr. v. Stauss, siendo la Deutsche Petroleum-Aktien-Gesellschaft la entidad que proporcionó los medios para su ejecución.

Los trabajos se realizaron sobre un yacimiento de sal, según dice Schweydar en un folleto suyo, cuyos límites eran en parte bien conocidos, por medio de barrenos. En la figura 23, indica la línea llena el límite conocido de la sal y la línea de puntos el límite sospechado. Las estaciones en que se observó se indican con un circulito lleno. Las flechas dan la magnitud y dirección del gradiente máximo horizontal de la gravedad en cada estación, estando de estos valores ya deducido el efecto de las irregularidades visibles, de modo que representan el influjo de las masas subterráneas.

En la dirección de las flechas crece con la máxima intensidad la gravedad y en una

cantidad que viene indicada por las longitudes de las mismas. Se observa que las flechas están dirigidas en sentido opuesto a la masa de sal, como debe ser, puesto que la sal es menos densa que el terreno circundante. Sobre los bordes del yacimiento,

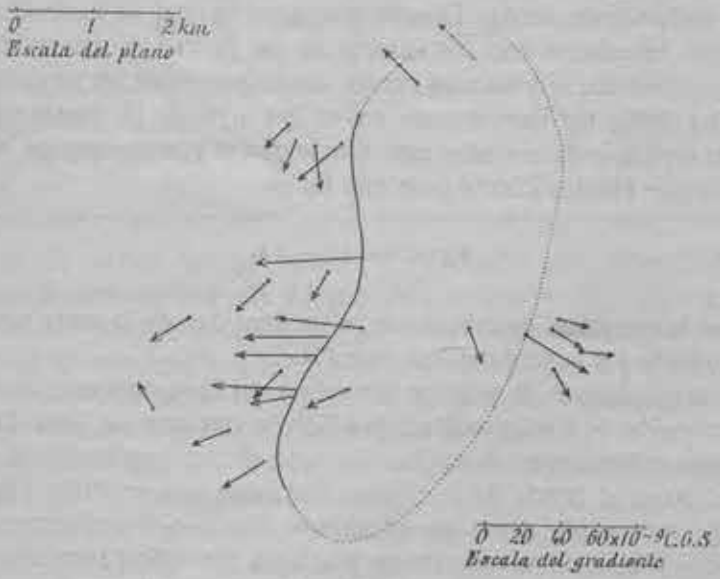


Figura 23.

los gradientes son máximos y disminuyen muy rápidamente hacia el exterior. Esta rápida disminución proporciona la posibilidad de deducir bastante exactamente el borde del yacimiento, fijándose su situación con una exactitud de 50 a 100 metros.

El borde derecho queda asimismo determinado por la estación que arroja el mayor gradiente.

Del valor de éste, correspondiente a la estación que está sobre la masa de sal, que aproximadamente dista por igual de ambos bordes, puede deducirse que la superficie del yacimiento está inclinada y el borde derecho más profundo que el izquierdo, deducción que viene corroborada por el hecho de ser más pequeño el gradiente sobre el borde derecho que sobre el izquierdo.

La rápida disminución del gradiente hacia el exterior demuestra que el yacimiento cae rápidamente por ambos lados. Sin embargo, es posible que una parte de esa rápida disminución sea debida al influjo de masas más ligeras que las situadas en las cercanías inmediatas a la sal.

Deduce Schweydar de los favorables resultados obtenidos con la balanza sobre el yacimiento de sal, la esperanza de alcanzar un éxito semejante en la fijación de los yacimientos de potasa en Alemania.

Relación entre las anomalías de la gravedad y las del magnetismo terrestre.

Una de las aplicaciones geofísicas de la balanza es el estudio de las zonas donde existen perturbaciones magnéticas. Está comprobado que éstas pueden ser debidas, aún en grandes extensiones de terreno, a la presencia de masas de rocas magnéticas. Ahora bien, la fuerza magnética ejercida por una masa es proporcional al gradiente de la fuerza atractiva de la misma. El Barón von Eötvös establece en su Memoria sobre la balanza presentada al Congreso Internacional de Geodesia, de 1906, las fórmulas que ligan las componentes de la fuerza magnética con las segundas derivadas del potencial atractivo proporcionadas por la balanza.

Representando por X, Y, Z las componentes de la fuerza magnética que produce una masa, por α, β, γ sus componentes de magnetización que se suponen constantes, por U el potencial atractivo, por σ la densidad y por G la constante de gravitación, establece Eötvös las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{G\sigma}\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{\beta}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdy} + \frac{\gamma}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdz} \\ Y &= \frac{\alpha}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdy} + \frac{\beta}{G\sigma}\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{\gamma}{G\sigma}\frac{d^2U}{dydz} \\ Z &= \frac{\alpha}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdz} + \frac{\beta}{G\sigma}\frac{d^2U}{dydz} + \frac{\gamma}{G\sigma}\frac{d^2U}{dz^2} \end{aligned}\right\}. \qquad [23]$$

Estas ecuaciones sólo pueden aplicarse a espacios infinitamente pequeños de la masa magnética, caso de no ser homogénea la magnetización. Si la masa está encerrada en otra, hay que susbtituir los valores de α, β, γ y σ por las diferencias correspondientes a ambas clases de masas.

Combinando las ecuaciones anteriores de dos en dos por suma o resta, después de multiplicar sus dos miembros por dos de los coeficientes α, β, 2γ, y teniendo presente la ecuación de Laplace:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0,$$

obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} X\beta - Y\alpha &= \frac{\alpha\beta}{G\sigma}\left(\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{d^2U}{dy^2}\right) + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdy} + \frac{\beta\gamma}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdz} - \frac{\alpha\gamma}{G\sigma}\frac{d^2U}{dydz} \\ 2\gamma X + \alpha Z &= \frac{\alpha\gamma}{G\sigma}\left(\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{d^2U}{dy^2}\right) + \frac{2\beta\gamma}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdy} + \frac{2\gamma^2 + \alpha^2}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdz} + \frac{\alpha\beta}{G\sigma}\frac{d^2U}{dydz} \\ 2\gamma Y + \beta Z &= -\frac{\beta\gamma}{G\sigma}\left(\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{d^2U}{dy^2}\right) + \frac{2\gamma\alpha}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdy} + \frac{\alpha\beta}{G\sigma}\frac{d^2U}{dxdz} + \frac{2\gamma^2 + \beta^2}{G\sigma}\frac{d^2U}{dydz} \end{aligned}\right\}, \qquad [24]$$

en las que aparecen ligadas las acciones magnéticas de una masa perturbadora y las segundas derivadas del potencial, que se hallan por medio de la balanza.

Cuando las investigaciones se refieren a líneas magneto-tectónicas, es decir, cuando las masas magnéticas están distribuidas uniformemente en línea recta, por ejemplo, en dirección paralela al eje de las Y o formando escalones, Eötvös reemplaza el anterior sistema de ecuaciones por otro más sencillo, a saber:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{G\sigma}\frac{d^2U}{dx^2} + \gamma\frac{d^2U}{dxdz} \\ Y &= 0 \\ Z &= -\frac{\gamma}{G\sigma}\frac{d^2U}{dx^2} + \alpha\frac{d^2U}{dxdz} \end{aligned}\right\} \quad [25]$$

Como en este caso $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$, se obtendrá directamente con la balanza el valor $\frac{d^2U}{dx^2}$.

Demostrada la proporcionalidad de la fuerza magnética derivada de una masa con el gradiente gravimétrico de la misma, se deduce que presentando éste sus máximas anomalías sobre los bordes de la masa, sobre éstos debe alcanzar también su mayor valor la perturbación magnética, es decir, a lo largo de la línea tectónica, como, por otra parte, del conjunto de muchas observaciones y estudio comparado de las mismas dedujo Naumann.

Teniendo en cuenta las anteriores ecuaciones es posible deducir indicaciones sobre la calidad de las masas subterráneas perturbadoras en estudio.

En las investigaciones de esta índole realizadas en Hungría por el Barón Eötvös y sus auxiliares, en cada estación hecha con la balanza se han determinado además las tres componentes de la fuerza magnética. Los resultados de estos estudios fueron en parte expuestos por Eötvös en el Congreso de la Asociación Geodésica Internacional de 1909.

Como consecuencia de aquéllos puede afirmarse que en las zonas de perturbación que se extienden longitudinalmente, resultan sensiblemente paralelas las fuerzas magnéticas horizontales que la originan y la dirección del gradiente gravífico deducido. Pueden presentarse tres clases de paralelismo:

1.ª Las fuerzas magnéticas y el gradiente gravífico son paralelos y siempre dirigidos en el mismo sentido.

2.ª Las fuerzas magnéticas y el gradiente son paralelos y siempre dirigidos en sentido contrario.

3.ª Continuando paralelas las fuerzas y el gradiente, las primeras están unas veces dirigidas en el mismo sentido y otras en sentido contrario del gradiente. Estos tres casos están representados en las figuras 24, 25 y 26, en las que están dibujadas con flechas de línea llena las anomalías magnéticas horizontales y con flechas de trazos las perturbaciones subterráneas del gradiente.

Admitiendo la existencia de una roca magnética cuya influencia origine la perturbación magnética, debemos aceptar que esta misma roca es la que produce la perturbación gravífica en el caso de la figura 21 (roca magnética alargada). En el de la figura 22, sobre la roca magnética existe otra no magnética que, dada la dirección de los gradientes, tiende a aflorar de Oeste a Este, y en el de la figura 23 la masa magnética aparece incrustada entre otras dos no magnéticas, de densidad aproximada-

mente igual, y que también tiende a aproximarse a la superficie en la dirección Oeste-Este.

El Barón v. Eötvös cita en su Memoria, antes mencionada, como ejemplo del primer tipo de paralelismo, el trozo de la llanura húngara situada entre Makó y Szeged, donde las observaciones con la balanza habían demostrado la existencia de una masa rocosa subterránea en la dirección SE.-NW. seguida en una longitud de 50 kilómetros. El cálculo de la intensidad magnética de la masa perturbadora permitió deducir que la susceptibilidad magnética de aquélla era de 0.0035, valor que corresponde ordinariamente a rocas eruptivas. Vemos, pues, que la combinación de las observaciones gravimétricas con las magnéticas permitió, en este caso, descubrir una masa rocosa eruptiva, no citada en el mapa geológico de la región.

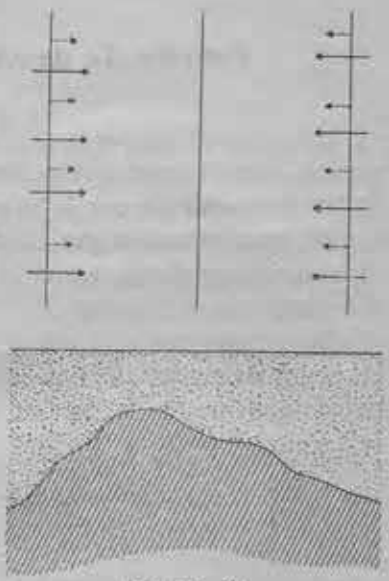


Figura 24.

Resumiendo lo que antecede, podemos afirmar que las observaciones combinadas con la balanza y aparatos de medida magnéticos en las mismas estaciones, contando con número suficiente de éstas, permiten determinar los bordes y, por lo tanto, la anchura, así como la longitud de masas perturbadoras que se extiendan longitudinalmente y definir las condiciones más probables de emplazamiento de cada masa

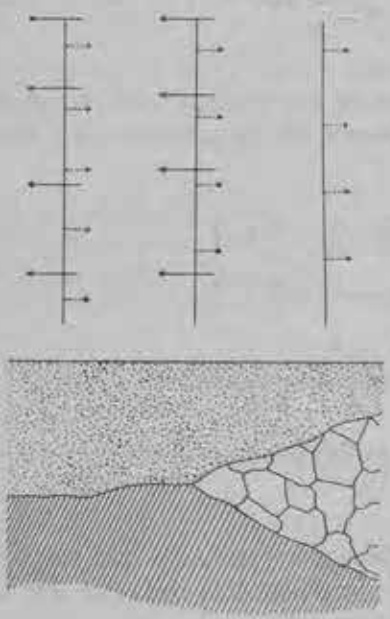


Figura 25.

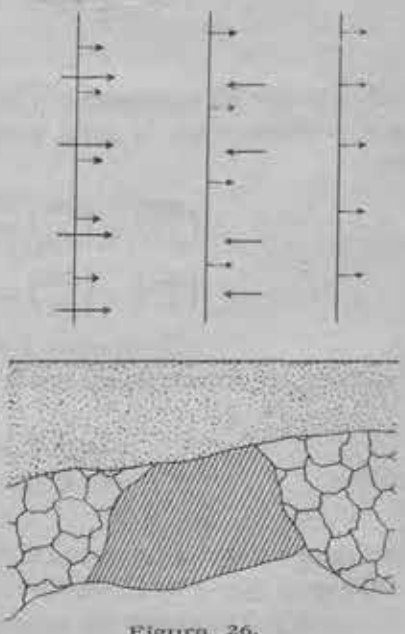


Figura 26.

(si está sola, en contacto con otra o encajada entre dos) y la susceptibilidad magnética de la misma.

Estudio de desviaciones relativas de la vertical.

Las componentes de la desviación de la vertical en el meridiano y en el primer vertical, componentes que se designan, respectivamente, por ξ y η, pueden deducirse de las observaciones con la balanza en el conjunto de una zona siempre que ésta no sea de gran extensión (un cuadrado de 20 a 30 kilómetros), y que se conozca por observación geodésica-astronómica el valor de una de las componentes ξ ó η, para dos puntos de dicha zona.

Designando por g_x y por g_y las componentes de la gravedad en el meridiano y en el primer vertical, en una estación cualquiera, se deduce fácilmente de la definición de componentes de la desviación de la vertical en los mismos planos las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}\xi = \pm\frac{g_x}{g} \qquad \operatorname{sen}\eta = \pm\frac{g_y}{g}, \tag{26}$$

y teniendo en cuenta que g_x y g_y son las derivadas de potencial U, con respecto a X é Y, y que por ser las desviaciones ξ y η ángulos siempre muy pequeños se pueden reemplazar los senos por los arcos, las relaciones anteriores se transforman en

$$\xi = \pm\frac{1}{g}\frac{dU}{dx} \qquad \eta = \pm\frac{1}{g}\frac{dU}{dy}. \tag{27}$$

Admitamos que las estaciones con la balanza se han realizado en bastante número de puntos, próximos unos de otros, y consideremos las dos primeras 1 y 2. Podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dU}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dU}{dx}\right)_1 &= \pm g(\xi_2 - \xi_1) = A_{1,2}\\ \left(\frac{dU}{dy}\right)_2 - \left(\frac{dU}{dy}\right)_1 &= \pm g(\eta_2 - \eta_1) = B_{1,2}\end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Ahora bien, las observaciones con la balanza proporcionan los valores de

$$\left(\frac{d^2U}{dx\,dy}\right)_1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{d^2U}{dx\,dy}\right)_2.$$

Refiramos estos valores a un nuevo sistema de ejes coordenados que tenga común con el anterior el eje de las Z, siendo el nuevo eje de las X la recta que une la estación 1 con la 2, y designemos los valores referidos por

$$\left(\frac{d^2U}{dx'\,dy'}\right)_1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{d^2U}{dx'\,dy'}\right)_2.$$

Es evidente que, dada la pequeña distancia $d_{1.2}$ que separa 1 de 2, puede considerarse la $\frac{d^2U}{dx\,dy}$ como función lineal de aquélla y escribirse, por lo tanto,

$$\int_{x'_1}^{x'_2} \frac{d^2U}{dx'\,dy'}\,dx' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2U}{dx'\,dy'}\right)_1 + \left(\frac{d^2U}{dx'\,dy'}\right)_2\right] d_{1.2} = T_{1.2}, \qquad [29]$$

y como, por otra parte, también tenemos que

$$\int_{x'_1}^{x'_2} \frac{d^2U}{dx'\,dy'}\,dx' = \left(\frac{dU}{dy'}\right)_2 - \left(\frac{dU}{dy'}\right)_1, \qquad [30]$$

resultará

$$T_{1.2} = \left(\frac{dU}{dy'}\right)_2 - \left(\frac{dU}{dy'}\right)_1, \qquad [31]$$

en las que $T_{1.2}$ es cantidad conocida.

Para ligar estas derivadas de U con las referidas al primitivo sistema coordenado, tendremos en cuenta las fórmulas de transformación corrientes para pasar de un sistema a otro. En el supuesto de ser $\alpha_{1.2}$ el azimut del lado 1.2 se tendrá:

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{dU}{dx}\operatorname{sen}\alpha_{1.2} + \frac{dU}{dy}\cos\alpha_{1.2},$$

o sea

$$T_{1.2} = -\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dU}{dx}\right)_1\right]\operatorname{sen}\alpha_{1.2} + \left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_2 - \left(\frac{dU}{dy}\right)_1\right]\cos\alpha_{1.2}, \qquad [32]$$

y teniendo en cuenta las relaciones [**28**]

$$T_{1.2} = -A_{1.2}\operatorname{sen}\alpha_{1.2} + B_{1.2}\cos\alpha_{1.2}, \qquad [33]$$

en la que se conocen $T_{1.2}$ y $\alpha_{1.2}$.

Considerando ahora la siguiente estación 3, y refiriéndola a las 1 y 2, llegaríamos a deducir, por análogo razonamiento,

$$\left.\begin{aligned} T_{2.3} &= -A_{2.3}\operatorname{sen}\alpha_{2.3} + B_{2.3}\cos\alpha_{2.3} \\ T_{3.1} &= -A_{3.1}\operatorname{sen}\alpha_{3.1} + B_{3.1}\cos\alpha_{3.1} \end{aligned}\right\}, \qquad [34]$$

y como además se verifica en el triángulo 1, 2, 3 que

$$\left.\begin{aligned} A_{1.2} + A_{2.3} + A_{3.1} &= 0 \\ B_{1.2} + B_{2.3} + B_{3.1} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad [35]$$

tenemos a nuestra disposición cinco ecuaciones con seis incógnitas, a saber:

$$A_{1.2},\quad A_{2.3},\quad A_{3.1},\quad B_{1.2},\quad B_{2.3}\quad \text{y}\quad B_{3.1},$$

que puede resolverse expresando cinco de ellas en función de la sexta. Escogiendo la $A_{1,2}$ como tal, y representándola por a, hallaremos:

$$A_{1,2}=a \qquad \left\{ A_{2,3}=\frac{T_{2,3}\cos\alpha_{3,1}+(T_{3,1}-a\,\mathrm{sen}\,\alpha_{3,1}+B_{1,2}\cos\alpha_{3,1})\cos\alpha_{2,3}}{\mathrm{sen}\,(\alpha_{3,1}-\alpha_{2,3})} \right\}$$

$$B_{1,2}=\frac{T_{1,2}}{\cos\alpha_{1,2}}+a\,\mathrm{tg}\,\alpha_{1,2} \left\{ B_{2,3}=\frac{T_{2,3}\,\mathrm{sen}\,\alpha_{3,1}+(T_{3,1}-a\,\mathrm{sen}\,\alpha_{3,1}+B_{1,2}\cos\alpha_{3,1})\,\mathrm{sen}\,\alpha_{2,3}}{\mathrm{sen}\,(\alpha_{3,1}-\alpha_{2,3})} \right\} \quad [36]$$

Enlazando la siguiente estación 4 a la 2 y 3 (fig. 27), y aplicando las fórmulas anteriores, cambiando los subíndices convenientemente, obtendríamos los valores

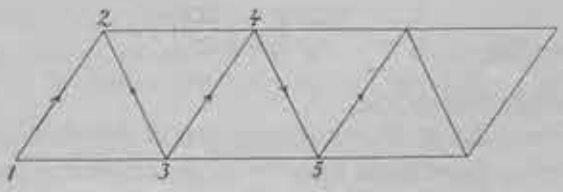


Figura 27.

de $A_{3,4}$ y $B_{3,4}$, y así sucesivamente, triángulo a triángulo, paso a paso, como dice Eötvös, iremos deduciendo todos los valores de A y de B en función de a.

Para deducir el valor de esta incógnita a, precisa obtener directamente por observación geodésica-astronómica, una de las componentes relativas de las desviaciones de la vertical entre dos estaciones convenientemente escogidas, como antes se adelantó. Supongamos que se determina la $\xi_{1,2}$ entre la 1 y la 2. Tendremos:

$$\xi''_{1,2}=\xi''_2-\xi''_1=\pm 206265\,\frac{\Lambda_{1,2}}{g}. \qquad [37]$$

en la que el coeficiente numérico representa los segundos que tiene el radian, unidad en que viene expresada la fórmula [**28**], y despejando $A_{1,2}$ se conocerá a, y, por lo tanto, las desviaciones relativas entre cada dos estaciones sucesivas con la balanza.

El Barón von Eötvös siguió este procedimiento de cálculo en las observaciones efectuadas en la región del Arad. Estas se ciñeron, en su mayoría, a una línea en zigzag de unos 91 kilómetros de longitud, en la que se observaron 40 estaciones.

El cálculo se efectuó con los valores de $\frac{d^2U}{dx\,dy}$ correspondientes a la perturbación topográfica

Como comprobación de la bondad de los resultados obtenidos se compararon las ξ, deducidas de la balanza con las calculadas directamente por observación astronómica en varias estaciones, obteniéndose discrepancias medias de $\pm 0'',4$.

APÉNDICE

Modo de cambiar los hilos de platino.

Aflojado en dos o tres vueltas el tornillo *t* (fig. 28), que fija la plaquita inferior soldada al hilo al extremo de la varita vertical *v* del brazo de la balanza, se hace descender el hilo, dando vueltas a la cabeza de torsión, hasta que el tornillo *t* quede enfrente de la parte vaciada más ancha de la plaquita, con lo cual, tirando de ésta hacia adelante con unas pinzas, queda libre. Se saca entonces la cabeza de torsión de su asiento sobre el tambor graduado, aflojando previamente una palanquita de presión dispuesta sobre dicho tambor. Para efectuar fácilmente la operación de sacar la cabeza, con la mano derecha se oprime el fiador que actúa sobre ésta, mientras que con la izquierda se desencaja la cabeza y se la retira con cuidado en unión del hilo que de ella pende.



Figura 28.

Los hilos de platino de repuesto van dispuestos horizontalmente en su caja correspondiente. Con precaución se fija con su tornillo la plaquita superior engarzada al hilo en su encaje de la cabeza de torsión. Entonces con sumo cuidado se coge con la mano izquierda la cabeza y con la derecha la plaquita inferior del hilo y se saca éste de la caja transportándole hasta el instrumento, procurando que el hilo vaya flojo.

Subido el operador en una banqueta, deja caer verticalmente el hilo fuera de la balanza, sosteniéndolo sólo por la cabeza y espera que deje de oscilar la plaquita inferior. Esta va señalada con el número del hilo y hay que fijarse que dicho número corresponde a la delantera del hilo, o sea que tiene que caer del lado del tornillo que fija el hilo al brazo de la balanza y además que la plaquita, al pararse, debe quedar paralela a su engarce en el brazo, lo cual se consigue girando convenientemente el hilo. Conviene entonces observar frente a qué división del tambor de la cabeza viene a resultar el índice fijo grabado en ésta, y se procede a introducir el hilo en su alojamiento sosteniendo la cabeza con la mano derecha y resbalando el hilo sobre el índice de la mano izquierda. A medida que desciende suavemente el hilo en su alojamiento, y próxima ya la cabeza a posarse sobre el tambor, el ayudante estará observando por la ventanilla inferior la aparición de la plaquita del hilo para evitar que ésta bascule sobre la parte superior del brazo de la balanza, pues si esto sucediera pudiera romperse el hilo. Se evita dicho tropiezo con las pinzas. Asegurado este particular, el operador acaba de encajar la cabeza hasta que actúe su fiador de muesca y aprieta en seguida la palanca de presión. Girando la cabeza con movimiento lento se observa el descenso de la plaquita del hilo que se obliga a bajar hasta que su ranura encaje con huelgo en el tornillo del brazo de la balanza. Se aprieta entonces dicho tornillo, para lo cual se oprime la placa contra el dedo medio de la mano izquierda introdu-

cido por la parte posterior de la ventanilla, mientras se gira el destornillador pequeño con la otra mano. El ayudante, mientras tanto, elevará con otro destornillador la plaquita hacia arriba para que el tornillo quede en la parte más inferior de la muesca de la plaquita.

Durante la operación del cambio de hilos debe de estar desembragado el mecanismo de relojería y *sujetas las balanzas.*

Corrección de las imágenes en la escala.

Como complemento indispensable para comprender bien el modo de efectuar esta corrección, indicaré primeramente cómo van montados los espejos de temperatura y de los puntos de referencia. En las figuras 29 y 30 se muestra dicha montura, igual para los dos espejos. La figura 29 representa un corte por un plano vertical de un espejo E y de su sostén S, y la 30 una vista posterior de aquél. El muelle M_1 tiende a separar el espejo del sostén, de modo que girando a la derecha el tornillo C_1 T_1 la mitad superior del espejo se acerca al sostén. El espejo gira con la esfera B y el eje A sobre el cojinete de aquélla en S. Con los movimientos del tornillo C_1 se desplaza la imagen verticalmente y con los del tornillo C_2 horizontalmente.

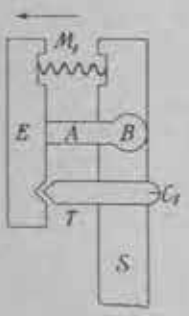


Figura 29.

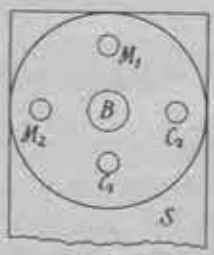


Figura 30.

El espejo de temperaturas y su sostén van unidos a una placa bimetálica P de cobre y hierro (fig. 31), fija en F, y que según las oscilaciones de la temperatura se curva más o menos.

Para corregir los cuatro puntos por vez primera en los talleres Bamberg, en las pruebas de entrega del aparato, y llevarlos a una línea recta y sobre las graduaciones 53, 96, 144 y 180 que les corresponden, se quitó la cubierta superior por completo y en su lugar se colocó una placa deslustrada de vidrio, en la que sobre una línea recta estaban marcados los puntos 53, 96, 144 y 180 a la distancia en que deben quedar sobre la escala. Se quitaron entonces los objetivos de las lamparitas y se obtuvieron cuatro imágenes de esta forma $<$ y desigualmente distribuídas a, b, c, d (fig. 32).

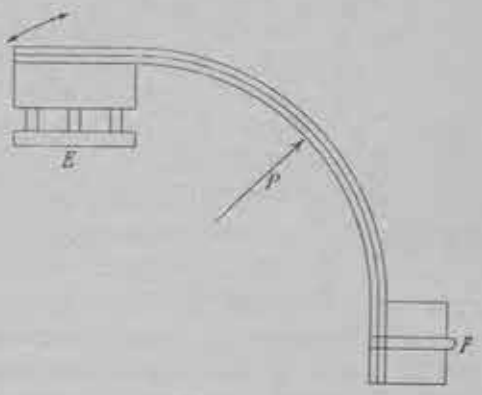


Figura 31.

Se empezó a corregir las dos imágenes de la derecha, o sea de las proyectadas por el bock-spiegel de la derecha, mirando a la escala desde el Norte. Con este objeto se colocaron sobre el brazo de la balanza Q_{II} hacia sus dos extremidades, dos

placas de la forma croquizada adjunta (fig. 33), y se dejó libre dicha balanza. Mientras tanto la balanza Q_i estaba suspendida.

Como había que bajar la imagen *b*, se giraron de derecha a izquierda, con la mano izquierda, los dos tornillos del espejo de caballete correspondiente, procediendo por



Figura 32.



Figura 33.

tanteos, hasta llevar *b* sobre 96. Un solo operador basta subido en la banqueta. Al bajar la imagen *b* también lo hace la *a*, cosa lógica por ser ambas reflejadas por el mismo espejo, de modo que para llevar ésta a su sitio hay necesidad de accionar sobre los tornillos c_1 y c_2 del espejo de los puntos de referencia. Una persona estará atenta a los desplazamientos de *a* sobre la placa, mientras que otra segunda dará los movimientos al espejo.

Corregidas *a* y *b* se cuelga la balanza Q_{ii} y se procede, de un modo análogo, a la corrección de las imágenes *c* y *d*, que refleja el otro bock-spiegel.

Una vez conseguido que las cuatro imágenes estén en el sitio debido, se efectúa la observación de las mismas sobre la escala deslustrada del aparato. Para ello se vuelven a colocar los objetivos de las lámparas provistos de un diafragma, con orificio de mayor diámetro que los que se emplean después para la impresión fotográfica. Adoptando estos diafragmas de mayor diámetro, se pueden ver más fácilmente los puntos sobre la escala. Se trasladan entonces los puntos de la placa superior (que corresponde a la fotográfica) sobre la escala, con la interposición del espejo correspondiente, y se dejan libre las balanzas, esperando una hora, para que queden en reposo. Conseguido éste, se observan cómo aparecen las imágenes de los cuatro puntos sobre la escala, y como será raro que estén exactamente en los sitios debidos, se procede a afinar la situación de las mismas. Cuando las cuatro imágenes estén en línea recta y las correspondientes a los espejos fijo y de temperatura en 53 y 180, respectivamente, se llevan las de las dos balanzas a las graduaciones 96 y 144 por los movimientos micrométricos de las cabezas de torsión. Claro es que esto supone aguardar una hora cada vez que se da un pequeño giro a las cabezas, pues las balanzas comienzan a oscilar al menor contacto con el aparato. Esta afinación de imágenes exige, ordinariamente, mucho tiempo y paciencia en el operador. Como regla para facilitar el sentido de la corrección, debe tenerse presente que cuando la imagen de cualquiera de las dos balanzas deba desplazarse hacia divisiones de numeración creciente sobre la escala, se aumentarán las divisiones del tambor micrométrico correspondiente de las cabezas de torsión.

Posición de los brazos de las balanzas.

En la figura 34 se indican las posiciones que deben tener los dos brazos de las balanzas antes de empezar a observar con el aparato. Si por cualquier circunstancia no fuesen aquéllas las debidas, se conseguirán con los movimientos de las cabezas de torsión. Estos son cuatro, como se ven en las proyecciones diseñadas adjuntas (fig. 35),

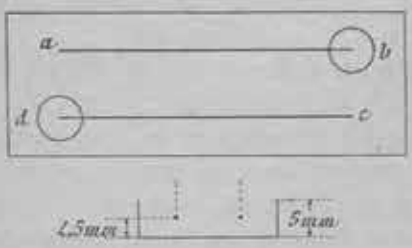


Figura 34.

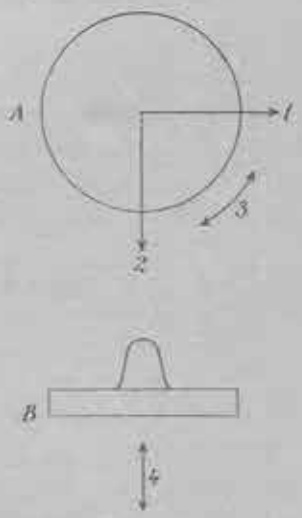


Figura 35.

de una cabeza de torsión sobre un plano horizontal *A* y sobre un plano vertical *B*. Con el movimiento 3 se consigue situar los brazos paralelos a las paredes laterales de las cámaras de oscilación. Los brazos deben quedar promediados de altura en las cámaras. Como éstas tienen de altura 5 milímetros, debe colgar a 2,5. Esta corrección, de ser precisa, se realiza con el movimiento 4, bajando primeramente el brazo hasta que apoye en la cara inferior de la cámara y elevándole en seguida 2,5 milímetros. Por último, el centrado de los extremos *d* y *b* en el eje de los tubos donde cuelgan los contrapesos, se consigue con los movimientos 1 y 2.

Determinación de τ, coeficiente de torsión del hilo de platino-iridio.

Se funda esta determinación en la medida de la desviación que sobre la balanza ejerce una esfera de plomo de masa conocida, que se coloca a la altura del contrapeso de la balanza (fig. 36). Libre la balanza Q_{II}, sujeta la Q_I, y puesta luz permanente en el aparato, se coloca la esfera de plomo *P* sobre un soporte apropiado, de madera, como indica la figura. Pasados unos quince minutos se señala sobre la placa el trazo *a*,

correspondiente a la posición de equilibrio de la balanza. Transcurrida una hora, queda señalado el trazo *b* (fig. 37). Variada la esfera a la posición segunda se obtiene, una

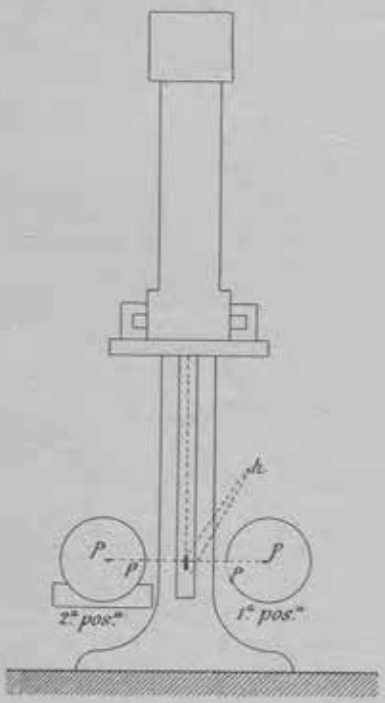


Figura 36.

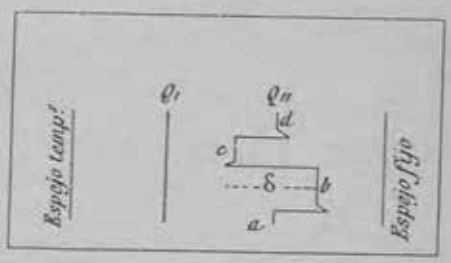


Figura 37.

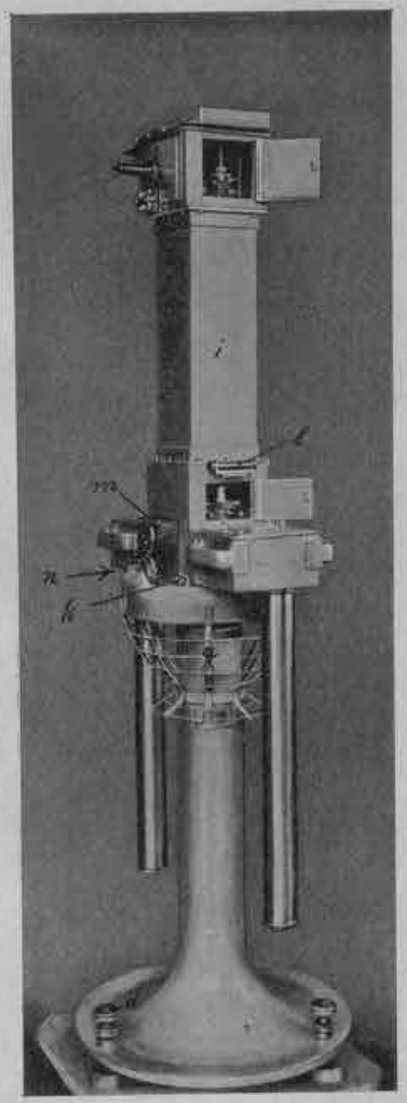
hora después, el trazo *c*, y apartando la esfera, toma la balanza su posición de equilibrio *d*. Con la escala de Fuess se mide δ.

La fórmula para el cálculo de τ es la siguiente:

$$\tau = \frac{2D}{\delta} \times 2G \times \frac{Mm}{\rho^2} \times \frac{l}{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{4\rho^2}}}, \qquad [38]$$

en la que significan: D, la distancia del espejo de la balanza a la placa igual a 790,7 milímetros o 1581,4 unidades; δ, la desviación medida como se acaba de indicar y expresada en unidades como D; G, la constante de gravitación igual a $66{,}3 \cdot 10^{-9}$; M, la masa de la esfera de plomo, que es de 11957,5 gramos, en la empleada en los talleres Bamberg; ρ, distancia de la esfera al contrapeso, que no debe exceder de 12 centímetros; m, la masa del contrapeso de la balanza que para la Q_I es de 30,16 gramos y para la Q_{II} de 30,23 gramos; l, semilongitud del brazo de la balanza igual a 20 centímetros; λ, longitud del contrapeso igual a 7,5 para el de la Q_I y 7,3 para el de la Q_{II}.

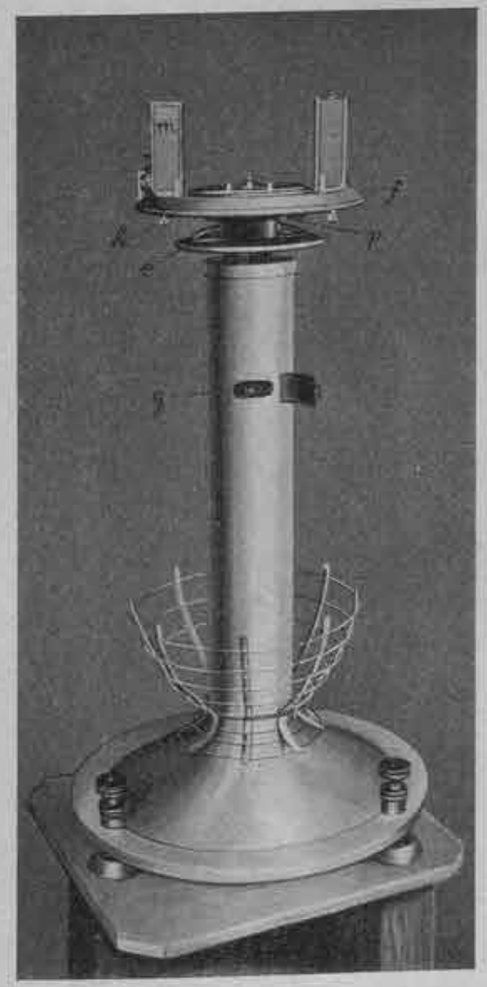
Determinado τ para la balanza Q_{II} se sujetará ésta, se dejará libre la Q_I y se procederá de un modo análogo para averiguar el coeficiente de torsión del hilo de ésta.



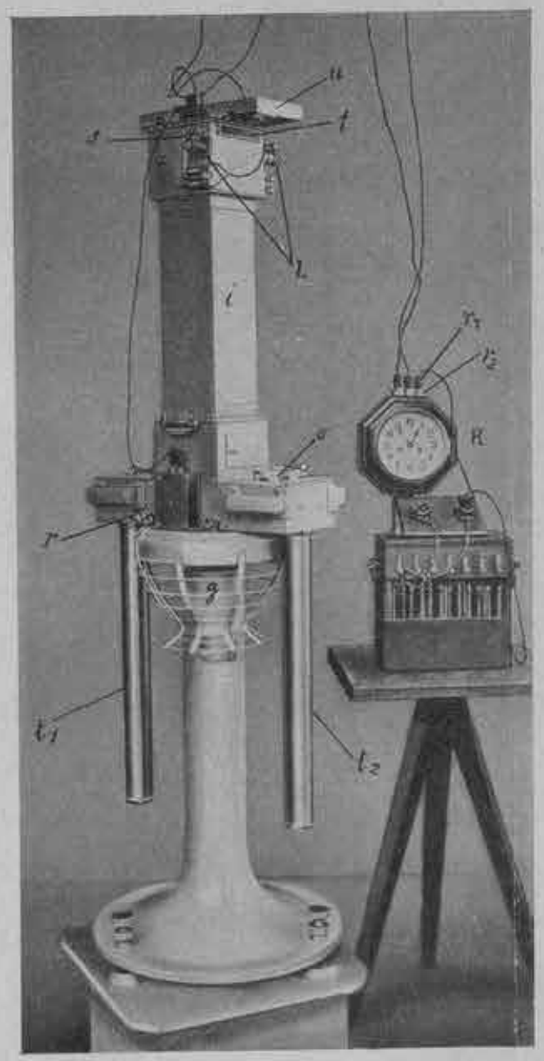
Fotografia 1.ª



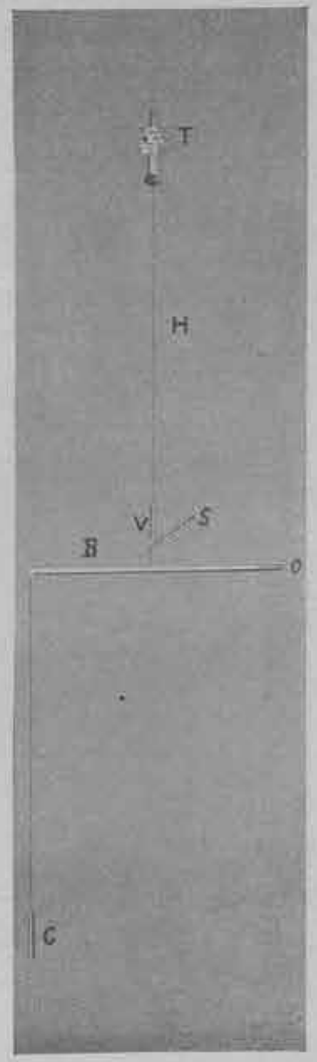
Fotografia 2.ª



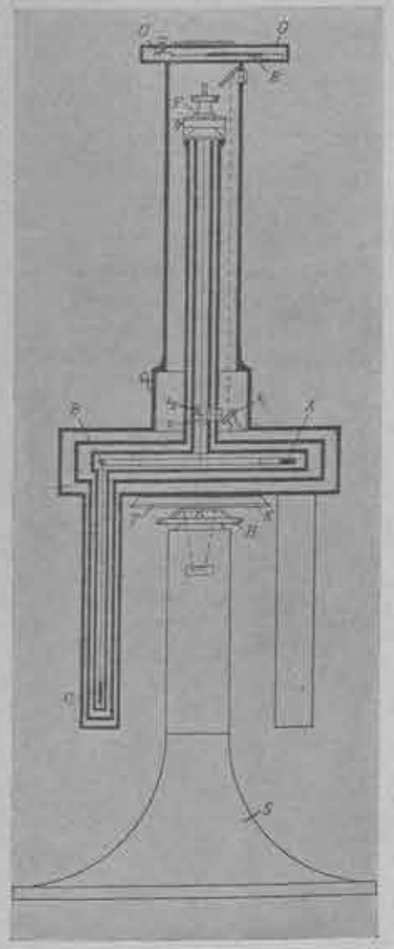
Fotografia 3.ª



Fotografia 4.ª



Fotografia 5.ª



Fotografia 6.ª

MEMORIAS
DEL
INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL

TOMO XV

IV

DOS CAMPAÑAS DE ENSAYO

CON LA

Balanza de torsión EÖTVÖS-SCHWEYDAR

POR

GUILLERMO SANS Y HUELIN

INGENIERO GEÓGRAFO, COMANDANTE DE ARTILLERÍA



INSTITUTO GEOGRÁFICO
BIBLIOTECA

MADRID
TALLERES DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL
—
1926

1924

PRIMERA CAMPAÑA DE ENSAYO

INTRODUCCIÓN

Adquirida por este Instituto una balanza de torsión Eötvös-Schweydar, modelo 1923, construída en la fábrica Bamberg, de Berlín, se realizó la primera campaña de ensayo con la misma durante los meses de Octubre y Noviembre del año 1924.

Fué mi intención, en estos primeros estudios con la balanza, comprobar su eficiencia bajo el punto de vista puramente geodésico, prescindiendo de su aplicación para investigar la situación de masas subterráneas perturbadoras, que sería objeto de otra campaña.

A este fin escogí, como zona de experimentación, el trozo de terreno que se extiende entre Getafe, Pinto y Parla, cuyos antecedentes geológicos hacían presumir no habían de presentarse masas subterráneas con gran diferencia de densidad respecto a la del terreno y que pudieran influenciar los resultados de la balanza.

Antes de empezar a operar con ésta, se determinó el valor de la fuerza de la gravedad en Getafe, Pinto y Parla, por observaciones pendulares, siguiendo el mismo procedimiento empleado en todas las demás estaciones relativas de péndulo de nuestra red gravimétrica. Únicamente varió el modo de averiguar la marcha diaria del reloj Strasser, con el que se deducen los períodos de las coincidencias, debido a la adquisición de un receptor «Vitus» de cuatro lámparas, de señales radiotelegráficas. Conectado dicho aparato a una antena de campaña unifilar de 50 metros, se recibieron diariamente las señales científicas emitidas por la torre Eiffel, obteniéndose re-

sultados más precisos que los conseguidos por el antiguo procedimiento de observación de pasos de estrellas por el meridiano con anteojo portátil de campaña.

El fundamento de la balanza de torsión, así como su descripción y aplicaciones, pueden verse en mi folleto titulado *La balanza de torsión Eötvös-Schweydar y sus aplicaciones*, publicado por esta Dirección general.

En las páginas que siguen expongo los resultados obtenidos en esta primera campaña de ensayo.

CAPÍTULO PRIMERO

OBSERVACIONES CON EL PÉNDULO

Locales de observación.—En Getafe se efectuó la instalación de los aparatos en una casa de una sola planta situada en las afueras del pueblo, cedida por la Compañía general Aeronáutica. En Pinto se hicieron las observaciones de los péndulos en una casa perteneciente al Sr. D. Félix Creus, situada en la huerta de San Juan, algo apartada del caserío del pueblo. Para local de observación en Parla, se utilizó una habitación de la casa de D. Eduardo Hernández, situada en la calle de Pinto.

Valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad.—Como el verdadero interés de esta Memoria radica en presentar los resultados obtenidos con la balanza, me limito a poner a continuación, en el cuadro I, el resumen de los valores obtenidos, haciendo constar tan sólo que cada valor de g viene deducido de las observaciones con los péndulos 104, 105, 106 y 107, realizadas en Getafe durante los días 7, 8, 9 y 10 de Julio; en Pinto durante los días 18, 19, 20 y 21 y en Parla durante los días 24, 25, 26 y 27 del mismo mes.

CUADRO I

ESTACIONES	Longitud.	Latitud.	Altitud.	θ	g	g_0	g_0''	γ_0 (1915)	$g_0'' - \gamma_0$	$g_0 - \gamma_0$
	+ -	° '	Metros.		Cm.	Cm.	Cm.	Cm.	Cm.	Cm.
Getafe.....	3 43,8 W	40 19	624	2,5	979,996	980,189	980,121	980,209	— 0,088	— 0,020
Pinto.....	3 42,5 W	40 15	609	2,5	980,000	980,188	980,122	980,203	— 0,081	— 0,015
Parla.....	3 46,0 W	40 14	647	2,5	979,993	980,193	980,122	980,202	— 0,080	— 0,009

CAPÍTULO II

OBSERVACIONES CON LA BALANZA

Elección de estaciones.—El trayecto comprendido entre Getafe y Pinto fué cubierto con 10 estaciones de balanza, para cuya elección hubo que aprovechar aquellas propiedades cuyo terreno estaba sin preparar para la próxima cosecha. La tarea fué grandemente facilitada por las gestiones cerca de los propietarios llevadas a cabo por los respectivos Presidentes de la Asociación de Labradores de Getafe y Pinto, señores Cervera y Creus, y por el Sr. Hernández, de Parla, a los que reitero desde aquí mi profundo agradecimiento. Entre Getafe y Pinto se proyectaron 10 estaciones y seis entre Pinto y Parla.

Caseta de observación.—Se utilizó para cobijar la balanza una caseta adecuada desmontable, de dobles paredes, de lona fuerte, rellena de substancia aisladora, adquirida en Berlín por gestión de la firma Bambergwerk. Esta caseta, una vez armada, va cubierta por una tienda de lona cuyo objeto es preservarla de la acción directa de los rayos solares o de los efectos de la lluvia. El ajuste de las diversas partes de la caseta es tan perfecto que se puede efectuar en su interior el revelado de las placas impresionadas en la balanza, como en cada estación se realizó.

Instalación de una estación.—En cada estación, además de la caseta con la balanza, se montó, a una distancia mínima de 50 metros de ésta, una tienda de campaña que servía de alojamiento al personal y para guardar las cajas de la balanza. Durante las noches prestaba servicio de vigilancia desde dicha tienda un guarda jurado perteneciente a la Asociación de Labradores.

Plan de trabajo.—Fijado el centro de cada estación con una estaca, se colocó sobre ésta una brújula nivelante y se efectuaron las nivelaciones radiales en ocho direcciones, a 5, 20, 50 y 100 metros, necesarias para poder calcular la «acción del terreno». Estas nivelaciones las efectuó el Topógrafo D. Félix Creus, afecto a la brigada.

Montada y nivelada la balanza, se procedió a efectuar en cada estación la corrección de los puntos luminosos sobre la escala del aparato.

Conseguida ésta y dada cuerda a los mecanismos de relojería que regulan el giro

azimutal de la balanza y el movimiento de la placa, así como al reloj distribuidor de corriente, se colocaba una placa y se dejaban en libertad los brazos de la balanza.

Ordinariamente empezaba a funcionar ésta en las primeras horas de la tarde y se la dejaba actuar toda la noche hasta la mañana siguiente, en la que se efectuaba el revelado y fijado de la placa. Como revelador se empleó el metol hidroquinona en pasta, marca Gevaert, y como fijador la sal ácida «Agfa». Los baños se preparaban en la misma caseta y ordinariamente servían para tres estaciones.

La traducción de las placas con ayuda de una escala de cristal dividida en medio milímetro, construída por Fuess, proporcionó los datos para el cálculo de cada estación.

Traslado del material de una estación a la siguiente.—No disponiendo la brigada de carruaje propio debidamente acondicionado para el transporte de la balanza y demás material, hubo necesidad de contratar carros que cada dos días, por término medio, efectuaran la mudanza del pequeño campamento. La caja que contiene el cuerpo principal de la balanza se introdujo para cada viaje en la cubierta almohadillada confeccionada para la misma, preservándola así de los efectos de choques o golpes en las operaciones de carga y descarga.

El traslado desde Madrid a Getafe y el regreso, desde Parla a Madrid, se efectuó en camión automóvil.

Resultado de las observaciones.—En las 10 estaciones del trayecto Getafe-Pinto, observadas del 24 de Octubre al 14 de Noviembre, la balanza funcionó con normalidad, tanto durante las horas del día como en las de la noche, con tiempo seco y despejado.

En el trayecto Pinto-Parla se habían proyectado, como antes dijimos, seis estaciones. Se obtuvo buena placa en la núm. 11. En las 12 y 13, con tiempo ya excesivamente frío, que hizo descender la temperatura a — 3° dentro de la caseta, comenzó a notarse el fenómeno de recubrirse de agua condensada las superficies metálicas externas de la balanza y el «pegamiento» accidental de los estribos, de los que penden los hilos de cada balanza contra los costados de los tubos en que se alojan, resultando, en consecuencia, series incompletas de puntos sobre la placa por salirse el rayo visual reflejado por cada balanza del campo de la placa. Limpiando bien con éter los costados de las horquillas y tubos se obtuvieron placas con suficiente número de series sin conseguir hacer desaparecer por completo el fenómeno del «pegamiento» conocido por el Profesor Schweydar, a quien se debe su denominación. Este fenómeno puede ser debido, según dicho sabio, a dos causas. La primera es originada por partículas de suciedad que se adhieren a la superficie de los estribos de los que cuelgan los contrapesos y a la superficie de los tubos contra la que chocan aquéllos en los movimientos de vaivén de los brazos de las balanzas que se producen al ser éstas descolgadas para su funcionamiento o estando libres los brazos al pasar la balanza de un azimut al siguiente. El pegamiento se hace desaparecer en este caso con la limpieza esmerada con éter de las superficies sucias.

Constituye la otra causa de este fenómeno una capa de agua condensada, debida a temperaturas bajas, que recubre las partes interiores del instrumento. Una vez producida esta condensación interior no hay medio de evitar el pegamiento, pues se comprende que la fuerza de torsión del hilo, dada la sensibilidad del instrumento, es

tan pequeña que es vencida por la fuerza de adherencia de las superficies en contacto. Recomienda el Profesor Schweydar, para evitar el pegamiento en este caso, preservar el instrumento de los fuertes enfriamientos, lo que equivale a decir que no deben hacerse observaciones en el campo cuando las condiciones atmosféricas son extremadas.

No cabe duda que las series incompletas obtenidas en estas estaciones 12 y 13, una vez bien limpias las superficies que se ponen en contacto al funcionar la balanza, fueron debidas a la segunda causa acabada de citar que produce el pegamiento.

El traslado del material a la estación 14 se verificó con tiempo lluvioso y frio. Al revelar por la mañana la placa se observó la falta de puntos para obtener series completas, obteniendo el mismo resultado con las placas puestas en los días sucesivos. El fenómeno del pegamiento se acentuó en las estaciones 15 y 16 a causa de una fuerte y persistente niebla que materialmente empapaba de agua, al cabo de un cierto número de horas, al aparato. En vista de las condiciones atmosféricas tan desfavorables di por concluída esta primera campaña de ensayo.

Afortunadamente disponía de buenas placas en las 10 estaciones entre Getafe y Pinto, que me permitían cerciorarme de la eficiencia de la balanza al comprobar la diferencia de la fuerza de gravedad entre dichos dos puntos, determinada previamente por observaciones pendulares.

En los *Cálculos* que figuran en el Archivo Geodésico, aparecen en los estados de *valores totales* los resultados de traducción de las placas obtenidas en las 10 primeras estaciones y el desarrollo del cálculo hasta encontrar los valores totales correspondientes a las U_{xz}, U_{yz}, U_{Δ} y U_{xy}. La colección de placas está depositada en el Archivo Geodésico.

Se insertan a continuación en dichos *Cálculos* las hojas con los datos de nivelación para las 10 primeras estaciones y los estados correspondientes al cálculo de la *acción del terreno* que permiten deducir los *valores topográficos* de las U_{xz}, U_{yz}, U_{Δ} y U_{xy}, así como los valores del *gradiente máximo horizontal* y los de w, que señala la dirección de dicho gradiente con respecto al Norte astronómico.

En los ejes coordenados dibujados en cada hoja *acción del terreno* se han trazado gráficamente los gradientes, tomando como abscisas y ordenadas, respectivamente, los valores de G_x y G_y obtenidos para cada estación. En el trozo de hoja en 1:25.000 de Getafe, que va adjunta al final, se han colocado las 10 estaciones, trazando por cada una de ellas flechas 1-1', 2-2', 3-3', etc., representativas del gradiente máximo correspondiente.

Densidad del terreno. – Con el fin de averiguar la densidad media del terreno en el trozo comprendido entre Getafe y Pinto, dato que figura en las fórmulas de la acción del terreno, se recogieron muestras de tierra en varias estaciones, determinándose posteriormente las densidades respectivas por el método del frasco. Con este objeto empleé una probeta de cristal de las usadas en fotografía, de boca ancha y capacidad de 100 c. c. Se pesó primero la probeta vacía y después llena de agua, averiguándose por diferencia entre las dos pesadas el peso del líquido. A continuación se llenaba de tierra la probeta hasta enrasar con la altura primitiva del líquido, volviéndose a pesar el conjunto. Restando de este peso el de la probeta obtendremos el de la mezcla de agua y tierra, que dividido por el del agua nos dará la densidad.

En cinco muestras obtuvimos los resultados siguientes:

ESTACIONES	DENSIDAD
1.....	2,1
3.....	2,0
4.....	2,1
6.....	2,0
8.....	2,3

de los que se deduce para densidad media el valor 2,1, con el que se ha calculado la acción del terreno.

Cálculo de la acción cartográfica. —La disposición del terreno, sin accidentes orográficos sensibles en los alrededores de las estaciones con la balanza, hacía presumir que no era indispensable efectuar el prolijo cálculo de la acción cartográfica.

Para tener, no obstante, una idea de la influencia que pudiera ejercer el cerro Cantuera que se levanta próximo a Parla, se calculó la altura media de los dos compartimientos que dicha elevación determina con las curvas de nivel correspondientes, utilizando a ese fin la hoja de Getafe, sobre la que se colocó un papel tela dividido en 36 segmentos, coincidiendo su centro con la estación 10. Las fórmulas empleadas son las propuestas por Eötvös, publicadas en mi folleto *La balanza de torsión Eötvös-Schwyedar y sus aplicaciones.*

Los valores obtenidos son los siguientes:

	Primer compartimiento.	Segundo compartimiento.
$\frac{d^2U}{dxdz}$	$-0{,}00002 \times 10^{-9}$	$-0{,}001 \times 10^{-9}$
$\frac{d^2U}{dxdy}$	$-0{,}000005 \times 10^{-9}$	$-0{,}0003 \times 10^{-9}$
$\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}$	$-0{,}005 \times 10^{-9}$	$-0{,}01 \times 10^{-9}$
$\frac{d^2U}{dxdy}$	$0{,}001 \times 10^{-9}$	$0{,}004 \times 10^{-9}$

Dados los valores tan reducidísimos que el accidente orográfico de mayor relieve produce, juzgué inútil proseguir el cálculo para las demás estaciones y compartimientos, pudiendo considerarse como despreciable la influencia de la acción cartográfica.

Cálculo analítico de los Δg.—La diferencia de gravedad Δg entre cada dos estaciones consecutivas de la balanza se calcula por la fórmula

$$\text{cm. } \Delta g = \frac{d}{2}\left[(U_{xzB} + U_{xzA})\cos\theta + (U_{yzB} + U_{yzA})\operatorname{sen}\theta\right],$$

en la que las U, con el subíndice A, se refieren a la primera estación y con el subíndice B a la segunda estación por el orden en que fueron observadas, siendo θ el azimut de la recta AB en A, contado a partir del Norte, y d la distancia, en centímetros, entre A y B. Los valores de θ y d figuran en el cuadro II, resumen de los valores obtenidos.

Se obtuvieron los siguientes resultados:

CUADRO II

ESTACIONES	FECHA	$G_x \cdot 10^{+9}$	$G_y \cdot 10^{+9}$	$(U - U') \cdot 10^{+9}$	$(U_{xy} - U'_{xy}) \cdot 10^{+9}$	d	θ	m	Δg	Δg deducidos gráficamente.
						Metros.	°	°	Cm.	Cm.
1.....	24-25 Oct..	3,82	— 11,10	26,62	— 1,76			288,5		
						750	143		— 0,00105	— 0,00105
2.....	27-28 idem.	18,91	— 5,77	6,06	0,05			343		
						590	203		— 0,00062	— 0,00061
3.....	29-30 idem.	4,79	3,62	14,79	— 3,41			33,5		
						1 115	132,5		— 0,00039	— 0,00051
4.....	31-1.º Nov.	12,70	3,00	— 10,94	— 2,35			13		
						810	201,5		— 0,00067	— 0,00069
5.....	2- 3 idem.	3,61	0,64	37,11	— 2,99			10,5		
						1 050	153		— 0,00027	— 0,00032
6.....	4- 5 idem.	1,56	— 1,60	— 7,31	— 2,87			314		
						850	183,7		— 0,00015	— 0,00014
7.....	7 -8 idem.	2,07	0,52	— 3,61	— 1,03			14		
						830	144,7		— 0,00056	— 0,00046
8.....	9-10 idem.	16,84	8,06	9,62	1,99			25		
						610	215		— 0,00048	— 0,00044
9.....	11-12 idem.	— 7,10	5,29	22,17	8,92			143		
						1 070	164		0,00061	0,00070
10.....	13-14 idem.	— 3,16	0,46	16,69	0,68			172		
									$\Sigma \Delta = g$ — 0,00364	— 0,00360

ESTACIÓN					Cm.
1 a 2....	$\Delta g_{1,2} = 37500[$	$22{,}73 \times (-0{,}7986)$	$+ (-16{,}87) \times 0{,}6018]$		$= -0{,}00105$
2 a 3....	$\Delta g_{2,3} = 29500[$	$23{,}70 \times (-0{,}9205)$	$+ (-2{,}15) \times (-0{,}3907)]$		$= -0{,}00062$
3 a 4....	$\Delta g_{3,4} = 55750[$	$17{,}49 \times (-0{,}6756)$	$+ 0{,}62 \times 0{,}7373]$		$= -0{,}00039$
4 a 5....	$\Delta g_{4,5} = 40500[$	$16{,}31 \times (-0{,}9304)$	$+ 3{,}64 \times (-0{,}3665)]$		$= -0{,}00067$
5 a 6....	$\Delta g_{5,6} = 52500[$	$5{,}17 \times (-0{,}8910)$	$+ (-0{,}96) \times 0{,}4540]$		$= -0{,}00027$
6 a 7....	$\Delta g_{6,7} = 42500[$	$3{,}63 \times (-0{,}9979)$	$+ (-1{,}08) \times (-0{,}0645)]$		$= -0{,}00015$
7 a 8....	$\Delta g_{7,8} = 41500[$	$18{,}91 \times (-0{,}9041)$	$+ 8{,}58 \times 0{,}4274]$		$= -0{,}00056$
8 a 9....	$\Delta g_{8,9} = 30500[$	$9{,}74 \times (-0{,}8192)$	$+ 13{,}35 \times (-0{,}5736)]$		$= -0{,}00048$
9 a 10....	$\Delta g_{9,10} = 53500[$	$-10{,}26 \times (-0{,}9613)$	$+ 5{,}75 \times 0{,}2756]$		$= 0{,}00061$
				$\Sigma \Delta g$	$= -0{,}00364$

Cálculo gráfico de los Δg.—Para efectuar este cálculo se dibujan los gradientes totales, resultado de tomar sobre las X e Y los valores topográficos de las U_{xz} y U_{yz}, y la semisuma de los gradientes, proyectados sobre la recta que une cada dos estaciones, multiplicada por la distancia, en centímetros, proporciona los Δg. Los gradientes proyectados se aprecian con la misma escala que sirve para el dibujo (véase la lámina 1.ª adjunta).

ESTACIONES	Gradientes proyectados.		Semisuma proyecciones.	Distancia entre estaciones.	Δg
					Cm.
1- 2.....	— 9,5	— 18,5	— 14,0	75 000	— 0,00105
2- 3.....	— 14,4	— 6,0	— 10,2	59 000	— 0,00061
3- 4.....	— 1,2	— 8,0	— 4,6	111 500	— 0,00051
4- 5.....	— 13,2	— 3,7	— 8,5	81 000	— 0,00069
5- 6.....	— 3,5	— 2,5	— 3,0	10 500	— 0,00032
6- 7.....	— 1,5	— 2,0	— 1,7	85 000	— 0,00014
7- 8.....	— 1,7	— 9,5	— 5,6	83 000	— 0,00046
8- 9.....	— 17,5	8,0	— 7,3	61 000	— 0,00044
9-10.....	8,5	3,0	5,8	107 000	0,00062
				$\Sigma \Delta g$	$= -0{,}00360$

Comparación de los resultados obtenidos con el péndulo y la balanza entre las estaciones de Getafe y Pinto.— En Getafe el valor de **g** deducido es de 979,996 con altura de 624 metros. En Pinto el valor deducido para **g** es de 980,000 con altura de 609 metros.

Para comparar estos resultados con los que proporciona la balanza empezaremos por reducir el valor de **g** en Getafe a la altura de Pinto por medio de la conocida fórmula

$$\frac{dg}{dz} \times 10^{-9} \times \Delta H^{cm.} = 3086 \times 10^{-9} \times \Delta H^{cm.}$$

Como ΔH en este caso es + 15 metros, la reducción será

$$+ 0^{cm.},0046.$$

La fórmula para comparar los resultados de péndulo y balanza es:

$$g_{\text{Pinto}} = g_{\text{Getafe}} + \Delta H \frac{dg}{dz} + \Sigma \Delta g \qquad \text{(dados por la balanza)}$$

o sea

$$980^{cm.},000 = 979^{cm.},996 + 0^{cm.},0046 - 0^{cm.},0036,$$

y despejando $\Sigma \Delta g$

$$980^{cm.},000 - 979^{cm.},996 - 0^{cm.},0046 = - 0^{cm.},0036,$$

o sea

$$- 0^{cm.},001 = - 0^{cm.},004.$$

Esta diferencia de $- 0^{cm.},003$ entre los dos resultados es muy favorable para la balanza por quedar comprendida dentro de los errores medios de las determinaciones de **g** con el péndulo, que resultó ser de $\pm 0^{cm.},002$ para cada una de las estaciones de Getafe y Pinto. Ese margen de error puede dar entre la diferencia de los dos valores observados para **g** una separación de $- 0^{cm.},004$.

El resultado de la comparación predispone en favor de la balanza, como aparato adecuado para efectuar el estudio rápido gravimétrico de regiones que cuenten con observaciones pendulares en que apoyar las estaciones con la balanza.



ESTACIÓN I.ª—VISTA DE LA CASETA DE LA BALANZA Y TIENDA PROTECTORA



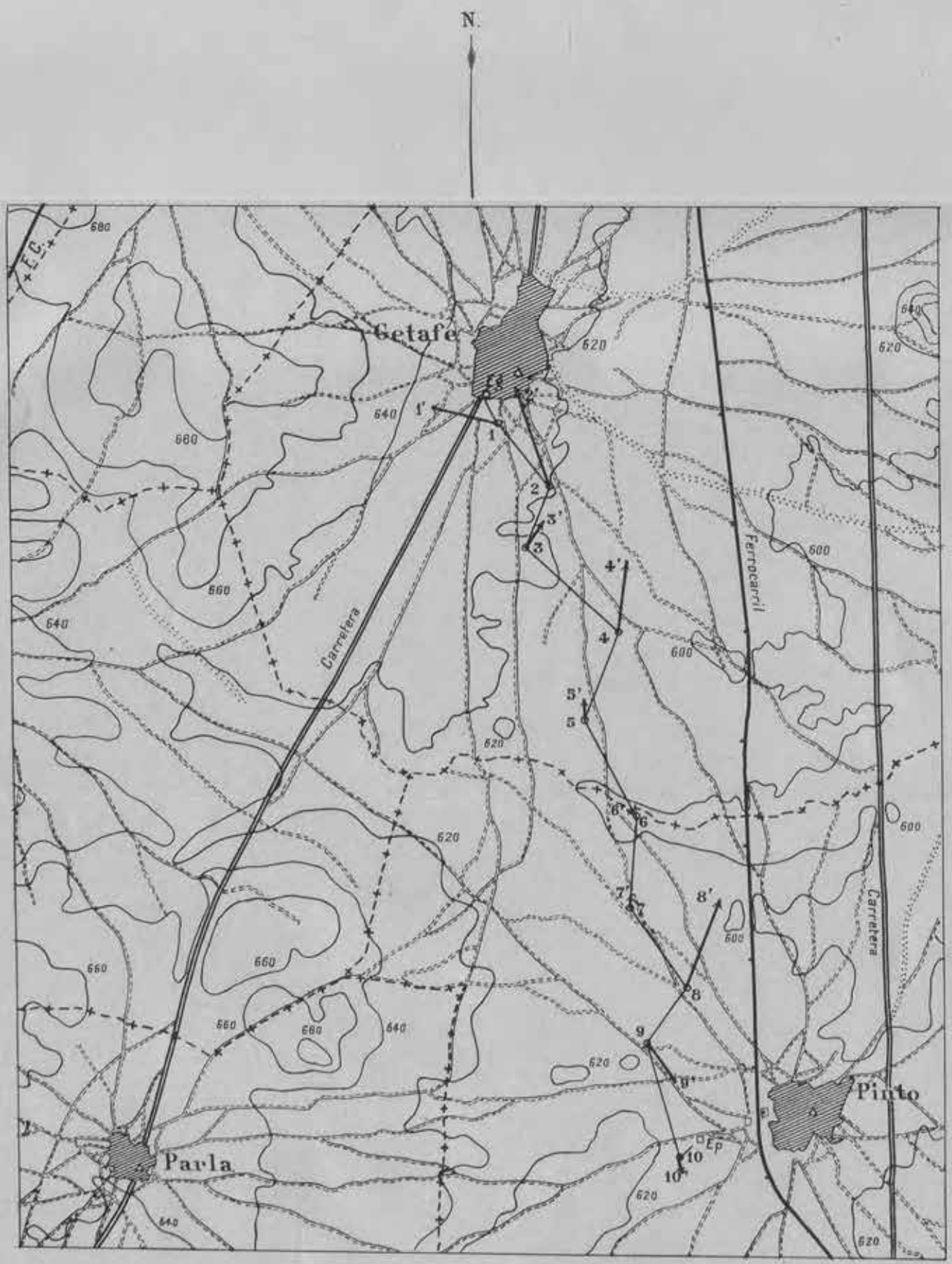
ESTACION I.ª—VISTA DEL CAMPAMENTO HACIA EL NORTE



ESTACIÓN 3.ª EN EL FONDO EL PUEBLO DE GETAFE



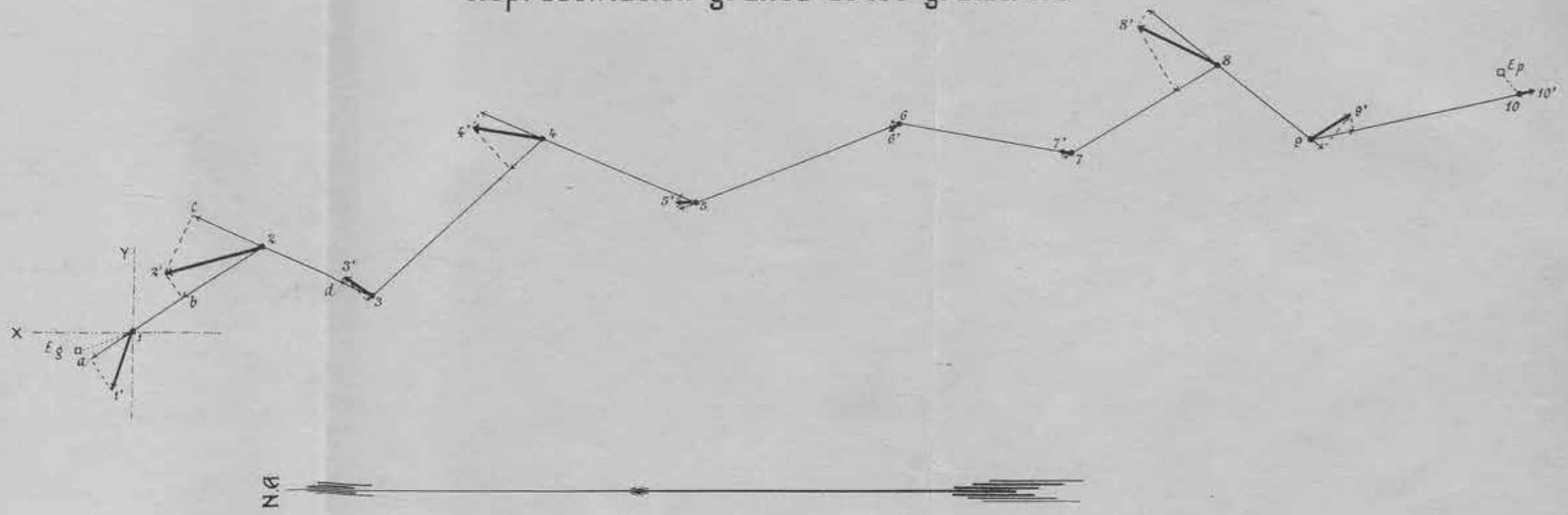
ESTACIÓN 10.—EN EL FONDO LA HUERTA DE SAN JUAN DONDE SE DETERMINÓ EL VALOR DE LA GRAVEDAD


N.
Getafe
Parla
Pinto
Carretera
Ferrocarril
Carretera
F.C.
Ep
620
640
660
600
680

CAMPAÑA DE ENSAYO CON LA BALANZA DE TORSIÓN

1924

Representación gráfica de los gradientes



Escala de los gradientes: 1×10^{-9} = 1mm } *Eg.....estación de péndulo en Getafe*
Id de las distancias: 1:25000 } *Ep.....id id en Pinto*

1925

SEGUNDA CAMPAÑA DE ENSAYO

INTRODUCCION

Invitado por la Junta organizadora del XIV Congreso Geológico Internacional, previa la autorización oficial correspondiente, a cooperar con el personal técnico de dicha Junta en los trabajos de índole geofísica que se proyectan para ser presentados en aquel Congreso, el cual se ha de celebrar en esta Corte durante el mes de Mayo de 1926, y habiendo quedado, por otra parte, sin ensayar en la campaña de ensayo de 1924 la eficiencia de la balanza como aparato investigador y delimitador de masas subterráneas perturbadoras de los gradientes, fué proyectada para la presente campaña, de conformidad con el Consejo del Servicio Geográfico y con los señores Ingenieros de Minas, Excmo. Sr. D. César Rubio y D. Agustín Marín, expertos geólogos, el estudio de la cuenca potásica de Cataluña.

Conocidas perfectamente las características geológicas de dicha región, descritas en la notable obra del Sr. Marín titulada *Investigaciones en la cuenca potásica de Cataluña*, se escogió como zona de experimentación un perfil transversal de la misma, en sentido N.-S., siguiendo la cuenca del río Llobregat. Dicho perfil empieza en el pueblo de Puigreig, al N., donde un sondeo anteriormente practicado no había acusado la existencia de sal potásica, y termina en el límite del oligoceno, formación geológica en la que se presenta la potasa, con el eoceno, cerca ya de Manresa, al S.

En un reconocimiento previo del terreno, hecho por el que suscribe en compañía del Ingeniero Sr. Marín, se proyectaron, de común acuerdo, 14 o 15 estaciones de balanza convenientemente espaciadas. La topografía

del terreno, algo accidentada, especialmente en el primer tercio del recorrido, hizo algo difícil la elección del emplazamiento de las estaciones correspondientes. Posteriormente y durante los trabajos de campo se ampliaron las estaciones observadas hasta 21.

El perfil en estudio pasa además por los pueblos de Navás, Balsareny y Sallent, ligados por carretera y por el ferrocarril de vía estrecha de Manresa a Berga, circunstancias que facilitaron el transporte del personal y material de una a otra estación.

Para hacer esta campaña fué cedida amablemente y a mi ruego, la balanza del Instituto Geológico, del mismo modelo y fecha de construcción que la del Instituto Geográfico, y aún no utilizada en ninguna investigación en el campo. La idea principal que me guiaba en el empleo de aparato que no fuese el nuestro fué la de comprobar el fenómeno del «pegamiento» presentado en la campaña anterior de ensayo. Todo el resto del material que se utilizó (caseta de la balanza, tiendas de campaña, etc.) pertenece a la Brigada gravimétrica de nuestro Instituto.

Me prestaron su valiosa cooperación durante los trabajos de campo el Ingeniero de Minas D. Javier Milans del Bosch, afecto al Instituto Geológico, y mi querido compañero el Ingeniero de Minas e Ingeniero Geógrafo D. José García Siñeriz.

Las nivelaciones radiales alrededor de cada estación y la cota de cada una de éstas, fueron determinadas por el Topógrafo auxiliar de la Brigada D. Félix Creus.

CAPÍTULO ÚNICO

Antecedentes geológicos.—El estudio geológico de la zona permitía afirmar la existencia de la sal potásica, alternando con la sal común, a unos dos kilómetros al N. de Balsareny, por donde pasa el eje de un anticlinal *AA'* (véase el plano adjunto), perfectamente visible en los cortes de las trincheras de la carretera y orientado de W. a E. En un sondeo practicado en dicho anticlinal, a kilómetro y medio al E. de la carretera, se encontró la sal potásica a escasa profundidad.

En Puigreig, como hemos dicho antes, podía asegurarse la no existencia de sal.

El borde N. del yacimiento de ésta debía, pues, encontrarse entre Puigreig y el anticlinal de Balsareny. Dada la menor densidad de la sal potásica debería llegarse, marchando con la balanza de N. a S., a una estación en que el gradiente, al dirigirse, como lo hace siempre, hacia las capas del terreno de mayor densidad, acusase por su cambio de dirección el borde. Claro es que para definir éste, aun limitando la investigación al estudio de un perfil del terreno, como en este caso, habría necesidad de observar varias estaciones, próximas unas a otras, para ver si los resultados de las mismas concordaban.

Al acercarse con la balanza al anticlinal antes mencionado debería disminuir el valor del gradiente, teóricamente nulo, si se acertase a colocar la balanza en la vertical que corta al eje de la anticlinal, en el supuesto de ser éste simétrico con respecto a dicho eje.

Un segundo anticlinal *BB'* se presenta al S. de Sallent, cuyo eje corre también de W. a E., como a unos dos kilómetros de aquel pueblo. Había también interés en comprobar dicho accidente geológico con gradientes dirigidos en sentido contrario y apartándose del eje del anticlinal, según que la balanza se montase en la rama N. o en la rama S. del mismo.

Entre este segundo anticlinal y el pueblo de San Fructuoso de Bagés, que marca aproximadamente el límite del oligoceno con el eoceno, ha de pasar el borde S. de la zona potásica, que asimismo se trataba de señalar con la balanza.

Plan de trabajo y resultado de las observaciones. Se siguió un método parecido al de la campaña anterior. En cada estación se montaba, ordinariamente a primera hora

de la mañana, el campamento, quedando instalada la balanza y en disposición de funcionar hacia el medio día o primeras horas de la tarde. Los días largos de los meses en que se observó, permitieron obtener series suficientes sobre las placas a la caída de la tarde, en caso de no haberse presentado ninguna perturbación en el funcionamiento del aparato, obteniéndose así una placa de día. De este modo podía disponerse de las noches para impresionar nueva placa, si había salido mal la primera. Si, como sucedió en algunas estaciones, las balanzas se mostraban reacias a las correcciones de las cabezas de torsión para llevarlas a las posiciones de equilibrio establecidas para el comienzo del trabajo, exigiendo todas las horas de la tarde para corregirlas, entonces se dejaban funcionando durante toda la noche.

En las estaciones en que se obtuvieron placa de día y de noche, se dedujeron los mismos valores para los gradientes, resultados de la traducción aquella, corroborando la afirmación del Profesor Schweydar de ser actualmente indiferente el que la balanza modificada por él, funcione de día o de noche, lo que redunda en beneficio de la rapidez de observación. Claro es que no hay que olvidar que la temperatura se mantuvo suave durante todo este periodo de observaciones.

Al montar la balanza en la primera estación me encontré con que durante el transporte desde Madrid se habían roto los dos hilos de suspensión de las balanzas. Indagando por las causas probables de dichas roturas, averigüé que el mecanismo fiador de una de las cabezas de torsión había saltado, saliéndose aquélla de su asiento, y que en la segunda balanza había cedido, aflojándose, el mecanismo de sujeción del brazo de la balanza. Indudablemente los dos desarreglos se habían producido durante el transporte en camión, desde Manresa a Puigreig, unos 30 kilómetros, y debido al mal estado de la carretera, en algunos trozos. Hubo necesidad, pues, de colocar los hilos de repuesto llevados a prevención, invirtiéndose varios días en conseguir llevar las balanzas a sus respectivas posiciones de equilibrio.

La operación de colocar los hilos exige tal lujo de precauciones para evitar su rotura, que el Profesor Schweydar recomienda que vayan siempre puestos, aun en viajes largos, como el de esta campaña, por ser menor las probabilidades de rotura.

En esta estación, con tiempo húmedo, se presentó el fenómeno del pegamiento, cuyas causas he explicado en la Memoria de la campaña anterior. Con el fin de remediar sus inconvenientes, ya que no fuese posible atacar a su origen, se me ocurrió un sencillo remedio, que en todas las demás estaciones resultó muy eficaz.



Figura 1.ª

En la figura 1.ª se representa esquemáticamente la proyección horizontal de las cajas de las balanzas 1,1 y 2,2.

Colocando unas delgadas tiras de cartulina aa' y bb', apoyadas en el fondo de las cajas de oscilación de cada balanza, y de modo que sus aristas interiores sobresalgan de los bordes c y d (fig. 2.ª) del tubo dentro del cual penden los respectivos contrapesos, se evita en la práctica, aun con tiempo húmedo, que en la oscilación se peguen los costados metálicos de los estribos h contra las superficies igualmente

metálicas *c* y *d*, por tropezar primero los estribos con los bordes finos de las cartulinas.

La balanza funcionó con regularidad en todas las demás estaciones observadas, si bien en todas ellas se tuvo la precaución de colocar las tiritas de cartulina.

En los *Cálculos*, depositados en el Archivo Geodésico, figuran los estados de *valores totales* con los resultados de traducción de las placas obtenidas en las 21 estaciones observadas y el desarrollo del cálculo hasta encontrar los valores totales correspondientes a las U_{xz} y U_{yz}. La colección de placas está asimismo depositada en dicho Archivo. Se insertan a continuación las hojas con los datos de nivelación y los estados correspondientes al cálculo de la *acción del terreno*, que permiten deducir los *valores topográficos* de los gradientes.

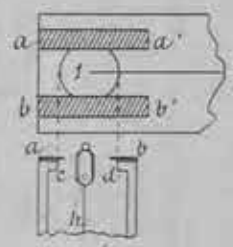


Figura 2.ª

Para llegar a encontrar la *perturbación subterránea* del gradiente total, que es la magnitud que en este caso nos interesa, hay que calcular primeramente la *acción normal*. Los valores de ésta se encuentran tabulados para diversas latitudes en la página 26 de la Memoria fundamental de Eötvös *Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit hülfe der Drehwage*. Se pueden calcular también directamente por la fórmula que emplea Schweydar:

$$U_{xz}\,\text{normal} = \frac{dg}{\rho_x d\varphi} = \frac{5{,}169}{\rho_x}\,\text{sen}\,2\varphi.$$

en la que ρ_x es el radio de curvatura de la elipse meridiana y φ la latitud del lugar. Para latitud media de la zona donde se observaron las estaciones de balanza, se tomó el valor $\varphi = 42°$.

El cálculo de la acción normal aparece en la página 64 de los *Cálculos*.

Finalmente hay que averiguar los valores de la *acción cartográfica* para cada estación. Este cálculo se ha llevado a cabo considerando los principales accidentes topográficos, relieves o depresiones, próximos a cada estación y hasta una distancia variable según los casos, pero que por término medio alcanza a los 500 metros. Aun limitando de este modo el cálculo, ha sido preciso calcular más de 240 hojas, habiendo estaciones como la primera y la quinta con 45 y 46 hojas, respectivamente. Éstas están reunidas en las páginas 65 a 314 de los *Cálculos*, precedidas las de cada estación del resumen de las mismas. Acompañan a los *Cálculos* las hojas con curvas de nivel en 1:25.000 que han servido para hacer dicho cálculo de la acción cartográfica y el cuaderno de los perfiles para obtener la altitud de cada estación y fijar su situación en el plano.

Restando de los valores topográficos los de la acción normal y cartográfica, se obtienen las perturbaciones subterráneas, y restando de los valores topográficos sólo la acción normal, obtenemos las *perturbaciones topográficas*.

El cuadro I resume todos los valores obtenidos y deducidos para cada estación.

CUADRO I

ESTACIONES	$U_{xz} \cdot 10^{+9}$	$U_{yz} \cdot 10^{+9}$	$U'_{xz} \cdot 10^{+9}$	$U'_{yz} \cdot 10^{+9}$	U_{xz} nor. $\cdot 10^{+9}$	U_{yz} nor. $\cdot 10^{+9}$	$U''_{xz} \cdot 10^{+9}$	$U''_{yz} \cdot 10^{+9}$	$P_{s_{xz}} \cdot 10^{+9}$	$P_{s_{yz}} \cdot 10^{+9}$	$P_{t_{xz}} \cdot 10^{+9}$	$P_{t_{yz}} \cdot 10^{+9}$	OBSERVACIONES
1.....	52,7	58,6	37,0	— 3,6	8,1	0,0	— 7,4	4,4	15,0	57,8			U_{xz} / U_{yz} Valores totales.
2.....	— 12,2	39,3	— 7,8	12,4	»	»	— 0,2	1,7	— 12,3	25,2			
3.....	— 1,1	— 36,3	15,4	— 26,5	»	»	3,0	11,6	— 27,6	— 21,4			
4.....	28,2	8,4	30,9	0,2	»	»					— 10,8	8,2	U'_{xz} / U'_{yz} Acción del terreno.
5.....	— 0,5	— 63,6	— 9,8	— 39,2	»	»	0,2	— 1,9	1,1	— 22,5			
6.....	— 39,7	— 62,0	— 50,2	— 54,0	»	»	0,2	0,5	2,2	— 8,5			
7.....	46,8	— 24,7	34,9	— 23,2	»	»	0,2	0,4	3,6	— 1,9			
8.....	9,6	— 17,9	2,2	— 23,3	»	»	0,5	2,9	— 1,2	2,5			U_{xz} nor. / U_{yz} nor. Valores normales.
9.....	19,1	— 45,0	— 2,2	— 47,6	»	»	0,2	1,5	13,0	1,1			
10.....	18,0	— 18,4	10,2	— 2,4	»	»					— 0,3	— 16,0	
11.....	36,2	27,2	19,2	14,5	»	»	0,1	1,2	8,8	11,5			U''_{xz} / U''_{yz} Acción cartográfica.
12.....	— 23,7	— 33,4	— 32,8	— 13,2	»	»	1,7	0,6	0,7	— 20,8			
13.....	26,3	— 13,0	7,9	— 2,4	»	»	— 1,9	2,0	12,2	— 12,6			
14.....	— 9,6	— 7,0	5,0	— 15,2	»	»	— 2,6	12,2	— 20,1	— 4,0			
15.....	19,5	— 13,0	5,1	— 4,4	»	»	— 0,1	1,5	6,4	— 10,1			$P_{s_{xz}}$ / $P_{s_{yz}}$ Perturbación subterránea.
16.....	29,5	12,0	20,7	6,4	»	»					0,7	5,6	
17.....	— 3,0	— 19,8	— 1,6	— 17,2	»	»	— 0,3	1,1	— 9,2	— 3,7			
18.....	— 22,5	— 52,7	— 2,0	— 31,3	»	»	0,0	— 0,3	— 28,6	— 21,1			$P_{t_{xz}}$ / $P_{t_{yz}}$ Perturbación topográfica.
19.....	9,4	— 51,3	2,8	— 29,1	»	»	0,0	0,0	— 1,5	— 22,2			
20.....	— 21,8	— 28,6	— 14,7	— 18,2	»	»	0,0	0,0	— 15,2	— 10,4			
21.....	39,6	— 6,8	5,0	— 1,1	»	»					26,5	— 5,7	

Representación gráfica de los gradientes e interpretación de los mismos.—Para la representación gráfica de las perturbaciones subterráneas se escogió como escala la de medio milímetro por cada unidad del noveno orden de la perturbación. Sobre los ejes coordenados dibujados al final de cada hoja *acción del terreno* se tomaron los valores de las componentes según XZ e YZ de la perturbación, deduciéndose gráficamente el valor y dirección de la *perturbación máxima subterránea*. Los valores deducidos son los siguientes:

CUADRO II

ESTACIÓN	Perturbación máxima subterránea.
1	$59{,}4 \cdot 10^{-9}$
2	28,0 »
3	34,0 »
5	22,0 »
6	8,8 »
7	3,2 »
8	2,8 »
9	13,0 »
11	14,0 »
12	21,0 »
13	17,0 »
14	20,8 »
15	11,4 »
17	10,0 »
18	35,0 »
19	22,0 »
20	17,6 »

No se ha calculado la perturbación subterránea correspondiente a las estaciones 10, 16 y 21, por haber sido desechadas para la finalidad de esta investigación después de observadas, y por esta razón se ha detenido el cálculo de estas estaciones al llegar a deducir la perturbación topográfica correspondiente. Tampoco se ha podido calcular, contra nuestra voluntad, la perturbación subterránea en la estación 4, debido a errores de dibujo en el plano con curvas de nivel que poseíamos para hacer el cálculo de la acción cartográfica.

Colocadas sobre el plano que va adjunto, las 17 estaciones que figuran en el cuadro II, se trazó por cada una una flecha igual en magnitud y dirección a la perturbación máxima subterránea correspondiente.

La marcha de dichos gradientes comprueba notablemente las características geológicas conocidas, del perfil estudiado con la balanza. Así, tras los primeros gradientes 1-1, 2-2, 3-3, de magnitudes decrecientes y direcciones variables, se obtiene el gradiente 5-5, corroborado por el 11-11, que denotan por sus direcciones, la existencia de una masa subterránea hacia el S. menos densa, la cual forma un entrante hacia las estaciones 5 y 11. Este entrante, que verosímilmente constituye el borde N. del yacimiento, viene comprobado por los gradientes 12-12 y 9-9, el último francamente en dirección N., confirmando a su vez la extensión hacia el S. de las capas subterráneas menos densas. Concurre a fortalecer la idea del paso sobre el borde, la pequeñez del gradiente 6-6, casi una tercera parte menor que el 5-5, indicando la situación de la estación 6 sobre estratos menos densos que los situados debajo de la estación 5.

La casi igualdad de valores de los gradientes 5-5 y 12-12, que valen 22 y 21 unidades del noveno orden C. G. S., el primero correspondiendo a una estación fuera del yacimiento y el otro a una estación sobre el mismo, permite aventurar la conclusión que el espesor de éste disminuye sensiblemente en este borde admitido, el cual probablemente terminará en forma lenticular. Esta misma conclusión se deduce de la comparación de gradientes de las estaciones 11 y 9, iguales a 14 y 13 unidades, respectivamente.

Sobre el plano se ha señalado con una línea roja NN', la forma más probable del borde al cortar el perfil en estudio.

Entre las estaciones 6 y 8 pasa el eje del anticlinal AA', muy próximo a la estación 7, disminuyendo los gradientes en valor y señalando la existencia de capas menos densas debajo de las estaciones 7 y 8, de mayor espesor o más próximas a la superficie del terreno, que las situadas debajo de la estación 6. No hay que olvidar que a menos de dos kilómetros al E. de la estación 8, se encuentra el sondeo de Balsareny hecho por el Estado, que afirmó la existencia de potentes capas de potasa y sal blanca.

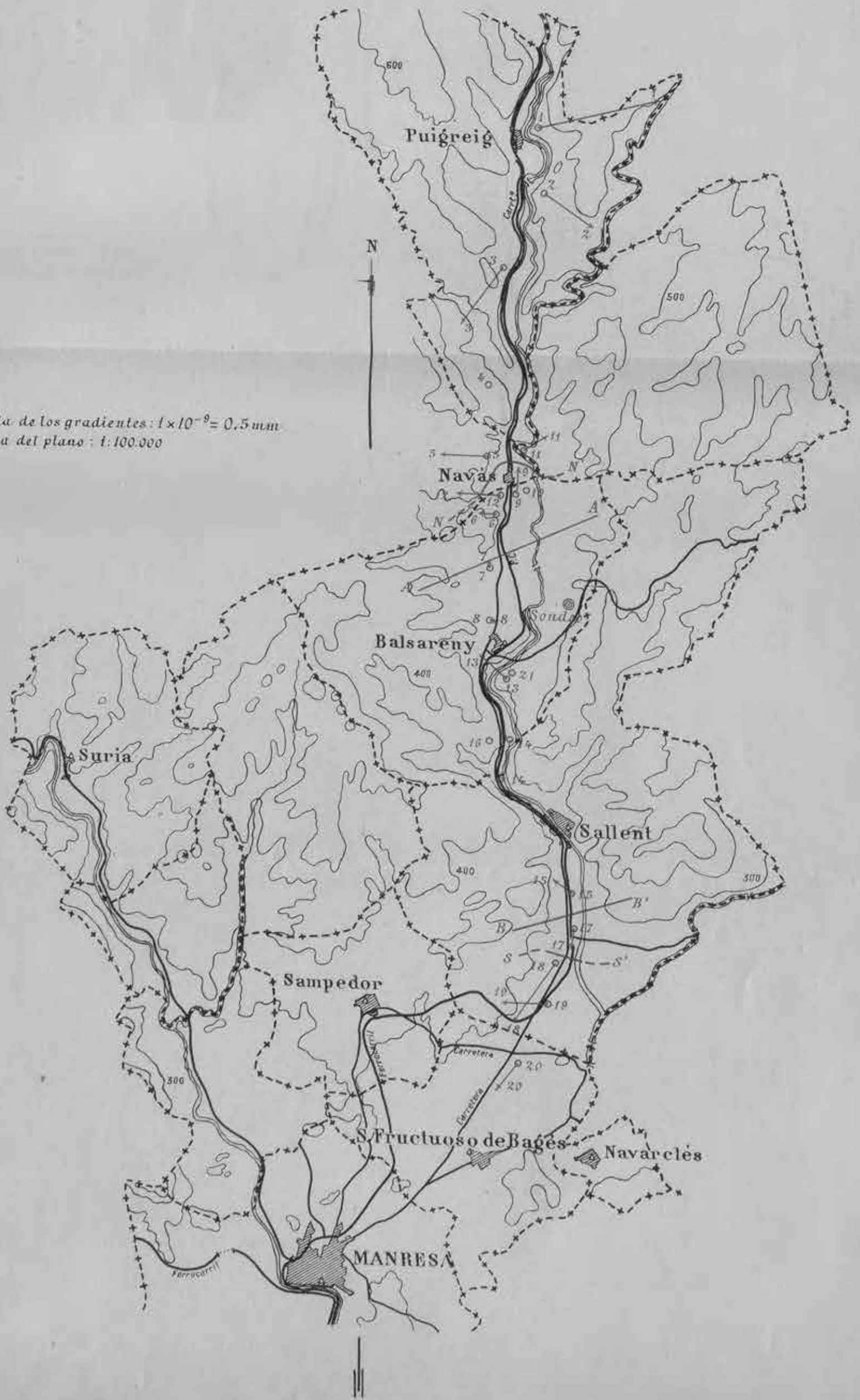
Observando las direcciones de los gradientes 15-15 y 17-17, al S. de Sallent, es lógico presumir que entre las dos estaciones 15 y 17 pase el eje del anticlinal BB', que el Sr. Marín, en su obra antes citada, traza en dicho sitio en el sentido SW.-NE. Las magnitudes de estos gradientes, 11,4 y 10, respectivamente, más de tres veces mayores que las de los 7-7 y 8-8, indican menor espesor del yacimiento potásico o una mayor profundidad de la capa superior del mismo.

El fuerte valor que alcanza el gradiente 18-18, el mayor de los obtenidos desde

la estación 5, descubre una brusca discontinuidad en las densidades subterráneas, y teniendo en cuenta su dirección SW., cabe afirmar que esta estación, si no resulta asentada sobre el borde S. del yacimiento, *SS'*, está muy próxima al mismo. La disminución gradual de los gradientes en las dos siguientes estaciones 19 y 20 y la dirección hacia el SW. de la 20, son argumentos en pro del paso sobre dicho borde S. Este, en oposición a lo deducido para el borde N., parece concluir de repente con bastante espesor.

La concordancia obtenida entre los datos geológicos y los datos gravimétricos es singular y confirman, sin duda alguna, la utilidad de la balanza de torsión en la investigación de masas subterráneas.

Madrid 19 de Enero de 1926.



Escala de los gradientes: $1 \times 10^{-9} = 0.5$ mm
Escala del plano: 1:100.000



MEMORIAS
DEL
INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL

TOMO XV

V

LA REDUCCIÓN ISOSTÁTICA
DE
NUESTRAS ESTACIONES DE GRAVEDAD

POR

GUILLERMO SANS HUELIN

INGENIERO GEÓGRAFO, COMANDANTE DE ARTILLERÍA



MADRID
TALLERES DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL
—
1926

A mi querido director
Excmo Sr. D. José de Elola
El autor
Junio 1926

I

Durante las sesiones de la II Asamblea general de Geodesia y Geofísica, celebrada en esta Corte en el mes de Octubre de 1924, surgió la idea de que aquellas naciones adheridas que tuviesen hechas observaciones de la gravedad en su territorio sin estar reducidas isostáticamente y deseasen poseer dichos valores de **g** reducidos, para saber las anomalías resultantes, deberían dirigirse al U. S. Coast and Geodetic Survey, que ya de antiguo posee personal entrenado en los extensos cálculos de la reducción isostática, para conseguir que ese mismo personal pudiese efectuar las reducciones por topografía y compensación correspondientes a los valores de **g** en cada país.

La idea fué acogida amablemente por el Presidente de la Sección de Geodesia, Mr. William Bowie, que prometió trasladarla al Director del Coast and Geodetic Survey, Mr. Lester Jones, a su regreso a Washington.

Nuestro Instituto Geográfico se adhirió desde el primer momento a la proposición citada, toda vez que disponía de una red bastante extensa de valores de **g** observados en toda la extensión del territorio, a la par que carecía de personal de calculadores que poder dedicar a los prolijos cálculos de la reducción isostática. Así es que a los dos meses de celebrada la Asamblea de Madrid empezaron, por parte de nuestro Instituto, las gestiones para resolver de un modo satisfactorio el asunto.

Durante el curso de dichas gestiones se cambiaron entre el Secretario de la Sección de Geodesia y el Director del Coast and Geodetic Survey dos cartas, que posteriormente se publicaron en el núm. 6 del *Bulletin Geodesique*, órgano de la Sección de Geodesia de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, las que copiamos, traducidas, a continuación y que demuestran que la idea de la reducción había sido aceptada por el U. S. Coast and Geodetic Survey para todos los países.

París, 78, calle d'Anjou, 17 Enero 1925.

El Coronel Perrier, Secretario de la Sección de Geodesia de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, al señor Director del Coast and Geodetic Survey, en Washington.

Señor Director:

Durante la II Asamblea general de Madrid en Octubre de 1924, la Sección de Geodesia de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional se ha preocupado especialmente de la cuestión «isostasia». Ahora bien, esta cuestión ha sido objeto de trabajos de gran amplitud dentro de vuestro Servicio, que dispone, por consiguiente, actualmente de un

personal de calculadores experimentados, aptos para ejecutar rápida y seguramente los cálculos complicados de la reducción isostática, tanto para las estaciones de desviación de la vertical, como para las estaciones de intensidad de la gravedad.

Ante el evidente interés general de estos cálculos, la Sección de Geodesia ha llegado a pensar si el Coast and Geodetic Survey no podría llegar a realizarlos por cuenta de ciertos Servicios o de ciertas personalidades, que no están, por el momento, en condiciones de ejecutarlos por su cuenta.

Mr. William Bowie, Jefe de la Sección de Geodesia del Coast and Geodetic Survey, presente en Madrid, hizo concebir a los Congresistas que dicha idea tendría probabilidades de éxito al ser trasladada a la Dirección del Coast and Geodetic Survey.

Con estos antecedentes, desearía saber si en cada caso sería posible a ese Servicio ejecutar los cálculos de la reducción isostática de las estaciones de desviación de la vertical y de intensidad de la gravedad, a cuenta de los Centros o personalidades que lo deseasen. Se sobreentiende que todos los documentos necesarios, como mapas, etc., serían enviados al Coast and Geodetic Survey, y que el importe de los gastos de cálculo sería pagado por los interesados, pudiéndose proceder, anticipadamente, a una evaluación aproximada del coste.

Si esta combinación fuese posible, el Coast and Geodetic Survey prestaría un señalado servicio a la Geodesia y adquiriría nuevos títulos para el agradecimiento de los Geodestas.

G. Perrier.

Washington, Febrero 5, 1925.

Al Coronel Perrier:

Tengo el honor de acusarle recibo de su carta de 17 de Enero de 1925, en la que usted me comunica el resultado de las deliberaciones de la Sección de Geodesia de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, reunida en Madrid en Octubre último, concerniente al cálculo del efecto de la isostasia en los valores de la intensidad de la gravedad y desviaciones de la vertical.

Estimo en mucho el deseo expresado por la Sección de Geodesia de ver realizadas por el Coast and Geodetic Survey las reducciones en cuestión y me satisface el manifestarle que este Servicio está en absoluto dispuesto a encargarse de dichos trabajos.

Celebraría que los Centros Geodésicos o las personalidades interesadas de cada país entrasen en relación conmigo a propósito de los trabajos cuya ejecución deseasen.

Yo les proporcionaré un avance del coste aproximado de dichos trabajos, siendo, desde luego, preferible que los gastos sean fijados por el Coast and Geodetic Survey y aceptados por los interesados antes de emprenderse el trabajo.

Sería de desear que los interesados nos proporcionasen todos los documentos necesarios, mapas, planos, etc., relativos a la región considerada. Su adquisición por el Coast and Geodetic Survey podría acarrear gastos que aumentarían, naturalmente, el precio del trabajo y que serían evitados si dichos documentos se nos proporcionasen.

. . . . . .

Me congratulo del interés que los Geodestas del mundo entero comienzan a manifestar por la teoría de la isostasia. Esta teoría, a mi juicio, tendrá una gran influencia en la solución de los problemas geológicos, geofísicos y geodésicos. Especialmente, es de una importancia fundamental para la ciencia geológica.

Lester Jones.

Convenidos los términos económicos de la reducción de nuestras estaciones de gravedad y concedido el crédito correspondiente, se procedió por el que suscribe a reunir todo el material disponible en mapas con curvas de nivel y hojas en 1 : 50.000, indispensables para llevar a cabo los cálculos de la reducción.

El material enviado al Coast and Geodetic Survey comprendía:

250 hojas del Mapa nacional, en escala 1 : 50.000.

Los conjuntos provinciales, en 1 : 200.000, publicados por este Instituto, correspondientes a las provincias de Huelva, Cádiz, Málaga, Madrid y Sevilla.

Copias en ferroprusiato y ferrogálico, de las curvas de nivel obtenidas por nivelación barométrica, correspondientes a los conjuntos provinciales, en 1 : 200.000, aún no publicados, de las provincias de Cáceres, Alicante, Cuenca, Valencia, Murcia y Granada.

Dos ejemplares del mapa en 1 : 1.000.000, del Ingeniero de Caminos Sr. Quijano, publicado por la Dirección de Obras públicas.

Enclavadas en los mapas y hojas acabadas de citar había 39 estaciones de nuestra red gravimétrica, teniéndonos que contentar, por ahora, a que a éstas se aplicasen los cálculos de la reducción isostática, toda vez que las restantes estaciones de nuestra red corresponden a regiones de las que aún no posee nuestro Instituto planos con curvas de nivel, indispensables para efectuar los cálculos en cuestión.

Estos se efectuaron por el experto personal de calculadores del U. S. Coast and Geodetic Survey, especializado en esta materia, bajo la dirección del Jefe de calculadores, el Geodesta Mr. Swick, y la inspección de Mr. William Bowie.

El método seguido está explicado con toda claridad en la publicación especial número 10 del Coast and Geodetic Survey, titulada *The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity*, por John Hayford y William Bowie. La reducción se hizo para una profundidad de compensación de 113,7 kilómetros, por ser ésta la profundidad para la que están calculadas las tablas de dicha publicación.

Al remitir los cálculos de la reducción, nos comunicó Mr. Bowie que sólo se habían encontrado en los mapas y planos enviados, datos de nivelación suficientes para reducir 31 estaciones, en vez de las 39 en que en un principio se creyó.

Los cálculos de reducción de dichas 31 estaciones fueron enviados en forma de copias fotográficas de los originales, y están actualmente depositadas en el Archivo geodésico.

Sólo fué necesario leer en los mapas hasta las antipodas, los datos de alturas y profundidades de las zonas y compartimientos correspondientes a la estación núm. 59, Plasencia. Las restantes estaciones pudieron ser interpoladas en las zonas exteriores, o sean las numeradas del 18 al 1. Para las primeras interpolaciones se aprovecharon una estación en Suiza, que fué reducida por el Coast and Geodetic Survey hace unos años, y dos estaciones observadas por Mr. Vening Meinez en el mar, cerca de nuestras costas, y recientemente reducidas en Washington.

Cada estación comprende cuatro hojas de cálculo, distribuídas del siguiente modo: 1.ª Hoja con las interpolaciones; 2.ª Hoja con las lecturas por zonas y compartimientos, en la unidad de elevación encontrada en los mapas utilizados; 3.ª Hoja con las anteriores lecturas, reducidas a *pies* para las alturas y a *brazas* para las profundidades, y 4.ª Hoja con las correcciones finales. En las hojas 3.ª y 4.ª de cada estación figuran

unos valores encerrados en círculos, que representan la corrección total por *compensación* para las zonas individuales, mientras que los valores que aparecen en la hoja 4.ª para los distintos compartimientos en cada zona son las correcciones por *topografía*. Esta separación de las correcciones por compensación de las correcciones por topografía es conveniente para el cálculo del efecto resultante al cambiar la profundidad de compensación.

Los mapas y hojas utilizados para las lecturas en cada estación, están anotados al pie de la hoja 1.ª correspondiente a la misma. En cada caso se usaron primero hasta el límite posible los mapas en 1 : 50.000 y 1 : 200.000, siguiendo después con el mapa de España en 1 : 1.000.000 para el resto de las zonas señaladas con letras y para las zonas 18 a 14, al ser factible. Para las lecturas más allá de la zona 14 se empleó ordinariamente el mapa de Europa, de Stanford, en escala 1 : 4.000.000. Los compartimientos marítimos se leyeron en las cartas hidrográficas del British Admiralty o del U. S. Hydrographic Office, excepto los de las zonas más distantes, que fueron leídas en el mapa de Stanford.

A continuación publicamos la tabla I con los resultados finales para las 31 estaciones. En esta tabla la gravedad teórica está calculada por la fórmula de Bowie núm. 2

$$\gamma_0 = 978{,}039\,(1 + 0{,}005294\,\mathrm{sen}^2\varphi - 0{,}000007\,\mathrm{sen}^2 2\varphi),$$

que dicho Geodesta considera ventajosa para cualquier país del Globo. Acompaña a los cálculos de reducción enviados una hoja con los valores teóricos de la gravedad al nivel del mar, según dicha fórmula, desde la latitud 0 a la de 90°.

Para llegar a deducir los valores de la gravedad calculada g_c, que figuran en la columna 9.ª de la tabla, hay que aplicar a los valores γ_0 de la gravedad teórica al nivel del mar, la corrección por altura de la estación sobre aquél y la corrección isostática o corrección por topografía y compensación. La primera corrección es la misma que aplicamos nosotros a nuestros valores observados g para reducirlos al nivel del mar, g_0, aunque de *signo contrario*, pues Bowie procede en sentido inverso, pasando del nivel del mar al de la estación correspondiente. Los valores de la corrección isostática que en las hojas finales de la reducción de cada estación vienen con cuatro cifras decimales, sólo aparecen con tres en la columna de esta corrección en la tabla.

En la 10.ª columna están inscritos los valores g de la gravedad observada. Restando la gravedad calculada de la observada se obtienen las anomalías $g - g_c$ de la última columna.

El promedio de estas anomalías, considerando el signo de las mismas, es de 0,009 dina y prescindiendo del signo es de 0,032 dina.

TABLA I

Número.	NOMBRE DE LA ESTACIÓN	Latitud φ	Longitud.	Elevación.	Gravedad teórica γ_0	CORRECCIONES		Gravedad calculada g_c	Gravedad observada g	Anomalía $g - g_c$
						Por elevación.	Por topografía y compensación			
				metros	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*
I	Madrid	40° 24,5	3° 41,0 W	656	980,208	— 0,202	0,006	980,012	979,981	— 0,031
1	San Fernando	36 28,0	6 12,3	44	979,862	— 014	015	979,863	979,830	— 033
2	Duque	36 29,2	4 57,4	7	979,864	— 002	— 005	979,857	979,912	055
3	Granada	37 11,0	3 36,0	669	979,924	— 206	023	979,741	979,669	— 072
6	Cartagena	37 36,0	0 59,0	3	979,960	— 001	019	979,978	980,035	057
7	Torrejón	38 00,1	0 39,1	2	979,995	— 001	010	980,004	980,032	028
17	Huelva	37 16,0	6 57,3	46	979,931	— 014	015	979,932	979,971	039
18	Tarifa	36 00,0	5 37,0	29	979,822	— 009	007	979,820	979,748	— 072
29	Palencia	42 01,0	4 32,0	717	980,352	— 221	021	980,152	980,151	— 001
30	Alicante	38 21,0	0 29,0	40	980,026	— 012	003	980,017	980,042	025
31	Denia	38 51,0	0 06,0 E	5	980,070	— 002	007	980,075	980,098	023
32	Valencia	39 29,0	0 23,0 W	6	980,126	— 002	— 014	980,110	980,127	017
34	Roquetas	40 49,0	0 30,0 E	43	980,244	— 013	— 020	980,211	980,220	009
43	Toledo	39 51,0	4 01,0 W	520	980,158	— 160	— 001	979,997	980,015	018
44	Cuenca	40 05,0	2 08,0	919	980,179	— 284	028	979,923	979,899	— 024
45	Teruel	40 27,0	1 07,0	908	980,212	— 280	016	979,948	979,925	— 023
48	Sigüenza	41 04,0	2 38,0	999	980,267	— 308	032	979,991	980,011	020
54	Ciudad Real	38 59,0	3 56,0	628	980,082	— 194	014	979,902	979,925	023
57	Fuenteovejuna	38 16,0	5 27,0	616	980,018	— 190	032	979,860	979,900	040
58	Cortegana	37 54,0	6 47,0	765	979,987	— 236	067	979,818	979,895	077
59	Plasencia	40 02,0	6 03,0	369	980,175	— 114	— 003	980,058	980,073	015
60	Sevilla	37 23,0	5 59,5	11	979,941	— 003	— 005	979,933	979,965	032
61	Ecija	37 32,0	5 05,0	105	979,954	— 032	— 006	979,916	979,888	— 028
62	Andújar	38 03,0	4 03,0	207	980,000	— 064	— 019	979,917	979,943	026
63	Baza	37 30,0	2 45,0	858	979,951	— 265	040	979,726	979,669	— 057
64	Lorca	37 40,0	1 42,0	330	979,966	— 102	015	979,879	979,897	018
65	Cieza	38 15,0	1 25,0	183	980,017	— 056	— 008	979,953	979,932	— 021
66	Albacete	39 00,0	1 51,0	678	980,083	— 209	018	979,892	979,898	006
67	Alcázar de San Juan	39 24,0	3 12,0	648	980,119	— 200	012	979,931	979,933	002
87	Málaga	36 43,0	4 25,2	61	979,884	— 019	— 008	979,857	979,918	061
88	Motril	36 45,0	3 30,2	53	979,886	— 015	— 012	979,858	979,901	043
	Promedio de las anomalías, considerando el signo									0,009
	Promedio de las anomalías, prescindiendo del signo									0,032

II

Los cálculos de reducción por topografía y compensación isostática de las 31 estaciones de gravedad españolas han sido realizados suponiendo una profundidad de compensación de 113,7 kilómetros, por estar calculadas con ella, como antes dijimos, las tablas de reducción correspondientes, pero sin prejuzgar que dicha profundidad fuese la más probable para España. Así es que en posesión el Instituto Geográfico de los valores reducidos para los 113,7 kilómetros, quedaba por hacer el estudio relativo al efecto de un cambio en la profundidad.

A este fin seguí el método de cálculo que expone Mr. William Bowie en su notable obra *Investigations of Gravity and Isostasy*. Consiste dicho método en utilizar determinados factores numéricos que se aplican a los valores obtenidos en cada estación para las diferentes zonas que circundan a aquélla hasta los antípodas de la misma.

A continuación publicamos la tabla II con los factores de reducción utilizados por mí, que se refieren a seis profundidades distintas.

El efecto de la topografía no se altera por un cambio en la profundidad, pero la compensación y la resultante, por lo tanto, de ésta y de la topografía varía con la profundidad. Como al hacer los cálculos de la reducción para la profundidad de 113,7 kilómetros vienen separados para cada estación los valores correspondientes al efecto de la topografía y al de la compensación para las zonas designadas con letras, es posible calcular para dichas zonas la influencia sólo en la compensación de un cambio de profundidad. Respecto a las zonas numeradas, como lo que se calcula para cada una es el valor de la resultante del efecto de la topografía y compensación, a dicho valor se aplicará la corrección correspondiente a la nueva profundidad.

Como ejemplo del empleo de la tabla II presentamos en la tabla III las correcciones por cambio de profundidad correspondientes a la estación de Madrid. Las cantidades en las columnas 2.ª y 3.ª de dicha tabla están tomadas de las hojas de cálculo enviadas al Instituto Geográfico por el Coast and Geodetic Survey, así como la corrección total por topografía y compensación para 113,7 kilómetros. En las columnas 4.ª, 5.ª, 6.ª, 7.ª, 8.ª y 9.ª aparecen los productos de los valores de las columnas 2.ª y 3.ª por los factores contenidos en la tabla I. La suma algebraica de dichos productos para cada profundidad representa la corrección que se añade algebraicamente al efecto total por topografía y compensación isostática para la profundidad de 113,7 kilómetros, con el fin de obtener el efecto para las demás profundidades.

De un modo análogo he realizado los cálculos para las otras 30 estaciones redu-

cidas, agrupándose los resultados con tres cifras decimales en la tabla IV, en la que se incluyen también las correcciones para la profundidad inicial de 113,7 kilómetros.

El examen de dicha tabla IV pone de manifiesto que el efecto de la topografía y compensación aumenta algebraicamente con el aumento de la profundidad para todas las estaciones, menos para la 6, Cartagena, en que dicho efecto disminuye. La máxima variación al pasar de la profundidad de 56,9 kilómetros a la de 184,6 corresponde a la estación 63, Baza, con 0,040 dina. Las mayores variaciones se notan en las estaciones situadas en regiones montañosas, como en dicha estación de Baza; en la 3, Granada; 44, Cuenca; 45, Teruel, etc. En cambio las menores variaciones se señalan en las estaciones costeras, que arrojan un promedio de 0,008 dina al pasar de la menor a la mayor profundidad.

El promedio general de la variación para las 31 estaciones es de 0,018 dina.

Deducidas las correcciones por topografía y compensación para diversas profundidades, se pueden calcular las anomalías de la gravedad correspondientes $g - g_c$.

Combinando los datos contenidos en las tablas I y IV se obtiene la tabla V, en la que figuran los valores de las anomalías de la gravedad para las diversas profundidades de compensación consideradas.

Según el cálculo de probabilidades, la profundidad de compensación más probable entre las siete consideradas es aquella para la cual la suma de los cuadrados de las anomalías correspondientes sea mínima. Esto supone, como afirma Mr. Bowie, que las anomalías resultantes de tener en cuenta la compensación isostática se deben considerar como residuos producidos sólo por errores accidentales, pudiendo ser, por consiguiente, tanto positivos como negativos.

Hemos reunido en la tabla VI los cuadrados de las anomalías y la suma de los mismos.

El examen de dicha tabla pone de manifiesto que el valor mínimo para la suma de dichos cuadrados se alcanza con la profundidad de 96 kilómetros, que, por lo tanto, se debe aceptar como la más probable para España mientras no se posean mayor número de estaciones de gravedad reducidas que puedan modificar dicha conclusión.

Este valor de la profundidad es el mismo que Mr. Bowie, en su obra antes citada *Investigations of Gravity and Isostasy*, dedujo como el mejor para los Estados Unidos como consecuencia de las observaciones geodésicas allí realizadas hasta principios del año 1916.

TABLA II

ZONA	FACTOR PARA LA PROFUNDIDAD DE COMPENSACIÓN					
	De 56,9 km.*	De 85,3 km.	De 96 km.	De 127,9 km.	De 165,25 km.	De 184,6 km.
A	1,00	0,33	0,18	— 0,11	— 0,27	— 0,38
B	1,00	33	18	— 11	— 27	— 38
C	1,00	33	18	— 11	— 27	— 38
D	1,00	33	18	— 11	— 27	— 38
E	0,98	33	18	— 11	— 27	— 38
F	97	33	18	— 11	— 27	— 38
G	95	32	18	— 11	— 26	— 38
H	92	32	17	— 11	— 26	— 37
I	87	31	17	— 10	— 26	— 37
J	80	29	16	— 10	— 25	— 36
K	70	27	15	— 10	— 24	— 35
L	55	23	14	— 09	— 22	— 32
M	24	14	09	— 06	— 17	— 26
N	— 10	00	01	— 02	— 07	— 14
O	— 31	— 11	— 06	03	06	05
18	— 41	— 17	— 10	06	14	19
17	— 42	— 18	— 09	07	18	24
16	— 43	— 19	— 08	08	21	30
15	— 45	— 21	— 07	09	24	36
14	— 46	— 22	— 06	10	27	41
13	— 47	— 23	— 06	11	30	48
12	— 49	— 24	— 05	12	34	54
11	— 49	— 24	— 05	12	35	57
10	— 50	— 24	— 05	13	36	59
9	— 50	— 24	— 05	13	37	62
8	— 50	— 25	— 04	13	38	63
7	— 50	— 25	— 04	13	38	63
6	— 50	— 25	— 04	13	38	63
5	— 50	— 25	— 04	13	38	63
4	— 50	— 25	— 04	13	38	63
3	— 50	— 25	— 04	13	38	63
2	— 50	— 25	— 04	13	38	63
1	— 50	— 25	— 04	13	38	63

Estos factores están tomados de la tabla que Mr. Bowie publica en la página 98 de su obra *Investigations of Gravity and Isostasy*, a excepción de los correspondientes a la profundidad de 96 kilómetros, que me han sido enviados directamente por aquel ilustre Geodesta.

TABLA III.—Estación I (Madrid).

ZONA	Compensación sin topografía 113,7 km.	Resultante topografía y compensación 113,7 km.	CORRECCIÓN PARA LA PROFUNDIDAD					
			De 56,9 km.	De 85,3 km.	De 96 km.	De 127,9 km.	De 156,25 km.	De 184,6 km.
A	0	»	0	0	0	0	0	0
B	0	»	0	0	0	0	0	0
C	— 1	»	— 1	0	0	0	0	0
D	— 2	»	— 2	— 1	0	0	1	1
E	— 5	»	— 5	— 2	— 1	0	1	2
F	— 6	»	— 6	— 2	— 1	0	2	2
G	— 7	»	— 7	— 2	— 1	1	2	3
H	— 10	»	— 9	— 3	— 2	1	3	4
I	— 17	»	— 15	— 5	— 3	2	4	6
J	— 24	»	— 19	— 7	— 4	2	6	9
K	— 34	»	— 24	— 9	— 5	3	8	12
L	— 53	»	— 29	— 12	— 7	5	12	17
M	— 155	»	— 37	— 22	— 14	9	26	40
N	— 150	»	15	0	— 2	3	11	21
O	— 149	»	46	16	9	— 5	— 9	— 7
18	»	— 27	11	5	3	— 2	— 4	— 5
17	»	— 27	11	5	2	— 2	— 5	— 7
16	»	— 25	11	5	2	— 2	— 5	— 8
15	»	— 23	10	5	2	— 2	— 5	— 8
14	»	— 21	10	5	2	— 2	— 6	— 9
13	»	— 3	1	1	0	0	— 1	— 1
12	»	23	— 11	— 6	— 1	3	8	12
11	»	23	— 11	— 6	— 1	3	8	13
10	»	10	— 5	— 2	— 1	1	4	6
9	»	6	— 3	— 1	0	1	2	4
8	»	8	— 4	— 2	0	1	3	5
7	»	3	— 2	— 1	0	0	1	2
6	»	3	— 2	— 1	0	0	1	2
5	»	3	— 2	— 1	0	0	1	2
4	»	0	0	0	0	0	0	0
3	»	4	— 2	— 1	0	1	1	3
2	»	4	— 2	— 1	0	1	1	3
1	»	1	0	0	0	0	0	1
Sumas algebraicas.....			— 83	— 45	— 23	22	71	105
Corrección total por topografía y compensación, 113,7 km.....			55	55	55	55	55	55
Corrección total por topografía y compensación a cada profundidad.....			— 28	10	32	77	126	160

Estas correcciones vienen expresadas en dinas, en unidades del *cuarto* orden decimal, aunque por simplificación de cálculo aparezcan multiplicadas por 10^4.

TABLA IV.—Correcciones por topografía y compensación isostática.

Número.	NOMBRE DE LA ESTACIÓN	PROFUNDIDAD 56,9 km.	PROFUNDIDAD 85,3 km.	PROFUNDIDAD 96 km.	PROFUNDIDAD 113,7 km.	PROFUNDIDAD 127,9 km.	PROFUNDIDAD 156,25 km.	PROFUNDIDAD 184,6 km.
		dinas	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*
1	Madrid	— 0,003	0,001	0,003	0,006	0,008	0,013	0,016
1	San Fernando	009	012	014	015	016	018	021
2	Duque	— 011	— 008	— 006	— 005	— 005	— 002	000
3	Granada	002	014	018	023	026	034	040
6	Cartagena	018	019	019	019	018	018	016
7	Torrejón	006	009	010	010	010	011	011
17	Huelva	008	012	014	015	017	020	023
18	Tarifa	005	006	007	007	008	010	012
29	Palencia	006	013	017	021	025	032	038
30	Alicante	— 003	000	002	003	004	005	007
31	Denia	003	006	007	007	008	010	010
32	Valencia	— 014	— 015	— 014	— 014	— 014	— 012	— 011
34	Roquetas	— 024	— 022	— 021	— 020	— 019	— 017	— 015
43	Toledo	— 009	— 005	— 003	— 001	001	006	010
44	Cuenca	010	020	024	028	032	038	045
45	Teruel	— 005	006	010	016	020	027	034
48	Sigüenza	015	024	028	032	036	043	050
54	Ciudad Real	004	009	011	014	016	020	025
57	Fuenteovejuna	021	027	030	032	035	039	043
58	Cortegana	054	061	065	067	070	075	079
59	Plasencia	— 008	— 007	— 005	— 003	— 001	006	009
60	Sevilla	— 009	— 007	— 006	— 005	— 004	— 001	001
61	Ecija	— 010	— 009	— 007	— 006	— 005	— 002	001
62	Andújar	— 024	— 022	— 020	— 019	— 018	— 014	— 010
63	Baza	017	030	034	040	044	051	057
64	Lorca	005	011	013	015	017	020	023
65	Cieza	— 017	— 012	— 010	— 008	— 006	— 002	001
66	Albacete	005	011	014	018	020	026	031
67	Alcázar de San Juan	002	007	009	012	014	019	023
87	Málaga	— 012	— 010	— 009	— 008	— 007	— 005	— 003
88	Motril	— 017	— 014	— 013	— 012	— 011	— 009	— 007

TABLA V.—Anomalías para varias profundidades de compensación.

Número.	ESTACIONES	$g - g_c$ 56,9 km.	$g - g_c$ 85,3 km.	$g - g_c$ 96 km.	$g - g_c$ 113,7 km.	$g - g_c$ 127,9 km.	$g - g_c$ 156,25 km.	$g - g_c$ 184,6 km.
		dinas	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*	*dinas*
1	Madrid	— 0,022	— 0,026	— 0,028	— 0,031	— 0,033	— 0,038	— 0,041
1	San Fernando	— 027	— 030	— 032	— 033	— 034	— 036	— 039
2	Duque	061	058	056	055	055	052	050
3	Granada	— 051	— 063	— 067	— 072	— 075	— 083	— 089
6	Cartagena	058	057	057	057	058	058	060
7	Torrejón	032	029	028	028	028	027	027
17	Huelva	046	042	040	039	037	034	031
18	Tarifa	— 070	— 071	— 072	— 072	— 073	— 075	— 077
29	Palencia	014	007	003	— 001	— 005	— 012	— 018
30	Alicante	031	028	026	025	024	022	021
31	Denia	027	024	023	023	022	020	020
32	Valencia	017	018	017	017	017	015	014
34	Roquetas	013	011	010	009	008	006	004
43	Toledo	026	022	020	018	016	011	007
44	Cuenca	— 006	— 016	— 020	— 024	— 028	— 034	— 041
45	Teruel	— 002	— 013	— 017	— 023	— 027	— 034	— 041
48	Sigüenza	037	028	024	020	016	009	002
54	Ciudad Real	033	028	026	023	021	017	012
57	Fuenteovejuna	051	045	042	040	037	033	029
58	Cortegana	090	083	079	077	074	069	065
59	Plasencia	020	019	017	015	013	011	003
60	Sevilla	036	034	033	032	031	028	026
61	Ecija	— 024	— 025	— 027	— 028	— 029	— 032	— 035
62	Andújar	031	029	027	026	025	021	017
63	Baza	— 034	— 047	— 051	— 057	— 061	— 068	— 074
64	Lorca	028	022	020	018	016	013	010
65	Cieza	— 012	— 017	— 019	— 021	— 023	— 027	— 030
66	Albacete	019	013	010	006	004	— 002	— 007
67	Alcázar de San Juan	012	007	005	002	000	— 005	— 009
87	Málaga	065	063	062	061	060	058	056
88	Motril	048	045	044	043	042	040	038

TABLA VI.—Cuadrados de las anomalías y suma de los mismos.

$(g-g_c)^2$ 56,9 km.	$(g-g_c)^2$ 85,3 km.	$(g-g_c)^2$ 96 km.	$(g-g_c)^2$ 113,7 km.	$(g-g_c)^2$ 127,9 km.	$(g-g_c)^2$ 156,25 km.	$(g-g_c)^2$ 184,6 km.
0,000484	0,000676	0,000784	0,000961	0,001089	0,001444	0,001681
729	900	1024	1089	1156	1296	1521
3721	3364	3136	3025	3025	2704	2500
2601	3969	4489	5184	5625	6889	7921
3364	3249	3249	3249	3364	3364	3600
1024	841	784	784	784	729	729
2116	1764	1600	1521	1369	1156	961
4900	5041	5184	5184	5329	5625	5929
196	49	9	1	25	144	324
961	784	676	625	576	484	441
729	576	529	529	484	400	400
289	324	289	289	289	225	196
169	121	100	81	64	36	16
676	484	400	324	256	121	49
36	256	400	576	784	1156	1681
4	169	289	529	729	1156	1681
1369	784	576	400	256	81	4
1089	784	676	529	441	289	144
2601	2025	1764	1600	1369	1089	841
8100	6889	6241	5929	5476	4761	4225
400	361	289	225	169	121	9
1296	1156	1089	1024	961	784	676
576	625	729	784	841	1024	1225
961	841	729	676	625	441	289
1156	2209	2601	3249	3721	4624	5476
784	484	400	324	256	169	100
144	289	361	441	529	729	900
361	169	100	36	16	4	49
144	49	25	4	00	25	81
4225	3969	3844	3721	3600	3364	3136
2304	2025	1936	1849	1764	1600	1444
0,047509	0,045226	0,044302	0,044742	0,044972	0,046034	0,048229

III

El promedio de las anomalías para la profundidad de 96 kilómetros es, teniendo en cuenta el signo, de + 0,011 dina y prescindiendo del signo, de + 0,032 dina.

Aplicando a las 31 estaciones sólo la reducción de Bouguer se obtiene un promedio, considerando el signo, de 0,025 dina, y prescindiendo del signo, de 0,047.

Es indudable, pues, que la aplicación de la teoría isostática a nuestras estaciones disminuye en más de la mitad el promedio de las anomalías, cuando se toman éstas con sus signos, y en la tercera parte el promedio de las anomalías que resulta cuando se prescinde del signo de las mismas.

Examinando los valores $g - g_t$ de la tabla IV correspondientes a la profundidad de 96 kilómetros, se observa que algunos de éstos son crecidos, más de lo que a primera vista pudiera imaginarse en el caso del equilibrio isostático de la corteza en nuestra Península. Ahora bien: para juzgar con acierto de la existencia o falta de compensación, no habría más remedio que conocer la distribución de las densidades con respecto a la profundidad en cada área, pues lo más probable es que la anomalía subsistente sea producida por alguna irregularidad en la distribución de aquellas densidades, sin que por esto deje de haber equilibrio isostático. Desde luego que estas densidades anormales se han de presentar en las proximidades de las estaciones de gravedad. Así, pues, éstas deberán estudiarse atendiendo a la constitución geológica en sus alrededores. A este propósito parece conveniente recordar que en los Estados Unidos predominaron las anomalías isostáticas positivas en los terrenos precambrianos y las anomalías negativas en los terrenos cenozoicos. Como es sabido, la formación precambriana constituye la más antigua roca sedimentaria, y el mero hecho de su aparición en la superficie indica la coexistencia, a poca profundidad de ésta, de rocas ígneas de mayor densidad que la densidad media de las rocas superficiales. Por el contrario, debajo de las estaciones observadas en terrenos cenozoicos aparece material sin consolidar, o en todo caso material de formación moderna, de densidad pequeña, que origina naturalmente sobre el péndulo menor atracción que la normal.

En una reciente e interesante Memoria de los señores Barandica y Miláns del Bosch, presentada al XIV Congreso Geológico Internacional, que acaba de celebrarse en esta Corte, y que se titula *Relación entre las anomalías de la gravedad y la constitución geológica de España*, se llega a una conclusión análoga, deduciéndose para las estaciones españolas situadas sobre el precambriano un promedio de

anomalía isostática de 0,047 dina y para las estaciones observadas sobre las formaciones cenozoicas una anomalía isostática media de — 0,033 dina.

A su vez, en un informe presentado ante la Geological Society of America, en Diciembre de 1923, por el Dr. David White, titulado *Gravity observations from the standpoint of local geology*, se afirma que siempre que hay un sinclinal de gran extensión las anomalías de la gravedad tienden a ser negativas, y que a los grandes anticlinales corresponden anomalías positivas, marcando una nueva orientación al geólogo que trate de interpretar, desde su peculiar punto de vista, las anomalías subsistentes después de hecha la corrección isostática.

55
J.
6869

MEMORIAS
DEL
INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL

TOMO XV

VI

ESTUDIO DE LA PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS P

registradas en el sismo producido por la explosión de Oppau (Alemania) de 21 de Septiembre de 1921

POR

VICENTE INGLADA ORS

Ingeniero Geógrafo, Teniente Coronel de Estado Mayor y Profesor de Astronomía y Geodesia en la Escuela Superior de Guerra.

INSTITUTO GEOGRÁFICO
Y CATASTRAL
BIBLIOTECA



MADRID
TALLERES DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL
1926

INTRODUCCIÓN

En un trabajo [1]* premiado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid, hemos dado cuenta de un procedimiento de cálculo de las coordenadas del foco sísmico y de la hora inicial de la sacudida en el epicentro e hipocentro, por medio de las horas del principio de las ondas *P* ** registradas en varias Estaciones próximas. Como en esta investigación nos proponemos comprobar la validez del procedimiento, así como de las hipótesis en que se funda, haremos un rápido resumen de éste y daremos las fórmulas que han de ser utilizadas en el curso del presente trabajo.

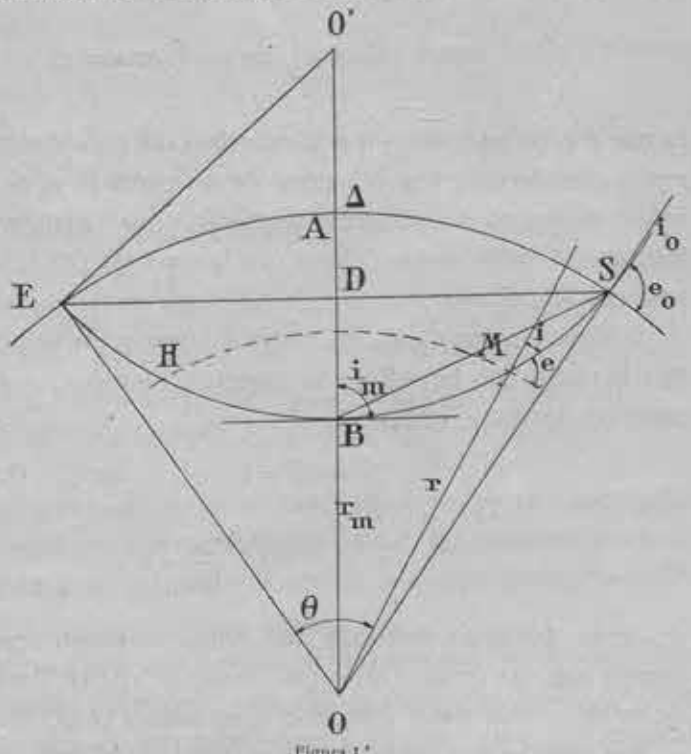


Figura 1.ª

Suponiendo que la Tierra es esférica y que el foco sísmico punctiforme *E* (fig. 1.ª) está en su misma superficie; admitido, como es corriente en Sismometría, que las propiedades físicas de la materia que forma nues-

* Una llamada en esta forma indica el número de orden del libro o Memoria de la lista bibliográfica que se inserta al fin del presente trabajo.

** Sabido es que con *P* se indican las ondas sísmicas longitudinales que se propagan directamente por la capa superior de la corteza terrestre, sin atravesar la superficie de discontinuidad que se halla a unos 57 kilómetros por debajo del nivel del mar y divide a la corteza en dos capas del mismo espesor sensiblemente.

tro planeta varían de un modo continuo por capas esféricas concéntricas, o lo que es lo mismo, que son función tan sólo de la distancia al centro del punto considerado, la aplicación a las ondas sísmicas de las leyes de la refracción permite hallar la ecuación diferencial del rayo sísmico EBS, correspondiente a una distancia epicentral $\Delta = EAS$. Este es una curva situada en el plano que pasa por los puntos E, S y el centro O de la Tierra, simétrica con relación al radio OA que va al punto medio A del arco epicentral EAS y que vuelve la convexidad hacia dicho centro O, pues el análisis de los sismogramas ha mostrado que en las capas superficiales de la Tierra la velocidad de las ondas longitudinales va creciendo con la profundidad.

Admitida la condición braquistócrona del rayo sísmico, se puede aplicar a éste la ecuación fundamental de la refracción atmosférica

$$\frac{r}{v} \operatorname{sen} i = \frac{r}{v} \cos e = k, \qquad [1]$$

en que k es un parámetro que caracteriza cada rayo sísmico, r el radio vector OM del punto considerado, v la velocidad de las ondas P y, por último, i y e, respectivamente, el ángulo de incidencia y emersión que la tangente a la trayectoria forma, o bien con el radio vector OM, o con la capa esférica infinitamente delgada MH que pasa por M.

Designando por r_m, i_m, e_m, respectivamente, los valores de r, i, e que corresponden al punto más bajo B de la trayectoria, y por $r_o = R$, i_o, e_o los que toman en la superficie terrestre, se tiene

$$\operatorname{sen} i_m = 1, \qquad \cos i_m = 0; \qquad [2]$$

y en virtud de [1]

$$\frac{r_m}{v_m} = k; \qquad [3]$$

de modo que el parámetro k, que define cada rayo sísmico, no es otra cosa que el tiempo que éste tardaría en llegar al centro O de la Tierra desde el punto más bajo B de su trayectoria con la velocidad v_m alcanzada en él.

Los trabajos fundamentales, efectuados por el ilustre sismólogo E. Wiechert y sus discípulos[2] en el Instituto Geofísico de Göttingen, han probado que la variación de la velocidad de las ondas P que mejor se adapta a las observaciones sismométricas es la dada por la ecuación

$$v = a - b \cdot r^2, \qquad [4]$$

en que a y b son dos constantes positivas, cuyo valor se saca del análisis de los sismogramas.

Si nos limitamos al estudio de las ondas P, que se propagan por la capa superior

de la corteza sin atravesar la superficie de discontinuidad, podrá admitirse sin escrúpulo alguno la ecuación [4], que según las investigaciones de Wiechert [2] vale hasta profundidades de un millar de kilómetros, y la trayectoria EBS del rayo sísmico es entonces un arco de círculo, cuyo centro O está en la prolongación de OA y cuyo radio $OE = \rho$ se halla, en función del parámetro k, por la sencillísima relación

$$\rho = \frac{1}{2bk}. \qquad [5]$$

La profundidad máxima $AB = h = R - r_m$, alcanzada por el rayo sísmico, es:

$$h = R - \frac{\sqrt{1 + 4abk^2} - 1}{2bk}, \qquad [6]$$

donde R es el radio de la Tierra (que en Sismometría suele tomarse igual a 6.370 kilómetros).

Conocida la profundidad máxima h, el parámetro k se obtiene por la fórmula

$$k = \frac{R - h}{a - b(R - h)^2}. \qquad [7]$$

Designando por Θ el ángulo en el centro EOA, que corresponde a la mitad del arco epicentral $ES = \Delta$, se tiene:

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{h(a - b) + bh^2}{a + b(1 - h)^2 + (1 - h)(a + b)}, \qquad [8]$$

fórmula en que h se supone expresado en partes del radio terrestre (o sea tomando por unidad $R = 6.370$ kilómetros) y que permite determinar la profundidad máxima h del rayo sísmico en función de la distancia epicentral Δ o inversamente calcular ésta si aquélla es conocida.

Como los valores de h que hemos de considerar no excederán de 57 kilómetros o en la unidad elegida de 0,008, y b además vale aproximadamente 0,001, se puede despreciar $b \cdot h^2$ en el numerador de [8] y substituir por la unidad en el denominador los factores $(1 - h)^2$ y $1 - h$, con lo cual se obtiene la fórmula aproximada:

$$\operatorname{tang} \frac{\Theta}{2} = 0{,}35205 \cdot \sqrt{h}, \qquad [9]$$

que permite calcular rapidísimamente los valores de Θ correspondientes a los de h.

En la Tabla I se consignan los valores de Δ que corresponden a los de h de kilómetro en kilómetro, según resultan de la fórmula aproximada [9].

Para $h = 57$ kilómetros ésta da en el cálculo de Δ un error de cinco kilómetros,

lo que prueba que en la práctica no hay inconveniente alguno en preferir la fórmula más sencilla [9].

Las recientísimas investigaciones de Gutenberg [3] muestran que la velocidad v_0 de las ondas P en la superficie terrestre es:

$$v_0 = 5{,}55 \pm 0{,}05 \text{ km./seg.} \qquad [10]$$

y va creciendo lentamente y de un modo continuo hasta la profundidad de 57 kilómetros en que alcanza el valor:

$$v_{57} = 5{,}7 \pm 0{,}2 \text{ km./seg.} \qquad [11]$$

Substituyendo estos valores de v_0 y v_{57} en la ecuación [4] se obtienen los de las constantes

$$a = 0{,}002193116; \qquad b = 0{,}001321846, \qquad [12]$$

de modo que la variación de dicha velocidad en la capa superior de la corteza terrestre estará expresada por la ecuación

$$v = 0{,}002193116 - 0{,}001321846 \cdot r^2, \qquad [13]$$

donde r se supone expresado en partes del radio terrestre R.

Si en la fórmula [13] se substituye el valor $r = 0{,}9910548$, que corresponde a la profundidad de 57 kilómetros, se obtiene el de la distancia epicentral $\Delta = 857{,}30$ kilómetros; de modo que para estudiar la propagación de las ondas P por la capa superior de la corteza, no habrá que considerar distancias epicentrales superiores a 850 kilómetros en números redondos. En la presente investigación no llegaremos ni a la mitad de dicho valor, pues el procedimiento de cálculo que hemos de utilizar pierde casi toda su eficacia cuando la distancia epicentral excede de unos 350 o 400 kilómetros en números redondos.

Hasta ahora hemos supuesto que el foco punctiforme estaba en la superficie terrestre. En la realidad, dicho punto se halla generalmente a una cierta profundidad hipocentral que sólo puede despreciarse en el estudio telesísmico, dados los grandes valores, miles de kilómetros, de las distancias epicentrales. En las investigaciones que, como la presente, se refieren a los sismos próximos, no puede despreciarse la profundidad hipocentral y su determinación constituye uno de los problemas más interesantes y difíciles de la Sismometría.

Si suponemos ahora (fig. 2.ª) el foco F de un temblor de tierra a la profundidad $EF = h$, el rayo sísmico cuya gráfica se ha registrado en una cierta Estación S, que se halla a la distancia epicentral $ES = \Delta_1$, es el arco de círculo FPS, de centro O' y de radio $O'P = \rho$. Prolongándolo hasta que corte a la superficie terrestre en el punto D, a una Estación situada en D corresponderá la distancia epicentral $DE = \Delta_1$ y el rayo sísmico DF.

Para referir este caso al considerado en un principio (profundidad hipocentral nula) bastará figurarse el foco en el punto D y entonces la distancia epicentral de la Estación S sería $DE + ES = \Delta_1 + \Delta_2$.

Si nos imaginamos un rayo sísmico $D'FD''$ cuyo punto más bajo sea el foco F, se observa que cualquier otro rayo, como el DPS, que pase por F, queda dividido

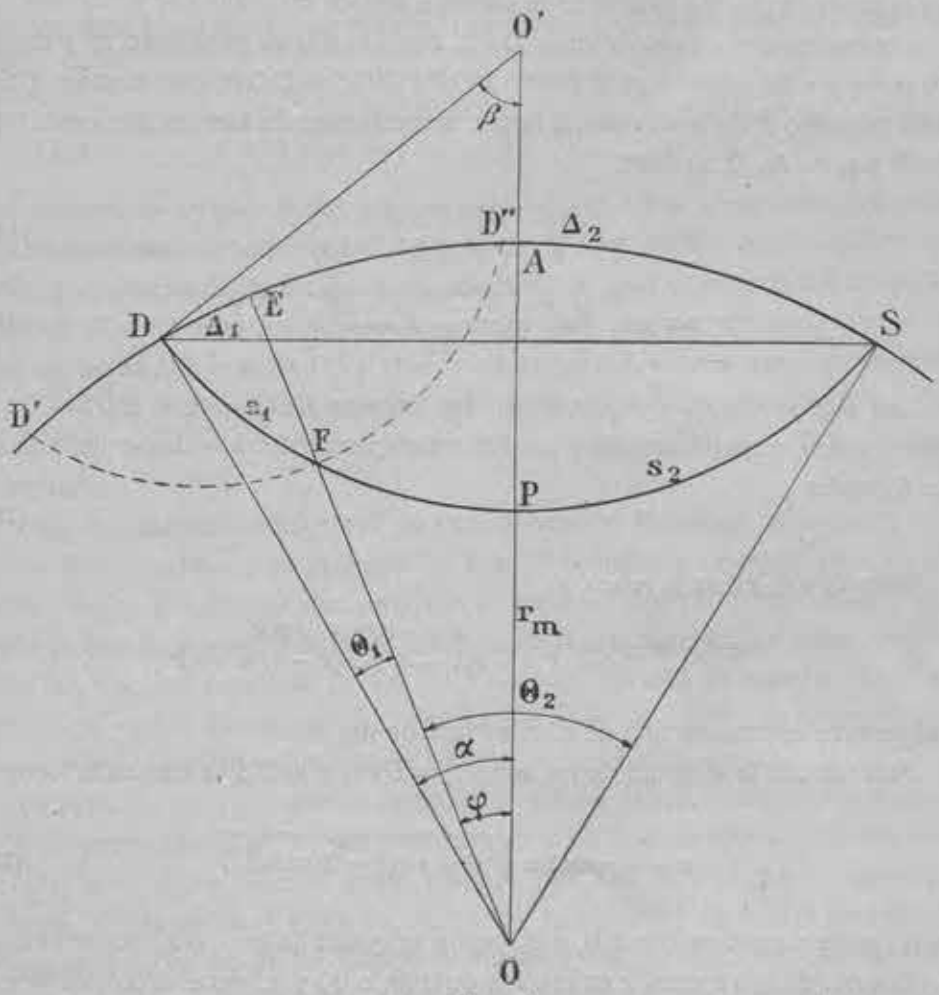


Figura 2.ª

por este punto F en dos partes: una FD, llamada *interior*, por estar situada dentro de la zona $D'DD''F$ que aquel rayo limita, y otra FS, *exterior* a ella.

La distancia epicentral $ED' = ED''$, que para una cierta profundidad $EF = h$ (que se supone conocida) limita las dos zonas, interior y exterior, puede calcularse por medio de la fórmula [**8**] o la aproximada [**9**].

Si suponemos un rayo sísmico, DFS, cuya gráfica se registra, bien sea en la Estación S o en la D, y nos imaginamos su foco F a una cierta profundidad $EF = h$,

habrá que considerar entonces dos trayectorias distintas (según se trate de la Estación S o D), que son $FD = s_1$ y $FS = s_2$, recorridas, respectivamente, en los tiempos T_1 y T_2 y a que corresponden las distancias epicentrales $ED = \Delta_1$ y $ES = \Delta_2$.

Rosenthal [4] ha resuelto el problema de la determinación de los elementos de ambas trayectorias (interior y exterior), en el supuesto de admitir para la variación de v la ecuación [**4**], y a continuación vamos a dar los resultados de su cálculo.

Si consideramos un rayo sísmico DPS, definido por su parámetro k, y designamos por φ y α los ángulos en el centro EOP y $POS = DOP$, que el radio OP del punto más bajo P de la trayectoria forma, respectivamente, con los que pasan por el foco F y el punto D, se tiene

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - k^2(a - bR^2)}}{R\sqrt{1 + 4abk^2}}, \qquad [14]$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{(R-h)^2 - k^2[a - b(R-h)^2]^2}}{(R-h)\sqrt{1 + 4abk^2}}. \qquad [15]$$

Una vez calculados α y φ se hallan los ángulos $DOE = \theta_1$ y $EOS = \theta_2$, que corresponden, respectivamente, a las distancias epicentrales Δ_1 y Δ_2 por las sencillísimas fórmulas

$$\theta_1 = \alpha - \varphi \qquad \text{y} \qquad \theta_2 = \alpha + \varphi. \qquad [16]$$

Entre θ_1 y θ_2 existe la relación

$$\operatorname{tang} \theta_1 \cdot \operatorname{tang} \theta_2 = \frac{h(a - bR^2) + bh^2R}{R[a + b(R-h)^2] + (R-h)(a + bR^2)} \qquad [17]$$

que permite determinar uno de ellos en función del otro.

Para calcular la longitud de los arcos $s_1 = DF$ y $s_2 = FS$ se emplea la fórmula

$$s = \frac{1}{bk} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{h^2 + 4R(R-h)\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}, \qquad [18]$$

en la que se substituye θ por θ_1 o θ_2, según se quiera hallar s_1 o s_2, respectivamente.

El valor del parámetro k en función de θ (θ_1 o θ_2) y h, viene dado por la expresión

$$k = \frac{R(R-h)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{[R[a + b(R-h)^2] - (R-h)(a + bR^2)\cos\theta]^2 + (R-h)^2(a - bR^2)^2\operatorname{sen}^2\theta}}. \qquad [19]$$

Por último, para hallar el tiempo que el rayo sísmico tarda en recorrer una parte de su trayectoria, Rosenthal supone que el eje polar de coordenadas es OP, y halla la ecuación

$$dt = \frac{k\,d\theta}{(1 + 4abk^2)\cos^2\theta - 4abk^2}, \qquad [20]$$

cuya integral indefinida es

$$t = \frac{1}{4\sqrt{ab}} \log \text{nep} \frac{1 + 2k\sqrt{ab}\,\text{tang}\,\theta}{1 - 2k\sqrt{ab}\,\text{tang}\,\theta} + \text{constante.} \qquad [21]$$

Calculando los valores de esta integral entre los límites 0 y φ y 0 y α, la suma y diferencia de estos resultados nos da, respectivamente, los tiempos t_2 y t_1.

Si hacemos $h = 0$ se obtiene el tiempo de recorrido T de la trayectoria total DFS, que es

$$T = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \text{nep} \frac{1 + 2k\sqrt{ab}\,\text{tang}\,\alpha}{1 - 2k\sqrt{ab}\,\text{tang}\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \log \text{nep} \frac{1 + 2k\sqrt{ab}\,\text{tang}\,\alpha}{\sqrt{1 - 4abk^2\,\text{tang}^2\,\alpha}}. \qquad [22]$$

Si suponemos un foco B (fig. 1.ª) a la profundidad $AB = 57$ kilómetros, la mayor distancia epicentral de una Estación S situada en la zona interior es $\Delta = 428{,}65$ kilómetros, y el tiempo de recorrido correspondiente al rayo sísmico BMS es de 74,8 segundos. Si se calculan los tiempos necesarios para recorrer con movimiento uniforme la cuerda BS, la recta DS y el arco epicentral AS, resulta que para la velocidad $v = 5{,}7$ km./seg. no llega a un segundo la diferencia entre estos tiempos y el del rayo sísmico, y para $v = 5{,}625$ (promedio de los valores v_0 [**10**] y v_{57} [**11**]) no alcanza a 2 segundos.

Como en nuestra investigación no consideraremos distancias epicentrales superiores a 400 kilómetros y la profundidad $h = 57$ kilómetros corresponde a un caso extremo, en las aplicaciones sismométricas podremos substituir el rayo sísmico circular por su cuerda, y esta hipótesis sencillísima de la propagación por ondas esféricas y con la velocidad constante de 5,6 a 5,7 km./seg. no solo es expedita, sino muy aproximada, ya que los errores que produce son menores que los de la observación que da en segundos redondos las horas de las fases del sismograma.

Este supuesto del rayo sísmico rectilíneo simplifica extraordinariamente el cálculo de las coordenadas x_0, y_0, z_0, del foco sísmico y de la hora inicial t_0 en éste de la sacudida, pues si designamos, como siempre, por v la velocidad que suponemos constante, de las ondas P_i y por (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \ldots (x_n, y_n, z_n)$, las coordenadas rectangulares conocidas de las Estaciones sismológicas E_1, $E_2 \ldots$, E_n, que han registrado el principio de dichas ondas a las horas respectivas t_1, $t_2 \ldots$, t_n, se podrá establecer el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
&(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = v^2(t_1 - t_0)^2 \\
&(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 = v^2(t_2 - t_0)^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2 = v^2(t_n - t_0)^2
\end{aligned}\right\} \qquad [23]$$

que restadas de dos en dos dan otro lineal en x_0, y_0, z_0, t_0, que permitirá deducir por el método de los mínimos cuadrados los valores más probables de estas incógnitas,

si como ocurre ordinariamente son más de cuatro las horas de P de que se dispone.

Si los reconocimientos sobre el terreno han permitido determinar el epicentro, las horas t_1 y t_2 de P registradas en dos Estaciones que distan, respectivamente, del epicentro Δ_1 y Δ_2, permiten calcular la profundidad hipocentral h por medio de la fórmula

$$h = \sqrt{\left(\frac{\Delta_2^2 - \Delta_1^2 - v^2\tau^2}{2v\tau}\right)^2 - \Delta_1^2} \qquad [24]$$

en que τ es la diferencia $t_2 - t_1$ de las horas registradas.

Si se conoce además la hora del sismo en el epicentro y representamos también por τ la diferencia entre ésta y la hora de P registrada en una Estación situada a la distancia epicentral Δ, la fórmula [**24**] se convierte en la siguiente, más sencilla:

$$h = \frac{\Delta^2 - v^2\tau^2}{2v\tau}, \qquad [25]$$

que permite determinar tan importante coordenada vertical.

El procedimiento que a grandes rasgos acaba de indicarse se ha aplicado con resultados satisfactorios a la determinación de la profundidad hipocentral y hora inicial del sismo del bajo Segura [5] de 10 de Septiembre de 1919, por haber demostrado el trazado de las isosistas [6] que la de mayor intensidad tenía un radio medio de seis kilómetros y medio, y por lo tanto, las pequeñas dimensiones del foco hacían cumplir con bastante aproximación la condición de punctiformidad requerida por el procedimiento.

Para juzgar, sin embargo, de las condiciones prácticas de su empleo, lo hemos aplicado en otro trabajo posterior [8] al gran terremoto del Japón de 1.° de Septiembre de 1923 cuyos efectos destructores acusaron el hundimiento del fondo de la bahía de Sagami en una zona continua que corre de NW. a SE., con un ancho medio de 25 a 30 kilómetros y un largo, por lo menos, de 50. Por disponerse en este sismo de datos más precisos de observación, los resultados del cálculo fueron aún mejores, pues las coordenadas del foco sísmico se hallaron con error probable inferior a un kilómetro; además, el estudio del caso de que el foco fuera un bloque de dimensiones no despreciables, permitió llegar a la conclusión de que el procedimiento basado en la hipótesis del rayo rectilíneo servía para la determinación precisa del contorno del bloque sísmico, siempre que las horas de observación se conocieran en décimas de segundo y fueran numerosas las Estaciones situadas alrededor del foco.

No obstante los favorables resultados obtenidos en las citadas investigaciones, hemos juzgado que el estudio de la propagación de las ondas sísmicas en las capas superficiales de la corteza terrestre, así como la determinación de las coordenadas del foco y la hora inicial de las sacudidas, son problemas de capital importancia en Sis-

mometría y cuantas comprobaciones puedan darse acerca de la validez de la ecuación [**4**] para la variación de las ondas P en las capas superficiales de la corteza son de gran interés científico, por lo cual hemos abordado el estudio de dicha propagación, según resulta de las gráficas registradas durante el sismo debido a la explosión de Oppau (Alemania) de 21 de Septiembre de 1921, sismo de extraordinaria importancia, pues aparte de que los datos son de gran precisión, se tiene la ventaja en este caso de un foco punctiforme situado en la superficie terrestre y cuya posición se conoce exactamente.

A continuación se exponen los resultados del cálculo de los elementos fundamentales de dicho sismo, que prueban la extrema utilidad de esta clase de investigaciones y el progreso rápido que alcanzará la Sismometría tan pronto disponga de una densa red de estaciones cuyos registros permitan determinar a la décima de segundo las horas de las fases del sismograma.

ESTUDIO SÍSMICO DE LA EXPLOSIÓN DE OPPAU DE 21 DE SEPTIEMBRE DE 1921

I.—Antecedentes y datos de observación relativos al sismo.

El estremecimiento del suelo producido por la catástrofe ocurrida en la fábrica de Oppau (Alemania) el 21 de Septiembre de 1921, a causa de la explosión de una enorme cantidad de nitrosulfato amónico contenida en un depósito de 60 × 30 metros de superficie, es de gran importancia para el estudio de la propagación de las ondas sísmicas en las capas más superficiales de la corteza, pues se trata de un foco puntiforme situado en la misma superficie terrestre y cuya posición se conoce exactamente. Esto permite calcular con precisión las distancias epicentrales correspondientes a las distintas Estaciones y aplicar el procedimiento explicado en la Introducción, ya que se cumplen con todo rigor las dos condiciones de puntiformidad del foco y profundidad hipocentral nula que requiere la teoría al deducir que el rayo sísmico es un arco de círculo en virtud de la variación de la velocidad de propagación de las ondas expresada por la ecuación [4].

La explosión de Oppau causó gran número de víctimas y desperfectos considerables; en el suelo produjo una cavidad piriforme de 130 metros de longitud y 90 de anchura máxima.

Resumiremos de los trabajos de Hecker [8] y Gutenberg [3], dedicados al estudio sísmico de esta explosión, la parte que interesa únicamente al nuestro, o sea la de la propagación de las ondas longitudinales.

En el primero se reproducen amplificadas las gráficas registradas por las Estaciones de Heidelberg, Durlach, Feldberg, Hohenheim, Strassburg, Nördlingen, Ravensburg, Zürich, Göttingen y Munich que sirven de base a la investigación.

La curva dromocrónica correspondiente a las ondas P es sensiblemente rectilínea y se ajusta bastante bien a los datos de observación. Sólo la hora de Göttingen dis-

crepa algo, porque la gráfica registrada allí por el péndulo vertical de 17 toneladas de masa, con amplificación de unas 3.000 veces, muestra cuatro segundos antes del impulso que se ajusta al trazado de la curva dromocrónica unas pequeñas vibraciones, lo que explica Hecker admitiendo la producción de dos explosiones con ese intervalo de cuatro segundos, la primera de las cuales, por ser mucho más débil que la segunda, sólo se registró en las Estaciones más próximas de Heidelberg y Durlach y en la de Göttingen a causa de la gran sensibilidad del péndulo vertical citado.

Aunque la intersección de la curva dromocrónica con el eje de los tiempos da para hora de la explosión $7^h\ 32^m\ 18^s$, Hecker considera mejores los valores de $7^h\ 32^m\ 15^s$ o 14^s, que dan resultados más concordantes en el cálculo de la velocidad de propagación de las ondas longitudinales, la cual se obtiene dividiendo la distancia epicentral de cada Estación por la diferencia entre la hora epicentral y la registrada en la gráfica.

Para dicha velocidad obtiene el promedio

$$v = 5{,}73 \pm 0{,}04 \text{ km./seg. (error medio)}, \qquad [26]$$

aunque advierte que debe admitirse un error medio algo mayor a causa de la influencia de ciertos errores sistemáticos.

El trabajo de Gutenberg [3], que es una nota muy breve pero de gran interés, determina la velocidad de propagación de las ondas sísmicas longitudinales y transversales por las capas superficiales de la corteza valiéndose de la observación, hecha con el mayor esmero, de todas las gráficas originales y copias disponibles relativas a la explosión de Oppau. Las coordenadas del epicentro, según C. Zeissig, son:

$$\text{latitud: } \varphi = 49^\circ\ 31'\ 7'',5; \qquad \text{longitud: } \lambda = 8^\circ\ 25'\ 7'',5 \text{ E. Gr.} \qquad [27]$$

y en el cuadro que sigue, que reproducimos de la nota de Gutenberg [3], sólo en la parte relativa a las ondas P, se insertan las distancias epicentrales y las horas registradas por las diversas Estaciones sismológicas, así como las diferencias entre estas horas y las que resultan de las Tablas de Mohorovičić [6] para la profundidad hipocentral nula, diferencias que no exceden de los errores de observación. Los valores de las distancias epicentrales y horas de P de dicho cuadro servirán de base a nuestra investigación.

A excepción de las Estaciones de Feldberg y Göttingen, las horas de P registradas tienen una exactitud de $\pm\ 1^s$.

La ecuación

$$t = 0 + \frac{\Delta}{v_0} - \alpha\,\Delta^2 \qquad [28]$$

da, según Gutenberg, la hora t de P registrada a una pequeña distancia epicentral Δ, y en [28] v_0 es la velocidad de dichas ondas en la superficie terrestre, 0 la hora del sismo en el epicentro, y α una constante cuyo valor depende de la variación de la velocidad con la profundidad del punto considerado.

Prescindiendo de los datos de observación de las Estaciones de Feldberg, Göt-

CUADRO 1

Datos de observación, según B. Gutenberg [3], relativos al sismo producido por la explosión de Oppau (Alemania) de 21 de Septiembre de 1921.

NOMBRE DE LA ESTACIÓN	DISTANCIA epicentral.	HORA de $\bar{P}$ registrada.	DIFERENCIA entre la hora de $\bar{P}$ registrada y la que dan las tablas de Mohorovičić [9].	OBSERVACIONES
Heidelberg	25,5	7h 32m 17s	— 1s	
Jugenheim	31	19	0	
Durlach	58	»	»	Sin señales horarias en la gráfica, por lo cual no se consigna la hora de $\bar{P}$.
Feldberg	78	7 32 28	+ 1	Seguridad en la corrección de hora: ± 2s.
Hohenheim	117	34	+ 1	
Strassburg	111	34	0	
Nördlingen	189	46,5	+ 1	
Ravensburg	230	55	0	
Zürich	239	56	0	
Göttingen	262	7 32 58 ?	— 2 ?	Gráfica de trazo muy fino con interrupciones de la línea.
		7 33 00 ?	0 ?	
Munich	307	33 08	0	Esta hora de $\bar{P}$ puede tener un atraso hasta de dos segundos, pues el primer impulso visible empieza inmediatamente después de la interrupción que señala los minutos en la gráfica.
De Bilt	364	33 19	+ 0,5	

tingen y Munich, Gutenberg deduce los siguientes valores más probables de las cantidades que figuran en la ecuación [**28**]:

$$0 = 7^h\ 32^m\ 13^s,9 \pm 0^s,4 \quad \text{(error medio)} \qquad [29]$$

$$v_0 = 5{,}54 \pm 0{,}20 \text{ km./seg. (idem íd.)} \qquad [30]$$

$$\alpha = 0{,}00000 \pm 0{,}00002 \quad \text{(idem íd.)} \qquad [31]$$

A causa del pequeñísimo valor de α [**31**], que es sensiblemente nulo, la curva dromocrónica correspondiente a las ondas P es rectilínea, lo que indica que el aumento con la profundidad de la velocidad de dichas ondas ha de ser pequeñísimo. Admitiendo que α es igual a 0,00002, el valor de v a los 57 kilómetros de profundidad no llegaría a los seis kilómetros.

Los valores más probables de v en la superficie terrestre y a dicha profundidad, como resultado de todas las investigaciones más precisas y que se refieren sólo a la Europa Central, son los [**10**] y [**11**] citados ya en la introducción.

Expuestos estos antecedentes, pasemos a la determinación de los elementos del movimiento sísmico empezando por el trazado de

II. — La curva dromocrónica.

Para ello, tomando como abscisas las distancias epicentrales, y como ordenadas las horas de P que se consignan en el cuadro I, obtendremos tantos puntos como Estaciones sismológicas, los cuales, unidos por un trazo continuo, nos darán la curva dromocrónica.

Efectuada la construcción se obtiene la figura 3.ª, en que la posición de todos los puntos se ajusta muy bien a un trazado rectilíneo, conclusión que está de acuerdo con la de Gutenberg, que acabamos de citar.

La hora epicentral que da la intersección de la curva dromocrónica con el eje de los tiempos, viene a ser $7^h\ 32^m\ 13^s,2$, aunque hemos de advertir que a causa del error debido al graficismo es difícil apreciar la fracción de segundo; ya determinaremos por el cálculo un valor más preciso de tan importante elemento.

La recta representada en la figura da para la velocidad de la onda P un valor de 5,6 km./seg. que coincide sensiblemente con el obtenido por Gutenberg (5,54, valor [**30**]), ya que éste resulta determinado con un error medio de dos hectómetros, que es tres veces mayor que la discrepancia entre ambos valores.

La recta dromocrónica de la figura 3.ª se ajusta muy bien a los puntos obtenidos para trazarla, y ninguna Estación discrepa en más de un segundo, y la mayor parte de ellas no difiere en medio segundo, resultado que no puede ser más satisfactorio, ya que los errores del registro dan generalmente una incertidumbre de $\pm$ 1 , según hemos dicho.

Hemos de advertir que para determinar el punto correspondiente a la Estación de Göttingen hemos tomado el promedio $7^h\ 32^m\ 59^s$ de las dos horas que para P figuran con ? en el cuadro I. El trazado de la recta da, sin embargo, la hora $7^h\ 33^m\ 00^s$, con error menor que un cuarto de segundo, de modo que la segunda de las horas

de dicho cuadro parece ser que está en mejor acuerdo con el conjunto de las observaciones. Más adelante tendremos ocasión de confirmar este resultado.

El trazado de la recta dromocrónica da como valor de la velocidad de las ondas $\bar{P}$ el de 5,6 kilómetros; en las investigaciones dedicadas a los sismos del bajo Segura [5] y al del Japón de 1.° de Septiembre de 1923 [7], hemos tomado como valor medio de dicha velocidad el de 5,7 kilómetros; aunque esta pequeña diferencia quede dentro de los errores de trazado, dada la escala en que se construye la curva dromocrónica,

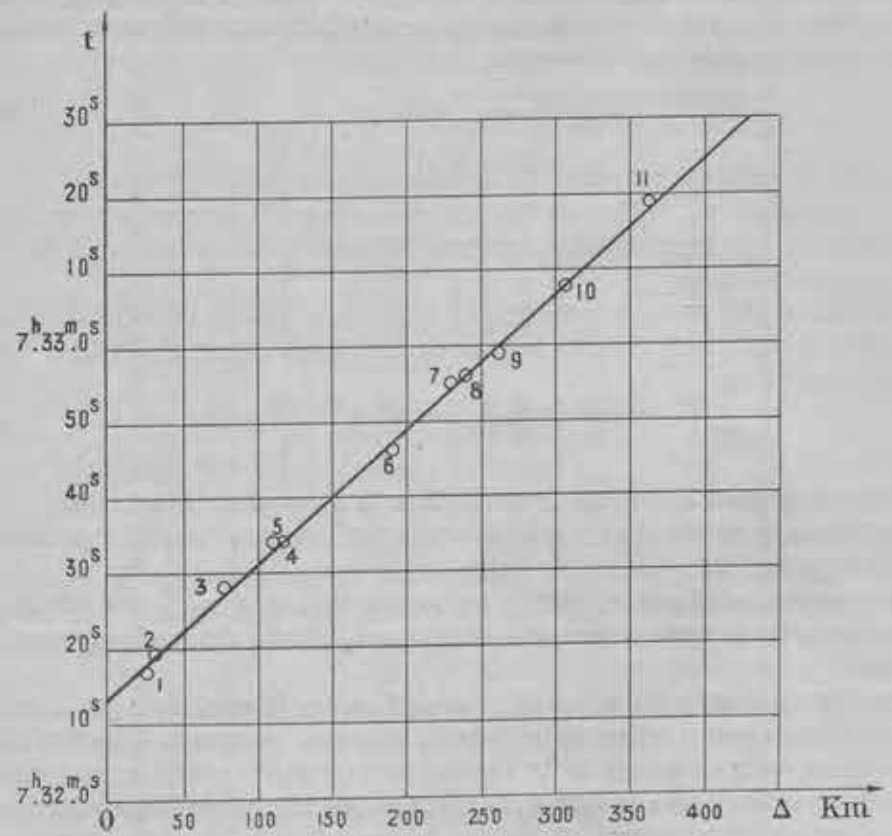


Figura 3.ª—*Curva dromocrónica para las ondas P de la explosión de Oppau (21 de Septiembre 1921).*
1.—Heidelberg. 2.—Jugenheim. 3.—Feldberg. 4.—Hohenheim. 5.—Strassburg. 6.—Nördlingen. 7.—Ravensburg. 8.—Zurich. 9.—Göttingen. 10.—Munich. 11.—De Bilt.

hemos de advertir que en el sismo debido a la explosion de Oppau la profundidad hipocentral es nula, el rayo sísmico atraviesa sólo las capas superiores de la corteza (como veremos, la profundidad máxima del rayo que corresponde a la Estación más alejada, de Bilt, es sólo de 10 kilómetros y medio), de manera que el valor de la velocidad de las ondas $\bar{P}$ que más ha de ajustarse a los datos de observación ha de diferir muy poco del de 5,55 kilómetros que tienen en la misma superficie terrestre.

Demostrado por el trazado de la curva dromocrónica que para las pequeñas distancias epicentrales son proporcionales a ellas los tiempos de recorrido de las ondas $\bar{P}$, pasemos al cálculo de los elementos fundamentales del rayo sísmico.

III.—La trayectoria de los rayos sísmicos y su tiempo de recorrido.

Conocidas exactamente en el sismo de Oppau las distancias epicentrales podemos calcular inmediatamente el ángulo $\alpha = DOP$ (fig. 2.ª) de cada rayo, que no es más que el ángulo en el centro del arco cuya longitud es la semidistancia epicentral, y conocido este ángulo y los valores [**12**] de a y b, la fórmula [**8**] o la [**9**], que da suficiente aproximación (en que Θ es el α de la figura 2.ª), nos permite calcular la profundidad máxima $h = AP$ del rayo, y conocida ésta se halla inmediatamente la velocidad máxima v_m de las ondas por la fórmula

$$v_m = a - b(R - h)^2, \qquad [\mathbf{32}]$$

que resulta de aplicar la ecuación [**4**] al punto más bajo de la trayectoria.

Una vez hallado v_m, la fórmula [**3**], o su equivalente [**7**], determina el parámetro k que carácteriza cada rayo sísmico, y ninguna dificultad presenta calcular el radio ρ de éste mediante la relación [**5**].

La fórmula [**18**], previa la substitución de Θ por α, nos da la mitad de la trayectoria DPS, la cual puede también hallarse determinando el ángulo $DO'P = \beta$ por la sencillísima fórmula

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho}, \qquad [\mathbf{33}]$$

y calculando después la longitud del arco de radio ρ y cuya amplitud es β.

Por último, conocidos ya k y α la expresión [**22**] nos da el tiempo T de recorrido de la trayectoria DPS.

En el cuadro que sigue se insertan los valores de α, h, k, v_m, ρ, β, s y T, que corresponden a las distintas Estaciones, efectuado el cálculo del modo que acaba de indicarse.

Examinando los resultados contenidos en el cuadro II se advierte que la longitud del rayo sísmico apenas difiere de la distancia epicentral, pues hasta la de 230 kilómetros la discrepancia no excede de 60 metros; para las cuatro estaciones más distantes rebasa dicho valor, y para la última (de Bilt, $\Delta = 364$ kilómetros) llega a 380 metros. Como el espacio recorrido en una décima de segundo por las ondas $\bar{P}$ es superior a 550 metros, resulta que, tratándose de distancias epicentrales inferiores a 400 kilómetros, no hay error ninguno en substituir la verdadera longitud del rayo sísmico por la distancia epicentral, aunque se disponga de las horas de $\bar{P}$ a la décima de segundo, precisión hasta ahora no superada y casi nunca alcanzada; en la práctica, pues, en los sismos de foco superficial se puede hacer la substitución dicha en la seguridad de que el error resultante es mucho menor que el de observación.

La profundidad máxima h alcanzada por el rayo sísmico crece con la distancia epicentral, y si ésta no excede de 100 kilómetros aquélla no llega a uno; el examen del cuadro II manifiesta que, a partir de Hohenheim ($\Delta = 117$ kilómetros), el rayo sísmico penetra a más de un kilómetro, y para la estación más distante (de Bilt: $\Delta = 364$) la profundidad es de 10 kilómetros. De aquí se deduce que, tratándose de focos superficiales y no rebasando la distancia epicentral de 350 a 400 kilómetros, las ondas P

CUADRO II

Elementos fundamentales del rayo sísmico correspondiente a cada una de las Estaciones.

NOMBRE de la Estación sismológica.	Hora de $\overline{P}$ registrada.	Distancia epicentral Δ *Kilómetros.*	Semiamplitud de Δ α	Parámetro k	Profundidad máxima h *Kilómetros.*	Velocidad máxima v_m *Kilómetros.*	Radio ρ *Kilómetros.*	Semiamplitud del rayo β	Longitud del rayo s *Kilómetros.*	Tiempo de recorrido T *Segundos.*
Heidelberg.....	7ª 32ᵐ 17ˢ	25,5	6' 53''	1147,7	0,051	5,5502	2099,4	20' 53'',1	25,50	4,596
Jugenheim.....	19	31	8 22	1147,7	0,076	5,5502	2099,4	25 22 ,9	31,00	5,586
Feldberg.....	28	78	21 3	1147,4	0,482	5,5512	2099,9	1° 3 51 ,4	78,01	14,054
Strassburg.....	34	111	29 57	1147,0	0,975	5,5526	2100,6	1 30 49 ,8	111,01	19,994
Hohenheim.....	34	117	31 34 ,3	1147,0	1,084	5,5527	2100,7	1 35 44 ,7	117,02	21,077
Nördlingen.....	46 ,5	189	51 0	1145,8	2,828	5,5572	2103,0	2 34 31 ,6	189,06	34,036
Ravensburg.....	55	230	1° 2 3	1144,7	4,186	5,5610	2104,9	3 7 52 ,1	230,06	41,397
Zürich.....	56	239	1 4 29	1144,5	4,521	5,5616	2105,2	3 15 12 ,4	239,08	43,019
Göttingen.....	58 ? / 33 00 ?	262	1 10 41 ,9	1143,8	5,435	5,5642	2106,5	3 33 54 ,8	262,16	47,155
Munich.....	33 08	307	1 22 50 ,4	1142,3	7,462	5,5697	2109,3	4 10 22 ,4	307,24	55,227
De Bilt.....	19	364	1 38 13	1140,2	10,489	5,5777	2113,3	4 56 22 ,5	364,38	65,499

se propagan sólo por las capas superiores de la corteza, o sea en un espesor de unos 10 kilómetros, que viene a ser la quinta parte de los 57 que tiene la zona de fractura de ésta que asienta sobre la superficie de discontinuidad.

Según resulta del cuadro II, la velocidad de las ondas P varía sólo entre 5,55 y 5,557 km./seg.; de modo que, tratándose de sismos próximos y de foco superficial, será más preciso en el cálculo tomar para velocidad de las ondas P el valor medio de 5,55 a 5,57 km./seg., lo que está de acuerdo con lo que hemos deducido del trazado de la recta dromocrónica y con las conclusiones del estudio de Gutenberg [3].

Para esa capa superior de la corteza (espesor de 10 kilómetros) el parámetro k, que caracteriza cada rayo sísmico, varía entre 1147,7 y 1140,2; el radio ϱ tiene una variación casi doble de la anterior y discrepa poco de 2100 kilómetros; es decir, una tercera parte del radio terrestre R (6370) en números redondos.

Los valores de h, v_m, k y ϱ que nos ha facilitado el cálculo no tienen comprobación por medio de los datos del registro instrumental. Para juzgar del acuerdo mayor o menor que los resultados del cálculo tengan con las horas de P registradas en las distintas estaciones, tenemos que considerar los valores de los tiempos de recorrido T que figuran en la última columna del cuadro II, y para ello vamos a calcular la

IV.—Hora de la explosión de Oppau.

Si de la hora de P registrada en cada Observatorio restamos su tiempo T de recorrido, obtendremos la hora inicial t_0 del fenómeno. Claro está que obtendremos tantos valores de ésta cuantas sean las estaciones que hayan inscripto el sismograma.

En el cuadro III se consignan los 11 valores de la hora t_0 de la explosión, que discrepan muy poco unos de otros y prueban la bondad de los cálculos efectuados en el supuesto del rayo sísmico circular. Hemos de advertir que se ha tomado como hora de P en Göttingen la de $2^h\ 33^m\ 00^s$, que es una de las dos que figuran como observadas en el cuadro I, ya que ese valor acusa mejor acuerdo con los de todas las demás estaciones, resultado que coincide con lo que hemos dicho al estudiar la recta dromocrónica.

El promedio de todas las horas t_0 es $2^h\ 32^m\ 13^s,169$, que difiere en siete décimas de segundo del obtenido por Gutenberg con un error medio de $0^s,4$. Discrepa también muy poco del que Hecker [6] considera como más aceptable, que es $7^h\ 32^m\ 14^s$ o 15^s.

Si calculamos el error medio de nuestro promedio de t_0 valiéndonos de las diferencias que hay entre él y los valores de t_0 correspondientes a las distintas estaciones, hallamos que es de $\pm\ 0^s,168$, es decir, menos de la mitad que el de Gutenberg [3]. El error medio de cada valor aislado t_0 es $\pm\ 0^s,531$ o, en números redondos, de medio segundo. Este resultado no puede ser más satisfactorio, pues tratándose de observaciones en que la incertidumbre, según hemos dicho, es de $\pm$ 1 segundo, no se puede pedir acuerdo mejor.

Si al promedio de t_0: $7^h\ 32^m\ 13^s,169$ añadimos el tiempo de recorrido T calculado para cada Estación (última columna del cuadro II), hallaremos la hora de P que debiera haberse registrado. Comparándola con la realmente observada obtendremos la discrepancia, que es precisamente la que figura en el cuadro III como diferencia Δt_0.

CUADRO III

Hora de la explosión de Oppau (21 de Septiembre de 1921) calculada en el supuesto del rayo sísmico circular que corresponde a la variación de la velocidad: $v = 0{,}002193116 - 0{,}001321846\, r^2$.

NOMBRE DE LA ESTACIÓN	VALORES de la hora de la explosión t_0 $7^h\ 32^m +$	DIFERENCIAS entre el promedio de t_0 y cada valor aislado Δt_0	OBSERVACIONES
Heidelberg	12s,404	+ 0s,765	
Jugenheimm	13 ,414	— 0 ,245	
Feldberg	13 ,946	— 0 ,777	Error medio del promedio $7^h\ 32^m\ 13^s{,}169$: ± 0s,168.
Strassburg	14 ,006	— 0 ,837	
Hohenheim	12 ,923	+ 0 ,246	Error medio de un valor aislado de t_0: ± 0s,531.
Nördlingen	12 ,464	+ 0 ,705	
Ravensburg	13 ,603	— 0 ,434	
Zürich	12 ,981	+ 0 ,188	
Göttingen	12 ,845	+ 0 ,324	
Munich	12 ,773	+ 0 ,396	
De Bilt	13 ,501	— 0 ,332	
Promedio	13s,169		

Examinando este cuadro se advierte que todas las diferencias son siempre inferiores a un segundo, como debiera ocurrir aun siendo el cálculo exacto, ya que la incertidumbre de la hora registrada es ± 1 segundo; también se observa que, en general, esas diferencias son menores que medio segundo, pues de las 11 Estaciones inscriptoras sólo cuatro, que son las de Heidelberg, Feldberg, Strassburg y Nördlingen, dan diferencias mayores que medio segundo.

El resultado del cálculo teórico está, pues, de perfecto acuerdo con la observación. A pesar de haber estudiado la propagación de las ondas *P* por las capas más superficiales de la corteza terrestre, en que han de ejercer su máximo influjo las irregularidades de constitución de los estratos, en el sismo producido por la explosión de Oppau, los datos de observación están de perfecto acuerdo con la teoría de la propagación de las ondas sísmicas basada en el supuesto de la distribución de la materia terrestre por capas esféricas homogéneas, o sea la variación de sus propiedades en función tan sólo de la distancia al centro del punto considerado y según una ley sencillísima, que es la expresada por la ecuación [**4**] y que corresponde a un rayo circular.

Esta comprobación de la teoría que sirve de base a los cálculos simométricos muestra la validez de las hipótesis establecidas por la ciencia de los temblores de tierra, por muy extraña que parezca a primera vista la apenas perceptible influencia que ejerce en la propagación de las ondas sísmicas la heterogeneidad de los estratos corticales superficiales acusada por las observaciones geológicas.

Hasta ahora hemos hecho el cálculo de los elementos del rayo sísmico en el supuesto de ser éste circular, o sea de admitir, para la velocidad de las ondas *P*, la ley expresada por la ecuación [**4**], pero en el procedimiento de cálculo de las coordenadas del foco sísmico y de la hora inicial de la sacudida, que hemos explicado en la Introducción, se recurre a una nueva simplificación, que es la de admitir que el rayo es rectilíneo y la velocidad de las ondas constante o con un valor medio de 5,5 a 5,7 kilómetros por segundo. Veamos si en el sismo producido por la explosión de Oppau los resultados de este cálculo simplificado están de acuerdo con las observaciones.

Como en el presente caso la profundidad hipocentral es nula, los rayos sísmicos rectilíneos coinciden con las distancias epicentrales; de modo que para hallar los tiempos de recorrido correspondientes a cada Estación no habrá más que dividir su distancia epicentral por el valor constante que se atribuya a la velocidad *v* de las ondas *P* (*).

Hallados estos tiempos de recorrido no habrá más que restarlos de la hora de *P* registrada para obtener el valor de la hora inicial del fenómeno en el foco. En el cuadro IV se consignan los valores de la hora inicial de la explosión que a cada Estación corresponden, hecho el cálculo en los tres supuestos de que la velocidad de dichas ondas sea de 5,55, 5,6 y 5,7 kilómetros, respectivamente.

(*) Para mayor comodidad del lector que desee dedicarse a esta clase de investigaciones damos al final del precedente trabajo (tablas II, III y IV), las distancias recorridas por el rayo sísmico rectilíneo de segundo en segundo hasta los 550s para las velocidades de 5,5, 5,7 y 5,625 km./seg., valores que corresponden los dos primeros a la superficie terrestre y a la profundidad de 57 kilómetros, respectivamente, y el tercero al promedio de éstos. La tabla III, por ser la más usada en las aplicaciones, se ha prolongado hasta los mil segundos.

CUADRO IV

Hora de la explosión de Oppau (21 de Septiembre de 1921) calculada en el supuesto de ser el rayo sísmico rectilíneo y la velocidad de las ondas P, $v = 5{,}55$; $v = 5{,}6$ y $v = 5{,}7$ km./seg.

NOMBRE de la Estación.	$v = 5{,}55$ km.		$v = 5{,}6$ km.		$v = 5{,}7$ km.	
	VALORES de la hora de la explosión t_0 $7^h\ 32^m +$	DIFERENCIAS entre el promedio de t_0 y cada valor aislado Δt_0	VALORES de la hora de la explosión t_0 $7^h\ 32^m +$	DIFERENCIAS entre el promedio de t_0 y cada valor aislado Δt_0	VALORES de la hora de la explosión t_0 $7^h\ 32^m +$	DIFERENCIAS entre el promedio de t_0 y cada valor aislado Δt_0
Heidelberg.....	$12^s{,}406$	$+ 0^s{,}725$	$12^s{,}447$	$+ 1^s{,}008$	$12^s{,}526$	$+ 1^s{,}454$
Jugenheim.....	13 ,423	— 0 ,292	13 ,464	— 0 ,009	13 ,561	+ 0 ,419
Feldberg.....	13 ,946	— 0 ,815	14 ,071	— 0 ,616	14 ,316	— 0 ,336
Strassburg.....	14 ,000	— 0 ,869	14 ,179	— 0 ,724	14 ,526	— 0 ,546
Hohenheim.....	12 ,919	+ 0 ,212	13 ,107	+ 0 ,348	13 ,474	+ 0 ,506
Nördlingen.....	12 ,446	+ 0 ,685	12 ,750	+ 0 ,705	13 ,342	+ 0 ,638
Ravensburg.....	13 ,559	— 0 ,428	13 ,929	— 0 ,474	14 ,649	— 0 ,669
Zürich.....	12 ,937	+ 0 ,194	13 ,679	— 0 ,224	14 ,070	— 0 ,090
Göttingen.....	12 ,793	+ 0 ,338	13 ,214	+ 0 ,241	14 ,035	— 0 ,055
Munich.....	12 ,685	+ 0 ,446	13 ,179	+ 0 ,276	14 ,140	— 0 ,160
De Bilt.....	13 ,328	— 0 ,197	14 ,000	— 0 ,545	15 ,140	— 1 ,160
	Promedio de $t_0 = 7^h\ 32^m\ 13^s{,}131$.		Promedio de $t_0 = 7^h\ 32^m\ 13^s{,}455$.		Promedio de $t_0 = 7^h\ 32^m\ 13^s{,}980$.	
	Error medio del promedio de $t_0 = \pm 0^s{,}168$.		Error medio del promedio de $t_0 = \pm 0^s{,}172$.		Error medio del promedio de $t_0 = \pm 0^s{,}217$	
	Idem íd. de un valor aislado de $t_0 = \pm 0^s{,}532$.		Idem íd. de un valor aislado de $t_0 = \pm 0^s{,}543$.		Idem íd. de un valor aislado de $t_0 = \pm 0^s{,}687$.	

El primer valor $v = 5{,}55$ km. es el que da los resultados más concordantes con los del cuadro II, como así debía esperarse, pues tratándose de un fenómeno que se ha propagado solamente por las capas más superficiales de la corteza terrestre, en que la velocidad sólo varía entre 5,55 y 5,577 kilómetros, es natural que el valor medio de dicha velocidad que más se ajuste a los resultados del cálculo precedente sea uno muy próximo al intervalo dicho.

El promedio de t_o que se obtiene al suponer $v = 5{,}55$ km./seg. es $7^h\,32^m\,13^s{,}131$, que sólo difiere del del cuadro III en cuatro centésimas de segundo; su error medio es $\pm\,0^s{,}168$, es decir, idéntico al anterior, y el de un valor aislado $\pm\,0^s{,}532$, que discrepa sólo en una milésima de segundo.

Vemos, pues, que la hipótesis del rayo rectilíneo con la velocidad $v = 5{,}55$ km. da sensiblemente los mismos resultados, pues las diferencias son del orden de centésimas o milésimas de segundo, que no deben considerarse ya que los errores de observación son 50 veces mayores.

Si al promedio t_o, que acabamos de obtener, sumamos los tiempos de recorrido en cada Estación hallaremos las horas a que debieran haberse registrado los principios de las ondas *P*, y las diferencias con las realmente registradas serán los errores de observación. Estas aparecen en el cuadro IV, en la columna Δt_o, siguen la misma ley y tienen el mismo signo que las que figuran en el cuadro III. Todas ellas son inferiores a un segundo, y casi todas menores que medio, pues tan sólo son mayores las de las cuatro Estaciones de Heidelberg, Strassburg, Feldberg y Nördlingen.

Si pasamos ahora al caso del rayo rectilíneo, con la velocidad $v = 5{,}6$ km./seg. se obtienen valores algo más discrepantes, pero aún en cantidad insignificante. El promedio de t_o es $7^h\,32^m\,13^s{,}455$, que difiere del del cuadro III en tres décimas de segundo; el error medio del promedio resulta ahora de $\pm\,0^s{,}172$, mayor en tres milésimas de segundo y el de un valor aislado $\pm\,0{,}543$, que le excede en ocho.

Las diferencias Δt_o, que traducen en este supuesto los errores de observación, siguen la misma ley que en los casos anteriores, pero se han elevado algo hasta el punto de haber una, que es la de la Estación más próxima, Heidelberg, que da un error $\pm\,1^s{,}008$, que excede ligerísimamente de un segundo.

Por último, el valor de $v = 5{,}7$ km./seg., como más distante del real, es el que da resultados más discrepantes. El promedio de t_o es ahora $7^h\,32^m\,13^s{,}980$, mayor que el del cuadro III en ocho décimas de segundo. Su error medio es $\pm\,0^s{,}217$, y el de un valor aislado $\pm\,0^s{,}687$ mayor que medio segundo.

Las diferencias Δt_o, que corresponden en este supuesto a los errores de observación, son algo mayores que en las hipótesis precedentes, pues las de dos estaciones (Heidelberg y de Bilt) exceden de un segundo y en la primera casi llega a segundo y medio, y en otras cuatro (Strassburg, Hohenheim, Nördlingen y Ravensburg) exceden de medio segundo y sólo en las cinco restantes no llegan a esta cantidad.

Vemos, pues, que tratándose de sismos de profundidad nula, que es el caso más desfavorable para el empleo del valor $v = 5{,}7$ km./seg., la hipótesis del rayo rectilíneo es de gran aplicación práctica, puesto que el error con que se obtiene la hora inicial del fenómeno es menor que un segundo y por lo tanto inferior a los errores de observación, ya que las Estaciones sismológicas suelen dar el principio del sismograma en segundos redondos.

Si el sismo es de alguna profundidad, el error del procedimiento será tanto más pequeño cuanto mayor sea ésta.

En el caso de sismos de focos situados en la misma superficie terrestre o a muy poca profundidad se deben emplear valores menores de v, especialmente el de 5,55 o el de 5,6. Con ellos se obtienen casi los mismos resultados exactos que en el supuesto, más complicado y de cálculo más difícil, del rayo circular.

Como resultado de nuestro estudio puede deducirse la conclusión de que las observaciones registradas en el sismo producido por la explosión de Oppau se ajustan perfectamente a la ley de variación de la velocidad que expresa la ecuación [**4**], o sea la del rayo sísmico circular. En cuanto al procedimiento simplificado que supone el rayo sísmico rectilíneo, los resultados son casi exactamente los mismos tomando para v un valor de 5,5 a 5,6 kg./seg., y discrepan algo más, pero siempre en cantidad inferior a los errores de observación, al admitir el valor extremo 5,7 que tienen las ondas P a la profundidad de 57 kilómetros. La validez práctica del procedimiento es innegable, si nos atenemos a las observaciones registradas durante la explosión de Oppau, caso de una precisión extrema, pues se tiene la seguridad absoluta de que el foco estaba en la misma superficie terrestre y se conocía su posición exactamente.

BIBLIOGRAFÍA

1. INGLADA, V.—*Cálculo de las coordenadas del foco sísmico y del instante inicial de la sacudida por medio de las horas del principio de los sismogramas registrados en varias Estaciones próximas.* "Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales„, de Madrid. Tomo XXII, cuaderno IV, páginas 523-592 (Junio de 1926).
2. UEBER ERDBEBENWELLEN.—I. WIECHERT, E.—*Teoretisch über die Ausbreitung der Erdbebenwellen.* Nachrichten von der Königlichen Gesselschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse, 1907, págs. 415-529.—II. ZÖPPRITZ, K. UND GEIGER, L.—*Laufzeitkurven.* l. c. 1909, páginas 529-549.—III. ZÖPPRITZ, K. UND GEIGER, L.—*Berechnung von Weg und Geschwindigkeit der Vorläufer. Die Poissonsche Konstante im Erdinnern.* l. c. 1909, págs. 400-428.—V. ZÖPPRITZ, K. GEIGER, L. UND GUTENBERG, B.—*Konstitution des Erdinnern, erlosschen aus den Bodenverrückungen der einmal reflektierten zu den direkten longitudinalen Erdbebenwellen und einige andere Beobachtungen über Erdbebenwellen.* l. c. 1912, págs. 121-206.—VI. GEIGER, L. UND GUTENBERG, B.—*Konstitution des Erdinnern, erloschen aus der Intensität longitudinaler und transversaler Erdbebenwellen und einiger Beobachtungen an den Vorläufern.* l. c. 1912, páginas 623-675.—VII. A. GUTENBERG, B.—*Beobachtungen an Registrierungen von Fernbeben zu Göttingen und Folgerungen über die Konstitution des Erdkörpers.* l. c. 1914, págs. 1-52.
3. GUTENBERG, B.—*Neue Auswertung der Aufzeichnungen der Erdbebenwellen infolge der Explosion von Oppau.* Physikalische Zeitschrift, Enero 1925, págs. 259-260.
4. ROSENTHAL, E.—*Ueber die Tiefenbestimmung von Erdbebenherden.* Beiträge zur Geophysik. XIII. 1914, págs. 28-64 y 106-147.
5. INGLADA, V.—*Estudios de sismos españoles. El terremoto del bajo Segura de 10 de Septiembre de 1919. Cálculo de la profundidad hipocentral y de la hora inicial de sus sacudidas en el foco y en el epicentro.* Memoria presentada en Octubre de 1925 a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.
6. INGLADA, V.—*Nuevas fórmulas para abreviar el cálculo de la profundidad aproximada del foco sísmico por el método de Kövesligéthy y su aplicación a algunos temblores de tierra.* Madrid, Instituto Geográfico, 1921, pág. 47.
7. INGLADA, V.—*Contribución al estudio del megasismo japonés de 1.º de Septiembre de 1923. Cálculo de las coordenadas focales y del instante inicial del terremoto principal por medio de las horas de $\overline{P}$ registradas en las Estaciones próximas.* "Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid„. Tomo XXIII, cuaderno I, páginas 47-135.
8. HECKER, O.—*Die Explosionskatastrophe von Oppau am 21. September 1921 nach den Aufzeichnungen der Erdbebenwarten.* Veröffentlichungen der Hauptstation für Erbebenforschung in Jena. Heft 2. Jena, 1922. 18 páginas y 5 láminas.
9. *Publications du bureau central Seismologique international sous la direction de E. Rothé.* Serie A.—Travaux scientifiques. Fascicule núm. 3. *Tables de A. Mohorovičić*. 60. págs. Paris, 1925.

TABLA I

Valores de la distancia epicentral Δ que corresponden a la profundidad máxima h_m del rayo sísmico circular.

h_m Kilómetros.	Δ Kilómetros.	h_m Kilómetros.	Δ Kilómetros.	h_m Kilómetros.	Δ Kilómetros.	h_m Kilómetros.	Δ Kilómetros.
1	56	16	225	31	312	46	381
2	79	17	232	32	317	47	385
3	97	18	239	33	322	48	389
4	112	19	245	34	327	49	393
5	126	20	251	35	332	50	397
6	135	21	258	36	337	51	401
7	150	22	265	37	342	52	405
8	158	23	270	38	347	53	409
9	168	24	276	39	351	54	413
10	178	25	281	40	356	55	417
11	187	26	287	41	360	56	420
12	195	27	292	42	364	57	424
13	202	28	297	43	368		
14	210	29	302	44	373		
15	218	30	308	45	377		

TABLA II

Distancias recorridas por el rayo sísmico rectilíneo en el supuesto de una velocidad constante de 5,55 km./seg. Los números colocados en la primera columna de la izquierda indican decenas de segundo y unidades las cifras que están en la fila superior. Las distancias están expresadas en kilómetros.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	»	5,55	11,1	16,65	22,2	27,75	33,3	38,85	44,4	49,95
1	55,5	61,05	66,6	72,15	77,7	83,25	88,8	94,35	99,9	105,45
2	111	116,55	122,1	127,65	133,2	138,75	144,3	149,85	155,4	160,95
3	166,5	172,05	177,6	183,15	188,7	194,25	199,8	205,35	210,9	216,45
4	222	227,55	233,1	238,65	244,2	249,75	255,3	260,85	266,4	271,95
5	277,5	283,05	288,6	294,15	299,7	305,25	310,8	316,35	321,9	327,45
6	333	338,55	344,1	349,65	355,2	360,75	366,3	371,85	377,4	382,95
7	388,5	394,05	399,6	405,15	410,7	416,25	421,8	427,35	432,9	438,45
8	444	449,55	455,1	460,65	466,2	471,75	476,3	481,85	487,4	492,95
9	499,5	505,05	510,6	516,15	521,7	527,25	532,8	538,35	543,9	549,45
10	555	560,55	566,1	571,65	577,2	582,75	588,3	593,85	599,4	504,95
11	610,5	616,05	621,6	627,15	632,7	638,25	643,8	649,35	654,9	660,45
12	666	671,55	677,1	682,65	688,2	693,75	699,3	704,85	710,4	715,95
13	721,5	727,05	732,6	738,15	743,7	749,25	754,8	760,35	765,9	771,45
14	777	782,55	788,1	793,65	799,2	804,75	810,3	815,85	821,4	826,95
15	832,5	838,05	843,6	849,15	854,7	860,25	865,8	871,35	876,9	882,45
16	888	893,55	899,1	904,65	910,2	915,75	921,3	926,85	932,4	937,95
17	943,5	949,05	954,6	960,15	965,7	971,25	976,8	982,35	987,9	993,45
18	999	1004,55	1010,1	1015,65	1021,2	1026,75	1032,3	1037,85	1043,4	1048,95
19	1054,5	1060,05	1065,6	1071,15	1076,7	1082,25	1087,8	1093,35	1098,9	1104,45
20	1110	1115,55	1121,1	1126,65	1132,2	1137,75	1143,3	1148,85	1154,4	1159,95
21	1165,5	1171,05	1176,6	1182,15	1187,7	1193,25	1198,8	1204,35	1209,9	1215,45
22	1221	1226,55	1232,1	1237,65	1243,2	1248,75	1254,3	1259,85	1265,4	1270,95
23	1276,5	1282,05	1287,6	1293,15	1298,7	1304,25	1309,8	1315,35	1320,9	1326,45
24	1332	1337,55	1343,1	1348,65	1354,2	1359,75	1365,3	1370,85	1376,4	1381,95
25	1387,5	1393,05	1398,6	1404,15	1409,7	1415,25	1420,8	1426,35	1431,9	1437,45
26	1443	1448,55	1454,1	1459,65	1465,2	1470,75	1476,3	1481,85	1487,4	1492,95
27	1498,5	1504,05	1509,6	1515,15	1520,7	1526,25	1531,8	1537,35	1542,9	1548,45
28	1554	1559,55	1565,1	1570,65	1576,2	1581,75	1587,3	1592,85	1598,4	1603,95
29	1609,5	1615,05	1620,6	1626,15	1631,7	1637,25	1642,8	1648,35	1653,9	1659,45
30	1665	1670,55	1676,1	1681,65	1687,2	1692,75	1698,3	1703,85	1709,4	1714,95
31	1720,5	1726,05	1731,6	1737,15	1742,7	1748,25	1753,8	1759,35	1764,9	1770,45
32	1776	1781,55	1787,1	1792,65	1798,2	1803,75	1809,3	1814,85	1820,4	1825,95
33	1831,5	1837,05	1842,6	1848,15	1853,7	1859,25	1864,8	1870,35	1875,9	1881,45
34	1887	1892,55	1898,1	1903,65	1909,2	1914,75	1920,3	1925,85	1931,4	1936,95
35	1942,5	1948,05	1953,6	1959,15	1964,7	1970,25	1975,8	1981,35	1986,9	1992,45
36	1998	2003,55	2009,1	2014,65	2020,2	2025,75	2031,3	2036,85	2042,4	2047,95
37	2053,5	2059,05	2064,6	2070,15	2075,7	2081,25	2086,8	2092,35	2097,9	2103,45
38	2109	2114,55	2120,1	2125,65	2131,2	2136,75	2142,3	2147,85	2153,4	2158,95

TABLA II—*Conclusión.*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
39	2164,5	2170,05	2175,6	2181,15	2186,7	2192,25	2197,8	2203,35	2208,9	2214,45
40	2220	2225,55	2231,1	2236,65	2242,2	2247,75	2253,3	2258,85	2264,4	2269,95
41	2275,5	2281,05	2286,6	2292,15	2297,7	2303,25	2308,8	2314,35	2319,9	2325,45
42	2331	2336,55	2342,1	2347,65	2353,2	2358,75	2364,3	2369,85	2375,4	2380,95
43	2386,5	2392,05	2397,6	2403,15	2408,7	2414,25	2419,8	2425,35	2430,9	2436,45
44	2442	2447,55	2453,1	2458,65	2464,2	2469,75	2475,3	2480,85	2486,4	2491,95
45	2497,5	2503,05	2508,6	2514,15	2519,7	2525,25	2530,8	2536,35	2541,9	2547,45
46	2553	2558,55	2564,1	2569,65	2576,2	2581,75	2587,3	2592,85	2598,4	2603,95
47	2608,5	2614,05	2619,6	2625,15	2630,7	2636,25	2641,8	2647,35	2652,9	2658,45
48	2664	2669,55	2675,1	2680,65	2686,2	2691,75	2697,3	2702,85	2708,4	2713,95
49	2719,5	2725,05	2730,6	2736,15	2741,7	2747,25	2752,8	2758,35	2763,9	2769,45
50	2775	2780,55	2786,1	2791,65	2797,2	2802,75	2808,3	2813,85	2819,4	2824,95
51	2830,5	2836,05	2841,6	2847,15	2852,7	2858,25	2863,8	2869,35	2874,9	2880,45
52	2886	2891,55	2897,1	2902,65	2908,2	2913,75	2919,3	2924,85	2930,4	2935,95
53	2941,5	2947,05	2952,6	2958,15	2963,7	2969,25	2974,8	2980,35	2985,9	2991,45
54	2997	3002,55	3008,1	3013,65	3019,2	3024,75	3030,3	3035,85	3041,4	3046,95

TABLA III

Distancias recorridas por el rayo sísmico, en el supuesto de una velocidad constante de 5,7 kilómetros. Los números colocados en la primera columna de la izquierda indican decenas de segundo, y unidades las cifras que están en la fila superior. Las distancias están expresadas en kilómetros.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	»	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
1	57	62,7	68,4	74,1	79,8	85,5	91,2	96,9	102,6	108,3
2	114	119,7	125,4	131,1	136,8	142,5	148,2	153,9	159,6	165,3
3	171	176,7	182,4	188,1	193,8	199,5	205,2	210,9	216,6	222,3
4	228	233,7	239,4	245,1	250,8	256,5	262,2	267,9	273,6	279,3
5	285	290,7	296,4	302,1	307,8	313,5	319,2	324,9	330,6	336,3
6	342	347,7	353,4	359,1	364,8	370,5	376,2	381,9	387,6	393,3
7	399	405,7	411,4	417,1	422,8	427,5	433,2	438,9	444,6	450,3
8	456	461,7	467,4	473,1	478,8	484,5	490,2	495,9	501,6	507,3
9	513	518,7	524,4	530,1	535,8	541,5	546,2	551,9	557,6	563,3
10	570	575,7	581,4	587,1	592,8	598,5	604,2	609,9	615,6	621,3
11	627	632,7	638,4	644,1	649,8	655,5	661,2	666,9	672,6	678,3
12	684	689,7	695,4	701,1	706,8	712,5	718,2	723,9	729,6	735,3
13	741	746,7	752,4	758,1	763,8	769,5	775,2	780,9	786,6	792,3
14	798	803,7	809,4	815,1	820,8	826,5	832,2	837,9	843,6	849,3
15	855	860,7	866,4	872,1	877,8	883,5	889,2	894,9	900,6	906,3
16	912	917,7	923,4	929,1	934,8	940,5	946,2	951,9	957,6	963,3
17	969	974,7	980,4	986,1	991,8	997,5	1003,2	1008,9	1014,6	1020,3
18	1026	1031,7	1037,4	1043,1	1048,8	1054,5	1060,2	1065,9	1071,6	1077,3
19	1083	1088,7	1094,4	1100,1	1105,8	1111,5	1117,2	1122,9	1128,6	1134,3
20	1140	1145,7	1151,4	1157,1	1162,8	1168,5	1174,2	1179,9	1185,6	1191,3
21	1197	1202,7	1208,4	1214,1	1219,8	1225,5	1231,2	1236,9	1242,6	1248,3
22	1254	1259,7	1265,4	1271,1	1276,8	1282,5	1288,2	1293,9	1299,6	1305,3
23	1311	1316,7	1322,4	1328,1	1333,8	1339,5	1345,2	1350,9	1356,6	1362,3
24	1368	1373,7	1379,4	1385,1	1390,8	1396,5	1402,2	1407,9	1413,6	1419,3
25	1425	1430,7	1436,4	1442,1	1447,8	1453,5	1459,2	1464,9	1470,6	1476,3
26	1482	1487,7	1493,4	1499,1	1504,8	1510,5	1516,2	1521,9	1527,6	1533,3
27	1539	1544,7	1550,4	1556 1	1561,8	1567,5	1573,2	1578,9	1584,6	1590,3
28	1596	1601,7	1607,4	1613,1	1618,8	1624,5	1630,2	1635,9	1641,6	1647,3
29	1653	1658,7	1664,4	1670,1	1675,8	1681,5	1687,2	1692,9	1698,6	1704,3
30	1710	1715,7	1721,4	1727,1	1732,8	1738,5	1744,2	1749,9	1755,6	1761,3
31	1767	1772,7	1778,4	1784,1	1789,8	1795,5	1801,2	1806,9	1812,6	1818,3
32	1824	1829,7	1835,4	1841,1	1846,8	1852,5	1858,2	1863,9	1869,6	1875,3
33	1881	1886,7	1892,4	1898,1	1903,8	1909,5	1915,2	1920,9	1926,6	1932,3
34	1938	1943,7	1949,4	1955,1	1960,8	1966,5	1972,2	1977,9	1983,6	1989,3
35	1995	2000,7	2006,4	2012,1	2017,8	2023,5	2029,2	2034,9	2040,6	2046,3
36	2052	2057,7	2063,4	2069,1	2074,8	2080,5	2086,2	2091,9	2097,6	2103,3
37	2109	2114,7	2120,4	2126,1	2131,8	2137,5	2143,2	2148,9	2154,6	2160,3
38	2166	2171,7	2177,4	2183,1	2188,8	2194,5	2200,2	2205,9	2211,6	2217,3

TABLA III — *Continuación.*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
39	2223	2228,7	2234,4	2240,1	2245,8	2251,5	2257,2	2262,9	2268,6	2274,3
40	2280	2285,7	2291,4	2297,1	2302,8	2308,5	2314,2	2319,9	2325,6	2331,3
41	2337	2342,7	2348,4	2354,1	2359,8	2365,5	2371,2	2376,9	2382,6	2388,3
42	2394	2399,7	2405,4	2411,1	2416,8	2422,5	2428,2	2433,9	2439,6	2445,3
43	2451	2456,7	2462,4	2468,1	2473,8	2479,5	2485,2	2490,9	2496,6	2502,3
44	2508	2513,7	2519,4	2525,1	2530,8	2536,5	2542,2	2547,9	2553,6	2559,3
45	2565	2570,7	2576,4	2582,1	2587,8	2593,5	2599,2	2604,9	2610,6	2616,3
46	2622	2627,7	2633,4	2639,1	2644,8	2650,5	2656,2	2661,9	2667,6	2673,3
47	2679	2684,7	2690,4	2696,1	2701,8	2707,5	2713,2	2718,9	2724,6	2730,3
48	2736	2741,7	2747,4	2753,1	2758,8	2764,5	2770,2	2775,9	2781,6	2787,3
49	2793	2798,7	2804,4	2810,1	2815,8	2821,5	2827,2	2832,9	2838,6	2844,3
50	2850	2855,7	2861,4	2867,1	2872,8	2878,5	2884,2	2889,9	2895,6	2901,3
51	2907	2912,7	2918,4	2924,1	2929,8	2935,5	2941,2	2946,9	2952,6	2958,3
52	2964	2969,7	2975,4	2981,1	2986,8	2992,5	2998,2	3003,9	3009,6	3015,3
53	3021	3026,7	3032,4	3038,1	3043,8	3049,5	3055,2	3060,9	3066,6	3072,3
54	3078	3083,7	3089,4	3095,1	3100,8	3106,5	3112,2	3117,9	3123,6	3129,3
55	3135	3140,7	3146,4	3152,1	3157,8	3163,5	3169,2	3174,9	3180,6	3186,3
56	3192	3197,7	3203,4	3209,1	3214,8	3220,5	3226,2	3231,9	3237,6	3243,3
57	3249	3254,7	3260,4	3266,1	3271,8	3277,5	3283,2	3288,9	3294,6	3300,3
58	3306	3311,7	3317,4	3323,1	3328,8	3334,5	3340,2	3345,9	3351,6	3357,3
59	3363	3368,7	3374,4	3380,1	3385,8	3391,5	3397,2	3402,9	3408,6	3414,3
60	3420	3425,7	3431,4	3437,1	3442,8	3448,5	3454,2	3459,9	3465,6	3471,3
61	3477	3482,7	3488,4	3494,1	3499,8	3505,5	3511,2	3516,9	3522,6	3528,3
62	3534	3539,7	3545,4	3551,1	3556,8	3562,5	3568,2	3573,9	3579,6	3585,3
63	3591	3596,7	3602,4	3608,1	3613,8	3619,5	3625,2	3630,9	3636,6	3642,3
64	3648	3653,7	3659,4	3665,1	3670,8	3676,5	3682,2	3687,9	3693,6	3699,3
65	3705	3710,7	3716,4	3722,1	3727,8	3733,5	3739,2	3744,9	3750,6	3756,3
66	3762	3767,7	3773,4	3779,1	3784,8	3790,5	3796,2	3801,9	3807,6	3813,3
67	3819	3824,7	3830,4	3836,1	3841,8	3847,5	3853,2	3858,9	3864,6	3870,3
68	3876	3881,7	3887,4	3893,1	3898,8	3904,5	3910,2	3915,9	3921,6	3927,3
69	3933	3938,7	3944,4	3950,1	3955,8	3961,5	3967,2	3972,9	3978,6	3984,3
70	3990	3995,7	4001,4	4007,1	4012,8	4018,5	4024,2	4029,9	4035,6	4041,3
71	4047	4052,7	4058,4	4064,1	4069,8	4075,5	4081,2	4086,9	4092,6	4098,3
72	4104	4109,7	4115,4	4121,1	4126,8	4132,5	4138,2	4143,9	4149,6	4155,3
73	4161	4166,7	4172,4	4178,1	4183,8	4189,5	4195,2	4200,9	4206,6	4212,3
74	4218	4223,7	4229,4	4235,1	4240,8	4246,5	4252,2	4257,9	4263,6	4269,3
75	4275	4280,7	4286,4	4292,1	4297,8	4303,5	4309,2	4314,9	4320,6	4326,3
76	4332	4337,7	4343,4	4349,1	4354,8	4360,5	4366,2	4371,9	4377,6	4383,3
77	4389	4394,7	4400,4	4406,1	4411,8	4423,5	4423,2	4428,9	4434,6	4440,3
78	4446	4451,7	4457,4	4463,1	4468,8	4474,5	4480,2	4485,9	4491,6	4497,3
79	4503	4508,7	4514,4	4520,1	4525,8	4531,5	4537,2	4542,9	4548,6	4554,3
80	4560	4565,7	4571,4	4577,1	4582,8	4588,5	4594,2	4599,9	4605,6	4611,3
81	4617	4622,7	4628,4	4634,1	4639,8	4645,5	4651,2	4656,9	4662,6	4668,3
82	4674	4679,7	4685,4	4691,1	4696,8	4702,5	4708,2	4713,9	4719,6	4725,3
83	4731	4736,7	4742,4	4748,1	4753,8	4759,5	4765,2	4770,9	4776,6	4782,3
84	4788	4793,7	4799,4	4805,1	4810,8	4816,5	4822,2	4827,9	4833,6	4839,3

TABLA III — *Conclusión.*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
85	4845	4850,7	4856,4	4862,1	4867,8	4873,5	4879,2	4884,9	4890,6	4896,3
86	4902	4907,7	4913,4	4919,1	4924,8	4930,5	4936,2	4941,9	4947,6	4953,3
87	4959	4964,7	4970,4	4976,1	4981,8	4987,5	4993,2	4998,9	5004,6	5010,3
88	5016	5021,7	5027,4	5033,1	5038,8	5044,5	5050,2	5055,9	5061,6	5067,3
89	5073	5078,7	5084,4	5090,1	5095,8	5101,5	5107,2	5112,9	5118,6	5124,3
90	5130	5135,7	5141,4	5147,1	5152,8	5158,5	5164,2	5169,9	5175,6	5181,3
91	5187	5192,7	5198,4	5204,1	5209,8	5215,5	5221,2	5226,9	5232,6	5238,3
92	5244	5249,7	5255,4	5261,1	5266,8	5272,5	5278,2	5283,9	5289,6	5295,3
93	5301	5306,7	5312,4	5318,1	5323,8	5329,5	5335,2	5340,9	5346,6	5352,3
94	5358	5363,7	5369,4	5375,1	5380,8	5386,5	5392,2	5397,9	5403,6	5409,3
95	5415	5420,7	5426,4	5432,1	5437,8	5443,5	5449,2	5454,9	5460,6	5466,3
96	5472	5477,7	5483,4	5489,1	5494,8	5500,5	5506,2	5511,9	5517,6	5523,3
97	5529	5534,7	5540,4	5546,1	5551,8	5557,5	5563,2	5568,9	5574,6	5580,3
98	5586	5591,7	5597,4	5603,1	5608,8	5614,5	5620,2	5625,9	5631,6	5637,3
99	5643	5648,7	5654,4	5660,1	5665,8	5671,5	5677,2	5682,9	5688,6	5694,3
100	5700	5705,7	5711,4	5717,1	5722,8	5728,5	5734,2	5739,9	5745,6	5751,3

NOTA. A pesar de que en la práctica no se consideran distancias epicentrales superiores a 300 kilómetros, se ha calculado esta Tabla hasta 5750 para hallar el tiempo de recorrido en décimas de segundo. Si se quiere obtener, por ejemplo, el que corresponde a 251,3 kilómetros, buscaremos en la Tabla el tiempo en que se recorre una distancia diez veces mayor 2513 kilómetros, hallaremos 441ˢ y el que se pide será diez veces menor, es decir, 44ˢ,1.

TABLA IV

Distancias recorridas por el rayo sísmico en el supuesto de una velocidad constante de 5,625 km. seg. Los números colocados en la primera columna de la izquierda indican decenas de segundo y unidades las cifras que están en la fila superior. Las distancias están expresadas en kilómetros.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	»	5,625	11,25	16,875	22,5	28,125	33,75	39,375	45,0	50,625
1	56,25	61,875	67,50	73,125	78,75	84,375	90,0	95,625	101,25	106,875
2	112,5	118,125	123,75	129,375	135,0	140,625	146,25	151,875	157,50	163,125
3	168,75	174,375	180,0	185,625	191,25	196,875	202,50	208,125	213,75	219,375
4	225,0	230,625	236,25	241,875	247,5	253,125	258,75	264,375	270,0	275,625
5	281,25	286,875	292,50	298,125	303,75	309,375	315,0	320,625	326,25	331,875
6	337,5	343,125	348,75	354,375	360,0	365,625	371,25	376,875	382,5	388,125
7	393,75	399,375	405,0	410,625	416,25	421,875	426,50	433,125	438,75	444,375
8	450,0	455,625	461,25	466,875	472,5	478,125	483,75	489,375	495,0	500,625
9	506,25	511,875	517,50	523,125	528,75	534,375	540,0	545,625	551,25	556,875
10	562,5	568,125	573,75	579,375	585,0	590,625	596,25	601,875	607,5	613,125
11	618,75	624,375	630,0	635,625	641,25	646,875	652,50	658,125	663,75	669,375
12	675,0	680,625	686,25	691,875	697,5	703,125	708,75	714,375	720,0	725,625
13	731,25	736,875	742,5	748,125	753,75	759,375	765,0	770,625	776,25	781,875
14	787,5	793,125	798,75	804,375	810,0	815,625	821,25	826,875	832,5	838,125
15	843,75	849,375	855,0	860,625	866,25	871,875	877,5	883,125	888,75	894,375
16	900,0	905,625	911,25	916,875	922,50	928,125	933,75	939,375	945,0	950,625
17	956,25	961,875	967,5	973,125	979,75	984,375	990,0	995,625	1001,25	1006,875
18	1012,5	1018,125	1023,75	1029,375	1035,0	1040,625	1046,25	1051,875	1057,5	1063,125
19	1068,75	1074,375	1080,0	1085,625	1091,25	1096,875	1102,5	1108,125	1113,75	1119,375
20	1125,0	1130,625	1136,25	1141,875	1147,5	1153,125	1158,75	1164,375	1170,0	1175,625
21	1181,25	1186,875	1192,5	1198,125	1203,75	1209,375	1215,0	1220,625	1226,25	1231,875
22	1237,5	1243,125	1248,75	1254,375	1260,0	1265,625	1271,25	1276,875	1282,5	1288,125
23	1293,75	1299,375	1305,0	1310,625	1316,25	1321,875	1327,5	1333,125	1338,75	1344,375
24	1350,0	1355,625	1361,25	1366,875	1372,5	1378,125	1383,75	1389,375	1395,0	1400,625
25	1406,25	1411,875	1417,5	1423,125	1428,75	1434,375	1440,0	1445,625	1541,25	1456,875
26	1462,5	1468,125	1473,75	1479,375	1485,0	1490,625	1496,25	1501,875	1507,5	1513,125
27	1518,75	1524,375	1530,0	1535,625	1541,25	1546,875	1552,5	1558,125	1563,75	1569,375
28	1575,0	1580,625	1586,25	1591,875	1597,5	1603,125	1608,75	1614,375	1620,0	1625,625
29	1631,25	1636,875	1642,5	1648,125	1653,75	1659,375	1665,0	1670,625	1676,25	1681,875
30	1687,5	1693,125	1698,75	1704,375	1710,0	1715,625	1721,25	1726,875	1732,5	1738,125
31	1743,75	1749,375	1755,0	1760,625	1766,25	1771,875	1777,5	1783,125	1788,75	1794,375
32	1800,0	1805,625	1811,25	1816,875	1822,5	1828,125	1833,75	1839,375	1845,0	1850,625
33	1856,25	1861,875	1867,5	1873,125	1878,75	1884,375	1890,0	1895,625	1901,25	1906,875
34	1912,5	1918,125	1923,75	1929,375	1935,0	1940,625	1946,25	1951,875	1957,5	1963,125
35	1968,75	1974,375	1980,0	1985,625	1991,25	1996,875	2002,5	2008,125	2013,75	2019,375
36	2025,0	2030,625	2036,25	2041,875	2047,5	2053,125	2058,75	2064,375	2070,0	2075,625
37	2081,25	2086,875	2092,5	2098,125	2103,75	2109,375	2115,0	2120,625	2126,25	2131,875
38	2137,5	2143,125	2148,75	2154,375	2160,0	2165,625	2171,25	2176,875	2182,5	2188,125

TABLA IV.—*Conclusión.*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
39	2193,75	2199,375	2205,0	2210,625	2216,25	2221,875	2227,5	2233,125	2238,75	2244,375
40	2250,0	2255,625	2261,25	2266,875	2272,5	2278,125	2283,75	2289,375	2295,0	2300,625
41	2306,25	2311,875	2317,5	2323,125	2328,75	2334,375	2340,0	2345,625	2351,25	2356,875
42	2362,5	2368,125	2373,75	2379,375	2385,0	2390,625	2396,25	2401,875	2407,5	2413,125
43	2418,75	2424,375	2430,0	2435,625	2441,25	2446,875	2452,5	2458,125	2463,75	2469,375
44	2475,0	2480,625	2486,25	2491,875	2497,5	2503,125	2508,75	2514,375	2520,0	2525,625
45	2531,25	2536,875	2542,5	2548,125	2553,75	2559,375	2565,0	2570,625	2576,25	2581,875
46	2587,5	2593,125	2598,75	2604,375	2610,0	2615,625	2621,25	2626,875	2632,5	2638,125
47	2643,75	2649,375	2655,0	2660,625	2666,25	2671,875	2677,5	2683,125	2688,75	2694,375
48	2700,0	2705,625	2711,25	2716,875	2722,5	2728,125	2733,75	2739,375	2745,0	2750,625
49	2756,25	2761,875	2767,50	2773,125	2778,75	2784,375	2790,0	2795,625	2801,25	2806,875
50	2812,5	2818,125	2823,75	2829,375	2835,0	2840,625	2846,25	2851,875	2857,5	2863,125
51	2868,75	2874,375	2880,0	2885,625	2891,25	2896,875	2902,5	2908,125	2913,75	2919,375
52	2925,0	2930,625	2936,25	2941,875	2947,5	2953,125	2958,75	2964,375	2970,0	2975,625
53	2981,25	2986,875	2992,5	2998,125	3003,75	3009,375	3015,0	3020,625	3026,25	3031,875
54	3037,5	3043,125	3048,75	3054,375	3060,0	3065,625	3071,25	3076,875	3082,5	3088,125

ÍNDICE DE LAS MATERIAS

Páginas

Introducción 3

Estudio sísmico de la explosión de Oppau de 21 de Septiembre de 1921.

I.—Antecedentes y datos de observación relativos al sismo 13
II.—La curva dromocrónica 16
III.—La trayectoria de los rayos sísmicos y su tiempo de recorrido 18
IV.—Hora de la explosión de Oppau 20
Bibliografía 27
Tabla I 29
Tabla II 30
Tabla III 32
Tabla IV 35

DETERMINACIONES RELATIVAS

DE LA

INTENSIDAD DE LA GRAVEDAD

MEMORIAS
DEL
INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL

TOMO XV

VII

DETERMINACIONES RELATIVAS
DE LA
INTENSIDAD DE LA GRAVEDAD

POR

GUILLERMO SANS Y HUELIN

INGENIERO GEÓGRAFO, COMANDANTE DE ARTILLERIA



INSTITUTO GEOGRÁFICO
BIBLIOTECA

MADRID
TALLERES DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL
—
1927

INTRODUCCIÓN

Durante los años 1921, 1922 y 1923 se efectuaron determinaciones relativas de la intensidad de la gravedad en la costa norte de Marruecos y sur de Andalucía, a lo largo del Pirineo y en la costa atlántica portuguesa, respectivamente.

En Marruecos se observaron cuatro estaciones, que fueron: Tánger, Tetuán, Ceuta y Melilla, y tres en Andalucía, a saber: Málaga, Motril y Almería.

Las estaciones observadas en la región pirenaica fueron cuatro: en Roncal, Boltaña, Sort y Puigcerdá.

Doy las gracias por las facilidades dadas para la instalación de los aparatos en las estaciones anteriores, al Reverendo Padre director del Colegio de Franciscanos, en Tánger; al Director del Dispensario Municipal de Tetuán; al entonces Coronel de Artillería, en Ceuta, hoy día general, señor D. Federico Grund; al señor Presidente de la Junta de Arbitrios de Melilla; al Jefe de la Estación Sismológica de Almería en aquella época, mi querido compañero D. Eduardo Torallas; al Maestro director de las Escuelas municipales en Roncal; al Sr. Gistau, de Boltaña; al señor Alcalde de Sort, y al Reverendo Padre director del Colegio de Escolapios de Puigcerdá.

Con el fin de tener puntos de apoyo en el borde occidental de la Península para el trazado de las curvas isanómalas de la gravedad, que el Ingeniero que suscribe presentó en la segunda Asamblea general de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, celebrada en esta Corte en Octubre de 1924, se solicitó autorización del Gobierno de Portugal para poder observar con nuestros aparatos en cuatro puntos de la costa portuguesa, distanciados aproximadamente un grado en latitud, conviniéndose la determinación de la gravedad en Lisboa, Figueira da Foz, Oporto y Praia da Rocha.

Intervino con gran acierto en las gestiones preliminares cerca de las autoridades portuguesas para poder realizarse esta campaña, el Sr. Dr. Francisco M.ª da Costa Lobo, sabio Director del Observatorio Astronómico de la Universidad de Coimbra. En el desarrollo de la campaña prestó a la brigada su valiosa cooperación la Administraçao Geral dos Serviços Geodesicos, hoy Instituto Geográfico e Cadastral, en Lisboa, a cuyo frente figura el insigne Geodesta señor Coronel Mimoso Guerra. Gracias a la ayuda combinada de tan valiosos elementos se simplificó extraordinariamente la instalación de los aparatos en locales adecuados, no recibiendo el personal de nuestra brigada más que atenciones de todo el mundo en las poblaciones visitadas.

Con este motivo reitero mi profundo agradecimiento a los Sres. Costa Lobo y Mimoso Guerra; al Sr. Rodrígues Asençao, Ingeniero director del Observatorio Meteorológico de la Serra do Pilar, en Oporto; al señor Ingeniero director de la Junta de Obras del puerto del Mondego, en Figueira da Foz; al señor Capitán del puerto de Portimao, y a nuestro Viceconsul en dicho punto, Sr. Vieira.

Aparatos y constantes de los mismos.

1.º Los aparatos empleados para la observación en las tres campañas mencionadas, fueron:

Aparato de péndulos, modelo Sterneck.

Péndulos 104, 105, 106 y 107, en las campañas de 1921 y 1923.

Péndulos 47, 66, 46 y 65, y 104, 105, 106 y 107, en la campaña de 1922.

Reloj Strasser de 0^s5, núm. 278.

Cronógrafo Hipp.

Anteojo de pasos Repsold, núm. 2.

Termómetro péndulo, núm. 19.640.

Barómetro Tonnelot, núm. 964. (Por avería sufrida por este barómetro en el transporte de Melilla a Málaga, se observó en esta estación con el barómetro núm. 1.449, de la Estación Sismológica).

Psicrómetro.

La descripción de estos aparatos, así como el fundamento del método de observación, puede verse en el tomo XIII de las Memorias del Instituto Geográfico, consultando la Memoria del Sr. D. José Galbis: *Determinación relativa de la intensidad de la fuerza de gravedad en San Fernando, Duque, Baños y Granada.*

2.º Las constantes de presión correspondientes a los citados péndulos son:

Péndulo 104	$\lambda = 0{,}0000675$
Id. 105	$\lambda = 0{,}0000679$
Id. 106	$\lambda = 0{,}0000665$
Id. 107	$\lambda = 0{,}0000668$
Péndulo 47	$\lambda = 0{,}0000654$
Id. 66	$\lambda = 0{,}0000679$
Id. 46	$\lambda = 0{,}0000653$
Id. 65	$\lambda = 0{,}0000669$

3.º Las constantes de los mismos péndulos para la corrección de temperatura son:

Péndulo 104	$\tau = 0{,}000004811$
Id. 105	$\tau = 0{,}000004738$
Id. 106	$\tau = 0{,}000004791$
Id. 107	$\tau = 0{,}000004730$
Péndulo 47	$\tau = 0{,}000004861$
Id. 66	$\tau = 0{,}000004799$
Id. 46	$\tau = 0{,}000004790$
Id. 65	$\tau = 0{,}000004348$

4.º El anteojo de pasos estaba provisto del nivel núm. 115.624, siendo 1″,9 el valor de una división del mismo.

5.º El termómetro empleado fué el señalado con el núm. 19.640, cuyas correcciones son:

+ 0°	− 0°,06
+ 10	− 0 ,04
+ 20	− 0 ,10
+ 30	− 0 ,04
+ 40	− 0 ,06

6.º La corrección que debe aplicarse a las observaciones hechas con el barómetro Tonnelot, núm. 964, deducidas por comparación con el normal del Observatorio de Madrid, es + 0^{m},40.

7.º Finalmente, los valores de **g**, correspondientes a cada estación, se han calculado partiendo del valor de la gravedad adoptado para Madrid, **g = 979,981**. El fundamento de esta adopción se explica en el capítulo VII de la Memoria escrita por D. Manuel Barandica: *Determinación relativa de la intensidad de la fuerza de gravedad en Roldán, Cartagena y Torrejón,* inserta en el tomo XIV de las Memorias de nuestro Instituto.

Durante el período de campo, así como en el ulterior de gabinete correspondiente a estas tres campañas, actuó como auxiliar de la brigada el culto Topógrafo y doctor en Ciencias físicas Sr. D. Félix Creus, dando pruebas de su laboriosidad e inteligencia.

CAPÍTULO PRIMERO

RESULTADOS DE LAS OBSERVACIONES EN LA CAMPANA DE 1921

ESTACIÓN DE MADRID (salida)

Local de observación.

El local donde se efectuaron las observaciones fué, como de costumbre, una habitación del Observatorio Astronómico, situada en el cuerpo central del edificio y orientada al Norte.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud respecto al meridiano de Greenwich	3° 41',3 W.
Latitud N.....	40° 24',5
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante.....	656m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados del Strasser por comparaciones cronográficas con el reloj magistral del Observatorio. Después se calcularon los movimientos y los errores correspondientes, llegándose a los resultados cuyo resumen figura en el siguiente cuadro:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
12 de Abril de 1921	1 41	+ 5,73 ± 0,04	+ 0,71 ± 0,05
13 id. id.	8 28	+ 6,64 ± 0,03	+ 0,73 ± 0,05
14 id. id.	8 38	+ 7,37 ± 0,04	+ 0,72 ± 0,06
15 id. id.	8 33	+ 8,09 ± 0,04	+ 0,60 ± 0,05
16 id. id.	8 30	+ 8,69 ± 0,03	

Los errores de la marcha diaria del reloj se calcularon por la fórmula

$$\varepsilon_m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

en la que m_1 y m_2 son los errores correspondientes a dos estados consecutivos del reloj, resultando para error medio el promedio de estos errores diarios, que en este caso es

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}05$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra A pueden verse los datos de observación junto con los cálculos y correcciones que se han hecho para obtener los valores de las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en la normal a la anterior.

Los valores obtenidos para la corrección por balance del sostén, según el método de Borrass, fueron los siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
$36 \times 10-7$	$44 \times 10-7$
$34 \times 10-7$	$44 \times 10-7$
$32 \times 10-7$	$44 \times 10-7$
$39 \times 10-7$	$44 \times 10-7$
$35 \times 10-7$	$44 \times 10-7$

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes, son los que siguen:

Péndulo 104	**Péndulo 105**	**Péndulo 106**	**Péndulo 107**
0,5014873	0,5015622	0,5015046	0,5015721
79	626	19	41
76	603	39	42
64	620	49	27
82	630	06	16
64	596	24	33
0,5014873	0,5015616	0,5015031	0,5015730

Estado A. ESTACIÓN DE MADRID (salida)

FECHAS — 1921	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sosten.	
		h m	mm	mm	°	.	s	s	s						s
13 Abril.....	104	22 44	710,50	7,8	13,39	11,6	+ 0,71	155,645	0,5016114	— 4	— 599	— 644	+ 41	— 35	0,5014873
13 íd.	105	0 04	710,45	7,9	13,49	11,9	+ 0,71	148,690	6870	— 4	— 602	— 639	+ 41	— 44	5622
13 íd.	106	1 19	710,20	7,8	13,54	11,6	+ 0,71	154,035	6283	— 4	— 590	— 649	+ 41	— 35	5046
13 íd.	107	4 35	709,45	7,9	13,79	11,9	+ 0,71	147,810	6971	— 4	— 591	— 652	+ 41	— 44	5721
13 íd.	104	5 52	709,40	8,3	13,94	11,7	+ 0,71	155,345	6145	— 4	— 597	— 671	+ 41	— 35	4879
13 íd.	105	7 12	709,40	8,1	14,14	11,9	+ 0,71	148,400	6903	— 4	— 600	— 670	+ 41	— 44	5626
14 íd.	106	22 51	708,55	8,2	13,94	11,5	+ 0,73	154,150	6271	— 4	— 587	— 668	+ 42	— 35	5019
14 íd.	107	0 09	708,05	8,4	13,99	11,9	+ 0,73	147,580	6998	— 4	— 589	— 662	+ 42	— 44	5741
14 íd.	104	1 24	707,30	8,7	14,09	11,7	+ 0,73	155,335	6146	— 4	— 595	— 678	+ 42	— 35	4876
14 íd.	105	4 47	705,35	8,4	14,39	11,7	+ 0,73	148,545	6887	— 4	— 596	— 682	+ 42	— 44	5603
14 íd.	106	6 05	705,10	8,7	14,48	11,6	+ 0,73	153,755	6313	— 4	— 583	— 694	+ 42	— 35	5039
14 íd.	107	7 22	705,05	8,7	14,63	11,9	+ 0,73	147,345	7025	— 4	— 585	— 692	+ 42	— 44	5742
15 íd.	104	22 52	702,00	8,6	14,29	11,6	+ 0,72	155,410	6138	— 4	— 590	— 687	+ 42	— 35	4864
15 íd.	105	0 12	701,55	8,4	14,39	11,9	+ 0,72	148,420	6901	— 4	— 593	— 682	+ 42	— 44	5620
15 íd.	106	1 28	701,00	8,4	14,48	11,6	+ 0,72	153,690	6320	— 4	— 580	— 694	+ 42	— 35	5049
15 íd.	107	4 39	699,45	8,3	14,78	11,9	+ 0,72	147,445	7013	— 4	— 581	— 699	+ 42	— 44	5727
15 íd.	104	5 56	699,25	8,5	14,88	11,4	+ 0,72	155,000	6181	— 4	— 586	— 716	+ 42	— 35	4882
15 íd.	105	7 16	699,25	8,8	15,03	11,9	+ 0,72	148,105	6937	— 4	— 589	— 712	+ 42	— 44	5630
16 íd.	106	22 56	704,05	7,1	14,19	11,6	+ 0,60	154,125	6273	— 4	— 583	— 680	+ 35	— 35	5006
16 íd.	107	0 15	704,45	6,9	14,14	11,7	+ 0,60	147,685	6985	— 4	— 587	— 669	+ 35	— 44	5716
16 íd.	104	1 30	704,75	6,9	14,19	11,8	+ 0,60	155,365	6144	— 4	— 593	— 683	+ 35	— 35	4864
16 íd.	105	4 39	705,10	7,1	14,29	11,9	+ 0,60	148,585	6882	— 4	— 596	— 677	+ 35	— 44	5596
16 íd.	106	5 57	705,65	7,4	14,43	11,5	+ 0,60	153,845	6303	— 4	— 584	— 691	+ 35	— 35	5024
16 íd.	107	7 15	706,15	7,5	14,63	11,9	+ 0,60	147,345	7025	— 4	— 587	— 692	+ 35	— 44	5733

ESTACIÓN DE TÁNGER

Local de observación.

Se instalaron los aparatos en una clase del Colegio del Sagrado Corazón, de los PP. Franciscanos, y la barraca en un patio de recreo contiguo (véase plano y fotografía.)

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	5° 49' W
Latitud N	35° 47'
Altitud de las lentejas de los péndulos con relación al nivel medio del Atlántico	41m

Determinación de la hora.

La determinación de los estados diarios del reloj Strasser y, por consecuencia, la de los movimientos, se hizo aplicando el método de Borrass a la observación de pasos meridianos de estrellas con el anteojo Repsold.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s')	Estado del reloj	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
29 de Mayo de 1921	11 59	— 2,69 ± 0,07	— 2,06 ± 0,09
30 id. id.	12 12	— 4,77 ± 0,05	— 2,19 ± 0,05
31 id. id.	12 12	— 6,96 ± 0,01	— 2,22 ± 0,01
1 de Junio id.	12 12	— 9,18 ± 0,01	— 2,20 ± 0,06
2 id. id.	12 12	— 11,38 ± 0,06	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}05.$$

Duraciones de oscilación.

Los cálculos y correcciones hechos para obtener los valores de las duraciones de oscilación reducidas, se resumen en el estado señalado con la letra B.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en la normal a la anterior.

El estudio del balance del sostén dió los siguientes resultados:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
37×10^{-7}	35×10^{-7}
36×10^{-7}	43×10^{-7}
35×10^{-7}	49×10^{-7}
34×10^{-7}	45×10^{-7}
36×10^{-7}	43×10^{-7}

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación y sus promedios figura en el siguiente cuadro:

Péndulo 104	**Péndulo 105**	**Péndulo 106**	**Péndulo 107**
0,5015485	0,5016233	0,5015670	0,5016352
493	34	45	70
490	28	67	73
486	35	60	57
495	36	69	76
508	34	82	93
0,5015493	0,5016233	0,5015666	0,5016370

FECHAS — 1921	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
30 Mayo.....	104	1 27	765,65	13,1	18,26	11,6	— 2,06	146,225	0,5017156	— 4	— 633	— 878	— 120	— 36	0,5015485
30 íd.	105	2 13	765,80	13,5	18,41	11,7	— 2,06	140,095	7909	— 4	— 637	— 872	— 120	— 43	6233
30 íd.	106	3 56	765,70	13,5	18,56	11,5	— 2,06	144,660	7342	— 4	— 623	— 889	— 120	— 36	5670
30 íd.	107	6 33	765,45	13,1	18,61	11,7	— 2,06	139,195	8025	— 4	— 626	— 880	— 120	— 43	6552
30 íd.	104	7 46	765,30	13,1	18,66	11,7	— 2,06	145,990	7183	— 4	— 632	— 898	— 120	— 36	5493
30 íd.	105	9 00	765,20	13,5	18,71	11,9	— 2,06	139,985	7923	— 4	— 636	— 886	— 120	— 43	6234
31 íd.	106	1 34	763,90	13,2	18,51	11,9	— 2,19	144,835	7321	— 4	— 622	— 887	— 127	— 36	5645
31 íd.	107	2 49	763,85	13,6	18,66	11,6	— 2,19	138,995	8051	— 4	— 624	— 883	— 127	— 43	6370
31 íd.	104	4 01	763,70	14,0	18,81	11,7	— 2,19	145,915	7192	— 4	— 630	— 905	— 127	— 36	5490
31 íd.	105	6 45	763,10	14,0	18,96	11,8	— 2,19	139,905	7933	— 4	— 633	— 898	— 127	— 43	6228
31 íd.	106	8 00	762,85	14,0	19,01	11,6	— 2,19	144,465	7365	— 4	— 620	— 911	— 127	— 36	5667
31 íd.	107	9 16	762,60	13,6	19,06	11,9	— 2,19	138,845	8071	— 4	— 622	— 902	— 127	— 43	6373
1 Junio.....	104	1 44	761,80	13,6	18,76	11,6	— 2,22	145,955	7187	— 4	— 629	— 903	— 129	— 36	5486
1 íd.	105	2 58	761,80	14,0	18,86	11,9	— 2,22	139,880	7937	— 4	— 632	— 894	— 129	— 43	6235
1 íd.	106	4 09	761,45	14,0	19,01	11,7	— 2,22	144,515	7359	— 4	— 619	— 911	— 129	— 36	5660
1 íd.	107	6 38	761,05	13,8	19,11	11,7	— 2,22	138,945	8058	— 4	— 621	— 904	— 129	— 43	6357
1 íd.	104	7 50	760,20	13,7	19,16	11,9	— 2,22	145,750	7212	— 4	— 626	— 922	— 129	— 36	5495
1 íd.	105	9 04	759,80	13,8	19,26	11,9	— 2,22	139,740	7955	— 4	— 630	— 913	— 129	— 43	6236
2 íd.	106	2 02	762,25	14,0	18,96	11,7	— 2,20	144,475	7364	— 4	— 619	— 908	— 128	— 36	5669
2 íd.	107	3 14	762,50	14,0	19,06	11,9	— 2,20	138,815	8075	— 4	— 622	— 902	— 128	— 43	6376
2 íd.	104	4 25	762,55	13,6	19,11	11,8	— 2,20	145,645	7224	— 4	— 629	— 919	— 128	— 36	5508
2 íd.	105	7 02	762,45	13,2	19,21	11,9	— 2,20	139,765	7951	— 4	— 632	— 910	— 128	— 43	6234
2 íd.	106	8 14	762,40	13,2	19,21	11,5	— 2,20	144,270	7389	— 4	— 619	— 920	— 128	— 36	5682
2 íd.	107	9 27	762,45	12,8	19,21	11,9	— 2,20	138,630	8099	— 4	— 622	— 909	— 128	— 43	6393

ESTACIÓN DE TETUAN

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en el gabinete de Rayos X del Dispensario municipal y la barraca en un jardín contiguo al mismo (véase plano y fotografía.)

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	5° 20' 45'' W.
Latitud N.....	35° 34'
Altitud de las lentejas de los péndulos con relación al nivel medio del Mediterráneo en Río Martín.....	85m

Determinación de la hora.

Se siguió el mismo método de observación y de cálculo que en Tánger, y en el cuadro siguiente figuran los estados y movimientos del reloj para los diferentes días de observación.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
18 de Junio de 1921.....	14 13	— 11,77 ± 0,05	— 0,48 ± 0,05
19 id. id.	14 24	— 12,25 ± 0,02	— 0,16 ± 0,04
20 id. id.	14 13	— 12,41 ± 0,03	— 0,75 ± 0,05
22 id. id.	18 00	— 14,03 ± 0,04	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}05.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra C se muestran los cálculos y correcciones hechos para obtener los valores de las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección SW.-NE. y los 105 y 107 en la normal a la anterior.

Las determinaciones del balance del sostén dieron los siguientes valores:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
35×10^{-7}	45×10^{-7}
34×10^{-7}	46×10^{-7}
33×10^{-7}	45×10^{-7}
33×10^{-7}	43×10^{-7}
34×10^{-7}	45×10^{-7}

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación y sus promedios figura en el siguiente cuadro:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5015544	0,5016294	0,5015724	0,5016425
73	307	36	42
72	315	53	68
44	282	27	18
67	303	26	37
68	302	44	48
0,5015561	0,5016301	0,5015735	0,5016440

FECHAS — 1921	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s'	s	s						s
19 Junio	104	2 38	760,30	17,3	21,96	11,9	— 0,48	145,130	0,5017285	— 4	— 619	— 1056	— 28	— 34	0,5015544
19 íd.	105	3 53	760,25	17,6	22,06	12,0	— 0,48	139,085	8039	— 4	— 623	— 1045	— 28	— 45	6294
19 íd.	106	5 3	760,15	17,4	22,21	11,9	— 0,48	143,655	7464	— 4	— 610	— 1064	— 28	— 34	5724
19 íd.	107	7 13	759,60	16,1	22,47	11,7	— 0,48	138,035	8177	— 4	— 612	— 1063	— 28	— 45	6425
19 íd.	104	8 23	759,35	17,1	22,57	11,8	— 0,48	144,650	7343	— 4	— 618	— 1086	— 28	— 34	5573
19 íd.	105	9 39	759,10	17,0	22,72	11,9	— 0,48	138,770	8081	— 4	— 621	— 1076	— 28	— 45	6307
20 íd.	106	3 25	759,60	16,3	22,21	11,7	— 0,16	143.710	7457	— 4	— 610	— 1064	— 9	— 34	5736
20 íd.	107	4 38	759,65	16,2	22,42	11,9	— 0,16	138,075	8172	— 4	— 612	— 1060	— 9	— 45	6442
20 íd.	104	5 48	759,50	15,9	22,62	11,9	— 0,16	144,800	7325	— 4	— 618	— 1088	— 9	— 34	5572
20 íd.	105	8 14	759,00	15,8	23,02	11,9	— 0,16	138,745	8084	— 4	— 670	— 1091	— 9	— 45	6315
20 íd.	106	9 26	758,95	15,0	23,22	11,9	— 0,16	143,200	7519	— 4	— 607	— 1112	— 9	— 34	5753
20 íd.	107	10 39	759,00	14,6	23,42	11,6	— 0,16	137,535	8244	— 4	— 610	— 1108	— 9	— 45	6468
21 íd.	104	3 43	760,30	17,6	23,12	11,9	— 0,75	144,550	7355	— 4	— 617	— 1112	— 44	— 34	5544
21 íd.	105	4 58	760,40	17,4	23,17	11,9	— 0,75	138,670	8094	— 4	— 621	— 1098	— 44	— 45	6282
21 íd.	106	6 9	760,35	17,4	23,27	11,8	— 0,75	143,095	7532	— 4	— 608	— 1115	— 44	— 34	5727
21 íd.	107	8 29	760,10	17,8	23,47	11,9	— 0,75	137,630	8231	— 4	— 610	— 1110	— 44	— 45	6418
21 íd.	104	9 41	759,95	17,8	23,52	11,8	— 0,75	144,205	7397	— 4	— 616	— 1132	— 44	— 34	5567
21 íd.	105	10 57	759,90	17,8	23,52	11,9	— 0,75	138,395	8130	— 4	— 620	— 1114	— 44	— 45	6303
22 íd.	106	3 49	760,30	17,6	22,97	11,9	— 0,75	143,225	7516	— 4	— 608	— 1100	— 44	— 34	5726
22 íd.	107	5 3	760,20	17,8	23,07	11,7	— 0,75	137,625	8232	— 4	— 611	— 1091	— 44	— 45	6437
22 íd.	104	6 12	760,00	17,8	23,17	11,9	— 0,75	144,330	7382	— 4	— 617	— 1115	— 44	— 34	5568
22 íd.	105	8 37	759,95	17,8	23,37	11,9	— 0,75	138,455	8122	— 4	— 620	— 1107	— 44	— 45	6302
22 íd.	106	9 48	759,90	17,7	23,47	11,6	— 0,75	142,895	7557	— 4	— 607	— 1124	— 44	— 34	5744
22 íd.	107	11 2	759,95	18,0	23,57	11,9	— 0,75	137,375	8265	— 4	— 609	— 1115	— 44	— 45	6448

ESTACIÓN DE CEUTA

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en el cuarto de oficiales subterráneo de la batería de costa San Nicolás y la barraca sobre la explanada de la misma (véase fotografía.)

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	5° 19' 15" W.
Latitud N.....	35° 54'
Altitud de las lentejas de los péndulos con relación al nivel medio del Mediterráneo....	64m

Determinación de la hora.

Se siguió el mismo procedimiento que en las dos estaciones enteriores.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
4 de Julio de 1921.....	17 21	+ 2,05 ± 0,02	+ 0,44 ± 0,08
6 íd. íd.	15 7	+ 2,89 ± 0,08	+ 0,38 ± 0,11
7 íd. íd.	15 3	+ 3,27 ± 0,07	+ 0,52 ± 0,11
8 íd. íd.	15 3	+ 3,79 ± 0,08	

El error medio para el conjunto de las observaciones es:

$$s_m = \pm 0{,}10.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra D se resumen los cálculos y correcciones hechos para obtener los valores de las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en la normal a la misma.

Los valores deducidos para la corrección por balance del sostén son los siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
32×10^{-7}	36×10^{-7}
31×10^{-7}	38×10^{-7}
35×10^{-7}	38×10^{-7}
32×10^{-7}	37×10^{-7}
33×10^{-7}	37×10^{-7}

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación y sus promedios respectivos figura en el siguiente cuadro:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5015396	0,5015989	0,5015576	0,5016067
99	80	60	69
88	61	59	74
78	73	64	57
82	67	55	63
88	58	70	72
0,5015389	0,5915972	0,5015564	0,5016067

Diferencias entre las duraciones de oscilación de los péndulos en las cuatro estaciones observadas.

ESTACIONES	**104-105**	**104-106**	**104-107**	**105-106**	**105-107**	**106-107**
Madrid (salida).	0,5014873	0,5014873	0,5014873	0,5015616	0,5015616	0,5015031
	5616	5031	5730	5031	5730	5730
	— 743	— 158	— 857	+ 585	— 114	— 699
Tánger.....	0,5015493	0,5015493	0,5015493	0,5016233	0,5016233	0,5015666
	6233	5666	6370	5666	6370	6370
	— 740	— 173	— 877	+ 567	— 137	— 704
Tetuán.....	0,5015561	0,5015561	0,5015561	0,5016301	0,5016301	0,5015735
	6301	5735	6440	5735	6440	6440
	— 740	— 174	— 879	+ 566	— 139	— 705
Ceuta.....	0,5015389	0,5015389	0,5015389	0,5015972	0,5015972	0,5015564
	5972	5564	6067	5564	6067	6067
	— 583	— 175	— 678	+ 408	— 95	— 503

El examen del cuadro anterior pone de manifiesto que en esta estación de Ceuta, simultáneamente, dejaron de ser invariables los péndulos 105 y 107.

Prescindiremos, por lo tanto, de las observaciones con dichos péndulos, 105 y 107, para el cálculo del valor de la gravedad en Ceuta.

FECHAS — 1921	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°		s	s	s						s
5 Julio.....	104	4 12	760,70	16,8	20,51	11,8	+ 0,44	147,415	0,5017017	— 4	— 623	— 987	+ 26	— 33	0,5015396
5 íd.	105	5 28	760,65	17,1	20,56	11,9	+ 0,44	142,510	604	— 4	— 626	— 974	+ 26	— 37	5989
5 íd.	106	6 40	760,50	16,9	20,66	11,9	+ 0,44	145,935	190	— 4	— 613	— 990	+ 26	— 33	5576
5 íd.	107	9 20	760,20	17,4	20,86	11,8	+ 0,44	141,870	684	— 4	— 615	— 987	+ 26	— 37	6067
5 íd.	104	10 35	760,05	17,6	20,96	11,8	+ 0,44	147,225	039	— 4	— 621	— 1008	+ 26	— 33	5399
5 íd.	105	11 47	760,05	17,5	21,06	11,9	+ 0,44	142,400	618	— 4	— 625	— 998	+ 26	— 37	5980
6 íd.	106	4 00	762,50	17,4	20,66	11,6	+ 0,44	146,055	176	— 4	— 615	— 990	+ 26	— 33	5568
6 íd.	107	5 15	762,60	17,6	20,76	11,9	+ 0,44	141,880	683	— 4	— 617	— 982	+ 26	— 37	6069
6 íd.	104	6 29	762,55	17,9	20,91	11,5	+ 0,44	147,320	028	— 4	— 623	— 1006	+ 26	— 33	5388
6 íd.	105	9 57	762,00	17,9	21,16	11,9	+ 0,44	142,540	601	— 4	— 626	— 1003	+ 26	— 37	5961
6 íd.	106	11 11	761,90	18,2	21,26	11,5	+ 0,44	145,835	202	— 4	— 613	— 1019	+ 26	— 33	5559
6 íd.	107	12 26	761,90	18,2	21,36	11,8	+ 0,44	141,630	714	— 4	— 615	— 1010	+ 26	— 37	6074
7 íd.	104	4 28	762,15	17,9	20,96	11,6	+ 0,38	147,355	024	— 4	— 623	— 1008	+ 22	— 33	5378
7 íd.	105	5 45	762,05	18,2	21,06	11,8	+ 0,38	142,415	616	— 4	— 626	— 998	+ 22	— 37	5973
7 íd.	106	6 59	761,90	18,2	21,21	11,6	+ 0,38	145,785	208	— 4	— 613	— 1016	+ 22	— 33	5564
7 íd.	107	10 7	761,05	17,9	21,41	11,7	+ 0,38	141,735	701	— 4	— 615	— 1013	+ 22	— 37	6057
7 íd.	104	11 20	760,70	18,2	21,46	11,9	+ 0,38	147,130	050	— 4	— 621	— 1032	+ 22	— 33	5382
7 íd.	105	12 36	760,55	18,2	21,56	11,9	+ 0,38	142,285	632	— 4	— 624	— 1022	+ 22	— 37	5967
8 íd.	106	4 28	759,10	17,9	21,16	11,6	+ 0,52	145,960	187	— 4	— 611	— 1014	+ 30	— 33	5555
8 íd.	107	5 43	759,10	18,2	21,26	11,8	+ 0,52	141,795	693	— 4	— 613	— 1006	+ 30	— 37	6063
8 íd.	104	6 59	758,90	18,2	21,36	11,9	+ 0,52	147,195	042	— 4	— 619	— 1028	+ 30	— 33	5388
8 íd.	105	10 13	758,45	17,9	21,51	11,8	+ 0,52	142,460	611	— 4	— 623	— 1019	+ 30	— 37	5958
8 íd.	106	11 26	758,15	18,5	21,56	11,7	+ 0,52	145,690	219	— 4	— 609	— 1033	+ 30	— 33	5570
8 íd.	107	12 40	758,00	18,8	21,66	11,8	+ 0,52	141,595	719	— 4	— 611	— 1025	+ 30	— 37	6072

ESTACIÓN DE MELILLA

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en una habitación del hermoso edificio conocido con el nombre de Grupo escolar, situado en la calle de Villafaña, y la barraca astronómica en un patio del mismo (véase plano y fotografía.)

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	2° 57' W.
Latitud N.	35° 18'
Altitud de las lentejas de los péndulos con relación al nivel medio del Mediterráneo	6m

Determinación de la hora.

Por observación de pasos de estrellas en el meridiano con el anteojo Repsold, como en las estaciones anteriores.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
28 de Julio de 1921	16 23	+ 0,92 ± 0,09	— 0,30 ± 0,10
30 íd.ª íd.	19 36	+ 0,29 ± 0,04	— 1,12 ± 0,04
31 íd. íd.	16 11	— 0,67 ± 0,02	— 1,38 ± 0,04
1 de Agosto de íd.	17 00	— 2,10 ± 0,03	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}06$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra E pueden verse los cálculos y correcciones hechos para obtener los valores de las duraciones de oscilación reducidas.

El balance del sostén dió los siguientes valores:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
$46 \times 10-7$	$49 \times 10-7$
$38 \times 10-7$	$45 \times 10-7$
$39 \times 10-7$	$40 \times 10-7$
$38 \times 10-7$	$45 \times 10-7$
$40 \times 10-7$	$45 \times 10-7$

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección SW.-NE. y los 105 y 107 en la normal a la misma.

Prevenidos en esta estación con el cambio de longitud experimentado en Ceuta por los péndulos 105 y 107, sólo se observaron dos valores de éstos para cerciorarnos de la subsistencia o desaparición de dicha variabilidad. Ésta continúa en esta estación, como lo manifiesta el cuadro de las diferencias entre los péndulos que se inserta más adelante y, en vista de ello, se multiplicaron la serie de observaciones con los péndulos 104 y 106, únicos que quedan útiles para el cálculo posterior del valor de la gravedad.

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación y sus promedios correspondientes, es el siguiente:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5015273	0,5015872	0,5015473	0,5015941
290	83	478	64
300		479	
(335)		(512)	
277		453	
298		449	
307		472	
289		459	
292		462	
295		476	
0,5015291	0,5015878	0,5015467	0,5015953

Por discrepar bastante de los valores medios correspondientes, se han suprimido los valores de los péndulos 104 y 106 encerrados entre paréntesis, sobreentendiéndose que para el cálculo de las medias respectivas que figuran en el anterior cuadro se han tenido en cuenta dichas supresiones.

Diferencias entre las duraciones de oscilación de los péndulos en las cinco estaciones observadas.

ESTACIONES	104-105	104-106	104-107	105-106	105-107	106-107
Madrid (salida)..	— 743	— 158	— 857	+ 585	— 114	— 699
Tánger.....	— 740	— 173	— 877	+ 567	— 137	— 704
Tetuán.....	— 740	— 174	— 879	+ 566	— 139	— 705
Ceuta.....	— 583	— 175	— 678	+ 408	— 95	— 503
Melilla.....	— 587	— 176	— 662	+ 411	— 75	— 486

Estado E. ESTACIÓN DE MELILLA

FECHAS — 1921	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sosten.	
		h m	mm	mm	°		s	s	s						s
29 Julio.....	104	5 45	762,55	19,8	25,99	11,7	— 0,30	145,880	0,5017196	— 4	— 612	— 1250	— 17	— 40	0,5015273
29 íd.	105	7 1	762,60	19,5	26,14	11,9	— 0,30	141,005	793	— 4	— 616	— 1239	— 17	— 45	872
29 íd.	106	8 13	762,45	19,8	26,29	11,6	— 0,30	144,210	396	— 4	— 602	— 1260	— 17	— 40	473
29 íd.	107	11 6	762,10	20,5	26,54	11,9	— 0,30	140,430	866	— 4	— 604	— 1255	— 17	— 45	941
29 íd.	104	12 20	762,00	20,8	26,59	11,6	— 0,30	145,510	240	— 4	— 610	— 1279	— 17	— 40	290
29 íd.	105	13 34	761,95	21,3	26,69	11,9	— 0,30	140,735	827	— 4	— 613	— 1265	— 17	— 45	883
30 íd.	106	6 51	765,25	20,6	26,29	11,6	— 0,30	144,155	403	— 4	— 604	— 1260	— 17	— 40	478
30 íd.	107	7 6	765,35	21,8	26,39	11,7	— 0,30	140,285	885	— 4	— 607	— 1248	— 17	— 45	964
30 íd.	104	8 19	765,20	22,3	26,54	11,8	— 0,30	145,415	251	— 4	— 613	— 1277	— 17	— 40	300
30 íd.	106	11 24	764,90	22,7	26,79	11,7	— 0,30	143,955	427	— 4	— 603	— 1284	— 17	— 40	479
30 íd.	104	12 19	764,90	23,2	26,89	11,9	— 0,30	145,000	301	— 4	— 611	— 1294	— 17	— 40	335
30 íd.	106	13 53	764,90	23,1	26,99	11,7	— 0,30	143,620	468	— 4	— 602	— 1293	— 17	— 40	512
31 íd.	104	5 48	766,60	24,2	26,79	11,6	— 1,12	145,110	288	— 4	— 613	— 1289	— 65	— 40	277
31 íd.	106	7 4	766,60	23,7	26,89	11,8	— 1,12	143,740	453	— 4	— 603	— 1288	— 65	— 40	453
31 íd.	104	8 20	766,50	23,1	27,04	11,6	— 1,12	144,840	320	— 4	— 612	— 1301	— 65	— 40	298
31 íd.	106	11 33	766,00	23,6	27,14	11,9	— 1,12	143,675	461	— 4	— 603	— 1300	— 65	— 40	449
31 íd.	104	12 49	765,90	23,9	27,19	11,9	— 1,12	144,720	335	— 4	— 611	— 1308	— 65	— 40	307
31 íd.	106	14 2	765,90	23,6	27,24	12,0	— 1,12	143,455	488	— 4	— 602	— 1305	— 65	— 40	472
1 Agosto.....	104	5 56	766,40	23,2	26,94	11,9	— 1,38	144,835	321	— 4	— 612	— 1296	— 80	— 40	289
1 íd.	106	7 11	766,35	23,2	26,94	11,8	— 1,38	143,545	477	— 4	— 603	— 1291	— 80	— 40	459
1 íd.	104	8 23	766,35	23,1	27,09	11,9	— 1,38	144,750	331	— 4	— 612	— 1303	— 80	— 40	292
1 íd.	106	11 14	765,95	23,1	27,24	11,9	— 1,38	143,410	494	— 4	— 603	— 1305	— 80	— 40	462
1 íd.	104	12 29	766,05	22,9	27,29	11,9	— 1,38	144,650	343	— 4	— 611	— 1313	— 80	— 40	295
1 íd.	106	13 44	765,95	22,9	27,34	11,7	— 1,38	143,260	512	— 4	— 602	— 1310	— 80	— 40	476

ESTACIÓN DE MÁLAGA

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en la sala de aparatos de la Estación Sismológica dependiente de nuestro Instituto Geográfico, situada en el cerro de Santa Catalina, próximo al valle del Limonar, y la barraca astronómica, contigua al edificio (véase plano y fotografía.)

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	4° 25' 15" W.
Latitud N.	36° 43'
Altitud de las lentejas de los péndulos con relación al nivel medio del Mediterráneo en Alicante	61m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados y movimientos del reloj por el método ya conocido, y en el cuadro siguiente figura el resultado de las observaciones.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
24 de Agosto de 1921	18 13	+ 2,24 ± 0,04	+ 1,41 ± 0,05
25 id. id.	18 00	+ 3,64 ± 0,03	+ 0,67 ± 0,04
26 id. id.	17 40	+ 4,30 ± 0,02	+ 0,62 ± 0,10
27 id. id.	21 6	+ 5,01 ± 0,10	+ 0,80 ± 0,12
28 id. id.	18 13	+ 5,71 ± 0,06	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}08.$$

Duración de oscilación.

En el estado señalado con la letra F se resumen los cálculos y correcciones hechos para obtener los valores de las duraciones de oscilación reducidas.

El estudio del balance dió los siguientes valores:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
$49 \times 10-7$	$51 \times 10-7$
$52 \times 10-7$	$53 \times 10-7$
$49 \times 10-7$	$50 \times 10-7$
$48 \times 10-7$	$55 \times 10-7$
$50 \times 10-7$	$52 \times 10-7$

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NW.-SE. y los 105 y 107 en la normal a la anterior.

Halladas las diferencias entre las duraciones de oscilación de los péndulos entre sí en esta estación, se observa, como en Ceuta y Melilla, que continúa la variación de los péndulos 105 y 107 con respecto a la estación base de salida, en Madrid, no pudiendo utilizarlos, en consecuencia, para el cálculo de la gravedad, por lo que se han multiplicado las observaciones con la otra pareja de péndulos, 104 y 106.

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación y sus promedios correspondientes figura en el cuadro siguiente:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5015037	0,5015603	0,5015213	0,5015690
5046	09	186	84
5022		178	
5012		178	
(4981)		198	
5023		191	
5030		203	
5048		(227)	
5055		210	
5046		210	
0,5015036	0,5015606	0,5015196	0,5015687

Por diferir bastante de los valores medios correspondientes, se han desechado los valores de los péndulos 104 y 106, encerrados entre paréntesis, habiéndose tenido en cuenta dicha supresión en el cálculo de las medias respectivas que figuran en el anterior cuadro.

FECHAS — 1921	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosfé-rica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Tem-peratura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Mo-vimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación. reducida.
										Por la ampli-tud.	Al vacío.	A la tempera-tura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
25 Agosto.....	104	7 40	762,50	18,2	24,93	11,8	+ 1,41	149,110	0,5016823	— 4	— 615	— 1199	+ 82	— 50	0,5015037
25 íd.	105	9 00	762,35	18,4	24,98	11,6	+ 1,41	144,355	7379	— 4	— 618	— 1184	+ 82	— 52	5603
25 íd.	106	10 16	762,20	18,1	25,03	11,6	+ 1,41	147,650	6989	— 4	— 605	— 1199	+ 82	— 50	5213
25 íd.	107	13 25	761,30	18,4	25,18	11,5	+ 1,41	143,670	7462	— 4	— 607	— 1191	+ 82	— 52	5690
25 íd.	104	14 40	761,15	18,4	25,23	11,8	+ 1,41	148,915	6845	— 4	— 613	— 1214	+ 82	— 50	5046
25 íd.	105	15 58	761,20	18,4	25,28	11,6	+ 1,41	144,200	7398	— 4	— 617	— 1198	+ 82	— 52	5609
26 íd.	106	7 30	762,60	17,8	24,93	11,9	+ 0,67	147,550	7001	— 4	— 606	— 1194	+ 39	— 50	5186
26 íd.	107	8 51	762,35	17,6	24,98	11,7	+ 0,67	143,430	7491	— 4	— 608	— 1182	+ 39	— 52	5684
26 íd.	104	10 7	762,05	17,5	25,08	11,8	+ 0,67	148,800	6858	— 4	— 614	— 1207	+ 39	— 50	5022
26 íd.	106	13 6	761,20	17,5	25,13	11,6	+ 0,67	147,545	7002	— 4	— 605	— 1204	+ 39	— 50	5178
26 íd.	104	14 23	760,95	17,9	25,18	11,7	+ 0,67	148,860	6851	— 4	— 613	— 1211	+ 39	— 50	5012
26 íd.	106	15 40	760,90	18,4	25,23	11,6	+ 0,67	147,510	7006	— 4	— 604	— 1209	+ 39	— 50	5178
27 íd.	104	7 33	759,85	15,2	24,73	11,6	+ 0,62	149,285	6803	— 4	— 614	— 1190	+ 36	— 50	4981
27 íd.	106	8 51	759,80	15,2	24,73	11,8	+ 0,62	147,510	7006	— 4	— 605	— 1185	+ 36	— 50	5198
27 íd.	104	10 7	759,65	15,2	24,73	11,9	+ 0,62	148,920	6845	— 4	— 614	— 1190	+ 36	— 50	5023
27 íd.	106	13 6	758,55	15,2	24,83	11,6	+ 0,62	147,530	7003	— 4	— 604	— 1190	+ 36	— 50	5191
27 íd.	104	14 22	758,35	15,6	24,88	11,8	+ 0,62	148,805	6857	— 4	— 612	— 1197	+ 36	— 50	5030
27 íd.	106	15 40	757,70	16,0	24,93	11,6	+ 0,62	147,405	7018	— 4	— 603	— 1194	+ 36	— 50	5203
28 íd.	104	7 39	759,40	16,9	24,73	11,8	+ 0,80	148,790	6859	— 4	— 613	— 1190	+ 46	— 50	5048
28 íd.	106	8 55	759,35	16,9	24,73	11,7	+ 0,80	147,350	7024	— 4	— 604	— 1185	+ 46	— 50	5227
28 íd.	104	10 12	759,25	16,9	24,73	11,7	+ 0,80	148,730	6806	— 4	— 613	— 1190	+ 46	— 50	5055
28 íd.	106	13 42	758,50	17,6	24,88	11,8	+ 0,80	147,445	7013	— 4	— 603	— 1192	+ 46	— 50	5210
28 íd.	104	15 00	758,60	17,5	24,93	11,9	+ 0,80	148,735	6865	— 4	— 612	— 1199	+ 46	— 50	5046
28 íd.	106	16 15	758,85	17,6	24,98	11,8	+ 0,80	147,400	7018	— 4	— 603	— 1197	+ 46	— 50	5210

ESTACIÓN DE MOTRIL

Local de observación.

Se hicieron las observaciones en el laboratorio de la antigua fundición de mineral de plomo San Caralampio, propiedad que fué de D. Luis Huelin, instalándose la barraca en el patio de la misma (véase plano y fotografía.)

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	3° 30' 15'' W.
Latitud N.....	36° 45'
Altitud de las lentejas de los péndulos con relación al nivel medio del Mediterráneo,...	53 m

Determinación de la hora.

Se empleó el mismo método de observación y cálculo de las estaciones anteriores, y en el cuadro siguiente se exponen los estados y movimientos del reloj en los diferentes días de observación.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
12 de Septiembre de 1921.....	18 20	− 8,69 ± 0,08	
13 id. id.	23 15	− 7,25 ± 0,09	+ 1,20 ± 0,12
14 id. id.	18 47	− 6,56 ± 0,03	+ 0,85 ± 0,09
15 id. id.	22 11	− 6,03 ± 0,07	+ 0,46 ± 0,08

El error medio para el conjunto de las observaciones es:

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}10.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra G pueden verse los cálculos y correcciones hechos para determinar las duraciones de oscilación reducidas.

El balance del sostén dió los siguientes valores:

Péndulos 104 y 106.

$$\begin{array}{r} 49 \times 10^{-7} \\ 45 \times 10^{-7} \\ 42 \times 10^{-7} \\ 42 \times 10^{-7} \\ \hline 45 \times 10^{-7} \end{array}$$

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección SW.-NE. y los 105 y 107 en la normal a la anterior.

Como subsiste en esta estación la variación de longitud de los péndulos 105 y 107, con respecto a la que tenian en las primeras estaciones, sólo se observaron con ellos dos series, suficientes para cerciorarnos de aquella variación, y tomando para la corrección por balance del sostén correspondiente el valor medio 45×10^{-7} deducido para los péndulos 104 y 106, ya que se trata de observaciones pendulares que se han de desechar para el cálculo de la gravedad.

Los valores de las duraciones de oscilación corregidas y sus promedios correspondientes figuran en el cuadro siguiente:

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5015075	0,5015665	0,5015257	0,5015769
71	44	31	78
73		39	
78		39	
(39)		65	
76			
68			
0,5015074	0,5015655	0,5015246	0,5015774

Se ha suprimido el valor del péndulo 104, encerrado entre paréntesis, por discrepar mucho de los demás valores, habiéndose tenido en cuenta dicha supresión en el cálculo del valor medio correspondiente.

A causa de un temporal persistente que impidió la observación de estrellas pasados los cinco primeros días, no pudieron obtenerse mayor número de series para los péndulos 104 y 106 que las que constan en el anterior cuadro.

Estado G. ESTACIÓN DE MOTRIL

FECHAS — 1921	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
13 Septiembre..	104	8 41	763,25	19,0	25,13	11,7	+ 1,20	148,625	0,5016878	— 4	— 615	— 1209	+ 70	— 45	0,5015075
13 id. ..	105	9 59	763,10	19,3	25,33	11,6	+ 1,20	143,670	7462	— 4	— 618	— 1200	+ 70	— 45	665
13 id. ..	106	11 15	762,80	19,5	25,59	11,6	+ 1,20	146,990	7066	— 4	— 604	— 1226	+ 70	— 45	257
13 id. ..	107	14 2	762,15	20,3	26,09	11,7	+ 1,20	142,650	7587	— 4	— 605	— 1234	+ 70	— 45	769
13 id. ..	104	15 17	762,05	20,3	26,34	11,8	+ 1,20	148,180	6928	— 4	— 611	— 1267	+ 70	— 45	071
13 id. .	105	16 32	762,05	20,5	26,49	11,9	+ 1,20	143,425	7492	— 4	— 614	— 1255	+ 70	— 45	644
14 id. ..	106	8 51	761,90	19,7	25,69	11,6	+ 0,85	147,000	7065	— 4	— 603	— 1231	+ 49	— 45	231
14 id. ..	107	10 7	761,80	19,8	25,79	11,6	+ 0,85	142,510	7604	— 4	— 606	— 1220	+ 49	— 45	778
14 id. ..	104	11 20	761,55	19,7	25,89	11,9	+ 0,85	148,155	6931	— 4	— 612	— 1246	+ 49	— 45	073
14 id. ..	106	13 41	760,90	19,8	26,24	11,7	+ 0,85	146,725	7097	— 4	— 601	— 1257	+ 49	— 45	239
14 id. ..	104	14 57	760,60	20,3	26,44	11,9	+ 0,85	147,905	6960	— 4	— 610	— 1272	+ 49	— 45	078
15 id. ..	104	8 47	760,65	19,7	25,38	11,6	+ 0,46	148,485	6894	— 4	— 612	— 1221	+ 27	— 45	039
15 id. ..	106	10 3	760,65	18,7	25,49	11,8	+ 0,46	146,825	7085	— 4	— 603	— 1221	+ 27	— 45	239
15 id. ..	104	11 17	760,50	19,5	25,64	11,8	+ 0,46	148,050	6943	— 4	— 611	— 1234	+ 27	— 45	076
15 id. ..	106	15 17	759,45	19,8	26,24	11,9	+ 0,46	146,320	7144	— 4	— 600	— 1257	+ 27	— 45	265
15 id. ..	104	16 31	759,55	19,8	26,39	11,8	+ 0,46	147,825	6969	— 4	— 609	— 1270	+ 27	— 45	068

ESTACIÓN DE ALMERÍA

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en la sala de aparatos de la Estación Sismológica dependiente de nuestro Instituto Geográfico y la barraca se montó en el jardín contiguo al edificio (véase plano y fotografía.)

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	2° 28' W.
Latitud N.	36° 51'
Altitud de las lentejas de los péndulos con relación al nivel medio del Mediterráneo	63m

Determinación de la hora.

El método seguido para determinar y calcular la hora fué el mismo de las estaciones anteriores.

En el cuadro siguiente figura el resumen de los estados y movimientos del Strasser.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
4 de Octubre de 1921	19 43	— 1,54 ± 0,04	— 1,25 ± 0,05
6 id. id.	0 2	— 4,27 ± 0,03	— 1,60 ± 0,06
8 id. id.	23 55	— 7,47 ± 0,05	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}06.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra H figuran los cálculos y correcciones hechos para determinar las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en la normal a la misma.

El balance del sostén dió los siguientes resultados:

Péndulos 104 y 106.

$$54 \times 10^{-7}$$
$$54 \times 10^{-7}$$
$$51 \times 10^{-7}$$
$$53 \times 10^{-7}$$

Por continuar la variación de los péndulos 105 y 107, con respecto a las estaciones primeras, sólo se han observado dos series de estos péndulos y, en cambio, se aumentaron las observaciones con los 104 y 106, tomándose por valor de la corrección del balance del sostén correspondiente a los 105 y 107, el valor medio 53×10^{-7} encontrado para los 104 y 106. Para el cálculo de la gravedad en esta estación sólo se tomarán en consideración las observaciones efectuadas con los péndulos 104 y 106.

En el cuadro siguiente pueden verse los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes.

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5015047	0,5015647	0,5015196	0,5015781
61	74	229	92
62		222	
65		238	
33		196	
36		204	
54		219	
46		218	
57		226	
68		232	
0,5015053	0,5015662	0,5015218	0,5015786

FECHAS — 1921	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s'	s	s						s
5 Octubre.....	104	10 24	757,30	18,3	23,27	11,8	— 1,25	148,330	0,5016911	— 4	— 614	— 1120	— 73	— 53	0,5015047
5 íd.	105	11 41	756,85	18,7	23,37	11,9	— 1,25	143,350	7501	— 4	— 617	— 1107	— 73	— 53	647
5 íd.	106	12 56	756,75	18,7	23,47	11,6	— 1,25	147,095	7054	— 4	— 604	— 1124	— 73	— 53	195
5 íd.	107	15 50	756,05	17,9	23,62	11,8	— 1,25	142,275	7634	— 4	— 606	— 1117	— 73	— 53	781
5 íd.	104	17 4	755,60	18,3	23,62	11,9	— 1,25	148,085	6939	— 4	— 612	— 1136	— 73	— 53	061
5 íd.	105	18 19	755,45	18,7	23,62	12,0	— 1,25	143,050	7538	— 4	— 615	— 1119	— 73	— 53	674
6 íd.	106	10 22	755,65	16,7	23,27	11,6	— 1,25	146,885	7078	— 4	— 604	— 1115	— 73	— 53	229
6 íd.	107	11 38	755,40	16,8	23,42	11,6	— 1,25	142,255	7636	— 4	— 606	— 1108	— 73	— 53	492
6 íd.	104	12 52	754,95	16,7	23,57	11,9	— 1,25	148,095	6938	— 4	— 612	— 1134	— 73	— 53	062
6 íd.	106	15 52	754,35	16,1	23,72	11,8	— 1,25	146,785	7090	— 4	— 602	— 1136	— 73	— 53	222
6 íd.	104	16 6	754,40	16,5	23,72	11,7	— 1,25	148,020	6947	— 4	— 611	— 1141	— 73	— 53	065
6 íd.	106	19 21	754,70	16,5	23,77	11,8	— 1,25	146,620	7109	— 4	— 602	— 1139	— 73	— 53	238
7 íd.	104	10 25	758,25	17,4	23,37	11,7	— 1,60	148,240	6922	— 4	— 615	— 1124	— 93	— 53	033
7 íd.	106	11 41	758,25	17,8	23,47	11,6	— 1,60	146,915	7075	— 4	— 605	— 1124	— 93	— 53	196
7 íd.	104	12 56	758,10	17,8	23,57	11,6	— 1,60	148,130	6934	— 4	— 614	— 1134	— 93	— 53	036
7 íd.	106	16 13	758,15	17,4	23,72	11,7	— 1,60	146,740	7095	— 4	— 605	— 1136	— 93	— 53	204
7 íd.	104	17 28	758,35	18,1	23,72	11,9	— 1,60	147,915	6959	— 4	— 614	— 1141	— 93	— 53	054
7 íd.	106	18 44	758,80	18,4	23,77	11,9	— 1,60	146,590	7113	— 4	— 605	— 1139	— 93	— 53	219
8 íd.	104	10 32	759,60	17,8	22,52	11,9	— 1,60	148,045	6944	— 4	— 616	— 1132	— 93	— 53	046
8 íd.	106	11 51	759,70	18,3	23,57	11,8	— 1,60	146,675	7103	— 4	— 606	— 1129	— 93	— 53	218
8 íd.	104	13 8	759,25	19,2	23,62	11,7	— 1,60	147,925	6958	— 4	— 615	— 1136	— 93	— 53	057
8 íd.	106	16 23	757,95	18,7	23,72	11,8	— 1,60	146,565	7116	— 4	— 604	— 1136	— 93	— 53	226
8 íd.	104	17 39	757,75	18,7	23,78	11,8	— 1,60	147,775	6975	— 4	— 613	— 1144	— 93	— 53	068
8 íd.	106	18 52	757,85	18,7	23,82	11,6	— 1,60	146,465	7127	— 4	— 604	— 1141	— 93	— 53	232

ESTACION DE MADRID (cierre)

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en la misma habitación del Observatorio Astronómico que se utilizó para la estación de salida.

Determinación de la hora.

Los estados y movimientos del Strasser se determinaron por comparaciones con el magistral del Observatorio, valiéndose del cronógrafo. En el siguiente cuadro figuran dichos estados y movimientos con sus errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
13 de Noviembre de 1921	15 19	+ 1,67 ± 0,04	+ 0,76 ± 0,05
14 íd. íd.	22 54	+ 2,67 ± 0,03	+ 0,70 ± 0,05
15 íd. íd.	22 40	+ 3,36 ± 0,04	+ 0,58 ± 0,04
16 íd. íd.	22 43	+ 3,94 ± 0,02	+ 0,61 ± 0,04
17 íd. íd.	23 1	+ 4,56 ± 0,04	

El error medio para el conjunto de las observaciones es:

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}05.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado señalado con la letra I se resumen los cálculos y correcciones hechos para determinar las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en la NW.-SE.

El estudio del balance del sostén proporcionó los siguientes valores:

Péndulos 104 y 106.

$58 \times 10-7$
$56 \times 10-7$
$54 \times 10-7$
$52 \times 10-7$
$55 \times 10-7$

Péndulos 105 y 107.

$58 \times 10-7$
$60 \times 10-7$
$56 \times 10-7$
$56 \times 10-7$
$58 \times 10-7$

El siguiente cuadro resumen pone de manifiesto los valores de las oscilaciones reducidas y sus promedios correspondientes.

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014874	0,5015519	(0,5015077)	0,5015609
84	510	33	612
79	488	48	601
68	504	52	596
77	493	31	605
69	479	37	600
0,5014875	0,5015459	0,5015040	0,5015604

Por discrepar bastante de los demás valores se ha suprimido el del 106 encerrado entre paréntesis, teniéndose en cuenta dicha supresión para calcular el valor medio correspondiente.

FECHAS — 1921	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
14 Noviembre ..	104	13 15	706,20	5,9	12,15	11,6	+ 0,76	156,050	0,5016072	— 4	— 598	— 585	+ 44	— 55	0,5014874
14 íd ..	105	14 35	705,59	5,8	12,20	11,6	+ 0,76	150,055	717	— 4	— 602	— 578	+ 44	— 58	5519
14 íd. ..	106	15 51	705,55	5,8	12,30	11,7	+ 0,76	154,345	250	— 4	— 589	— 589	+ 44	— 55	5077
14 íd. ..	107	19 1	705,15	5,8	12,35	11,7	+ 0,76	149,295	802	— 4	— 591	— 584	+ 44	— 58	5609
14 íd. ..	104	20 17	705,20	5,8	12,40	11,6	+ 0,76	155,850	093	— 4	— 597	— 597	+ 44	— 55	4884
14 íd. ..	105	21 37	705,30	5,8	12,44	11,6	+ 0,76	150,035	718	— 4	— 601	— 589	+ 44	— 58	5510
15 íd. ..	106	12 52	707,10	5,9	11,85	11,5	+ 0,70	154,730	210	— 4	— 591	— 568	+ 41	— 55	5033
15 íd. ..	107	14 12	706,90	6,1	11,90	11,9	+ 0,70	149,405	789	— 4	— 593	— 563	+ 41	— 58	5612
15 íd. ..	104	15 28	706,55	6,1	12,00	11,7	+ 0,70	156,040	073	— 4	— 599	577	+ 41	— 55	4879
15 íd. ..	105	18 51	706,45	6,3	12,20	11,6	+ 0,70	150,300	689	— 4	— 602	— 578	+ 41	— 58	5488
15 íd. ..	106	20 7	706,65	6,0	12,30	11,6	+ 0,70	154,390	245	— 4	— 590	— 589	+ 41	— 55	5048
15 íd. ..	107	21 26	707,00	5,8	12,40	11,8	+ 0,70	149,290	802	— 4	— 593	— 587	+ 41	— 58	5601
16 íd. ..	104	13 12	706,75	5,9	11,65	11,5	+ 0,58	156,230	053	— 4	— 600	— 560	+ 34	— 55	4808
16 íd. ..	105	14 31	706,25	6,1	11,70	11,8	+ 0,58	150,300	689	— 4	— 603	— 554	+ 34	— 58	5504
16 íd. ..	106	15 48	705,45	6,1	11,80	11,5	+ 0,58	154,505	233	— 4	— 591	— 565	+ 34	— 55	5052
16 íd. ..	107	18 48	703,85	5,8	11,95	11,7	+ 0,58	149,485	780	— 4	— 591	— 565	+ 34	— 58	5596
16 íd. ..	104	20 6	703,25	6,1	11,95	11,6	+ 0,58	156,045	073	— 4	— 596	— 575	+ 34	— 55	4877
16 íd. ..	105	21 26	702,60	6,1	11,95	11,9	+ 0,58	150,325	686	— 4	— 599	— 566	+ 34	— 58	5493
17 íd. ..	106	13 16	702,50	6,1	11,45	11,6	+ 0,61	154,900	192	— 4	— 588	— 549	+ 35	— 55	5031
17 íd. ..	107	14 36	702,60	6,5	11,50	11,6	+ 0,61	149,600	767	— 4	— 591	— 544	+ 35	— 58	5605
17 íd. ..	104	15 52	702,45	6,3	11,65	11,6	+ 0,61	156,275	049	— 4	— 596	— 560	+ 35	— 55	4869
17 íd. ..	105	19 8	702,50	6,1	11,90	11,6	+ 0,61	150,475	669	— 4	— 599	— 564	+ 35	— 58	5479
17 íd. ..	106	20 26	702,50	6,1	11,95	11,6	+ 0,61	154,615	222	— 4	— 588	— 573	+ 35	— 55	5037
17 íd. ..	107	21 45	702,50	6,3	12,00	11,8	+ 0,61	149,455	784	— 4	— 589	— 568	+ 35	— 58	5600

CAPÍTULO II

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS Y PRECISION DE LAS OBSERVACIONES EN LA CAMPAÑA DE 1921

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS

El estado núm. 1 contiene los valores de los promedios de las duraciones de oscilación reducidas obtenidos durante la campaña y calculados anteriormente.

Estado núm. 1.

ESTACIONES	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
Madrid (salida)	0,5014873	0,5015616	0,5015031	0,5015730
Tánger	5493	6233	666	6370
Tetuán	5561	6301	735	6440
Ceuta	5389	—	564	—
Melilla	5291	—	467	—
Málaga	5036	—	196	—
Motril	5074	—	246	—
Almería	5053	—	218	—
Madrid (cierre)	4875	0,5015459	040	0,5015604

Como promedio de las observaciones en Madrid se obtienen los siguientes:

Estado núm. 2.

ESTACIONES	Pèndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
Madrid (salida)..... / Madrid (cierre)..	0,5014874	—	0,5015036	—
Diferencias.....	2	157	9	126

Continuando en la estación de Madrid (cierre) la falta de invariabilidad de los péndulos 105 y 107, notada a partir de la estación de Ceuta, se prescindirá, para los cálculos sucesivos, de las observaciones efectuadas con dichos péndulos en todas las estaciones.

PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES

Para saber la precisión obtenida en las observaciones habrán de calcularse por separado los errores medios cometidos en las diferentes operaciones de que se compone una determinación de esta clase y se englobarán estos errores parciales para obtener el error medio de **g** en cada estación.

Cálculo de los errores parciales.

1.° Los errores cometidos en la observación de la duración de oscilación se obtendrán por la fórmula

$$e = 10^{-7} \sqrt{\frac{[vv]}{[n] - m}}$$

en la cual representan [**v v**] la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las duraciones de oscilación y cada uno de estos valores, [**n**] el número total de observación y **m** el número de péndulos observados.

Para obtener los valores de [**v v**] tendremos que obtener los de **v v**, que son los cuadrados de sus diferencias, los cuales se encuentran ordenados en el siguiente cuadro:

ESTACIONES	Péndulo 104.		Péndulo 106.	
	v	vv	v	vv
Madrid (salida)	0	00	15	225
	6	36	12	144
	3	9	8	64
	9	81	18	324
	9	81	25	625
	9	81	7	49
Tánger	8	64	4	16
	0	00	21	441
	3	9	1	1
	7	49	6	36
	2	4	3	9
	15	225	16	256

ESTACIONES	Pèndulo 104.		Péndulo 106.	
	v	vv	v	vv
	17	289	11	121
	12	144	1	1
Tetuán	11	121	18	324
	17	289	8	64
	6	36	9	81
	7	49	9	81
	7	49	12	144
	10	100	4	16
Ceuta	1	1	5	25
	11	121	0	0
	7	49	9	81
	1	1	6	36
	18	324	6	36
	1	1	11	121
	9	81	12	144
Melilla	14	196	14	196
	7	49	18	324
	16	256	5	25
	2	4	8	64
	1	1	5	25
	4	16	9	81
	1	1	17	289
	10	100	10	100
	14	196	18	324
Málaga	24	576	18	324
	13	169	2	4
	6	36	5	25
	12	144	7	49
	19	361	14	196
	10	100	14	196
	1	1	11	121
	3	9	15	225
Motril	1	1	7	49
	4	16		
	2	4	7	49
	6	36	19	361
	6	36	22	484
	8	64	11	121
	9	81	4	16
	12	144	20	400
Almería	20	400	22	484
	17	289	14	196
	1	1	1	1
	7	49	0	0
	4	16	8	64
	15	225	14	196
	1	1	7	49
	9	81	8	64
Madrid (cierre)	4	16	12	144
	7	49	9	81
	2	4	3	9
	6	36		

Del cuadro anterior se deduce el siguiente, haciendo la suma de los términos **v v** para cada estación y cada péndulo y las sumas totales de unos y otros.

ESTACIONES	Péndulo 104.		Péndulo 106.		[vv]	[n]
	vv	n	vv	n		
Madrid (salida)	288	6	1 431	6	1 719	12
Tánger	323	6	759	6	1 082	12
Tetuán	928	6	672	6	1 600	12
Ceuta	321	6	302	6	623	12
Melilla	928	9	1 016	9	1 944	18
Málaga	1 683	9	1 507	9	3 190	18
Motril	67	6	805	5	871	11
Almería	1 305	10	1 962	10	3 267	20
Madrid (cierre)	187	6	347	5	534	11
[vv]	6 030		8 801		14 830	
[n]		64		62		126

Aplicando la fórmula

$$e = 10^{-7}\sqrt{\frac{[vv]}{[n]-m}}$$

para cada estación, poniendo en vez de [**v v**] los valores de la penúltima columna, sustituyendo [**n**] por los de la última y **m** por 2, que es el número de péndulos observados, tendremos:

Madrid (salida)	$e = \pm 13{,}1 \times 10^{-7}$
Tánger	$e = \pm 10{,}4 \times 10^{-7}$
Tetuán	$e = \pm 12{,}6 \times 10^{-7}$
Ceuta	$e = \pm 7{,}9 \times 10^{-7}$
Melilla	$e = \pm 11{,}0 \times 10^{-7}$
Málaga	$e = \pm 14{,}1 \times 10^{-7}$
Motril	$e = \pm 9{,}9 \times 10^{-7}$
Almería	$e = \pm 13{,}5 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)	$e = \pm 7{,}7 \times 10^{-7}$

Los valores de los errores del resultado medio en cada estación se obtendrán por la fórmula

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{[n]}} \times e,$$

dando los resultados siguientes:

Madrid (salida)	$e_s = \pm 3{,}7 \times 10^{-7}$
Tánger	$e_s = \pm 3{,}0 \times 10^{-7}$
Tetuán	$e_s = \pm 3{,}6 \times 10^{-7}$
Ceuta	$e_s = \pm 2{,}3 \times 10^{-7}$
Melilla	$e_s = \pm 2{,}4 \times 10^{-7}$
Málaga	$e_s = \pm 3{,}4 \times 10^{-7}$
Motril	$e_s = \pm 3{,}0 \times 10^{-7}$
Almería	$e_s = \pm 3{,}0 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)	$e_s = \pm 2{,}4 \times 10^{-7}$

Los valores de **e** y e_s para el promedio de las dos estaciones de Madrid serán:

$$e = \sqrt{\frac{1719 + 534}{12 + 11 - 4}} = \pm 10{,}9 \times 10^{-7}$$

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{23}} \times 10{,}9 = \pm 2{,}3 \times 10^{-7}$$

Para obtener los errores de la duración de oscilación de cada péndulo en el conjunto de la campaña usaremos la misma fórmula anterior, poniendo en vez de [v v] y [n] los valores de las dos últimas líneas del cuadro anterior, y en vez de **m** el número de estaciones, que son nueve.

Así resulta

Péndulo 104..... $e_{p.\,104} = \sqrt{\frac{6030}{64 - 9}} = \pm 10{,}5 \times 10^{-7}$

Péndulo 106..... $e_{p.\,106} = \sqrt{\frac{8801}{62 - 9}} = \pm 12{,}9 \times 10^{-7}$

El error medio general a todos los péndulos será:

$$e'_p = \sqrt{\frac{14030}{126 - 18}} = \pm 11{,}7 \times 10^{-7}$$

2.° Siendo las correcciones por reducción a la amplitud muy pequeñas, los errores que de ellos pueden provenir son insignificantes y, por tanto, admitiremos que son nulos.

3.° Los errores que provienen por la inseguridad de la constante de reducción al vacío se deducen de los obtenidos al hacer el estudio de las constantes, cuyos valores son:

Péndulo 104..... 0,0000675 ± 11 × 10⁻⁷
Id. 106..... 0,0000665 ± 8 × 10⁻⁷

Su promedio es 0,000670, con un error de

$$\sqrt{\frac{11^2 + 8^2}{2}} = + 9{,}6 \times 10^{-7}$$

Siendo la relación entre este error y la constante media

$$\frac{\pm 9\,6}{670} = \pm 0{,}0143.$$

En el cuadro siguiente se han reunido los promedios de las correcciones por reducción al vacío en las diferentes estaciones. La última columna [Δ] representa las diferencias de los promedios de las estaciones con el promedio de las dos de Madrid.

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN AL VACÍO			
	Péndulo 104.	Péndulo 106.	Promedios.	[Δ]
Madrid (salida).....	593,4	584,5	589	
Tánger.....	629,9	620,4	625	33
Tetuán	617,5	608,4	613	21
Ceuta.....	621,7	612,4	617	25
Melilla.....	611,8	602,8	607	15
Málaga.....	613,2	604,2	609	17
Motril.....	611,4	602,2	607	15
Almería.....	613,6	604,1	609	17
Madrid (cierre).....	597,7	589,6	594	
Madrid (promedio).	596	587	592	

Se obtendrán los errores por la inseguridad de la constante de reducción al vacío, multiplicando las diferencias de la última columna por $\pm 0{,}0143$. Así resultan:

Tánger..... $e_d = \pm 0{,}5 \times 10^{-7}$
Tetuán..... $e_d = \pm 0{,}3 \times 10^{-7}$
Ceuta..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
Melilla..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Málaga..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Motril..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Almería..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$

4.° Análogamente se deducen los errores que proceden de la inseguridad de la constante de reducción por temperatura, cuyos valores son:

Péndulo 104..... 0,000004811 $\pm 0{,}14 \times 10^{-7}$
Id. 106..... 0,000004791 $\pm 0{,}10 \times 10^{-7}$

El promedio de estos errores es $0{,}000004801 \times 10^{-7}$ y el error medio de la media de las constantes es

$$\sqrt{\frac{0{,}14^2 + 0{,}10^2}{2}} = \pm 0{,}10 \times 10^{-7}$$

y la relación de este error y la constante media será:

$$\frac{\pm 0{,}10}{48{,}01} = \pm 0{,}0021$$

En el cuadro siguiente figuran los valores de los promedios de las correcciones por reducción de temperatura en las diferentes estaciones y las diferencias entre el valor promedio en Madrid y los valores de las otras estaciones.

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN POR TEMPERATURA			
	Péndulo 104.	Péndulo 106.	Promedios.	[Δ]
Madrid (salida).....	679,7	679,3	680	
Tánger.....	904,2	904,4	904	278
Tetuán.....	1098,2	1096,5	1097	471
Ceuta.....	1011,5	1010,4	1011	385
Melilla.....	1290,7	1289,2	1290	664
Málaga.....	1199,7	1196,0	1198	572
Motril.....	1249,7	1238,4	1244	618
Almería.....	1134,2	1131,9	1133	507
Madrid (cierre).....	575,7	568,8	572	
Madrid (promedio)	628	624	626	

Se obtendrán los errores multiplicando las diferencias de la última columna por el valor $\pm 0{,}0021$. De este modo obtendremos los valores siguientes:

Tánger..... $e_t = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}$
Tetuán..... $e_t = \pm 1{,}0 \times 10^{-7}$
Ceuta..... $e_t = \pm 0{,}8 \times 10^{-7}$
Melilla..... $e_t = \pm 1{,}4 \times 10^{-7}$
Málaga..... $e_t = \pm 1{,}2 \times 10^{-7}$
Motril..... $e_t = \pm 1{,}3 \times 10^{-7}$
Almería..... $e_t = \pm 1{,}1 \times 10^{-7}$

5.° Los errores e_m producidos en los valores de la duración de oscilación a consecuencia de las ε_m cometidos en la determinación de la hora, se calculan por la fórmula

$$e_m = \pm a s \varepsilon_m,$$

siendo $a = \frac{10+7}{86400}$,

s = promedio de la duración de oscilación en cada estación.
ε_m = los errores medios de conjunto de las determinaciones de la hora en cada estación.

De este modo se obtienen los valores que figuran en el cuadro siguiente:

ESTACIONES	a	s	ε_m	e_m
Madrid (salida).....		0.5014952	0,05	$2{,}9 \times 10^{-7}$
Tánger.....		5579	0,05	$2{,}9 \times 10^{-7}$
Tetuán.....		5648	0,05	$2{,}9 \times 10^{-7}$
Ceuta.....		5977	0,10	$5{,}8 \times 10^{-7}$
Melilla.....	$\frac{10+7}{86400}$	5379	0,06	$3{,}5 \times 10^{-7}$
Málaga.....		5116	0,08	$4{,}6 \times 10^{-7}$
Motril.....		5160	0,10	$5{,}8 \times 10^{-7}$
Almería.....		5136	0,06	$3{,}5 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre).....		4958	0,05	$2{,}9 \times 10^{-7}$

6.° Los errores cometidos en las determinaciones del balance del sostén se obtienen por la fórmula

$$e_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\varepsilon v^2}{n-1}},$$

en la que **n** representa el número de determinaciones hechas con cada pareja de péndulos, limitada en esta campaña a la pareja 104-106, y εv^2 representa la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada determinación y el promedio de todas ellas.

Aplicando esta fórmula se hallaron los valores siguientes:

Madrid (salida)	$e_b = \pm 1{,}5 \times 10^{-7}$
Tánger	$e_b = \pm 0{,}7 \times 10^{-7}$
Tetuán	$e_b = \pm 0{,}3 \times 10^{-7}$
Ceuta	$e_b = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$
Melilla	$e_b = \pm 2{,}0 \times 10^{-7}$
Málaga	$e_b = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$
Motril	$e_b = \pm 1{,}7 \times 10^{-7}$
Almería	$e_b = \pm 0{,}7 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)	$e_b = \pm 1{,}3 \times 10^{-7}$

Cálculo de los errores que afectan a las duraciones de oscilación reducidas.

Obtenidos los diversos errores cometidos en las varias operaciones realizadas para deducir las duraciones de oscilación reducidas, tendremos el error medio total en cada estación empleando la fórmula siguiente:

$$E = \sqrt{e_s^2(\text{Madrid}) + e_s^2(\text{estación observada}) + e_a^2 + e_d^2 + e_t^2 + e_m^2 + e_b^2}.$$

En el cuadro siguiente figuran los cuadrados de estos errores y la suma de los mismos para cada estación.

ESTACIONES	e_s^2 (Madrid).	e_s^2 (Estación).	e_a^2	e_d^2	e_t^2	e_m^2	e_b^2	E^2
Tánger	$2{,}3^2$	$3{,}0^2$	0,0	$0{,}5^2$	$0{,}6^2$	$2{,}9^2$	$0{,}7^2$	23,80
Tetuán	$2{,}3^2$	$3{,}6^2$	0,0	$0{,}3^2$	$1{,}0^2$	$2{,}9^2$	$0{,}3^2$	27,84
Ceuta	$2{,}3^2$	$2{,}3^2$	0,0	$0{,}4^2$	$0{,}8^2$	$5{,}8^2$	$0{,}9^2$	45,83
Melilla	$2{,}3^2$	$2{,}4^2$	0,0	$0{,}2^2$	$1{,}4^2$	$3{,}5^2$	$2{,}0^2$	29,30
Málaga	$2{,}3^2$	$3{,}4^2$	0,0	$0{,}2^2$	$1{,}2^2$	$4{,}6^2$	$0{,}9^2$	40,30
Motril	$2{,}3^2$	$3{,}0^2$	0,0	$0{,}2^2$	$1{,}3^2$	$5{,}8^2$	$1{,}7^2$	52,55
Almería	$2{,}3^2$	$3{,}0^2$	0,0	$0{,}2^2$	$1{,}1^2$	$3{,}5^2$	$0{,}7^2$	28,28

Extrayendo la raíz cuadrada de los valores contenidos en la última columna, tendremos los errores **E** para la duración de oscilación en cada estación.

Tánger	$E = \pm 4{,}9 \times 10^{-7}$
Tetuán	$E = \pm 5{,}3 \times 10^{-7}$
Ceuta	$E = \pm 6{,}8 \times 10^{-7}$
Melilla	$E = \pm 5{,}4 \times 10^{-7}$
Málaga	$E = \pm 6{,}4 \times 10^{-7}$
Motril	$E = \pm 7{,}2 \times 10^{-7}$
Almería	$E = \pm 5{,}3 \times 10^{-7}$

CAPÍTULO III

VALORES DE LA INTENSIDAD DE LA FUERZA DE LA GRAVEDAD

CAMPAÑA DE 1921

Para determinar los valores de **g**, o sean los valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en cualquiera estación, aplicaremos la fórmula

$$g = g_m - 2g_m \frac{s - s_m}{s_m} + 3g_m \left(\frac{s - s_m}{s_m} \right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

en la cual **g** es el valor de la gravedad que se quiere determinar en una estación cualquiera, g_m el valor de la gravedad en Madrid, que es 979.981; **s** el valor de la duración de oscilación en la estación de que se trata, obtenido con un péndulo determinado, y s_m el valor de la duración de oscilación en Madrid, obtenido con el mismo péndulo.

Los valores de s_m para cada péndulo son:

Péndulo 104..... $s_m = 0{,}5014874$
Id. 106..... $s_m = 0{,}5015036$

Aplicando la fórmula anterior llegaremos a los resultados que figuran en el cuadro siguiente:

ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios.
Tánger.....	104	979,739	979,737
	106	979,735	
Tetuán.....	104	979,712	979,710
	106	979,708	

ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios.
Ceuta	104	979,780	979,778
	106	979,775	
Melilla	104	979,818	979,816
	106	979,813	
Málaga	104	979,918	979,918
	106	979,918	
Motril	104	979,903	979,901
	106	979,899	
Almería	104	979,911	979,911
	106	979,910	

Los errores correspondientes a estos valores de **g**, y que representaremos por F_g, pueden obtenerse por la fórmula

$$F_g = \pm \frac{2g_m}{s_m} E,$$

en la que g_m es el valor de la gravedad en Madrid, 979.981; s_m es el promedio de las duraciones de oscilación, en Madrid, en las estaciones de salida y cierre, o sea 0,5014955, y **E** representa los errores consignados al final del capítulo anterior, que han resultado para las duraciones de oscilación reducidas.

Su aplicación conduce a los resultados siguientes:

Tánger ..... $F_g = \pm 1{,}9 \times 10^{-3}$
Tetuán ..... $F_g = \pm 2{,}1 \times 10^{-3}$
Ceuta ..... $F_g = \pm 2{,}7 \times 10^{-3}$
Melilla ..... $F_g = \pm 2{,}1 \times 10^{-3}$
Málaga ..... $F_g = \pm 2{,}5 \times 10^{-3}$
Motril ..... $F_g = \pm 2{,}8 \times 10^{-3}$
Almería ..... $F_g = \pm 2{,}1 \times 10^{-3}$

En resumen, tendremos, para los valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en las estaciones observadas, los siguientes:

Tánger ..... $g = 979{,}737 \pm 0{,}0019$
Tetuán ..... $g = 979{,}710 \pm 0{,}0021$
Ceuta ..... $g = 979{,}778 \pm 0{,}0027$
Melilla ..... $g = 979{,}816 \pm 0{,}0021$
Málaga ..... $g = 979{,}918 \pm 0{,}0025$
Motril ..... $g = 979{,}901 \pm 0{,}0028$
Almería ..... $g = 979{,}911 \pm 0{,}0021$

La reducción de estos valores al nivel del mar la haremos por la fórmula

$$g_o'' = g + \delta g + \delta' g,$$

siendo

$$\delta g = 0{,}0003086\ H \qquad y \qquad \delta' g = \frac{3}{4} \times \frac{\theta}{\theta_m} (g - g_o)$$

en las cuales representan:

H, altitud en metros sobre el nivel del mar, del centro de las lentejas de los péndulos.

θ_m, densidad media de la tierra, igual a 5,52.

θ, densidad media de la meseta de observación.

El cuadro siguiente pone de manifiesto el conjunto de estos datos y los valores deducidos de los mismos.

ESTACIONES	g	H	θ	δg	$\delta' g$
Tánger.....	979,737	41	2,6	+ 0,0127	— 0,005
Tetuán.....	979,710	85	»	+ 0,0262	— 0,009
Ceuta.....	979,778	64	»	+ 0,0198	— 0,007
Melilla.....	979,816	6	»	+ 0,0019	— 0,001
Málaga.....	979,918	61	»	+ 0,0188	— 0,007
Motril.....	979,901	53	»	+ 0,0164	— 0,006
Almería.....	979,911	63	»	+ 0,0194	— 0,007

De los cuales deduciremos los valores de

$$g_o = g + \delta g \qquad y \qquad g_o'' = g_o + \delta' g$$

que serán respectivamente:

ESTACIONES	g_o''	g_o
Tánger.....	979,750	979,745
Tetuán.....	979,736	979,727
Ceuta.....	979,798	979,791
Melilla.....	979,818	979,817
Málaga.....	979,937	979,930
Motril.....	979,917	979,911
Almería.....	979,930	979,923

El cálculo teórico de los valores de g, que representamos por γ_o lo haremos por la fórmula de Helmert (1915).

$$\gamma_o = 978{,}052\ (1 + 0{,}005285\ \mathrm{sen}^2 \varphi - 0{,}000007\ \mathrm{sen}^2 2\varphi).$$

En el cuadro siguiente se expresan los valores de γ_0 correspondientes a los diversos de φ, que representa la latitud del lugar de observación:

ESTACIONES	φ	γ_0
	° '	
Tánger	35 47	979,813
Tetuán	35 34	979,795
Ceuta	35 54	979,823
Melilla	35 18	979,772
Málaga	36 43	979,893
Motril	36 45	979,896
Almería	36 51	979,905

Finalmente, el conjunto de valores encontrados se ve reunido en el cuadro siguiente:

Resumen de los valores obtenidos en la campaña de 1921

Número.	ESTACIONES	LATITUD	LONGITUD A CATIE DE GREENWICH	ALTITUD	θ	GRAVEDAD OBSERVADA g	g_o	g''_o	γ_o	$g''_o - \gamma_o$	$g_o - \gamma_o$
83	Tánger.....	35° 47′	5 49 00 W.	41 m	2,6	979,737 cm	979,750 cm	979,745 cm	979,813 cm	— 0,068 cm	— 0,063 cm
84	Tetuán.....	35 34	5 20 45 W.	85	2,6	979,710	979,736	979,727	979,795	— 0,068	— 0,059
85	Ceuta.....	35 54	5 19 15 W.	64	2,6	979,778	979,798	979,791	979,823	— 0,032	— 0,025
86	Melilla.....	35 18	2 57 00 W.	6	2,6	979,816	979,818	979,817	979,772	+ 0,045	+ 0,046
87	Málaga.....	36 43	4 25 15 W.	61	2,6	979,918	979,937	979,930	979,893	+ 0,037	+ 0,044
88	Motril.....	36 45	3 30 15 W.	53	2,6	979,901	979,917	979,911	979,896	+ 0,015	+ 0,021
89	Almería.....	36 51	2 28 00 W.	63	2,6	979,911	979,930	979,923	979,905	+ 0,018	+ 0,025

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DE LAS OBSERVACIONES EN LA CAMPAÑA DE 1922

ESTACIÓN DE MADRID (salida)

Local de observación.

El local donde se hicieron las observaciones fué, como de costumbre, una habitación del Observatorio Astronómico de Madrid, situada en el cuerpo central del edificio y orientada al Norte.

Las coordenadas geográficas son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich.....	3° 41',3 W.
Latitud N.....	40° 24',5
Altitud de la lenteja de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante.....	656m

Determinación de la hora.

Se determinaron los estados del Strasser por medio de comparaciones cronográficas con el magistral del Observatorio.

Obtenidos los estados, se dedujeron los movimientos, y después de calculados los errores correspondientes se llegó a los resultados que figuran en el siguiente cuadro, resumen de las determinaciones de hora.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
23 de Mayo de 1922.....	4 10	+ 3,55 ± 0,05	
24 íd. íd.	10 14	+ 4,01 ± 0,03	+ 0,37 ± 0,06
25 íd. íd.	10 25	+ 3,91 ± 0,02	— 0,10 ± 0,04
26 íd. íd.	10 25	+ 3,35 ± 0,03	— 0,56 ± 0,04

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
27 de Mayo de 1922	10 12	+ 2,35 ± 0,03	— 1,01 ± 0,04
28 id. id.	9 48	+ 1,68 ± 0,04	— 0,68 ± 0,05
29 id. id.	10 9	+ 0,26 ± 0,05	— 1,39 ± 0,06
30 id. id.	9 38	— 0,46 ± 0,03	— 0,74 ± 0,06
31 id. id.	10 29	— 1,47 ± 0,05	— 0,98 ± 0,06
1 Junio id.	10 43	— 2,33 ± 0,05	— 0,85 ± 0,07
2 id. id.	10 49	— 3,21 ± 0,03	— 0,88 ± 0,06
3 id. id.	10 25	— 4,13 ± 0,04	— 0,94 ± 0,05
4 id. id.	10 29	— 5,11 ± 0,04	— 0,98 ± 0,06
5 id. id.	10 43	— 6,09 ± 0,04	— 0,97 ± 0,06

Los errores relativos a la marcha diaria del reloj se calcularon por la fórmula

$$\varepsilon_m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2},$$

en la que m_1 y m_2 representan los errores correspondientes a dos estados consecutivos del reloj, resultando para error medio del conjunto de las observaciones el promedio de estos errores diarios, que en este caso es

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}05.$$

Duraciones de oscilación.

En los estados señalados con las letras A_1 y A_2 pueden verse los datos de observación y valores de las reducciones calculadas para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

Los péndulos 104-106 y 66-65 oscilaron en dirección NE. y SW., así como los 105-107 y 46-47 en la NW.-SE., siendo los valores obtenidos por el estudio del balance, según el método de Borrass, los siguientes:

Péndulos 104 y 106.

51×10^{-7}
50×10^{-7}
53×10^{-7}
53×10^{-7}
52×10^{-7}

Péndulos 105 y 107.

57×10^{-7}
61×10^{-7}
63×10^{-7}
60×10^{-7}
60×10^{-7}

Péndulos 46 y 47.

56×10^{-7}
62×10^{-7}
60×10^{-7}
57×10^{-7}
59×10^{-7}

Péndulos 65 y 66.

57×10^{-7}
57×10^{-7}
57×10^{-7}
61×10^{-7}
58×10^{-7}

Los errores correspondientes se han calculado por la fórmula

$$e_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\varepsilon v^2}{n-1}}$$

aplicada a cada pareja de péndulos, en la que εv^2 representa la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las diversas determinaciones del balance y cada una de ellas, y **n** el número de determinaciones. La aplicación de la fórmula da los siguientes resultados:

Péndulos 104 y 106..... $e_{b_1} = \pm 0{,}8 \times 10^{-7}$
Idem 105 y 107..... $e_{b_2} = \pm 1{,}3 \times 10^{-7}$
Idem 46 y 47..... $e_{b_3} = \pm 1{,}4 \times 10^{-7}$
Idem 65 y 66..... $e_{b_4} = \pm 1{,}0 \times 10^{-7}$

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes, son los que siguen:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014837	0,5015454	0,5015044	0,5015592
883	81	06	600
890	52	88	(659)
837	69	91	635
(914)	92	4999	611
887	69	(5145)	584
0,5014867	0,5015470	0,5015046	0,5015604

Por diferir bastante de los valores medios respectivos se han suprimido los valores indicados entre paréntesis, teniéndose presente dichas supresiones para el cálculo de la media definitiva que figura en el cuadro anterior.

Péndulo 47.	**Péndulo 66.**	**Péndulo 46.**	**Péndulo 65.**
0,5068259	0,5065(860)	0,5066537	0,5065978
303	(929)	(95)	(6093)
276	886	13	5993
310	910	(77)	(6059)
270	880	28	5990
(323)	909	31	6025
292	897	42	6024
282	900	41	6007
266	874	15	5981
281	897	12	5991
0,5068282	0,5065894	0,5066527	0,5065999

Por discrepar bastante del valor medio respectivo se han desechado los valores indicados entre paréntesis, teniéndose presente dichas supresiones para el cálculo de la media definitiva que figura en el cuadro anterior.

Estado A$_1$. ESTACIÓN DE MADRID (salida).

FECHAS — 1922	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
24 Mayo.....	104	0 54	708,85	10,3	20,81	11,6	+ 0,37	152,425	0,5016455	— 4	— 582	— 1001	+ 21	— 52	0,5014837
24 íd.	105	2 14	708,75	10,1	20,86	11,6	+ 0,37	146,955	7070	— 4	— 585	— 988	+ 21	— 60	5454
24 íd.	106	3 31	708,50	10,3	20,91	11,6	+ 0,37	150,610	6654	— 4	— 573	— 1002	+ 21	— 52	5044
24 íd.	107	6 23	707,75	10,5	21,01	11,8	+ 0,37	145,825	7203	— 4	— 574	— 994	+ 21	— 60	5592
24 íd.	104	7 38	707,40	10,8	21,16	11,9	+ 0,37	151,865	6516	— 4	— 580	— 1018	+ 21	— 52	4883
24 íd.	105	8 56	707,30	10,8	21,31	11,9	+ 0,37	146,555	7117	— 4	— 583	— 1010	+ 21	— 60	5481
25 íd.	106	1 1	710,25	10,3	21,21	11,7	— 0,10	150,585	6657	— 4	— 573	— 1016	— 6	— 52	5006
25 íd.	107	2 19	710,05	10,0	21,21	11,9	— 0,10	145,440	7249	— 4	— 576	— 1003	— 6	— 60	5600
25 íd.	104	3 35	709,75	10,3	21,21	11,7	— 0,10	151,520	6554	— 4	— 582	— 1020	— 6	— 52	4890
25 íd.	105	6 39	708,95	10,7	21,31	11,6	— 0,10	146,560	7116	— 4	— 584	— 1010	— 6	— 60	5452
25 íd.	106	7 55	708,80	11,0	21,41	11,6	— 0,10	149,770	6748	— 4	— 572	— 1026	— 6	— 52	5088
25 íd.	107	9 12	708,75	10,8	21,61	11,9	— 0,10	144,800	7325	— 4	— 574	— 1022	— 6	— 60	5659
26 íd.	104	1 12	711,15	11,1	21,61	11,7	— 0,56	151,575	6548	— 4	— 582	— 1040	— 33	— 52	4837
26 íd.	105	2 29	711,00	11,0	21,66	11,9	— 0,56	146,040	7177	— 4	— 585	— 1026	— 33	— 60	5469
26 íd.	106	3 42	710,70	10,8	21,71	11,7	— 0,56	149,370	6793	— 4	— 573	— 1040	— 33	— 52	5091
26 íd.	107	6 36	709,55	9,7	21,86	11,6	— 0,56	144,675	7340	— 4	— 574	— 1034	— 33	— 60	5635
26 íd.	104	7 49	709,10	10,3	21,96	11,6	— 0,56	150,755	6639	— 4	— 580	— 1056	— 33	— 52	4914
26 íd.	105	9 5	709,00	10,9	22,06	11,8	— 0,56	145,705	7217	— 4	— 583	— 1045	— 33	— 60	5492
27 íd.	106	1 16	710,00	10,6	21,91	11,7	— 1,01	149,880	6736	— 4	— 572	— 1050	— 59	— 52	4999
27 íd.	107	2 34	709,75	10,8	21,91	11,7	— 1,01	144,640	7344	— 4	— 574	— 1036	— 59	— 60	5611
27 íd.	104	3 47	709,35	11,0	21,96	11,7	— 1,01	150,755	6638	— 4	— 580	— 1056	— 59	— 52	4887
27 íd.	105	6 28	708,20	10,8	22,11	11,8	— 1,01	145,715	7216	— 4	— 582	— 1048	— 59	— 60	5469
27 íd.	106	7 42	707,85	10,8	22,16	11,4	— 1,01	148,505	6891	— 4	— 569	— 1062	— 59	— 52	5145
27 íd.	107	8 58	707,65	10,8	22,21	11,7	— 1,01	144,755	7330	— 4	— 572	— 1051	— 59	— 60	5584

Estado $A_{1'}$ ESTACIÓN DE MADRID (salida).

FECHAS 1922	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10^{-7}					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sosten.	
		h m	mm	mm	°		s	s	s						s
31 Mayo.....	47	2 34	708,95	12,4	22,22	13,1	— 0,98	36,2034	0,5070021	— 5	— 561	— 1080	— 57	— 59	0,5068259
31 id.	66	3 14	708,65	12,4	22,31	13,1	— 0,98	37,4650	67632	— 5	— 581	— 1071	— 57	— 58	5860
31 id.	46	3 56	708,25	12,0	22,36	13,2	— 0,98	37,1098	68288	— 5	— 559	— 1071	— 57	— 59	6537
31 id.	65	4 36	707,90	12,0	22,47	13,0	— 0,98	37,4474	67664	— 5	— 589	— 977	— 57	— 58	5978
31 id.	47	7 40	705,95	12,1	22,67	13,3	— 0,98	36,1722	70083	— 5	— 557	— 1102	— 57	— 59	8303
31 id.	66	8 22	705,75	11,7	22,72	13,1	— 0,98	37,4182	67717	— 5	— 578	— 1090	— 57	— 58	5929
31 id.	46	9 8	705,90	11,7	22,77	13,1	— 0,98	37,0694	68363	— 5	— 556	— 1091	— 57	— 59	6595
31 id.	65	9 48	705,90	11,9	22,82	13,0	— 0,98	37,3780	67791	— 5	— 586	— 992	— 57	— 58	6093
1.° Junio.....	47	2 00	707,10	11,9	22,11	13,2	— 0,85	36,2020	70024	— 5	— 559	— 1075	— 50	— 59	8276
1.° id.	66	2 40	707,00	12,3	22,11	13,0	— 0,85	37,4602	67640	— 5	— 580	— 1061	— 50	— 58	5886
1.° id.	46	3 20	706,85	12,5	22,11	13,1	— 0,85	37,1334	68244	— 5	— 558	— 1059	— 50	— 59	6513
1.° id.	65	4 00	706,50	12,8	22,16	13,0	— 0,85	37,4504	67658	— 5	— 588	— 964	— 50	— 58	5993
1.° id.	47	8 1	704,60	12,4	22,47	13,1	— 0,85	36,1774	70072	— 5	— 556	— 1092	— 50	— 59	8310
1.° id.	66	8 41	704,50	12,0	22,52	13,0	— 0,85	37,4374	67682	— 5	— 578	— 1081	— 50	— 58	5910
1.° id.	46	9 20	704,60	12,0	22,57	13,1	— 0,85	37,0890	68527	— 5	— 555	— 1081	— 50	— 59	6577
1.° id.	65	10 00	704,80	12,0	22,62	13,0	— 0,85	37,4048	67742	— 5	— 586	— 984	— 50	— 58	6059
2 id.	47	2 26	706,40	12,7	22,32	13,4	— 0,88	36,1904	70029	— 5	— 558	— 1085	— 52	— 59	8270
2 id.	66	3 4	706,30	13,1	22,31	13,1	— 0,88	37,4578	67645	— 5	— 579	— 1071	— 52	— 58	5880
2 id.	46	3 44	706,10	12,9	22,31	13,2	— 0,88	37,1192	68270	— 5	— 557	— 1069	— 52	— 59	6528
2 id.	65	4 24	705,95	12,8	22,31	13,1	— 0,88	37,4482	67662	— 5	— 587	— 970	— 52	— 58	5990
2 id.	47	7 55	704,55	12,4	22,52	13,3	— 0,88	36,1684	70090	— 5	— 556	— 1095	— 52	— 59	8323
2 id.	66	8 29	704,45	12,3	22,52	13,1	— 0,88	37,4374	67682	— 5	— 577	— 1081	— 52	— 58	5909
2 id.	46	9 10	704,40	12,5	22,57	13,4	— 0,88	37,1124	68283	— 5	— 555	— 1081	— 52	— 59	6531
2 id.	65	9 59	704,40	12,5	22,67	13,1	— 0,88	37,4214	67711	— 5	— 585	— 986	— 52	— 58	6025

Estado A. — ESTACIÓN DE MADRID (salida). — *(Conclusión.)*

FECHAS — 1922	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
3 Junio	47	7 45	706,35	13,2	22,52	13,1	— 0,94	36,1816	0,5070064	— 5	— 558	— 1095	— 55	— 59	0,5068292
3 íd.	66	8 24	706,25	13,6	22,57	13,0	— 0,94	37,4408	67676	— 5	— 578	— 1083	— 55	— 58	5897
3 íd.	46	9 4	706,20	13,6	22,62	13,1	— 0,94	37,1032	68300	— 5	— 556	— 1083	— 55	— 59	6542
3 íd.	65	9 43	706,35	13,6	22,62	13,0	— 0,94	37,4202	67714	— 5	— 587	— 984	— 55	— 58	6024
4 íd.	47	7 47	705,45	11,7	22,52	13,2	— 0,98	36,1860	70055	— 5	— 557	— 1095	— 57	— 59	8282
4 íd.	66	8 26	705,10	12,0	22,52	13,0	— 0,98	37,4390	67679	— 5	— 578	— 1081	— 57	— 58	5900
4 íd.	46	9 8	704,90	11,7	22,57	13,1	— 0,98	37,1040	68299	— 5	— 556	— 1081	— 57	— 59	6541
4 íd.	65	9 49	704,90	11,3	22,62	13,0	— 0,98	37,4294	67697	— 5	— 586	— 984	— 57	— 58	6007
5 íd.	47	2 38	707,15	13,8	22,22	13,1	— 0,97	36,2008	70026	— 5	— 559	— 1080	— 57	— 59	8266
5 íd.	66	3 16	707,05	13,8	22,21	13,0	— 0,97	37,4604	67640	— 5	— 580	— 1066	— 57	— 58	5874
5 íd.	46	3 57	707,25	13,8	22,21	13,1	— 0,97	37,1256	68258	— 5	— 558	— 1064	— 57	— 59	6515
5 íd.	65	4 37	707,80	13,8	22,21	12,9	— 0,97	37,4514	67656	— 5	— 589	— 966	— 57	— 58	5981
5 íd.*	47	8 2	707,40	13,5	22,11	13,1	— 0,97	36,1960	70036	— 5	— 559	— 1075	— 57	— 59	8281
5 íd.	66	8 41	707,30	13,1	22,11	13,0	— 0,97	37,4504	67658	— 5	— 580	— 1061	— 57	— 58	5897
5 íd.	46	9 22	707,30	13,1	22,11	13,1	— 0,97	37,1306	68249	— 5	— 558	— 1059	— 57	— 59	6512
5 íd.	65	10 2	707,20	13,1	22,11	12,9	— 0,97	37,4496	67660	— 5	— 588	— 961	— 57	— 58	5991

ESTACION DE RONCAL

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en el gimnasio de las Escuelas municipales fundadas por el tenor Gayarre, colocándose la barraca astronómica en el jardín contiguo a las mismas (veáse plano y fotografía).

Las coordenadas geográficas del local, son las siguientes:

Longitud respecto al meridiano de Greenwich	0h 59' 35" W.
Latitud N	42° 49'
Altura de la lenteja de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante	675m

Determinación de la hora.

El método seguido para determinar los estados del reloj, y por tanto los movimientos en los diferentes dias de observación, fué el de Borrass y en el cuadro siguiente figuran los estados y movimientos del Strasser para cada dia, después de aplicado el cálculo de errores.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
21 de Julio de 1922	19 9	− 0,04 ± 0,03	+ 0,23 ± 0,04
23 id. id.	16 23	+ 0,40 ± 0,02	+ 0,16 ± 0,08
25 id. id.	16 34	+ 0,72 ± 0,08	+ 0,09 ± 0,09
26 id. id.	16 40	+ 0,81 ± 0,04	+ 0,05 ± 0,04
27 id. id.	16 23	+ 0,86 ± 0,01	− 0,61 ± 0,02
28 id. id.	16 23	+ 0,25 ± 0,02	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones.

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}05.$$

Duraciones de oscilación.

En los estados señalados con las letras B_1 y B_2 se muestran las correcciones que

se aplican a los valores observados para obtener los valores de las oscilaciones reducidas.

Los péndulos 104-106 y 66-65 oscilaron en dirección NE.-SW., y los 105-107 y 46-47 en la NW.-SE., deduciéndose los siguientes resultados para la corrección del balance.

Péndulos 104 y 106.

33×10^{-7}
35×10^{-7}
34×10^{-7}
34×10^{-7}

34×10^{-7}

$e_{b_1} = 0{,}4 \times 10^{-7}$

Péndulos 105 y 107.

42×10^{-7}
42×10^{-7}
40×10^{-7}
40×10^{-7}

41×10^{-7}

$e_{b_2} = 0{,}6 \times 10^{-7}$

Péndulos 46 y 47.

47×10^{-7}
49×10^{-7}
44×10^{-7}
44×10^{-7}

46×10^{-7}

$e_{b_3} = 1{,}3 \times 10^{-7}$

Péndulos 65 y 66.

31×10^{-7}
34×10^{-7}
36×10^{-7}
35×10^{-7}

34×10^{-7}

$e_{b_4} = 1{,}1 \times 10^{-7}$

En los dos cuadros siguientes se resumen los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios respectivos.

Péndulo 47.	Péndulo 66.	Péndulo 46.	Péndulo 65.
0,5067686	0,5065274	0,5065889	0,5065364
47	45	43	36
46	54	80	70
78	49	43	33
42	44	62	53
80	60	95	69
91	72	47	48
50	49	68	51
0,5067665	0,5065256	0,5065866	0,5065353

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014275	0,5014864	0,5014421	0,5014965
36	37	13	5001
69	44	45	(5027)
51	46	16	4945
			4957
0,5014258	0,5014848	0,5014424	0,5014967

Por distanciarse bastante de los demás valores, se ha suprimido el del péndulo 107 encerrado entre paréntesis, teniéndose en cuenta dicha supresión para calcular el valor medio correspondiente.

FECHAS — 1922	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Periodo de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷ Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm			s	s	s						s
22 Julio.....	47	6 9	706,75	12,1	20,91	13,2	+ 0,23	36,5742	0,5069301	— 5	— 561	— 1016	+ 13	— 46	0,5067686
22 id.	66	6 50	706,65	11,9	21,31	13,1	+ 0,23	37,8664	6905	— 5	— 582	— 1023	+ 13	— 34	5274
22 id.	46	7 31	706,55	11,8	21,71	13,1	+ 0,23	37,5230	7526	— 5	— 559	— 1040	+ 13	— 46	5889
22 id.	65	8 12	706,50	11,4	22,06	13,1	+ 0,23	37,8486	6937	— 5	— 588	— 959	+ 13	— 34	5364
22 id.	47	10 44	705,20	11,3	22,67	13,1	+ 0,23	36,5522	9344	— 5	— 557	— 1102	+ 13	— 46	7647
22 id.	66	11 24	704,85	11,5	22,72	13,1	+ 0,23	37,8472	6939	— 5	— 578	— 1090	+ 13	— 34	5245
22 id.	46	12 5	704,70	11,3	22,72	13,1	+ 0,23	37,5236	7524	— 5	— 555	— 1088	+ 13	— 46	5843
22 id.	65	12 46	704,70	11,2	22,77	13,0	+ 0,23	37,8482	6938	— 5	— 586	— 990	+ 13	— 34	5336
22 id.	47	13 28	705,00	11,2	22,82	13,1	+ 0,23	36,5488	9350	— 5	— 557	— 1109	+ 13	— 46	7646
22 id.	66	14 8	705,15	11,7	22,87	13,1	+ 0,23	37,8384	6955	— 5	— 577	— 1098	+ 13	— 34	5254
23 id.	46	6 27	705,80	12,9	21,41	13,1	+ 0,16	37,5338	7506	— 5	— 558	— 1026	+ 9	— 46	5880
23 id.	65	7 7	705,80	13,2	21,46	13,1	+ 0,16	37,8576	6921	— 5	— 588	— 933	+ 9	— 34	5370
23 id.	47	7 48	705,85	13,6	21,56	13,0	+ 0,16	36,5664	9317	— 5	— 559	— 1048	+ 9	— 46	7678
23 id.	66	8 28	705,90	13,4	21,66	13,0	+ 0,16	37,8702	6898	— 5	— 580	— 1039	+ 9	— 34	5249
23 id.	46	10 50	705,70	13,2	21,86	13,1	+ 0,16	37,5428	7489	— 5	— 557	— 1047	+ 9	— 46	5843
23 id.	65	11 30	705,50	12,8	21,91	13,1	+ 0,16	37,8668	6904	— 5	— 588	— 953	+ 9	— 34	5333
23 id.	47	12 10	705,35	12,8	21,96	13,1	+ 0,16	36,5702	9309	— 5	— 558	— 1067	+ 9	— 46	7642
23 id	66	12 51	705,30	12,8	22,01	12,9	+ 0,16	37,8640	6909	— 5	— 579	— 1056	+ 9	— 34	5244
23 id.	46	13 36	705,30	12,4	22,06	13,2	+ 0,16	37,5270	7518	— 5	— 557	— 1057	+ 9	— 46	5862
23 id.	65	14 17	705,35	12,0	22,11	13,0	+ 0,16	37,8506	6933	— 5	— 589	— 961	+ 9	— 34	5353
24 id.	47	5 27	706,85	12,4	21,06	13,1	+ 0,16	36,5716	9307	— 5	— 561	— 1024	+ 9	— 46	7680
24 id.	66	6 6	706,95	12,4	20,91	13,0	+ 0,16	37,8828	6876	— 5	— 583	— 1003	+ 9	— 34	5260
24 id.	46	6 47	707,25	12,4	20,76	13,1	+ 0,16	37,5412	7492	— 5	— 561	— 994	+ 9	— 46	5895
24 id.	65	7 27	707,55	12,0	20,66	13,1	+ 0,16	37,8754	6889	— 5	— 592	— 898	+ 9	— 34	5369
24 id.	47	8 8	707,75	11,7	20,56	13,0	+ 0,16	36,5778	9295	— 5	— 563	— 999	+ 9	— 46	7691
24 id.	66	8 47	707,85	11,7	20,51	13,0	+ 0,16	37,8858	6870	— 5	— 584	— 984	+ 9	— 34	5272
24 id.	46	10 46	708,50	11,9	20,41	13,1	+ 0,16	37,5756	7430	— 5	— 563	— 978	+ 9	— 46	5847
24 id.	65	11 26	708,70	11,8	20,35	13,0	+ 0,16	37,8932	6857	— 5	— 594	— 885	+ 9	— 34	5348
24 id.	47	12 6	708,85	11,6	20,30	13,0	+ 0,16	36,6052	9242	— 5	— 564	— 987	+ 9	— 46	7650
24 id.	66	12 45	708,90	11,2	20,25	13,1	+ 0,16	37,9046	6837	— 5	— 586	— 972	+ 9	— 34	5249
24 id.	46	13 26	709,00	11,4	20,15	13,1	+ 0,16	37,5708	7439	— 5	— 564	— 965	+ 9	— 46	5868
24 id.	65	14 5	709,20	11,2	20,05	13,0	+ 0,16	37,8980	6848	— 5	— 595	— 872	+ 9	— 34	5351

Estado B.

ESTACION DE RONCAL

FECHAS — 1922	Péndulos	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°		s	s	s						s
26 Julio.....	104	5 54	710,65	11,1	19,41	11,6	+ 0,09	158,445	0,5015828	— 4	— 586	— 934	+ 5	— 34	0,5014275
26 íd	105	7 14	710,55	10,8	19,60	11,6	+ 0,09	152,735	6422	— 4	— 589	— 929	+ 5	— 41	4864
26 íd.	106	8 32	710,35	10,7	19,85	11,5	+ 0,09	156,940	5981	— 4	— 576	— 951	+ 5	— 34	4421
26 íd.	107	10 42	710,00	10,5	20,15	11,6	+ 0,09	151,685	6536	— 4	— 578	— 953	+ 5	— 41	4965
26 íd.	104	12 1	709,85	11,0	20,25	11,6	+ 0,09	158,465	5826	— 4	— 583	— 974	+ 5	— 34	4236
26 íd.	105	13 23	709,09	12,5	20,35	11,6	+ 0,09	152,685	6427	— 4	— 586	— 964	+ 5	— 41	4837
27 íd.	106	5 51	711,20	11,7	19,65	11,6	+ 0,05	157,080	5966	— 4	— 577	— 941	+ 3	— 34	4413
27 íd.	107	7 12	711,05	10,9	19,90	11,6	+ 0,05	151,440	6563	— 4	— 579	— 941	+ 3	— 41	5001
27 íd.	104	8 30	710,85	10,4	20,25	11,6	+ 0,05	158,200	5852	— 4	— 584	974	+ 3	— 34	4269
27 íd.	105	10 57	710,55	10,9	20,66	11,6	+ 0,05	152,460	6452	— 4	— 587	— 979	+ 3	— 41	4844
27 íd.	106	12 15	710,45	11,3	20,81	11,5	+ 0,05	156,255	6051	— 4	— 574	— 997	+ 3	— 34	4445
27 íd.	107	13 36	710,40	11,6	20,96	11,7	+ 0,05	150,780	6636	— 4	— 576	— 991	+ 3	— 41	5027
28 íd.	104	5 52	710,60	11,8	20,30	11,5	— 0,61	157,885	5885	— 4	— 584	— 977	— 35	— 34	4251
28 íd.	105	7 13	710,65	12,3	20,56	11,6	— 0,61	152,145	6486	— 4	— 586	— 974	— 35	— 41	4846
28 íd.	106	8 30	710,65	12,7	20,81	11,6	— 0,61	156,155	6061	— 4	— 574	— 997	— 35	— 34	4416
28 íd.	107	11 2	710,65	12,9	21,21	11,6	— 0,61	151,045	6606	— 4	— 578	— 1003	— 35	— 41	4945
28 íd.	107	13 1	710,80	12,9	21,41	11,7	— 0,61	150,875	6625	— 4	— 575	— 1013	— 35	— 41	4957

ESTACIÓN DE BOLTANA

Local de observación.

Se montaron los péndulos en una habitación de la posada de San Martín, propiedad de D. Enrique Gistau, colocándose la barraca astronómica en una huerta próxima (veáse plano y fotografía).

Las coordenadas geográficas del punto de observación, son las siguientes:

Longitud respecto al meridiano de Greenwich	3' 55'' E.
Latitud N.....	42° 26'
Altitud de la lenteja de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante	606m

Determinación de la hora.

Por el método de Borrass se determinaron los estados del reloj Strasser, observando previamente pasos meridianos de estrellas con el anteojo Repsold.

En el cuadro siguiente figuran los estados y movimientos para cada día de observación, con los errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
9 de Agosto de 1922.....	17 35	+ 2,21 ± 0,02	+ 0,69 ± 0,06
10 id. id.	17 28	+ 2,90 ± 0,06	+ 0,64 ± 0,07
11 id. id.	17 28	+ 3,54 ± 0,03	+ 1,10 ± 0,05
12 id. id.	17 28	+ 4,64 ± 0,04	+ 0,90 ± 0,05
13 id. id.	17 28	+ 5,54 ± 0,03	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones.

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}06$$

Duraciones de oscilación.

En los estados señalados con las letras C_1 y C_2 figuran los datos de observación juntamente con los resultados inmediatos y reducidos.

Los péndulos 104-106 y 66-65 oscilaron en dirección NE.-SW. y los 105-107 y 47-46 en la NW.-SE., deduciéndose los siguientes resultados del estudio del balance.

Péndulos 104 y 106.

30×10^{-7}
30×10^{-7}
30×10^{-7}
26×10^{-7}

29×10^{-7}

$e_{b_1} = 1{,}0 \times 10^{-7}$

Péndulos 105 y 107.

38×10^{-7}
39×10^{-7}
39×10^{-7}
36×10^{-7}

38×10^{-7}

$e_{b_2} = 0{,}7 \times 10^{-7}$

Péndulos 46 y 47.

36×10^{-7}
38×10^{-7}
34×10^{-7}
33×10^{-7}

35×10^{-7}

$e_{b_3} = 1{,}1 \times 10^{-7}$

Péndulos 65 y 66.

28×10^{-7}
27×10^{-7}
26×10^{-7}
28×10^{-7}

27×10^{-7}

$e_{b_4} = 0{,}5 \times 10^{-7}$

En los cuadros siguientes figuran los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios respectivos.

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014319	0,5014899	0,5014486	0,5015048
298	908	499	54
329	915	501	69
306	306	503	60
0,5014313	0,5014907	0,5014497	0,5015058

Péndulo 47.	Péndulo 66.	Péndulo 46.	Péndulo 65.
0,5067797	0,5065374	0,5066010	0,5065483
806	76	5985	78
787	69	5994	74
797	66	5991	66
783	65	5973	57
771	53	5989	51
0,5067790	0,5065367	0,5065990	0,5065468

FECHAS — 1922	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷ Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°		s	s	s						s
10 Agosto.....	104	5 44	715,10	14,1	23,47	11,6	+ 0,69	156,545	0,5016021	— 4	— 580	— 1129	+ 40	— 29	0,5014319
10 id.	105	7 4	715,05	14,5	23,42	11,6	+ 0,69	151,145	6595	— 4	— 584	— 1110	+ 40	— 38	4899
10 id.	106	8 22	714,90	14,5	23,42	11,5	+ 0,69	155,075	6173	— 4	— 572	— 1122	+ 40	— 29	4486
10 id.	107	9 42	714,65	14,1	23,42	11,6	+ 0,69	149,910	6732	— 4	— 574	— 1108	+ 40	— 38	5048
10 id.	104	11 40	713,85	14,4	23,52	11,6	+ 0,69	156,730	6002	— 4	— 579	— 1132	+ 40	— 29	4298
10 id.	105	12 58	713,20	15,1	23,62	11,9	+ 0,69	150,990	6612	— 4	— 583	— 1119	+ 40	— 38	4908
10 id.	106	14 21	712,75	14,9	23,82	11,6	+ 0,69	154,800	6202	— 4	— 569	— 1141	+ 40	— 29	4499
10 id.	107	15 40	712,70	14,9	23,97	11,6	+ 0,69	149,655	6761	— 4	— 571	— 1134	+ 40	— 38	5054
11 id.	104	5 34	714,65	14,4	23,02	11,7	+ 0,64	156,625	6013	— 4	— 581	— 1107	+ 37	— 29	4329
11 id.	105	6 54	714,70	14,8	23,02	11,6	+ 0,64	151,145	6595	— 4	— 584	— 1091	+ 37	— 38	4915
11 id.	106	8 11	714,65	14,7	23,07	11,4	+ 0,64	155,065	6174	— 4	— 572	— 1105	+ 37	— 29	4501
11 id.	107	9 30	714,55	14,8	23,22	11,9	+ 0,64	149,785	6746	— 4	— 574	— 1098	+ 37	— 38	5069
11 id.	104	11 35	714,35	14,6	23,47	11,6	+ 0,64	156,645	6011	— 4	— 580	— 1129	+ 37	— 29	4306
11 id.	105	12 54	714,20	15,1	23,57	11,6	+ 0,64	151,025	6609	— 4	— 583	— 1117	+ 37	— 38	4904
11 id.	106	14 11	714,15	14,9	23,72	11,6	+ 0,64	154,770	6205	— 4	— 570	— 1136	+ 37	— 29	4503
11 id.	107	15 29	714,45	14,9	23,87	11,7	+ 0,64	149,605	6767	— 4	— 573	— 1129	+ 37	— 38	5060

FECHAS — 1922	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷ Por la amplitud	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sosten.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
12 Agosto.....	47	6 38	716,40	14,7	23,12	13,1	+ 1,10	36,4918	0,5069460	— 5	— 564	— 1124	+ 65	— 35	0,5067797
12 id.	66	7 17	716,15	14,5	23,17	12,9	+ 1,10	37,7924	7038	— 5	— 585	— 1112	+ 65	— 27	5374
12 id.	46	7 58	716,05	14,9	23,27	13,1	+ 1,10	37,4484	7662	— 5	— 562	— 1115	+ 65	— 35	6010
12 id.	65	8 39	715,95	15,2	23,32	13,0	+ 1,10	37,7816	7057	— 5	— 593	— 1014	+ 65	— 27	5483
12 id.	47	9 20	715,90	14,9	23,37	13,1	+ 1,10	36,4818	9480	— 5	— 563	— 1136	+ 65	— 35	7806
12 id.	66	10 1	715,75	15,2	23,52	13,0	+ 1,10	37,7820	7056	— 5	— 584	— 1129	+ 65	— 27	5376
12 id	46	11 42	715,20	15,2	23,87	13,1	+ 1,10	37,4480	7663	— 5	— 560	— 1143	+ 65	— 35	5985
12 id.	65	12 22	715,05	15,6	23,97	13,1	+ 1,10	37,7706	7077	— 5	— 590	— 1042	+ 65	— 27	5478
12 id.	47	13 2	714,95	15,0	24,07	13,1	+ 1,10	36,4748	9493	— 5	— 561	— 1170	+ 65	— 35	7787
12 id.	66	13 41	714,95	14,9	24,17	13,1	+ 1,10	37,7702	7078	— 5	— 582	— 1160	+ 65	— 27	5369
12 id.	46	14 21	714,95	14,9	24,27	13,1	+ 1,10	37,4322	7692	— 5	— 560	— 1163	+ 65	— 35	5994
12 id.	65	15 1	715,05	14,9	24,32	13,1	+ 1,10	37,7646	7088	— 5	— 590	— 1057	+ 65	— 27	5474
13 id.	47	6 34	715,65	14,0	23,52	13,1	+ 0,90	36,4762	9490	— 5	— 563	— 1143	+ 53	— 35	7797
13 id.	66	7 13	715,60	14,6	23,57	13,1	+ 0,90	37,7802	7060	— 5	— 584	— 1131	+ 53	— 27	5366
13 id.	46	7 53	715,50	14,9	23,62	13,1	+ 0,90	37,4442	7670	— 5	— 561	— 1131	+ 53	— 35	5991
13 id.	65	8 34	715,25	14,8	23,67	13,0	+ 0,90	37,7770	7065	— 5	— 591	— 1029	+ 53	— 27	5466
13 id.	47	9 14	714,95	14,8	23,77	13,0	+ 0,90	36,4782	9487	— 5	— 562	— 1155	+ 53	— 35	7783
13 id.	66	9 53	714,60	14,2	23,87	13,0	+ 0,90	37,7732	7072	— 5	— 582	— 1146	+ 53	— 27	5365
13 id.	46	11 40	713,65	13,7	24,17	13,1	+ 0,90	37,4402	7677	— 5	— 559	— 1158	+ 53	— 35	5973
13 id.	65	12 21	713,30	13,4	24,27	13,1	+ 0,90	37,7690	7080	— 5	— 589	— 1055	+ 53	— 27	5457
13 id.	47	13 1	712,95	13,8	24,43	13,1	+ 0,90	36,4688	9505	— 5	— 559	— 1188	+ 53	— 35	7771
13 id.	66	13 40	712,75	13,8	24,53	13,1	+ 0,90	37,7638	7089	— 5	— 580	— 1177	+ 53	— 27	5353
13 id.	46	14 20	712,60	13,4	24,63	13,0	+ 0,90	37,4198	7714	— 5	— 558	— 1180	+ 53	— 35	5989
13 id.	65	15 00	712,55	12,8	24,78	13,0	+ 0,90	37,7604	7095	— 5	— 588	— 1077	+ 53	— 27	5451

ESTACIÓN DE SORT

Local de observación.

Se instalaron los aparatos en el salón de sesiones del Ayuntamiento, colocándose la barraca astronómica en un solar próximo, propiedad de D. Pedro Olives (véase plano y fotografía).

Las coordenadas geográficas del punto de observación son las siguientes:

Longitud respecto al meridiano de Greenwich	1° 7' 55'' E.
Latitud N.	42° 24'
Altitud de la lenteja de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante	720m

Determinación de la hora.

El método seguido es el ya citado en las dos estaciones anteriores y en el cuadro siguiente figuran los estados y movimientos del reloj.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s'.	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
29 de Agosto de 1922	20 30	+ 7,92 ± 0,04	— 0,78 ± 0,05
31 id. id.	19 9	+ 6,41 ± 0,03	— 0,98 ± 0,08
1.° de Septiembre de 1922	18 13	+ 5,47 ± 0,07	— 1,22 ± 0,07
2 id. id.	18 00	+ 4,26 ± 0,01	— 1,00 ± 0,04
4 id. id.	18 00	+ 2,27 ± 0,04	

Siendo el error medio del conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}06.$$

Duraciones de oscilación.

En los estados señalados con las letras D_1 y D_2 se muestran los datos de observación, así como los valores de las duraciones de oscilación observadas y reducidas.

Los péndulos 104-106 y 66-65 oscilaron en dirección NW.-SE. y los 105-107 y 46-47 en la NE.-SW., deduciéndose los siguientes resultados del estudio del balance:

Péndulos 104 y 106.

29×10^{-7}
28×10^{-7}
29×10^{-7}

29×10^{-7}

$e_{b_1} = 0{,}4 \times 10^{-7}$

Péndulos 105 y 107.

34×10^{-7}
34×10^{-7}
34×10^{-7}

34×10^{-7}

$e_{b_2} = 0{,}0 \times 10^{-7}$

Péndulos 46 y 47.

40×10^{-7}
40×10^{-7}
40×10^{-7}
42×10^{-7}

40×10^{-7}

$e_{b_3} = 0{,}6 \times 10^{-7}$

Péndulos 65 y 66.

35×10^{-7}
33×10^{-7}
32×10^{-7}
31×10^{-7}

33×10^{-7}

$e_{b_4} = 0{,}9 \times 10^{-7}$

En los dos cuadros siguientes figuran resumidos los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios.

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014433	0,5015009	0,5014595	0,5015155
28	30	602	66
44	34	608	76
38	32	604	50
0,5014436	0,5015026	0,5014602	0,5015162

Péndulo 47.	Péndulo 66.	Péndulo 46.	Péndulo 65.
0,5067879	0,5065473	0,5066083	0,5065547
78	66	96	44
85	44	81	36
73	65	79	52
79	70	90	41
82	66	94	46
0,5067879	0,5065464	0,5066087	0,5065544

FECHAS — 1922	Péndulos	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
30 Agosto.....	104	8 23	702,60	11,6	22,21	11,8	— 0,78	155,275	0,5016153	— 4	— 573	— 1069	— 45	— 29	0,5064433
30 íd.	105	9 44	702,40	11,6	22,21	11,7	— 0,78	150,010	6721	— 4	— 577	— 1052	— 45	— 34	5009
30 íd.	106	11 00	702,30	11,6	22,21	11,7	— 0,78	153,860	6302	— 4	— 565	— 1064	— 45	— 29	4595
30 íd.	107	13 25	702,55	11,9	22,21	11,7	— 0,78	148,815	6856	— 4	— 567	— 1051	— 45	— 34	5155
30 íd.	104	14 40	702,80	11,6	22,21	11,6	— 0,78	155,305	,6149	— 4	— 574	— 1069	— 45	— 29	4428
30 íd.	105	16 1	703,20	11,7	22,21	11,7	— 0,78	149,820	6743	— 4	— 577	— 1052	— 45	— 34	5030
31 íd.	106	8 19	702,45	12,5	21,56	11,6	— 0,98	153,960	6291	— 4	— 566	— 1033	— 57	— 29	4602
31 íd	107	9 38	702,15	12,2	21,51	11,5	— 0,98	148,900	6846	— 4	— 568	— 1017	— 57	— 34	5166
31 íd.	104	10 56	702,15	11,8	21,51	11,7	— 0,98	155,465	6133	— 4	— 574	1035	— 57	— 29	4444
31 íd.	105	13 48	702,45	11,4	21,41	11,6	— 0,98	150,015	6721	— 4	— 578	— 1014	— 57	— 34	5034
31 íd.	106	15 4	702,45	11,1	21,36	11,6	— 0,98	153,985	6288	— 4	— 567	- 1023	- 57	— 29	4608
31 íd.	107	16 21	702,80	10,8	21,31	11,6	- 0,98	148,875	6849	— 4	— 570	— 1008	— 57	— 34	5176
1.º Septiembre..	104	8 14	703,95	10,8	20,46	11,6	— 1,22	155,745	6104	— 4	— 578	— 984	— 71	— 29	4438
1.º íd. ..	105	9 34	703,65	11,0	20,51	11,7	— 1,22	150,255	6694	— 4	— 581	— 972	— 71	— 34	5032
1.º íd. ..	106	10 49	703,20	10,6	20,56	11,6	— 1,22	154,230	6262	— 4	— 569	— 985	— 71	— 29	4604
1.º íd. ..	107	13 16	702,45	10,3	20,66	11,8	— 1,22	149,445	6785	— 4	— 571	— 977	— 71	— 34	5150

FECHAS — 1922	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°		s	s	s						s
1.º Septiembre..	47	15 1	702,35	10,6	20,71	13,0	— 1,22	36,4400	0,5069560	— 5	— 557	— 1007	— 72	— 40	0,5067879
1.º id. ..	66	15 40	702,25	11,0	20,71	13,1	— 1,22	37,7262	7157	— 5	— 580	— 994	— 72	— 33	5473
1.º id. ..	46	16 21	702,25	10,8	20,71	13,1	— 1,22	37,4008	7749	— 5	— 557	— 992	— 72	— 40	6083
1.º id. ..	65	17 00	702,35	10,9	20,71	13,0	— 1,22	37,7330	7145	— 5	— 588	— 900	— 72	— 33	5547
2 id. ..	47	8 22	702,20	11,1	19,90	13,1	— 1,00	36,4668	9509	— 5	— 560	— 967	— 59	— 40	7878
2 id. ..	66	9 2	702,00	11,3	19,90	13,1	— 1,00	37,7582	7099	— 5	— 581	— 955	— 59	— 33	5466
2 id. ..	46	9 42	701,75	11,3	19,95	13,1	— 1,00	37,4198	7714	— 5	— 558	— 956	— 59	— 40	6096
2 id. ..	65	10 22	701,50	11,3	20,00	13,1	— 1,00	37,7584	7099	— 5	— 588	— 870	— 59	— 33	5544
2 id. ..	47	11 2	701,50	11,3	20,05	13,1	— 1,00	36,4594	9523	— 5	— 559	— 975	— 59	— 40	7885
2 id. ..	66	13 59	701,35	11,9	20,10	13,1	— 1,00	37,7654	7086	— 5	— 580	— 965	— 59	— 33	5444
2 id. ..	46	14 40	701,35	12,3	20,10	13,1	— 1,00	37,4250	7705	— 5	— 557	— 963	— 59	— 40	6081
2 id. ..	65	15 20	701,30	12,1	20,10	13,1	— 1,00	37,7606	7095	— 5	— 588	— 874	— 59	— 33	5536
2 id. ..	47	16 00	701,25	12,0	20,10	13,1	— 1,00	36,4652	9512	— 5	— 558	— 977	— 59	— 40	7873
2 id. ..	66	16 40	701,35	12,0	20,10	13,0	— 1,00	37,7540	7107	— 5	— 580	— 965	— 59	— 33	5465
3 id. ..	46	8 45	703,30	9,2	19,01	13,1	— 1,00	37,4516	7656	— 5	— 562	— 911	— 59	— 40	6079
3 id. ..	65	9 24	703,30	9,1	19,01	13,0	— 1,00	37,7752	7069	— 5	— 593	— 827	— 59	— 33	5552
3 id. ..	47	10 4	703,30	9,4	19,06	13,2	— 1,00	36,4850	9473	— 5	— 563	— 927	— 59	— 40	7879
3 id. ..	66	10 45	703,25	9,7	19,11	13,0	— 1,00	37,7758	7068	— 5	— 584	— 917	— 59	— 33	5470
3 id. ..	46	11 26	703,20	9,7	19,16	13,1	— 1,00	37,4422	7673	— 5	— 561	— 918	— 59	— 40	6090
3 id. ..	65	13 34	703,45	9,1	19,31	13,0	— 1,00	37,7746	7070	— 5	— 592	— 840	— 59	— 33	5541
3 id. ..	47	14 14	703,50	9,1	19,31	13,1	— 1,00	36,4774	9488	— 5	— 563	— 939	— 59	— 40	7882
3 id. ..	66	14 53	703,75	9,1	19,31	13,0	— 1,00	37,7720	7074	— 5	— 584	— 927	— 59	— 33	5466
3 id. ..	46	15 32	704,25	9,1	19,31	13,3	— 1,00	37,4356	7685	— 5	— 562	— 925	— 59	— 40	6094
3 id. ..	65	16 12	704,35	8,9	19,31	13,0	— 1,00	37,7710	7076	— 5	— 593	— 840	— 59	— 33	5546

ESTACIÓN DE PUIGCERDÁ

Local de observación.

Se hicieron las observaciones de los péndulos en una clase del Colegio de los PP. Escolapios, montándose la barraca astronómica en la huerta del mismo (veáse plano y fotografía).

Las coordenadas geográficas del punto de observación son las siguientes:

Longitud respecto al meridiano de Greenwich	1° 54' 45''
Latitud N	42° 25'
Altitud de la lenteja de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante	1 190m

Determinación de la hora.

Se hizo, como siempre, por observaciones de pasos de estrellas por el meridiano con el anteojo Repsold.

En el cuadro siguiente figura el resumen de los estados y movimientos del reloj en los días de observación con los errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
17 de Septembre de 1922	20 4	− 0,41 ± 0,04	
18 id. id.	18 57	− 0,45 ± 0,02	− 0,04 ± 0,04
19 id. id.	18 57	− 0,34 ± 0,04	+ 0,11 ± 0,04
20 id. id.	18 57	+ 0,15 ± 0,05	+ 0,49 ± 0,06
21 id. id.	19 22	+ 0,40 ± 0,03	+ 0,25 ± 0,06
22 id. id.	18 57	+ 0,99 ± 0,04	+ 0,60 ± 0,05

Siendo el error medio del conjunto de las observaeiones.

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}05$$

Duraciones de oscilación.

En los estados señalados con las letras E_1 y E_2 figuran los valores de las reducciones para deducir los valores de las oscilaciones reducidas, así como los demás datos de observación.

Los péndulos 104-106 y 65-66 oscilaron en dirección NW.-SE. y los 105-107 y 46-47 en la NE.-SW., deduciéndose los siguientes resultados del estudio del balance.

Péndulos 104 y 106.

41×10^{-7}
36×10^{-7}
41×10^{-7}
36×10^{-7}

39×10^{-7}

$e_{b_1} = 1{,}5 \times 10^{-7}$

Péndulos 105 y 107.

43×10^{-7}
43×10^{-7}
35×10^{-7}
41×10^{-7}

41×10^{-7}

$e_{b_2} = 1{,}9 \times 10^{-7}$

Péndulos 46 y 47.

44×10^{-7}
46×10^{-7}
41×10^{-7}
42×10^{-7}

43×10^{-7}

$e_{b_3} = 1{,}1 \times 10^{-7}$

Péndulos 65 y 66.

34×10^{-7}
34×10^{-7}
33×10^{-7}
40×10^{-7}

35×10^{-7}

$e_{b_4} = 1{,}6 \times 10^{-7}$

En los cuadros siguientes se resumen los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios.

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014681	0,5015327	0,5014861	0,5015401
684	324	03	422
688	(259)	30	440
661	346	70	396
715	341		
0,5014686	0,5015335	0,5014841	0,5015415

Péndulo 47.	Péndulo 66.	Péndulo 46.	Péndulo 65.
0,5068099	0,5065683	0,5066304	0,5065777
099	703	(274)	764
125	(740)	342	793
104	690	324	806
151	705	(276)	792
148	713	343	793
0,5068121	0,5065699	0,5066328	0,5065787

Los valores de los péndulos 105, 66 y 46 que figuran entre paréntesis se han suprimido por diferir bastante de los valores medios de dichos péndulos, teniéndose en cuenta dicha supresión para calcular los valores medios definitivos que figuran en los cuadros anteriores.

ESTACIÓN DE PUIGCERDÁ

FECHAS — 1922	Péndulos	Hora sidérea	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	"	s	s	s						s
18 Septiembre. .	104	9 25	670,70	9,2	14,19	11,6	— 0,04	157,025	0,5015972	— 4	— 563	— 683	— 2	— 39	0,5014681
18 íd. ..	105	10 49	670,40	9,3	14,29	11,6	— 0,04	150,945	6617	— 4	— 566	677	— 2	— 41	5327
18 íd. ..	106	12 9	670,15	9,4	14,43	11,6	— 0,04	155,290	6151	— 4	— 554	— 691	— 2	— 39	4861
18 íd. ..	107	14 32	670,00	9,6	14,68	11,6	— 0,04	150,220	6698	— 4	— 556	— 694	— 2	— 41	5401
18 íd. ..	104	15 49	670,10	9,8	14,73	11,6	— 0,04	156,750	6000	— 4	— 562	— 709	— 2	— 39	4684
18 íd. ..	105	17 11	670,35	10,1	14,83	11,9	— 0,04	150,745	6639	— 4	— 565	— 703	— 2	— 41	5324
19 íd. ..	106	9 35	671,75	9,4	14,39	11,5	+ 0,11	155,930	6084	— 4	— 555	— 689	+ 6	— 39	4803
19 íd. ..	107	10 54	671,65	9,9	14,48	11,7	+ 0,11	150,170	6703	— 4	— 557	— 685	+ 6	— 41	5422
19 íd. ..	104	12 10	671,45	9,8	14,63	11,7	+ 0,11	156,825	5992	— 4	563	— 704	+ 6	— 39	4688
19 íd. ..	105	14 33	671,25	9,4	14,78	11,9	+ 0,11	151,430	6564	— 4	— 566	— 700	+ 6	— 41	5259
19 íd. ..	106	15 50	671,40	9,8	14,88	11,6	+ 0,11	155,450	6134	— 4	— 554	— 713	+ 6	— 39	4830
19 íd. ..	107	17 9	671,85	9,9	14,98	11,7	+ 0,11	149,795	6745	— 4	— 557	— 709	+ 6	— 41	5440
20 íd. ..	104	9 46	674,10	9,9	14,58	11,6	+ 0,49	157,315	5942	— 4	— 565	— 701	+ 28	— 39	4661
20 íd. ..	105	11 8	673,80	9,9	14,68	11,9	+ 0,49	150,855	6627	— 4	— 568	— 696	+ 28	— 41	5346
20 íd. ..	106	12 25	673,60	9,8	14,83	11,6	+ 0,49	155,280	6152	— 4	— 556	— 711	+ 28	— 39	4870
20 íd. ..	107	14 32	673,30	9,9	15,08	11,8	+ 0,49	150,345	6684	— 4	— 558	— 713	+ 28	— 41	5396
20 íd. ..	104	16 02	673,40	9,8	15,18	11,8	+ 0,49	156,520	6024	— 4	— 564	— 730	+ 28	— 39	4715
20 íd. ..	105	17 23	673,60	10,1	15,28	11,8	+ 0,49	150,660	6649	— 4	— 567	— 724	+ 28	— 41	5341

FECHAS — 1922	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 − 7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sosten.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
21 Septiembre..	47	9 47	673,50	9,7	14,73	13,1	+ 0,25	36,5258	0,5069395	— 5	— 547	— 716	+ 15	— 43	0,5068099
21 íd. ..	66	10 26	673,30	9,8	14,73	13,0	+ 0,25	37,8236	6982	— 5	— 567	— 707	+ 15	— 35	5683
21 íd. ..	46	11 06	673,15	10,1	14,83	13,1	+ 0,25	37,4868	7592	— 5	— 545	— 710	+ 15	— 43	6304
21 íd. ..	65	11 45	673,00	10,1	14,93	13,1	+ 0,25	37,7988	7026	— 5	— 575	— 649	+ 15	— 35	5777
21 íd. ..	47	12 25	672,75	9,8	14,98	13,1	+ 0,25	36,5150	9416	— 5	— 546	— 728	+ 15	— 43	8099
21 íd. ..	66	13 4	672,55	9,8	15,08	13,1	+ 0,25	37,8034	7018	— 5	— 566	— 724	+ 15	— 35	5703
21 íd. ..	46	14 47	672,10	9,5	15,23	13,2	+ 0,25	37,4928	7581	— 5	— 544	— 730	+ 15	— 43	6274
21 íd. ..	65	15 27	672,10	9,8	15,28	13,0	+ 0,25	37,7900	7026	— 5	— 573	— 664	+ 15	— 35	5764
21 íd. ..	47	16 8	672,15	10,1	15,33	13,3	+ 0,25	36,4982	9448	— 5	— 545	— 745	+ 15	— 43	8125
21 íd. ..	66	16 48	672,25	10,5	15,38	13,1	+ 0,25	37,7758	7068	— 5	— 565	— 738	+ 15	— 35	5740
21 íd. ..	46	17 28	672,35	10,5	15,42	13,2	+ 0,25	37,4506	7658	— 5	— 544	— 739	+ 15	— 43	6342
21 íd. ..	65	18 7	672,45	10,5	15,47	13,1	+ 0,25	37,7780	7064	— 5	— 573	— 673	+ 15	— 35	5793
22 íd. ..	47	9 22	672,05	10,1	14,93	13,2	+ 0,60	36,5294	9388	— 5	— 545	— 726	+ 35	— 43	8104
22 íd. ..	66	10 1	671,85	10,3	14,93	13,0	+ 0,60	37,8262	6977	— 5	— 566	— 716	+ 35	— 35	5690
22 íd. ..	46	10 42	671,60	10,5	14,98	13,1	+ 0,60	37,4828	7599	— 5	— 544	— 718	+ 35	— 43	6324
22 íd. ..	65	11 22	671,40	10,5	15,08	13,1	+ 0,60	37,7914	7040	— 5	— 573	— 656	+ 35	— 35	5806
22 íd. ..	47	12 1	671,10	10,5	15,18	13,3	+ 0,60	36,4990	9446	— 5	— 544	— 738	+ 35	— 43	8151
22 íd. ..	66	12 41	670,65	10,5	15,23	13,0	+ 0,60	37,8104	7005	— 5	— 564	— 731	+ 35	— 35	5705
22 íd. ..	46	14 27	669,85	10,5	15,33	13,3	+ 0,60	37,5012	7565	— 5	— 542	— 734	+ 35	— 43	6276
22 íd. ..	65	15 6	669,70	10,5	15,33	13,4	+ 0,60	37,7940	7035	— 5	— 571	— 667	+ 35	— 35	5792
22 íd. ..	47	15 46	669,55	10,5	15,38	13,2	+ 0,60	36,4966	9451	— 5	— 542	— 748	+ 35	— 43	8148
22 íd. ..	66	16 25	669,50	10,5	15,47	13,2	+ 0,60	37,8010	7022	— 5	— 562	— 742	+ 35	— 35	5713
22 íd. ..	46	17 5	669,55	10,5	15,52	13,1	+ 0,60	37,4602	7640	— 5	— 541	— 743	+ 35	— 43	6343
22 íd. ..	65	17 45	669,60	10,5	15,52	13,1	+ 0,60	37,7888	7044	— 5	— 571	— 675	+ 35	— 35	5793

ESTACIÓN DE MADRID (cierre)

Local de observación.

Se hicieron las observaciones en el mismo local, ya citado en la estación de salida.

Las coordenadas geográficas son, por tanto, las ya mencionadas anteriormente.

Determinación de la hora.

Se efectuaron las comparaciones necesarias del Strasser con el magistral del Observatorio Astronómico.

Los estados y movimientos se indican en el siguiente cuadro:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	
23 de Octubre de 1922.....	12 4	+ 0,36 ± 0,04	
24 id. id.	12 9	+ 0,49 ± 0,03	s + 0,13 ± 0,05
25 id. id.	12 17	— 0,14 ± 0,06	— 0,63 ± 0,07
26 id. id.	12 19	— 0,76 ± 0,04	— 0,62 ± 0,07
27 id. id.	12 39	— 1,28 ± 0,02	— 0,51 ± 0,04
28 id. id.	12 49	— 1,65 ± 0,02	— 0,37 ± 0,03
14 de Noviembre de 1922.....	12 30	+ 5,66 ± 0,02	
14 id. id. 2.ª.....	21 40	+ 5,71 ± 0,02	+ 0,13 ± 0,03
15 id. id.	21 51	+ 6,10 ± 0,04	+ 0,39 ± 0,04
16 id. id.	21 48	+ 6,61 ± 0,04	+ 0,51 ± 0,06
17 id. id.	21 50	+ 7,16 ± 0,05	+ 0,55 ± 0,06

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}05.$$

Duraciones de oscilación.

Los estados señalados con las letras F_1 y F_2 contienen los datos de observación, así como los resultados inmediatos y reducidos.

El balance del sostén dió los siguientes resultados, oscilando los 104 y 106 y 65-66 en dirección NE.-SW., y los 105 y 107 y 46-47 en la normal a la misma.

Péndulos 104 y 106.

45×10^{-7}
45×10^{-7}
42×10^{-7}
43×10^{-7}

44×10^{-7}

$e_{b_1} = 0{,}8 \times 10^{-7}$

Péndulos 105 y 107.

53×10^{-7}
53×10^{-7}
53×10^{-7}
54×10^{-7}

53×10^{-7}

$e_{b_2} = 0{,}3 \times 10^{-7}$

Péndulos 46 y 47.

49×10^{-7}
51×10^{-7}
50×10^{-7}
53×10^{-7}

51×10^{-7}

$e_{b_3} = 0{,}9 \times 10^{-7}$

Péndulos 65 y 66.

45×10^{-7}
36×10^{-7}
35×10^{-7}
44×10^{-7}

40×10^{-7}

$e_{b_4} = 2{,}6 \times 10^{-7}$

Los cuadros siguientes contienen los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios respectivos:

Péndulo 47.	Péndulo 66.	Péndulo 46.	Péndulo 65.
0,5068325	0,5065900	0,5066517	0,5066002
299	892	524	5998
300	909	508	5994
310	893	510	5983
308	889	495	5984
314	892	512	6000
321	897	522	6007
0,5068311	0,5065896	0,5066513	0,5065995

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014861	0,5015512	0,5015042	0,5015628
95	52	39	28
79	24	52	38
73	37	48	06
76	34	24	23
69	02	30	23
0,5014876	0,5015527	0,5015039	0,5015624

Estado F_1. ESTACIÓN DE MADRID (cierre).

FECHAS — 1922	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
23 Octubre.....	47	12 29	698,05	10,6	15,57	13,1	+ 0,13	36,3704	0,5069695	— 5	— 565	— 757	+ 8	— 51	0,5068325
23 íd.	66	13 8	698,10	10,8	15,67	13,0	+ 0,13	37,6610	7275	— 5	— 586	— 752	+ 8	— 40	5900
23 íd.	46	13 49	698,20	10,6	15,82	13,1	+ 0,13	37,3258	7887	— 5	— 564	— 758	+ 8	— 51	6517
23 íd.	65	14 29	698,30	10,5	15,97	13,0	+ 0,13	37,6322	7327	— 5	— 594	— 694	+ 8	— 40	6002
23 íd.	47	16 54	698,35	10,5	16,27	13,1	+ 0,13	36,3670	9702	— 5	— 564	— 791	+ 8	— 51	8299
23 íd.	66	17 36	698,55	10,5	16,32	13,0	+ 0,13	37,6488	7297	— 5	— 585	— 783	+ 8	— 40	5892
23 íd.	46	18 16	698,75	10,8	16,37	13,1	+ 0,13	37,3086	7919	— 5	— 563	— 784	+ 8	— 51	6524
23 íd.	65	18 57	698,90	11,2	16,47	12,9	+ 0,13	37,6204	7348	— 5	— 593	— 716	+ 8	— 40	5998
24 íd.	47	12 13	702,75	10,8	15,92	13,0	— 0,63	36,3502	9735	— 5	— 568	— 774	— 37	— 51	8300
24 íd.	66	12 52	702,70	10,6	15,97	13,0	— 0,63	37,6220	7346	— 5	— 589	— 766	— 37	— 40	5909
24 íd.	46	13 32	702,55	10,5	16,07	13,0	— 0,63	37,2986	7938	— 5	— 567	— 770	— 37	— 51	6508
24 íd.	65	14 11	702,40	10,8	16,17	13,0	— 0,63	37,6050	7376	— 5	— 597	— 703	— 37	— 40	5994
25 íd.	47	12 21	704,20	9,6	14,93	13,0	— 0,62	36,3682	9700	— 5	— 572	— 726	— 36	— 51	8310
25 íd.	66	13 00	704,25	9,7	14,97	13,0	— 0,62	37,6556	7285	— 5	— 593	— 718	— 36	— 40	5893
25 íd.	46	13 40	704,10	9,9	15,08	13,1	— 0,62	37,3220	7894	— 5	— 570	— 722	— 36	— 51	6510
25 íd.	65	14 20	703,90	10,1	15,23	13,0	— 0,62	37,6322	7327	— 5	— 601	— 662	— 36	— 40	5983
25 íd.	47	16 46	703,65	9,9	15,67	13,0	— 0,62	36,3516	9732	— 5	— 570	— 762	— 36	— 51	8308
25 íd.	66	17 25	703,75	10,1	15,72	13,1	— 0,62	37,6386	7315	— 5	— 591	— 754	— 36	— 40	5889
25 íd.	46	18 6	703,90	10,1	15,77	13,0	— 0,62	37,3132	7910	— 5	— 568	— 755	— 36	— 51	6495
25 íd.	65	18 45	704,20	10,1	15,87	13,0	— 0,62	37,6168	7355	— 5	— 600	— 690	— 36	— 40	5984
26 íd.	47	12 23	707,70	8,4	13,24	13,1	— 0,51	36,4082	9622	— 5	— 578	— 644	— 30	— 51	8314
26 íd.	66	13 1	707,65	8,9	13,34	13,1	— 0,51	37,6984	7207	— 5	— 600	— 640	— 30	— 40	5892
26 íd.	46	13 41	707,40	9,0	13,49	13,1	— 0,51	37,3624	7820	— 5	— 576	— 646	— 30	— 51	6512
26 íd.	65	14 20	707,05	9,2	13,69	13,0	— 0,51	37,6596	7277	— 5	— 607	— 595	— 30	— 40	6000
27 íd.	47	12 48	705,35	10,0	14,73	13,1	— 0,37	36,3740	9688	— 5	— 573	— 716	— 22	— 51	8321
27 íd.	66	13 26	705,25	10,0	14,78	13,0	— 0,37	37,6656	7267	— 5	— 594	— 709	— 22	— 40	5897
27 íd.	46	14 06	705,10	10,2	14,88	13,1	— 0,37	37,3276	7884	— 5	— 571	— 713	— 22	— 51	6522
27 íd.	65	14 47	704,85	10,4	15,03	13,0	— 0,37	37,6304	7330	— 5	— 602	— 654	— 22	— 40	6007

FECHAS — 1922	Péndulos	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Periodo de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷ Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
14 Noviembre..	104	12 33	712,00	7,6	11,75	11,6	+ 0,13	156,070	0,5016070	— 4	— 604	— 565	+ 8	— 44	0,5014861
14 íd. ..	105	13 52	712,00	7,9	12,00	11,6	+ 0,13	149,845	6740	— 4	— 607	— 569	+ 8	— 54	5512
14 íd. ..	106	15 10	711,06	8,1	12,30	11,6	+ 0,13	154,210	6264	— 4	— 593	— 589	+ 8	— 44	5042
14 íd. ..	107	17 47	711,01	8,4	12,84	11,6	+ 0,13	148,615	6879	— 4	— 594	— 607	+ 8	— 54	5628
14 íd. ..	104	19 05	711,15	8,5	13,04	11,6	+ 0,13	155,185	6162	— 4	— 600	— 627	+ 8	— 44	4895
14 íd. ..	105	20 24	711,30	8,4	13,24	11,5	+ 0,13	149,030	6832	— 4	— 603	— 627	+ 8	— 54	5552
15 íd. ..	106	12 36	712,65	7,6	11,85	11,6	+ 0,39	154,565	6227	— 4	— 595	— 568	+ 23	— 44	5039
15 íd. ..	107	13 55	712,55	7,9	12,05	11,6	+ 0,39	149,040	6830	— 4	— 597	— 570	+ 23	— 54	5628
15 íd. ..	104	15 11	712,20	8,1	12,35	11,5	+ 0,39	155,775	6100	— 4	— 602	594	+ 23	— 44	4879
15 íd. ..	105	17 53	711,70	7,9	12,84	11,6	+ 0,39	149,560	6772	— 4	— 605	— 608	+ 23	— 54	5524
15 íd. ..	106	19 10	711,75	8,1	13,04	11,5	+ 0,39	153,935	6294	— 4	— 592	— 625	+ 23	— 44	5052
15 íd. ..	107	20 28	711,85	8,4	13,14	11,6	+ 0,39	148,525	6889	— 4	— 594	— 622	+ 23	— 54	5638
16 íd. ..	104	12 51	710,45	7,4	11,75	11,6	+ 0,51	156,185	6058	— 4	— 602	— 565	+ 30	— 44	4873
16 íd. ..	105	14 09	709,75	7,9	11,90	11,6	+ 0,51	149,900	6734	— 4	— 605	— 564	+ 30	— 54	5537
16 íd. ..	106	15 25	708,70	8,1	12,25	11,4	+ 0,51	154,405	6244	— 4	— 591	— 587	+ 30	— 44	5048
16 íd. ..	107	17 58	708,05	8,4	12,84	11,7	+ 0,51	149,015	6833	— 4	— 592	— 607	+ 30	— 54	5606
16 íd. ..	104	19 14	708,20	8,2	13,04	11,6	+ 0,51	155,595	6119	— 4	— 598	— 627	+ 30	— 44	4876
16 íd. ..	105	20 33	708,95	7,8	13,24	11,8	+ 0,51	149,385	6791	— 4	— 602	— 627	+ 30	— 54	5534
17 íd. ..	106	12 37	712,70	7,6	11,45	11,4	+ 0,55	154,965	6185	— 4	— 596	— 549	+ 32	— 44	5024
17 íd. ..	107	13 55	712,60	7,9	11,70	11,7	+ 0,55	149,310	6800	— 4	— 598	— 553	+ 32	— 54	5623
17 íd. ..	104	15 11	712,30	7,6	12,00	11,5	+ 0,55	156,110	6066	— 4	— 604	— 577	+ 32	— 44	4869
17 íd. ..	105	18 01	712,15	7,9	12,64	11,5	+ 0,55	149,905	6733	— 4	— 606	— 599	+ 32	— 54	5502
17 íd. ..	106	19 18	712,25	8,1	12,70	11,4	+ 0,55	154,325	6252	— 4	— 593	— 613	+ 32	— 44	5030
17 íd. ..	107	20 36	712,35	8,1	12,90	11,7	+ 0,55	148,835	6854	— 4	— 595	— 610	+ 32	— 54	5623

CAPÍTULO V

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS Y PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES EN LA CAMPAÑA DE 1922

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS

En los dos estados siguientes figuran los promedios de los valores de las duraciones de oscilación reducidas en cada estación, calculados anteriormente.

Estado núm. 1.

ESTACIONES	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
Madrid (salida)	0,5014867	0,5015470	0,5015046	0,5015604
Roncal	4258	4848	4424	4967
Boltaña	4313	4907	4497	5058
Sort	4436	5026	4602	5162
Puigcerdá	4686	5335	4841	5415
Madrid (cierre)	4876	5527	5039	5624

Estado núm. 2.

ESTACIONES	Péndulo 47.	Péndulo 66.	Péndulo 46.	Péndulo 65.
Madrid (salida)	0,5068282	0,5065894	0,5066527	0,5065999
Roncal	7665	5256	5866	5353
Boltaña	7790	5367	5990	5468
Sort	7879	5464	6087	5544
Puigcerdá	8121	5699	6328	5787
Madrid (cierre)	8311	5896	6513	5995

Como promedios de las observaciones en Madrid, se obtienen los siguientes:

ESTACIONES	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
Madrid (salida).....	0,5014872	0,5015499	0,5015043	0,5015614
Madrid (cierre).....				
Diferencias.....	9	57	7	20

ESTACIONES	Péndulo 47.	Péndulo 66.	Péndulo 46.	Péndulo 65.
Madrid (salida).....	0,5068297	0,5065895	0,5066520	0,5065997
Madrid (cierre).....				
Diferencias.....	29	2	14	4

Las diferencias entre el promedio de la duración de oscilación de cada péndulo con los promedios de los otros en una estación cualquiera, comparadas con las correspondientes diferencias en las otras estaciones, mostrarán si hubo o no variación en la longitud de los péndulos durante los diferentes períodos de la campaña.

Como hay poca diferencia de latitud entre Madrid y las estaciones observadas no es preciso introducir corrección ninguna de latitud para hacerlas comparables entre sí.

En los estados siguientes figuran las diferencias citadas:

Estado núm. 3.

ESTACIONES	DIFERENCIAS ENTRE LAS DURACIONES DE OSCILACIÓN DE LOS PÉNDULOS					
	104-105	104-106	104-107	105-106	105-107	106-107
Madrid (salida).....	— 603	— 179	— 737	+ 424	— 134	— 558
Roncal.....	— 590	— 166	— 709	+ 424	— 119	— 543
Boltaña.....	— 594	— 184	— 745	+ 410	— 151	— 561
Sort.....	— 590	— 166	— 726	+ 424	— 136	— 560
Puigcerdá.....	— 649	— 155	— 729	+ 494	— 80	— 574
Madrid (cierre).....	— 651	— 163	— 748	+ 488	— 97	— 585
Diferencias máximas.	61	29	39	84	71	42

Estado núm. 4.

ESTACIONES	DIFERENCIAS ENTRE LAS DURACIONES DE OSCILACIÓN DE LOS PÉNDULOS					
	47-66	47-46	47-65	66-46	66-65	46-65
Madrid (salida).....	+ 2388	+ 1755	+ 2283	— 633	— 105	+ 528
Roncal.....	+ 2409	+ 1799	+ 2312	— 610	— 97	+ 513
Boltaña.....	+ 2423	+ 1800	+ 2322	— 623	— 101	+ 522
Sort.....	+ 2415	+ 1792	+ 2335	— 623	— 80	+ 543
Puigcerdá.....	+ 2422	+ 1793	+ 2334	— 629	— 88	+ 541
Madrid (cierre).....	+ 2415	+ 1798	+ 2316	— 617	— 99	+ 518
Diferencias máximas.	35	45	52	23	25	30

Teniendo presente las diferencias señaladas por los péndulos 105 y 47 entre Madrid (salida) y Madrid (cierre) y los resultados de los estados anteriores, de cuyo examen se deduce que los citados péndulos sufrieron una variación no despreciable durante la campaña, prescindiremos de dichos péndulos para los cálculos sucesivos y deducción del valor de g.

PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES

Para saber la precisión obtenida en las observaciones habrán de calcularse por separado los errores medios cometidos en las diferentes operaciones de que se compone una determinación de esta clase y se englobarán estos errores parciales para obtener el error medio correspondiente al valor de **g** en cada estación.

Cálculo de los errores parciales.

1.° Los errores cometidos en la observación de la duración de oscilación se obtendrán por la fórmula

$$e = 10^{-7} \sqrt{\frac{[vv]}{[n] - m}}$$

en la cual representa [**vv**] la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las duraciones de oscilación y cada uno de estos valores, [**n**] el número total de observaciones, y **m** el número de péndulos observados.

Para obtener los valores de [**vv**] tendremos que obtener los de **vv** que son los cuadrados de las diferencias, obteniendo así el cuadro siguiente:

ESTACIONES	Péndulo 104		Péndulo 106		Péndulo 107		Péndulo 66		Péndulo 46		Péndulo 65		[vv]	[n]
	vv	n	vv	n	vv	n	vv	n	vv	n	vv	n		
Madrid (salida).....	2895	5	7602	5	1570	5	1195	8	1103	8	2311	8	16766	39
Roncal.....	943	4	635	4	1744	4	963	8	3005	8	1384	8	8674	36
Boltaña.....	566	4	177	4	241	4	335	6	732	6	775	6	2826	30
Sort.....	141	4	89	4	405	4	526	6	255	6	150	6	1566	30
Puigcerdá.....	1499	5	2806	4	1231	4	585	5	1013	4	1087	6	8221	28
Madrid (cierre).....	653	6	565	6	554	6	276	7	577	7	493	7	3118	39
[vv]	6787		11874		5745		3880		6685		6200		41171	
[n]		28		27		27		40		39		41		202

Aplicando la fórmula antes citada, para cada estación, poniendo en vez de [v v] los valores de la penúltima columna, y en vez de [n] los de la última y en vez de **m**, 6, que son los péndulos observados, tendremos:

Madrid (salida)	$e = \pm 22{,}5 \times 10^{-7}$
Roncal	$e = \pm 17{,}0 \times 10^{-7}$
Boltaña	$e = \pm 10{,}9 \times 10^{-7}$
Sort	$e = \pm 8{,}1 \times 10^{-7}$
Puigcerdá	$e = \pm 19{,}3 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)	$e = \pm 9{,}6 \times 10^{-7}$

Los valores de los errores del resultado medio en cada estación se obtienen por la fórmula

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{[n]}} \times e,$$

dando los resultados siguientes:

Madrid (salida)	$e_s = \pm 3{,}6 \times 10^{-7}$
Roncal	$e_s = \pm 2{,}8 \times 10^{-7}$
Boltaña	$e_s = \pm 2{,}0 \times 10^{-7}$
Sort	$e_s = \pm 1{,}5 \times 10^{-7}$
Puigcerdá	$e_s = \pm 3{,}6 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)	$e_s = \pm 1{,}5 \times 10^{-7}$

Los valores de **e** y e_s para el promedio de las dos estaciones de Madrid, serán:

$$e = \sqrt{\frac{16766 + 3118}{39 + 39 - 12}} = \pm 17{,}4 \times 10^{-7}$$

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{78}} \times 17{,}4 = \pm 2{,}0 \times 10^{-7}$$

Para obtener los errores de la duración de oscilación de cada uno de los péndulos, en el conjunto de la campaña, nos valdremos de la misma fórmula, sustituyendo los valores [v v] y [n] por los números contenidos en las dos últimas líneas del cuadro anterior, y **m** por el número de estaciones observadas, que son seis. Así obtendremos:

Péndulo 104 ..... $e_{P.\,104} = \sqrt{\frac{6787}{28 - 6}} \times 10^{-7} = \pm 17{,}6 \times 10^{-7}$

Péndulo 106 ..... $e_{P.\,106} = \sqrt{\frac{11874}{27 - 6}} \times 10^{-7} = \pm 23{,}8 \times 10^{-7}$

Péndulo 107 ..... $e_{P.\,107} = \sqrt{\frac{5745}{27 - 6}} \times 10^{-7} = \pm 16{,}5 \times 10^{-7}$

Péndulo 66 ..... $e_{P.\,66} = \sqrt{\frac{3880}{40 - 6}} \times 10^{-7} = \pm 10{,}7 \times 10^{-7}$

Péndulo 46..... $e_{P.\ 46} = \sqrt{\frac{6685}{39-6}} \times 10^{-7} = \pm 14{,}2 \times 10^{-7}$

Péndulo 65..... $e_{P.\ 65} = \sqrt{\frac{6200}{41-6}} \times 10^{-7} = \pm 13{,}3 \times 10^{-7}$

El error medio general a todos los péndulos será:

$$e'_{P.} = \sqrt{\frac{41171}{202-36}} = \pm 15{,}8 \times 10^{-7}$$

2.° Siendo las correcciones por reducción a la amplitud muy pequeñas, los errores que de ellos pueden provenir son insignificantes y, por tanto, admitiremos que son nulos.

3.° Los errores que provienen por la inseguridad de la constante de reducción al vacío se deducen de los obtenidos al hacer el estudio de las constantes, cuyos valores son:

Péndulo	104.....	$0{,}0000675 \pm 11 \times 10^{-7}$
Id.	106.....	$0{,}0000665 \pm 8 \times 10^{-7}$
Id.	107.....	$0{,}0000668 \pm 11 \times 10^{-7}$
Id.	66.....	$0{,}0000679 \pm 18 \times 10^{-7}$
Id.	46.....	$0{,}0000653 \pm 8 \times 10^{-7}$
Id.	65.....	$0{,}0000689 \pm 13 \times 10^{-7}$

Su promedio es 0,0000672, con un error de

$$\sqrt{\frac{11^2 + 8^2 + 11^2 + 18^2 + 8^2 + 13^2}{6}} = \pm 12{,}0 \times 10^{-7}$$

Siendo la relación entre este error y la constante media

$$\frac{\pm 1.2}{672} = \pm 0{,}0179.$$

En el cuadro siguiente se han reunido los valores de los promedios de las correcciones por reducción al vacío en las diferentes estaciones.

También figuran en él las diferencias entre el valor del promedio de las estaciones de Madrid y los valores de las otras estaciones.

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN AL VACÍO							
	104	106	107	66	46	65	Promedios	|Δ|
Madrid (salida).....	581,0	572,0	574,0	578,8	557,1	587,4	575	—
Roncal.....	584,3	575,3	577,0	581,1	559,3	590,0	578	5
Boltaña.....	580,0	570,8	573,0	582,8	560,0	590,2	576	7
Sort.....	574,8	566,8	569,0	581,5	559,5	590,3	574	9
Puigcerdá.....	563,4	554,8	557,0	565,0	543,3	572,7	559	24
Madrid (cierre).....	601,7	593,3	595,0	591,1	568,4	599,1	591	—
Madrid (promedio)..	591,4	582,7	584,5	585,0	562,8	593,3	583	—

Multiplicando las diferencias que figuran en la última columna del cuadro anterior por $\pm$ 0,0179, deduciremos los valores de los errores por la inseguridad de la constante de reducción al vacío:

Roncal ..... $e_d = \pm 0{,}1 \times 10^{-7}$
Boltaña ..... $e_d = \pm 0{,}1 \times 10^{-7}$
Sort ..... $e_d = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Puigcerdá ..... $e_d = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$

4.° Análogamente se deducen los que proceden por la inseguridad de las constantes de reducción de temperatura, cuyos valores son:

Péndulo 104 ..... 0,000004811 $\pm$ 0,14 $\times 10^{-7}$
Id. 106 ..... 0,000004791 $\pm$ 0,10 $\times 10^{-7}$
Id. 107 ..... 0,000004730 $\pm$ 0,07 $\times 10^{-7}$
Id. 66 ..... 0,000004799 $\pm$ 0,13 $\times 10^{-7}$
Id. 46 ..... 0,000004790 $\pm$ 0,25 $\times 10^{-7}$
Id. 65 ..... 0,000004348 $\pm$ 0,40 $\times 10^{-7}$

Su promedio es 47.115 y el error del valor medio de las constantes de temperatura será:

$$\sqrt{\frac{0{,}14^2 + 0{,}10^2 + 0{,}07^2 + 0{,}13^2 + 0{,}25^2 + 0{,}40^2}{6}} = \pm 0{,}21 \times 10^{-7}$$

y la relación entre este error y la constante media será:

$$\frac{\pm 0{,}21}{47.115} = \pm 0{,}0045$$

En el cuadro siguiente figuran los valores de los promedios de las correcciones por reducción de temperatura en las diferentes estaciones y las diferencias entre el valor del promedio de las estaciones de Madrid y los valores de las otras estaciones:

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN POR TEMPERATURA							
	104	106	107	66	46	65	Promedios	[Δ]
Madrid (salida)	1027,0	1026,8	1023,6	1073,1	1070,9	974,0	1033	—
Roncal	964,8	971,5	977,5	1033,1	1024,4	931,4	984	141
Boltaña	1124,3	1126,0	1117,3	1142,5	1148,3	1045,7	1134	291
Sort	1039,3	1026,3	1013,3	953,8	944,2	858,5	973	130
Puigcerdá	705,4	701,0	700,3	724,0	727,5	664,0	704	139
Madrid (cierre)	592,5	588,5	594,8	731,7	735,4	673,4	653	—
Madrid (promedio)	809,7	807,7	809,2	902,4	903,2	823,7	843	—

Multiplicando las diferencias que figuran en la última columna por $\pm$ 0,0045, obtendremos los valores de los errores por la inseguridad de la constante por reducción de temperatura.

Roncal	$e_t = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}$
Boltaña	$e_t = \pm 1{,}3 \times 10^{-7}$
Sort	$e_t = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}$
Puigcerdá	$e_t = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}$

5.° Los errores e_m producidos en los valores de la duración de oscilación a consecuencia de las ε_m cometidos en la determinación de la hora, se calculan por la fórmula

$$e_m = \pm a s \varepsilon_m,$$

siendo $a = \frac{10+7}{86400}$,

s = promedio de las duraciones de oscilación en cada estación,

ε_m = los errores medios de conjunto de las determinaciones de hora en cada estación, obteniéndose los valores que figuran en el siguiente cuadro:

ESTACIONES	a	s	ε_m	e_m
Madrid (salida)	$\frac{10+7}{86400}$	0,5040656	0,05	$2{,}9 \times 10^{-7}$
Roncal		0021	0,05	$2{,}9 \times 10^{-7}$
Boltaña		0116	0,06	$3{,}5 \times 10^{-7}$
Sort		0216	0,06	$3{,}5 \times 10^{-7}$
Puigcerdá		0459	0,05	$2{,}9 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)		0657	0,05	$2{,}9 \times 10^{-7}$

6.° Los errores cometidos en las determinaciones del balance del sostén, que parcialmente se han obtenido ya en cada estación para cada par de péndulos, son los siguientes:

Madrid (salida)	$e_b = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}$
Roncal	$e_b = \pm 0{,}5 \times 10^{-7}$
Boltaña	$e_b = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
Sort	$e_b = \pm 0{,}3 \times 10^{-7}$
Puigcerdá	$e_b = \pm 0{,}8 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)	$e_b = \pm 0{,}7 \times 10^{-7}$

Cálculo de los errores que afectan a las duraciones de oscilación reducidas.

Obtenidos los errores parciales en las varias operaciones realizadas para deducir las duraciones de oscilación reducidas, tendremos el error total medio en cada estación empleando la fórmula siguiente:

$$E = \sqrt{e_s^2\,(\text{Madrid}) + e_s^2\,(\text{estación observada}) + e_a^2 + e_d^2 + e_t^2 + e_m^2 + e_b^2}.$$

En el cuadro siguiente figuran los cuadrados de estos errores y la suma de los mismos para cada estación.

ESTACIONES	e_g^2 (Madrid).	e_s^2 (Estación).	e_a^2	e_d^2	e_t^2	e_m^2	e_b^2	E^2
Roncal.....	$2,0^2$	$2,8^2$	0,0	$0,1^2$	$0,6^2$	$2,9^2$	$0,5^2$	20,87
Boltaña.....	$2,0^2$	$2,0^2$	0,0	$0,1^2$	$1,3^2$	$3,5^2$	$0,4^2$	22,11
Sort.....	$2,0^2$	$1,5^2$	0,0	$0,2^2$	$0,6^2$	$3,5^2$	$0,3^2$	18,99
Puigcerdá.....	$2,0^2$	$3,6^2$	0,0	$0,4^2$	$0,6^2$	$2,9^2$	$0,8^2$	26,53

Extrayendo la raíz cuadrada de los valores de la última columna, tendremos los errores **E** para la duración de oscilación en cada estación:

Roncal ..... $E = \pm 4,6 \times 10^{-7}$
Boltaña ..... $E = \pm 4,7 \times 10^{-7}$
Sort ..... $E = \pm 4,4 \times 10^{-7}$
Puigcerdá ..... $E = \pm 5,2 \times 10^{-7}$

CAPÍTULO VI

VALORES DE LA INTENSIDAD DE LA FUERZA DE LA GRAVEDAD

CAMPAÑA DE 1922

Para determinar los valores de **g**, o sean los valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en cada estación, aplicamos la fórmula

$$g = g_m - 2g_m \frac{s - s_m}{s_m} + 3g_m \left(\frac{s - s_m}{s_m} \right)^2 + \ldots\ldots$$

en la cual, **g** es el valor de la gravedad que se quiere determinar en cada estación; g_m el valor de la gravedad en Madrid, que es 979,981; **s** el valor de la duración de oscilación en la estación de que se trata, obtenido con un péndulo determinado, y s_m el valor de la duración de oscilación en Madrid, obtenido con el mismo péndulo.

Los valores de s_m para los péndulos 104, 106, 107, 66, 46 y 65 son:

Péndulo	104	$s_m = 0{,}5014872$
Id.	106	$s_m = 0{,}5015043$
Id.	107	$s_m = 0{,}5015614$
Id.	66	$s_m = 0{,}5065895$
Id.	46	$s_m = 0{,}5066520$
Id.	65	$s_m = 0{,}5065997$

Aplicando, pues, la fórmula anterior, llegaremos a los resultados que figuran en el siguiente cuadro:

AÑO	ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios.
1922	Roncal	104	980,221	980,228
		106	23	
		107	34	
		66	28	
		46	34	
		65	30	

AÑO	ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios.
1922	Boltaña	104	980,199	980,191
		106	94	
		107	98	
		66	85	
		46	86	
		65	86	
	Sort	104	980,151	980,153
		106	53	
		107	58	
		66	48	
		46	49	
		65	56	
	Puigcerdá	104	980,054	980,055
		106	60	
		107	59	
		66	57	
		46	55	
		65	62	

Los errores correspondientes a estos valores de **g**, que representaremos por E_g, pueden obtenerse por la fórmula

$$E_g = \pm \frac{2 g_m}{s_m} E,$$

en la que g_m representa el valor de la gravedad en Madrid, 979,981; s_m el promedio de las duraciones de oscilación en Madrid en las estaciones de salida y cierre de la campaña, o sea 0,5040656, y **E** los errores consignados al final del capítulo anterior, que han resultado para las duraciones de oscilación reducidas.

Su aplicación conduce a los valores siguientes:

Roncal ..... $E_g = \pm 1{,}8 \times 10^{-3}$
Boltaña ..... $E_g = \pm 1{,}8 \times 10^{-3}$
Sort ..... $E_g = \pm 1{,}7 \times 10^{-3}$
Puigcerdá ..... $E_g = \pm 2{,}0 \times 10^{-3}$

En resumen, tendremos para valores de la intensidad de la gravedad

Roncal ..... 980,228 ± 0,0018
Boltaña ..... 980,191 ± 0,0018
Sort ..... 980,153 ± 0,0017
Puigcerdá ..... 980,055 ± 0,0020

La reducción de estos valores al nivel del mar la haremos por medio de la fórmula

$$g_s'' = g + \delta g + \delta' g,$$

siendo

$$\delta g = 0{,}0003086\ H \qquad y \qquad \delta' g = \frac{3}{4} \times \frac{\theta}{\theta_m} (g - g_0)$$

en las cuales representan:

H, altitud en metros sobre el nivel del mar, del plano determinado por los centros de las lentejas de los péndulos.

θ_m, densidad media de la Tierra, igual a 5,52.

θ, densidad media de la meseta de observación.

El cuadro siguiente pone de manifiesto el conjunto de estos datos y los valores deducidos de los mismos.

ESTACIONES	g	H	θ	δg	$\delta' g$
Roncal.....	980,228	675	2,6	+ 0,208	— 0,074
Boltaña.....	980,191	606	2,6	+ 0,187	— 0,066
Sort.....	980,153	720	2,6	+ 0,222	— 0,079
Puigcerdá.....	980,055	1190	2,6	+ 0,367	— 0,130

De los cuales deduciremos los valores de

$$g_0 = g + \delta g \qquad y \qquad g_0'' = g_0 + \delta' g$$

que serán respectivamente:

ESTACIONES	g_0''	g_0
Roncal.....	980,436	980,362
Boltaña.....	980,378	980,312
Sort.....	980,375	980,296
Puigcerdá.....	980,422	980,292

El cálculo teórico de los valores de g, que representamos por γ_0, lo haremos por la fórmula de Helmert (1915).

$$\gamma_0 = 978{,}052\ (1 + 0{,}005285\ \text{sen}^2\varphi - 0{,}000007\ \text{sen}^2 2\varphi).$$

En el cuadro siguiente se expresan los valores de γ_0 correspondientes a los diversos de φ que representan la latitud del lugar de observación.

ESTACIONES	φ	γ_0
	° ′	
Roncal.....	42 49	980,433
Boltaña.....	42 26	980,399
Sort.....	42 24	980,396
Puigcerdá.....	42 25	980,397

Finalmente, el conjunto de los valores encontrados se ve reunido en el siguiente cuadro.

Resumen de los valores obtenidos en la campaña de 1922

Número.	ESTACIONES	LATITUD	LONGITUD	ALTITUD	δ	g	g_0	g_0''	τ_0	$g_0'' - \tau_0$	$g_0 - \tau_0$
				m		cm	cm	cm	cm	cm	cm
90	Roncal.....	42° 49′	0° 59′ 6″ W.	675	2,6	980,228	980,436	980,362	980,433	— 0,071	+ 0,003
91	Boltaña	42 26	0 3 9 E.	606	2,6	980,191	980,378	980,312	980,399	— 0,087	— 0,021
92	Sort.....	42 24	1 7 9 E.	720	2,6	980,153	980,375	980,296	980,396	— 0,100	— 0,021
93	Puigcerdá	42 25	1 54 7 E.	1 190	2,6	980,055	980,422	980,292	980,397	— 0,105	+ 0,025

CAPÍTULO VII

RESULTADOS DE LAS OBSERVACIONES EN LA CAMPAÑA DE 1923

ESTACIÓN DE MADRID (salida)

Local de observación.

Se hicieron las observaciones en una habitación del Observatorio Astronómico, la misma utilizada en años anteriores.

Las coordenadas geográficas son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	3° 41',3 W.
Latitud N.	40° 24',5
Altitud de la lenteja de los péndulos sobre el nivel medio del mar en Alicante	656m

Determinación de la hora.

Los estados y movimientos del reloj Strasser se determinaron por comparaciones con el magistral del Observatorio, valiéndose del cronógrafo.

En el siguiente cuadro figuran los estados y movimientos con sus errores correspondientes:

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
27 de Julio de 1923	13 56	— 0,71 ± 0,03	— 0,88 ± 0,03
28 íd. íd.	13 43	— 1,58 ± 0,01	— 1,06 ± 0,04
29 íd. íd.	14 4	— 2,66 ± 0,04	— 1,36 ± 0,06
30 íd. íd.	14 2	— 4,02 ± 0,04	— 1,42 ± 0,06
31 íd. íd.	14 10	— 5,45 ± 0,04	

Los errores relativos al movimiento del reloj se calcularon por la fórmula

$$\varepsilon_m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2},$$

en la que m_1 y m_2 son los errores correspondientes a dos estados consecutivos del reloj.

El promedio de los valores, será el error medio para el conjunto de las observaciones.

$$e_m = \pm 0{,}05.$$

Duraciones de oscilación.

Los cálculos y correcciones hechos para determinar los valores de las oscilaciones reducidas figuran en el estado señalado con la letra A.

El balance del sostén se obtuvo por el método de Borras, oscilando los péndulos 104 y 106 en dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en la NW.-SE.

Los valores obtenidos para la corrección por balance fueron los siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
37×10^{-7}	48×10^{-7}
41×10^{-7}	46×10^{-7}
37×10^{-7}	45×10^{-7}
38×10^{-7}	46×10^{-7}

Los errores correspondientes se han calculado por la fórmula

$$e_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\varepsilon v^2}{n-1}}$$

aplicada a cada pareja de péndulos, en la que εv^2 es la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las diversas determinaciones del balance y cada una de ellas y n el número de determinaciones.

Aplicando esta fórmula resulta:

Péndulos 104 y 106..... $e_{b_1} = \pm 1{,}4 \times 10^{-7}$
Idem 105 y 107..... $e_{b_2} = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$

El error medio de las determinaciones, hallado por la fórmula

$$e_b = \sqrt{\frac{e_{b_1}^2 + e_{b_2}^2}{2 \times 2}}$$

será

$$e_b = \pm 0{,}8 \times 10^{-7}$$

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación y sus promedios figuran en el siguiente cuadro.

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014865	0,5015475	0,5015048	0,5015625
57	77	47	25
64	87	53	17
43	59	29	09
0,5014857	0,5015475	0,5015044	0,5015619

Estado A. ESTACIÓN DE MADRID (salida).

FECHAS — 1923	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
28 Julio.....	104	6 8	708,65	14,5	23,62	11,8	— 0,88	150,470	0,5016669	— 4	— 575	— 1136	— 51	— 38	0,5014865
28 íd.	105	7 25	708,50	14,6	23,87	11,8	— 0,88	145,140	7284	— 4	— 577	— 1131	— 51	— 46	5475
28 íd.	106	11 14	707,25	13,7	24,53	11,6	— 0,88	148,610	6880	— 4	— 564	— 1175	— 51	— 38	5048
28 íd.	107	12 31	707,00	13,2	24,63	11,9	— 0,88	143,705	7457	— 4	— 566	— 1165	— 51	— 46	5625
29 íd.	104	6 13	708,85	13,0	24,37	11,7	— 1,06	150,135	6707	— 4	— 574	— 1172	— 62	— 38	4857
29 íd.	105	7 33	708,70	13,6	24,53	11,9	— 1,06	144,775	7328	— 4	— 577	— 1162	— 62	— 46	5477
29 íd.	106	11 34	708,25	12,0	24,78	11,6	— 1,06	148,415	6902	— 4	— 564	— 1187	— 62	— 38	5047
29 íd.	107	12 51	708,25	13,0	24,88	11,8	— 1,06	143,520	7480	— 4	— 566	— 1177	— 62	— 46	5625
30 íd.	104	6 40	710,15	13,7	24,48	11,6	— 1,36	149,860	6738	— 4	— 575	— 1178	— 79	— 38	4864
30 íd.	105	8 0	709,85	13,8	24,63	11,8	— 1,36	144,595	7350	— 4	— 577	— 1167	— 79	— 46	5487
30 íd.	106	11 30	707,95	14,0	25,08	11,7	— 1,36	148,090	6939	— 4	— 563	— 1202	— 79	— 38	5053
30 íd.	107	12 46	707,55	14,2	25,18	11,6	— 1,36	143,340	7502	— 4	— 565	— 1191	— 79	— 46	5617
31 íd.	104	6 28	707,05	14,0	24,63	11,8	— 1,42	149,985	6724	— 4	— 572	— 1185	— 82	— 38	4843
31 íd.	105	7 46	706,55	13,8	24,83	11,9	— 1,42	144,670	7341	— 4	— 574	— 1176	— 82	— 46	5459
31 íd.	106	11 37	704,80	13,2	24,23	11,6	— 1,42	148,225	6923	— 4	— 561	— 1209	— 82	— 38	5029
31 íd.	107	12 52	704,65	13,3	25,28	12,0	— 1,42	143,360	7500	— 4	— 563	— 1196	— 82	— 46	5609

ESTACIÓN DE LISBOA

Local de observación.

Se montaron los péndulos en una habitación de la Administraçao Geral dos Serviços Geodesicos, hoy Instituto Geográfico e Cadastral, que ocupa el hermoso edificio del que fué convento de la Estrella, situado en uno de los puntos dominantes de la capital. El anteojo de pasos se instaló en una torrecita del mismo edificio expresamente construída para efectuar observaciones astronómicas (veáse plano y fotografía).

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud respecto al meridiano de Greenwich.....	9° 11' 10,5''
Latitud N.....	38° 42',5
Altitud de la lenteja de los péndulos sobre el nivel medio del mar en el puerto de Lisboa.....	75m

Determinación de la hora.

La determinación de los estados y movimientos del reloj Strasser se hizo aplicando el método de Borrass a la observación de pasos meridianos de estrellas con el anteojo Repsold.

A continuación figura el resumen de estados y movimientos, con los errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
31 de Agosto de 1923.....	17 28	+ 2,06 ± 0,08	— 0,31 ± 0,10
1.° de Septiembre de 1923.....	17 28	+ 1,75 ± 0,06	+ 1,04 ± 0,12
2 id. id.	17 49	+ 2,81 ± 0,10	+ 0,90 ± 0,10
3 id. id.	17 56	+ 3,71 ± 0,03	+ 0,30 ± 0,04
4 id. id.	17 40	+ 4,01 ± 0,02	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones:

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}09$$

Duraciones de oscilación.

En el estado B figuran juntamente con los datos de observación (presión, temperatura, etc.), los valores de las duraciones de oscilación observadas y reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NW.-SE. y los 105 y 107 en la NE.-SW.

Se determinó el balance del sostén por el método de Borrass, dando los resultados siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
43×10^{-7}	48×10^{-7}
42×10^{-7}	43×10^{-7}
38×10^{-7}	47×10^{-7}
41×10^{-7}	46×10^{-7}

El error medio se determinó por la fórmula conocida, siendo su resultado

$$\varepsilon_b = \pm 1{,}1 \times 10^{-7}$$

El resumen de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes figura en el siguiente cuadro.

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014577	0,5015184	0,5014761	0,5015258
568	187	786	(368)
(662)	177	806	(380)
611	225	796	279
582	210	768	282
566		767	313
0,5014581	0,5015197	0,5014781	0,5015283

Por desviarse con creces del valor medio se desechan los valores de los péndulos 104 y 107, comprendidos entre paréntesis.

El promedio correspondiente que figura en la última linea del anterior cuadro se ha deducido teniendo en cuenta dichas supresiones.

Estado B. **ESTACIÓN DE LISBOA**

FECHAS — 1923	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10 −7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sosten.	
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
1 Septiembre...	103	7 21	762,80	10,2	20,41	11,6	— 0,31	154,355	0,5016249	— 4	— 627	— 982	— 18	— 41	0,5014577
1 id. ...	105	8 39	762,65	10,3	20,61	11,6	— 0,31	148,790	6859	— 4	— 630	— 977	— 18	— 46	5184
1 id. ...	106	9 53	762,50	10,1	20,86	11,6	— 0,31	152,565	6440	— 4	— 617	— 999	— 18	— 41	4761
1 id. ...	107	13 19	762,05	10,8	21,36	11,6	— 0,31	147,955	6954	— 4	— 618	— 1010	— 18	— 46	5258
1 id. ...	104	14 34	762,00	10,6	21,51	11,6	— 0,31	153,970	6290	— 4	— 624	— 1035	— 18	— 41	4568
1 id. ...	105	15 52	761,90	10,8	21,66	11,8	— 0,31	148,355	6908	— 4	— 627	— 1036	— 18	— 46	5187
2 id. ...	106	7 25	761,40	11,7	20,35	11,5	+ 1,04	153,290	6362	— 4	— 616	— 975	+ 60	— 41	4786
2 id. ...	107	8 42	761,35	11,7	20,56	11,5	+ 1,04	148,000	6949	— 4	— 619	— 972	+ 60	— 46	5368
2 id. ...	104	9 58	761,20	12,0	20,81	11,5	+ 1,04	154,140	6272	— 4	— 624	— 1001	+ 60	— 41	4662
2 id. ...	105	13 34	760,80	12,2	21,26	11,6	+ 1,04	149,305	6801	— 4	— 627	— 1007	+ 60	— 46	5177
2 id. ...	106	14 49	760,95	11,9	21,36	11,6	+ 1,04	152,675	6428	— 4	— 614	— 1023	+ 60	— 41	4806
2 id. ...	107	16 4	761,15	11,1	21,46	11,8	+ 1,04	147,545	7002	— 4	— 617	— 1015	+ 60	— 46	5380
3 id. ...	104	7 28	762,95	11,6	21,16	11,6	+ 0,90	154,370	6247	— 4	— 625	— 1018	+ 52	— 41	4611
3 id. ...	105	8 46	762,90	11,5	21,26	11,6	+ 0,90	148,785	6859	— 4	— 629	— 1007	+ 52	— 46	5225
3 id. ...	106	10 1	762,70	11,3	21,41	11,5	+ 0,90	152,665	6430	— 4	— 615	— 1026	+ 52	— 41	4796
3 id. ...	107	13 40	762,40	11,2	21,86	11,6	+ 0,90	148,185	6928	— 4	— 617	— 1034	+ 52	— 46	5279
3 id. ...	106	14 55	762,40	11,0	21,96	11,5	+ 0,90	152,690	6427	— 4	— 614	— 1052	+ 52	— 41	4768
4 id. ...	104	7 25	765,70	10,4	21,66	11,6	+ 0,30	154,070	6279	— 4	— 627	— 1042	+ 17	— 41	4582
4 id. ...	105	8 41	766,20	10,6	21,71	11,6	+ 0,30	148,405	6903	— 4	— 631	— 1029	+ 17	— 46	5210
4 id. ...	106	11 0	765,95	10,4	21,81	11,5	+ 0,30	152,410	6457	— 4	— 617	— 1045	+ 17	— 41	4767
4 id. ...	107	13 31	764,90	9,7	22,03	11,6	+ 0,30	147,770	6976	— 4	— 619	— 1042	+ 17	— 46	5282
4 id. ...	104	14 44	764,70	9,0	22,16	11,6	+ 0,30	154,020	6285	— 4	— 625	— 1066	+ 17	— 41	4566
4 id. ...	107	10 1	764,65	10,3	22,26	11,5	+ 0,30	147,415	7017	— 4	— 618	— 1053	+ 17	— 46	5313

ESTACIÓN DE FIGUEIRA DA FOZ

Local de observación.

Se instalaron los aparatos en el almacén de la Junta de Obras del Puerto situado en la desembocadura del rio Mondego y la barraca astronómica en un patio contiguo (veáse plano y fotografía).

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con respecto al meridiano de Greenwich.....	8° 52' 33'',5 W.
Latitud N.....	40° 9'
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en el puerto de Figueira.....	5m

Determinación de la hora.

Se determinó la hora para deducir los estados del reloj Strasser en días sucesivos, aplicando el método de Borrass a la observación de grupos de estrellas en el meridiano con el anteojo Repsold.

En el cuadro siguiente figuran dichos estados y los movimientos deducidos con sus errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
24 de Septiembre de 1923.....	23 43	+ 10,61 ± 0,07	+ 0,86 ± 0,09
25 id. id.	19 19	+ 11,31 ± 0,05	+ 0,99 ± 0,06
26 id. id.	19 19	+ 12,30 ± 0,03	+ 1,23 ± 0,08
28 id. id.	19 19	+ 14,75 ± 0,07	

Como error medio para el conjunto de las observaciones resulta:

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}08.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado C se muestran las correcciones para obtener las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección NE.-SW. y los 105 y 107 en la NW.-SE.

El balance del sostén se determinó por el método de Borrass, dando los resultados siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
41×10^{-7}	47×10^{-7}
46×10^{-7}	47×10^{-7}
45×10^{-7}	43×10^{-7}
44×10^{-7}	46×10^{-7}

Siendo el error medio de las determinaciones

$$e_b = \pm 1{,}0 \times 10^{-7}$$

El siguiente cuadro contiene el resumen de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes.

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014237	0,5014898	0,5014432	0,5014995
45	882	392	4999
28	865	430	4990
40	881	433	5007
37	902	393	5011
31	879	432	5012
0,5014236	0,5014885	0,5014420	0,5015002

Estado C

ESTACIÓN DE FIGUEIRA DA FOZ

FECHAS — 1923	Péndulos	Hora sidérea	Presión atmosférica reducida	Tensión del vapor de agua	Temperatura del péndulo	Amplitud media de oscilación	Movimiento del reloj	Periodo de las coincidencias	Duración de la oscilación observada	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida
										Por la amplitud	Al vacío	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo	Por balance del sostén	
		h m	mm	mm	°		s	s	s						s
25 Septiembre..	104	9 7	766,55	13,6	18,61	11,3	+ 0,86	159,115	0,5015761	— 3	— 633	— 895	+ 50	— 43	0,5014237
25 íd. ..	105	10 28	766,75	13,2	18,76	11,5	+ 0,86	152,715	6424	— 4	— 637	— 889	+ 50	— 46	4898
25 íd. ..	106	11 44	766,75	13,6	18,91	11,5	+ 0,86	157,160	5958	— 4	— 623	— 906	+ 50	— 43	4432
25 íd. ..	107	14 58	766,40	14,3	19,26	11,5	+ 0,86	151,735	6531	— 4	— 625	— 911	+ 50	— 46	4995
55 íd. ..	104	16 15	766,40	14,5	19,40	11,5	+ 0,86	158,670	5806	— 4	— 631	— 933	+ 50	— 43	4245
25 íd. ..	105	17 35	766,45	14,5	19,60	11,6	+ 0,86	152,525	6445	— 4	— 634	— 929	+ 50	— 46	4882
26 íd. ..	106	9 10	767,85	13,6	18,61	11,5	+ 0,99	157,740	5899	— 4	— 625	— 892	+ 57	— 43	4392
26 íd. ..	107	10 31	767,70	13,7	18,66	11,5	+ 0,99	151,995	6502	— 4	— 627	— 883	+ 57	— 46	4999
26 íd. ..	104	11 47	767,50	14,2	18,81	11,5	+ 0,99	159,170	5756	— 4	— 633	— 905	+ 57	— 43	4228
26 íd. ..	105	15 2	767,20	14,8	19,55	11,5	+ 0,99	152,760	6419	— 4	— 635	— 926	+ 57	— 46	4865
26 íd. ..	106	16 19	767,25	14,6	19,85	11,5	+ 0,99	156,835	5992	— 4	— 621	— 951	+ 57	— 43	4430
26 íd. ..	107	17 37	767,45	14,0	20,05	11,6	+ 0,99	151,515	6555	— 4	— 624	— 948	+ 57	— 46	4990
27 íd. ..	104	9 8	768,20	13,3	18,76	11,6	+ 1,23	159,195	5753	— 4	— 634	— 903	+ 71	— 43	4240
27 íd. ..	105	10 29	768,10	13,6	18,90	11,5	+ 1,23	153,030	6390	— 4	— 637	— 895	+ 71	— 46	4881
27 íd. ..	106	11 47	767,75	14,0	19,06	11,4	+ 1,23	157,285	5945	— 4	— 623	— 913	+ 71	— 43	4433
27 íd. ..	107	15 00	767,15	13,6	19,60	11,6	+ 1,23	151,670	6538	— 4	— 625	— 927	+ 71	— 46	5007
27 íd ..	104	16 15	767,10	13,8	19,90	11,4	+ 1,23	158,715	5801	— 4	— 631	— 957	+ 71	— 43	4237
27 íd. ..	105	17 35	767,20	14,0	20,15	11,6	+ 1,23	152,290	6470	— 4	— 634	— 955	+ 71	— 46	4902
28 íd. ..	106	9 12	767,75	12,6	19,25	11,4	+ 1,23	157,580	5915	— 4	— 623	— 922	+ 71	— 43	4393
28 íd. ..	107	10 30	767,55	12,7	19,36	11,3	+ 1,23	151,725	6532	— 3	— 626	— 916	+ 71	— 46	5011
28 íd. ..	104	11 46	767,20	13,0	19,50	11,5	+ 1,23	158,955	5777	— 4	— 632	— 938	+ 71	— 43	4231
28 íd. ..	105	15 00	766,40	13,3	20,00	11,6	+ 1,23	152,565	6440	— 4	— 634	— 948	+ 71	— 46	4879
28 íd. ..	106	16 17	766,15	13,5	20,20	11,5	+ 1,23	156,785	5996	— 4	— 620	— 968	+ 71	— 43	4432
28 íd. ..	107	17 34	766,15	13,5	20,41	11,6	+ 1,23	151,305	6578	— 4	— 622	— 965	+ 71	— 46	5012

ESTACIÓN DE OPORTO

Local de observación.

Se instalaron los péndulos en el sótano del Observatorio Meteorológico de la Princesa Amelia, situado en la Serra do Pilar, que está separada de la capital propiamente dicha por la profunda entalladura por la que corre el río Duero. La barraca astronómica se montó en una explanada contigua al Observatorio (veáse plano y fotografía).

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	8° 36' 8''
Latitud N.....	41° 8',2
Altura de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en el puerto de Oporto	94m

Determinación de la hora.

Esta se hizo por el método citado en las estaciones anteriores.

En el cuadro que sigue se expone el resumen de estados y movimientos con sus errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
10 de Octubre de 1923..... .	19 46	— 1,70 ± 0,11	— 2,58 ± 0,13
11 id. id.	19 50	— 4,28 ± 0,07	— 2,57 ± 0,10
13 id. id.	20 11	— 9,46 ± 0,07	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}12.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado D figuran los cálculos y correcciones para obtener las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección E.-W. y los 105 y 107 en la N.-S.

El balance del sostén, estudiado por el método ya dicho, dió los resultados siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
43×10^{-7}	53×10^{-7}
39×10^{-7}	48×10^{-7}
38×10^{-7}	45×10^{-7}
40×10^{-7}	49×10^{-7}

Siendo el error medio de las determinaciones

$$e_b = \pm 1{,}4 \times 10^{-7}$$

En el siguiente cuadro aparece el resumen de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes:

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014068	0,5014709	0,5014242	0,5014803
72	26	58	39
91	15	75	15
77	25	60	18
82	14		
0,5014078	0,5014718	0,5014259	0,5014819

FECHAS — 1923	Péndulos	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°		s	s	s						s
11 Octubre.....	104	8 55	760,40	12,6	19,01	11,6	— 2,58	158,690	0,5015804	— 4	— 627	— 915	— 150	— 40	0,5014068
11 íd.	105	10 16	760,55	12,8	19,06	11,6	— 2,58	152,510	6446	— 4	— 631	— 903	— 150	— 49	709
11 íd.	106	11 34	760,35	13,0	19,16	11,4	— 2,58	157,020	5972	— 4	— 618	— 918	— 150	— 40	242
11 íd.	107	14 55	759,20	11,9	19,31	11,6	— 2,58	151,600	6539	— 4	— 620	— 913	— 150	— 49	803
11 íd.	104	16 13	759,10	12,1	19,36	11,4	— 2,58	158,500	5823	— 4	— 626	— 931	— 150	— 40	072
11 íd.	105	17 33	759,25	12,5	19,45	11,6	— 2,58	152,200	6480	— 4	— 629	— 922	— 150	— 49	726
12 íd.	106	9 6	757,25	12,5	19,11	11,6	— 2,57	156,925	5982	— 4	— 615	— 916	— 149	— 40	258
12 íd.	107	10 26	757,35	13,2	19,11	11,5	— 2,57	151,435	6563	— 4	— 618	— 904	— 149	— 49	839
12 íd.	104	11 41	757,10	13,2	19,11	11,6	— 2,57	158,455	5827	— 4	— 624	— 919	— 149	— 40	091
12 íd.	105	14 40	756,20	12,8	19,21	11,6	— 2,57	152,435	6454	— 4	— 627	— 910	— 149	— 49	715
12 íd.	106	15 59	755,85	13,2	19,26	11,6	— 2,57	156,705	6005	— 4	— 614	— 923	— 149	— 40	275
12 íd.	107	17 19	755,55	13,0	19,31	11,6	— 2,57	151,595	6546	— 4	— 616	— 913	— 149	— 49	815
13 íd.	104	9 23	750,50	13,1	18,91	11,5	— 2,57	158,735	5799	— 4	— 619	— 910	— 149	— 40	077
13 íd.	105	10 44	750,60	13,7	18,91	11,6	— 2,57	152,515	6446	— 4	— 623	— 896	— 149	— 49	725
13 íd.	106	12 1	750,55	13,6	18,91	11,5	— 2,57	157,055	5969	— 4	— 610	— 906	— 149	— 40	260
13 íd.	107	14 54	750,15	12,8	19,01	11,5	— 2,57	151,730	6531	— 4	— 612	— 899	— 149	— 49	818
13 íd.	104	16 10	750,10	12,8	19,06	11,5	— 2,57	158,620	5811	— 4	— 619	— 917	— 149	— 40	082
13 íd.	105	17 31	750,20	12,1	19,11	11,5	— 2,57	152,535	6444	— 4	— 623	— 905	— 149	— 49	714

ESTACIÓN DE PRAIA DA ROCHA (Villa Nova de Portimao).

Local de observaciòn.

Se hicieron las observaciones de los péndulos en una habitación del Casino (en construcción), instalándose la barraca astronómica próxima al mismo edificio, en un terreno que concluía en escarpa sobre la playa (veáse plano y fotografía).

Las coordenadas geográficas del punto de observación son:

Longitud con relación al meridiano de Greenwich	8° 32' 42',5
Latitud N	37° 7',0
Altitud de las lentejas de los péndulos sobre el nivel medio del mar en la localidad	17m

Determinaciòn de la hora.

Se determinó por el método de Borrass aplicado a la observación meridiana de estrellas, y en el cuadro siguiente figuran los estados y movimientos del reloj con sus errores correspondientes.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t s).	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
25 de Octubre de 1923	22 53	— 0,68 ± 0,11	+ 2,58 ± 0,11
27 id. id.	20 15	+ 4,20 ± 0,04	+ 2,84 ± 0,09
28 id. id.	20 15	+ 7,04 ± 0,08	+ 3,03 ± 0,11
29 id. id.	20 11	+ 10,06 ± 0,08	

Calculado el error medio para el conjunto de las observaciones resultó ser:

$$\varepsilon_m = \pm 0{,}10.$$

Duraciones de oscilaciòn.

El estado E contiene los cálculos y correcciones para obtener las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos 104 y 106 oscilaron en dirección ESE.-WNW. y los 105 y 107 en la SSW.-NNE.

El balance del sostén arrojó los resultados siguientes:

Péndulos 104 y 106.	**Péndulos 105 y 107.**
$43 \times 10-7$	$42 \times 10-7$
$45 \times 10-7$	$44 \times 10-7$
$41 \times 10-7$	$41 \times 10-7$
$43 \times 10-7$	$42 \times 10-7$

Siendo el error medio de las determinaciones:

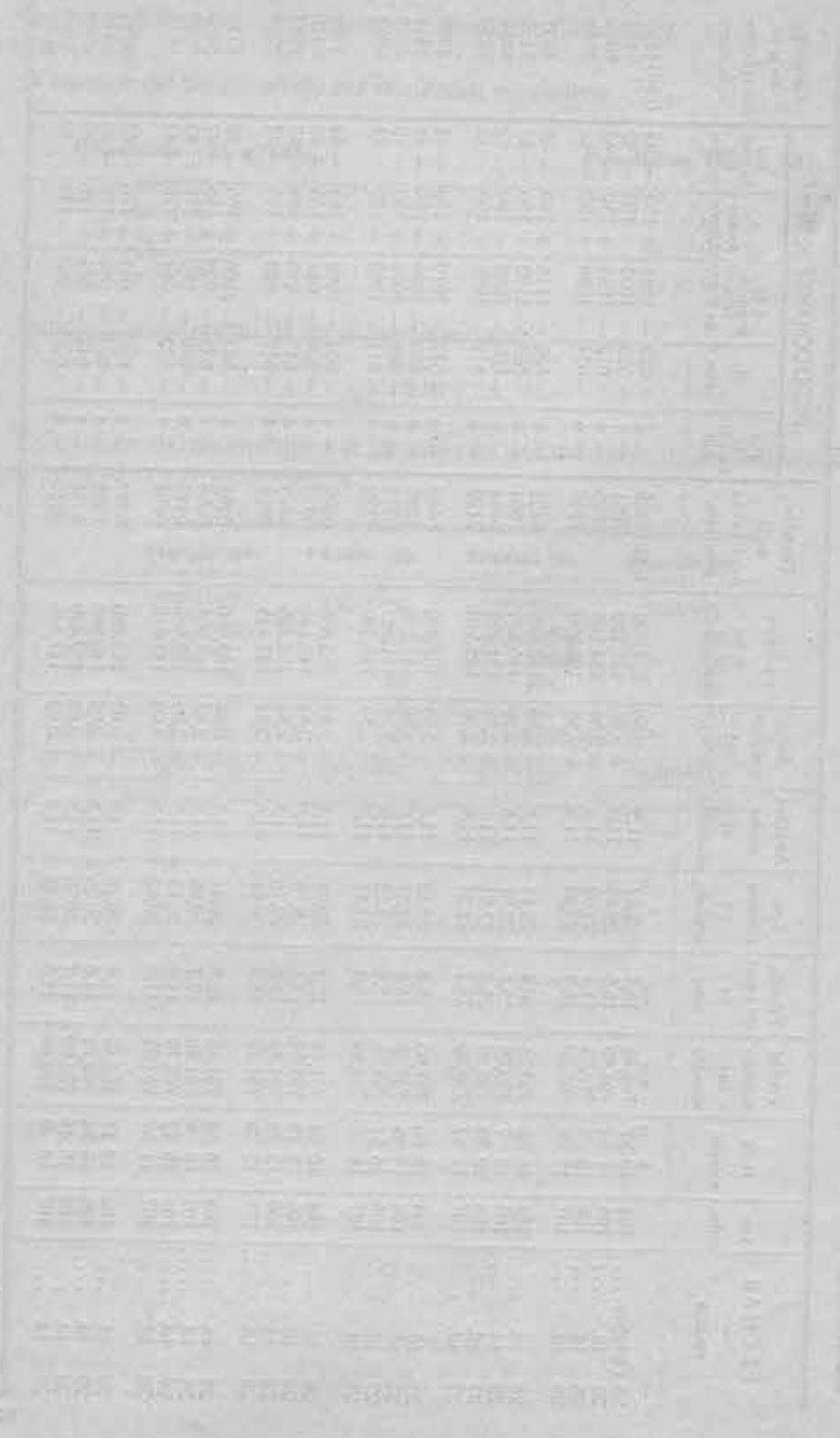
$$e_b = \pm 0{,}7 \times 10-7$$

En el siguiente cuadro figura el resumen de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes.

Péndulo 104.	**Péndulo 105.**	**Péndulo 106.**	**Péndulo 107.**
0,5014826	0,5015464	0,5015002	0,5015549
801	59	4989	59
807	41	4989	62
788	40	4983	26
779	56	4988	51
801	46	4995	60
0,5014800	0,5015451	0,5014991	0,5015551

ESTACIÓN DE PRAIA DA ROCHA

FECHAS — 1923	Pén-dulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Período de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10⁻⁷ Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	Duración de la oscilación reducida.
		h m	mm	mm	°	'	s	s	s						s
26 Octubre.....	104	10 37	764,40	15,7	22,47	11,5	+ 2,59	152,700	0,5016426	— 4	— 622	— 1081	+ 150	— 43	0,5014826
26 íd.	105	11 53	764,40	16,5	22,47	11,6	+ 2,59	147,120	7051	— 4	— 626	— 1065	+ 150	— 42	5464
26 íd.	106	13 7	764,25	17,1	22,62	11,6	+ 2,59	151,145	6595	— 4	— 612	— 1084	+ 150	— 43	5002
26 íd.	107	15 35	763,50	16,7	23,02	11,6	+ 2,59	146,290	7148	— 4	— 614	— 1089	+ 150	— 42	5549
26 íd.	104	16 50	763,25	16,2	23,17	11,6	+ 2,59	152,635	6433	— 4	— 620	— 1115	+ 150	— 43	4801
26 íd.	105	18 7	763,05	15,1	23,27	11,6	+ 2,59	146,865	7081	— 4	— 623	— 1103	+ 150	— 42	5459
27 íd.	106	10 30	758,60	15,3	22,31	11,5	+ 2,59	151,430	6564	— 4	— 609	— 1069	+ 150	— 43	4989
27 íd.	107	11 47	758,40	15,2	22,31	11,6	+ 2,59	146,510	7122	— 4	— 612	— 1055	+ 150	— 42	5559
27 íd.	104	13 00	757,90	15,3	22,42	11,6	+ 2,59	152,940	6400	— 4	— 617	— 1079	+ 150	— 43	4807
27 íd.	105	15 35	757,20	15,6	22,57	11,6	+ 2,59	147,330	7026	— 4	— 620	— 1069	+ 150	— 42	5441
27 íd.	106	16 51	757,55	15,3	22,52	11,5	+ 2,59	151,345	6573	— 4	— 608	— 1079	+ 150	— 43	4989
27 íd.	107	18 7	757,85	15,3	22,47	11,7	+ 2,59	146,430	7132	— 4	— 611	— 1063	+ 150	— 42	5562
28 íd.	104	10 54	761,40	12,8	20,96	11,5	+ 2,84	153,855	6302	— 4	— 624	— 1008	+ 165	— 43	4788
28 íd.	105	12 13	761,65	13,7	20,76	11,6	+ 2,84	148,145	6933	— 4	— 628	— 984	+ 165	— 42	5440
28 íd.	106	13 29	761,35	13,5	20,76	11,5	+ 2,84	152,245	6475	— 4	— 615	— 995	+ 165	— 43	4983
28 íd.	107	15 35	761,15	13,3	20,91	11,6	+ 2,84	147,445	7013	— 4	— 617	— 989	+ 165	— 42	5526
28 íd.	104	16 50	761,35	12,7	20,91	11,5	+ 2,84	153,960	6291	— 4	— 624	— 1006	+ 165	— 43	4779
28 íd.	105	18 6	761,80	12,7	20,96	11,6	+ 2,84	147,925	6958	— 4	— 628	— 993	+ 165	— 42	5456
29 íd.	106	10 42	763,75	11,6	20,15	11,5	+ 3,03	152,545	6443	— 4	— 619	— 965	+ 176	— 43	4988
29 íd.	107	11 59	763,85	11,8	20,10	11,5	+ 3,03	147,610	6994	— 4	— 622	— 951	+ 176	— 42	5551
29 íd.	104	13 17	763,45	11,8	20,10	11,5	+ 3,03	154,190	6267	— 4	— 628	— 967	+ 176	— 43	4801
29 íd.	105	15 34	762,75	11,8	20,25	11,5	+ 3,03	148,380	6906	— 4	— 631	— 959	+ 176	— 42	5446
29 íd.	106	16 48	762,60	11,7	20,30	11,5	+ 3,03	152,420	6456	— 4	— 617	— 973	+ 176	— 43	4995
29 íd.	107	18 6	762,60	11,5	20,35	11,6	+ 3,03	147,445	7013	— 4	— 620	— 963	+ 176	— 42	5560



ESTACIÓN DE MADRID (cierre)

Local de observación.

Se efectuaron las observaciones en el mismo local citado en la estación de salida.

Las coordenadas geográficas del punto de observación son, pues, las indicadas anteriormente.

Determinación de la hora.

Se hicieron las comparaciones necesarias del reloj Strasser con el reloj magistral del Observatorio Astronómico.

En el siguiente cuadro figuran los estados y movimientos.

Resumen de los valores obtenidos.

DÍAS CIVILES	Hora media de observación (t. s.)	Estado del reloj.	Movimiento en 24 horas.
	h m	s	s
3 de Diciembre de 1923 1.ª.....	14 38	+ 14,57 ± 0,04	+ 1,20 ± 0,07
3 íd. íd. 2.ª.....	21 43	+ 14,92 ± 0,06	+ 1,03 ± 0,08
4 íd. íd.	21 18	+ 15,93 ± 0,06	+ 1,44 ± 0,07
5 íd. íd.	21 33	+ 17,39 ± 0,04	+ 1,48 ± 0,06
6 íd. íd.	21 34	+ 18,93 ± 0,04	+ 0,72 ± 0,06
7 íd. íd.	21 20	+ 19,61 ± 0,04	

Siendo el error medio para el conjunto de las observaciones:

$$e_m = \pm 0{,}07.$$

Duraciones de oscilación.

En el estado F figuran los cálculos y correcciones hechos para determinar las duraciones de oscilación reducidas.

Los péndulos oscilaron en las direcciones indicadas en la estación de salida.

El balance del sostén dió los resultados siguientes:

Péndulos 104 y 106.

58×10^{-7}
55×10^{-7}
60×10^{-7}
58×10^{-7}

58×10^{-7}

Péndulos 105 y 107.

70×10^{-7}
69×10^{-7}
67×10^{-7}
64×10^{-7}

68×10^{-7}

Siendo el error medio de las observaciones

$$\varepsilon_b = \pm 0{,}9 \times 10^{-7}$$

El resumen de los valores de las duraciones de oscilación reducidas y sus promedios correspondientes están contenidos en el siguiente cuadro:

Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
0,5014867	0,5015556	0,5015054	0,5015054
54	35	50	23
37	22	49	41
68	85	77	06
43	40	30	26
0,5014854	0,5015548	0,5015052	0,5015630

FECHAS 1923	Péndulos.	Hora sidérea.	Presión atmosférica reducida.	Tensión del vapor de agua.	Temperatura del péndulo.	Amplitud media de oscilación.	Movimiento del reloj.	Periodo de las coincidencias.	Duración de la oscilación observada.	REDUCCIONES × 10−7					Duración de la oscilación reducida.
										Por la amplitud.	Al vacío.	A la temperatura de 0° c.	A tiempo sidéreo.	Por balance del sostén.	
		h m	mm	mm	°	g	s	s							s
3 Diciembre	104	14 53	707,50	6,1	9,71	11,4	+ 1,20	157,430	0,5015931	− 4	− 605	− 467	+ 70	− 58	0,5014867
3 íd.	105	16 14	707,45	6,2	9,91	11,6	+ 1,20	150,780	6636	− 4	− 608	− 470	+ 70	− 68	5556
3 íd.	106	19 11	707,30	5,9	10,31	11,5	+ 1,20	155,450	6134	− 4	− 594	− 494	+ 70	− 58	5054
3 íd.	107	20 30	707,60	6,2	10,41	11,6	+ 1,20	149,800	6745	− 4	− 597	− 492	+ 70	− 68	5654
4 íd.	106	18 43	708,55	6,1	9,51	11,6	+ 1,03	155,735	6105	− 4	− 597	− 456	+ 60	− 58	5050
4 íd.	107	20 2	708,50	6,5	9,76	11,6	+ 1,03	150,240	6696	− 4	− 599	− 462	+ 60	− 68	5623
5 íd.	104	14 20	703,00	7,2	10,41	11,5	+ 1,44	157,415	5932	− 4	− 599	− 501	+ 84	− 58	4854
5 íd.	105	15 38	702,70	7,0	10,50	11,4	+ 1,44	150,900	6622	− 4	− 602	− 497	+ 84	− 68	5535
5 íd.	106	18 58	701,45	6,8	10,75	11,5	+ 1,44	155,490	6130	− 4	− 588	− 515	+ 84	− 58	5049
5 íd.	107	20 17	701,50	6,9	10,85	11,6	+ 1,44	149,905	6733	− 4	− 591	− 513	+ 84	− 68	5641
6 íd.	104	14 31	704,80	6,5	10,31	11,5	+ 1,48	157,635	5910	− 4	− 601	− 496	+ 86	− 58	4837
6 íd.	105	15 50	704,80	6,5	10,41	11,7	+ 1,48	151,060	6605	− 4	− 604	− 493	+ 86	− 68	5522
6 íd.	106	17 6	704,75	6,3	10,55	11,6	+ 1,48	155,300	6150	− 4	− 592	− 505	+ 86	− 58	5077
6 íd.	107	19 42	704,75	6,2	10,75	11,6	+ 1,48	150,250	6694	− 4	− 594	− 508	+ 86	− 68	5606
6 íd.	104	21 56	704,95	6,3	10,85	11,6	+ 1,48	157,085	5966	− 4	− 600	− 522	+ 86	− 58	4868
6 íd.	105	22 16	705,15	6,3	11,00	11,5	+ 1,48	150,240	6696	− 4	− 604	− 521	+ 86	− 68	5585
7 íd.	104	14 36	707,25	5,8	8,56	11,5	+ 0,72	157,915	5882	− 4	− 607	− 412	+ 42	− 58	4843
7 íd.	105	15 58	707,15	6,2	8,76	11,5	+ 0,72	151,145	6595	− 4	− 610	− 415	+ 42	− 68	5540
7 íd.	106	18 39	706,40	5,9	9,46	11,6	+ 0,72	155,795	6098	− 4	− 595	− 453	+ 42	− 58	5030
7 íd.	107	19 56	706,45	6,3	9,71	11,6	+ 0,72	150,085	6713	− 4	− 598	− 459	+ 42	− 68	5620

CAPÍTULO VIII

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS Y PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES EN LA CAMPAÑA DE 1923

INVARIABILIDAD DE LOS PÉNDULOS

En el siguiente estado figuran los promedios de los valores de las duraciones de oscilación reducidas, deducidos en cada estación.

Estado núm. 1.

ESTACIONES	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
Madrid (salida).....	0,5014857	0,5015475	0,5015044	0,5015619
Lisboa.....	581	5197	4781	5283
Figueira da Foz.....	236	4885	4420	5002
Oporto.....	078	4718	4259	4819
Praia da Rocha.....	800	5451	4991	5551
Madrid (cierre).....	854	5548	5052	5630

Como promedios en Madrid se obtienen los siguientes:

ESTACIONES	Péndulo 104.	Péndulo 105.	Péndulo 106.	Péndulo 107.
Madrid (salida)..... Madrid (cierre).....	0,5014856	0,5015512	0,5015048	0,5015625
Diferencias.....	3	73	8	11

Del exámen del promedio en las estaciones de Madrid (salida y cierre) se deduce que el péndulo 105 dejó de ser invariable entre la salida de Madrid y el regreso. El

cuadro siguiente pone de manifiesto en cuáles y cuántas estaciones experimentó variación.

Estado núm. 2.

ESTACIONES	DIFERENCIAS ENTRE LAS DURACIONES DE OSCILACIÓN DE LOS PÉNDULOS					
	104-105	104-106	104-107	105-106	105-107	106-107
Madrid (salida).....	— 618	— 187	— 762	+ 431	— 144	— 575
Lisboa.....	— 616	— 200	— 702	+ 416	— 86	— 502
Figueira da Foz.....	— 649	— 184	— 766	+ 465	— 117	— 582
Oporto.....	— 640	— 181	— 741	+ 459	— 101	— 560
Praia da Rocha.....	— 651	— 191	— 751	+ 460	— 100	— 560
Madrid (cierre).....	— 694	— 198	— 776	+ 496	— 82	— 578
Diferencias entre Madrid (salida) y Lisboa	2	3	60	15	58	73
Diferencias máximas excluyendo Lisboa.	76	17	35	65	62	22

Del exámen de este cuadro se deduce, comparando primeramente Madrid (salida) con Lisboa, que el péndulo 107 sufrió una alteración sensible en esta última capital, por lo cual se le desechará para el cálculo del valor de la gravedad en Lisboa.

La comparación entre sí de todas las demás estaciones, menos Lisboa, demuestra que, a partir de Lisboa volvió a ser invariable el péndulo 107 y en cambio modificó su longitud por causas desconocidas el péndulo 105. Por esta razón, dicho péndulo 105 se desechará para el cálculo de la gravedad en todas las estaciones observadas, menos Lisboa.

Quedarán, en resumen, para el cálculo de la gravedad tres péndulos para cada estación, que son: los 104, 105 y 106 para Lisboa y los 104, 106 y 107 para Figueira da Foz, Oporto y Praia da Rocha.

PRECISIÓN DE LAS OBSERVACIONES

Para saber la precisión de las observaciones habrán de calcularse por separado los errores medios cometidos en las diferentes operaciones de que se compone una determinación de esta clase y se englobarán estos errores parciales para obtener el error medio de **g** en cada estación.

Cálculo de los errores parciales.

1.° Los errores cometidos en la observación de la duración de oscilación se obtienen por la fórmula

$$e = 10^{-7} \sqrt{\frac{[vv]}{[n] - m}}$$

en la cual representan [**vv**] las sumas de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio de las duraciones de oscilación y cada uno de estos valores, [**n**] el número total de observaciones y **m** el número de péndulos observados.

Para obtener los valores de [**vv**] tendremos que obtener los de **vv**, que son los cuadrados de las diferencias, las cuales se encuentran ordenadas en el cuadro siguiente:

ESTACIONES	Péndulo 104		Péndulo 105		Péndulo 106		Péndulo 107		[vv]	[n]
	vv	n	vv	n	vv	n	vv	n		
Madrid (salida).....	309	4	404	4	331	4	176	4	1220	16
Lisboa.....	1311	5	1622	5	1640	6	»	»	4573	16
Figueira da Foz....	188	6	»	»	2070	6	408	6	2666	18
Oporto	162	5	»	»	547	4	673	4	1382	13
Praia da Rocha.....	1312	6	»	»	218	6	895	6	2425	18
Madrid (cierre).....	775	5	»	»	1126	5	1338	5	3239	15
[vv]	4057		2026		5932		3490		15505	
[n]		31		9		31		25		96

Aplicando la fórmula antes citada para cada estación, poniendo en vez de [vv] los valores de la penúltima columna, sustituyendo [n] por los de la última y m por 4 o 3 que son los péndulos observados, tenemos

Madrid (salida)..... $e = \pm 10{,}1 \times 10^{-7}$
Lisboa..... $e = \pm 18{,}8 \times 10^{-7}$
Figueira da Foz..... $e = \pm 12{,}8 \times 10^{-7}$
Oporto..... $e = \pm 11{,}8 \times 10^{-7}$
Praia da Rocha..... $e = \pm 12{,}7 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)..... $e = \pm 16{,}4 \times 10^{-7}$

Los valores de los errores del resultado medio en cada estación se obtienen por la fórmula

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{[n]}} \times e,$$

dando los resultados siguientes:

Madrid (salida)..... $e_s = \pm 2{,}5 \times 10^{-7}$
Lisboa..... $e_s = \pm 4{,}7 \times 10^{-7}$
Figueira da Foz..... $e_s = \pm 3{,}0 \times 10^{-7}$
Oporto..... $e_s = \pm 3{,}3 \times 10^{-7}$
Praia da Rocha..... $e_s = \pm 3{,}0 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)..... $e_s = \pm 4{,}2 \times 10^{-7}$

Los valores de e y e_s para el promedio de las dos estaciones de Madrid, serán:

$$e = \sqrt{\frac{1220 + 3239}{16 + 15 - 7}} = \pm 13{,}6 \times 10^{-7}$$

$$e_s = \frac{1}{\sqrt{31}} \times 13{,}6 = \pm 2{,}4 \times 10^{-7}$$

Para obtener los errores de la duración de oscilación de cada uno de los péndulos en el conjunto de la campaña sirve la misma fórmula, sustituyendo los valores de [vv] y [n] por los números contenidos en las dos últimas líneas del cuadro anterior y m por el número de estaciones observadas, que son seis, y así obtendremos:

Péndulo 104..... $e_{P.104} = \sqrt{\frac{4057}{31 - 6}} = \pm 12{,}7 \times 10^{-7}$

Péndulo 105..... $e_{P.105} = \sqrt{\frac{2026}{9 - 2}} = \pm 17{,}0 \times 10^{-7}$

Péndulo 106..... $e_{P.106} = \sqrt{\frac{5932}{31 - 6}} = \pm 15{,}4 \times 10^{-7}$

Péndulo 107..... $e_{P.107} = \sqrt{\frac{3490}{25 - 5}} = \pm 13{,}2 \times 10^{-7}$

El error medio general de todos los péndulos será:

$$e_{p.} = \sqrt{\frac{15505}{96 - 19}} = \pm 14{,}2 \times 10^{-7}$$

2.° Como las correcciones por reducción a la amplitud son muy pequeñas y los errores que de ellas pueden provenir son insignificantes, admitiremos que son nulos.

3.° Los errores que provienen por la inseguridad de la constante de reducción al vacío se deducen de los obtenidos al hacer el estudio de las constantes, cuyos valores son:

Péndulo 104	$(675 \pm 11) \times 10^{-7}$
Id. 105	$(679 \pm 9) \times 10^{-7}$
Id. 106	$(665 \pm 8) \times 10^{-7}$
Id. 107	$(668 \pm 11) \times 10^{-7}$

El promedio de los cuatro valores es 0,0000672 con un error de

$$\sqrt{\frac{11^2 + 9^2 + 8^2 + 11^2}{4}} = \pm 10 \times 10^{-7}$$

La relación entre este error y la constante media es

$$\pm \frac{10}{672} = \pm 0{,}0149.$$

En el cuadro siguiente se han reunido los valores de los promedios de las correcciones por reducción al vacio en las diferentes estaciones. También figuran en el mismo las diferencias entre el valor del promedio de las estaciones de Madrid y los valores de las otras estaciones.

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN AL VACÍO					
	104	105	106	107	Promedios	[Δ]
Madrid (salida)	574,0	576,3	563,0	565,0	570	»
Lisboa	625,6	628,8	615,5	»	623	39
Figueira da Foz	632,3	»	622,5	624,8	627	43
Oporto	623,0	»	614,3	616,5	618	34
Praia da Rocha	622,5	»	613,3	616,0	617	33
Madrid (cierre)	602,4	»	593,2	595,8	597	»
Madrid (promedio)	588,2	»	578,1	580,4	584	»

Multiplicando las diferencias que figuran en la última columna del cuadro anterior por 0,0149, deduciremos los errores por la inseguridad de la constante de reducción al vacío.

Lisboa	$e_d = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}$
Figueira da Foz	$e_d = \pm 0{,}6 \times 10^{-7}$
Oporto	$e_d = \pm 0{,}5 \times 10^{-7}$
Praia da Rocha	$e_d = \pm 0{,}5 \times 10^{-7}$

4.° Análogamente se deducen los errores que proceden de la inseguridad de las constantes de reducción de temperatura, cuyos valores son:

Péndulo 104..... $(48{,}11 \pm 0{,}14) \times 10^{-7}$
Id. 105..... $(47{,}38 \pm 0{,}12) \times 10^{-7}$
Id. 106..... $(47{,}91 \pm 0{,}10) \times 10^{-7}$
Id. 107..... $(47{,}30 \pm 0{,}07) \times 10^{-7}$

Su promedio es 0,00000 47675 y el error del valor medio de las constantes de temperatura será

$$\sqrt{\frac{0{,}14^2 + 0{,}12^2 + 0{,}10^2 + 0{,}07^2}{4}} = \pm 0{,}11 \times 10^{-7}$$

y la relación entre el error medio y la constante será

$$\frac{\pm 0{,}11}{47{,}675} = \pm 0{,}0023$$

En el cuadro siguiente figuran los valores de los promedios de las correcciones por reducción de temperatura en las diferentes estaciones y las diferencias entre el valor del promedio de las estaciones de Madrid y los valores de las otras estaciones.

ESTACIONES	PROMEDIO DE LOS TÉRMINOS DE REDUCCIÓN POR TEMPERATURA					
	104	105	106	107	Promedios	$[\lambda]$
Madrid (salida).....	1167,8	1159,0	1193,3	1182,3	1176	»
Lisboa.....	1028,6	1009,2	1020,0	»	1019	189
Figueira da Foz.....	921,8	»	925,3	925,0	924	94
Oporto.....	918,4	»	915,8	907,3	914	84
Praia da Rocha.....	1042,7	»	1027,5	1018,3	1030	200
Madrid (cierre).....	479,6	»	484,6	486,8	484	»
Madrid (promedio).....	823,7	»	838,9	834,5	830	»

Multiplicando las diferencias que figuran en la última columna del cuadro anterior por 0,0023 obtendremos los valores de los errores por la inseguridad de la constante de reducción por temperatura.

Lisboa..... $e_t = \pm 0{,}0023 \times 189 \times 10^{-7} = \pm 0{,}4 \times 10^{-7}$
Figueira da Foz..... $e_t = \pm 0{,}0023 \times 94 \times 10^{-7} = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Oporto..... $e_t = \pm 0{,}0023 \times 84 \times 10^{-7} = \pm 0{,}2 \times 10^{-7}$
Praia da Rocha..... $e_t = \pm 0{,}0023 \times 200 \times 10^{-7} = \pm 0{,}5 \times 10^{-7}$

5.° Los errores e_m producidos en los valores de la duración de oscilación a consecuencia de los ε_m cometidos en la determinación de la hora, se calculan por la fórmula

$$e_m = \pm a s \varepsilon_m,$$

en la que $a = \frac{10^{+7}}{86400}$,

s = promedio de las duraciones de oscilación en cada estación y ε_m = los errores medios de conjunto de las determinaciones de hora en cada estación, obteniéndose los valores que figuran en el siguiente cuadro:

ESTACIONES	n	s	ε_m	e_m
Madrid (salida)	$\frac{10+7}{86400}$	0,5015249	0,05	$2,9 \times 10^{-7}$
Lisboa		4853	0,09	$5,2 \times 10^{-7}$
Figueira da Foz		4553	0,08	$4,6 \times 10^{-7}$
Oporto		4385	0,12	$7,0 \times 10^{-7}$
Praia da Rocha		5114	0,10	$5,8 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre)		5179	0,07	$4,1 \times 10^{-7}$

6.º Los errores cometidos en la determinación del balance del sostén, obtenidos en cada estación, son los siguientes:

Madrid (salida) ..... $e_b = \pm 0,8 \times 10^{-7}$
Lisboa ..... $e_b = \pm 1,1 \times 10^{-7}$
Figueira da Foz ..... $e_b = \pm 1,0 \times 10^{-7}$
Oporto ..... $e_b = \pm 1,4 \times 10^{-7}$
Praia da Rocha ..... $e_b = \pm 0,7 \times 10^{-7}$
Madrid (cierre) ..... $e_b = \pm 0,9 \times 10^{-7}$

Cálculo de los errores que afectan a las duraciones de oscilación reducidas.

Obtenidos los diversos errores cometidos en las varias observaciones hechas para deducir las duraciones de oscilación reducidas se tendrá el error medio total en cada una de las estaciones, empleando la fórmula siguiente:

$$E = \sqrt{e_s^2 (\text{Madrid}) + e_s^2 (\text{estación observada}) + e_a^2 + e_d^2 + e_t^2 + e_m^2 + e_b^2}.$$

En el cuadro siguiente figuran los cuadrados de estos errores y la suma de los mismos para cada estación.

ESTACIONES	e_s^2 (Madrid).	e_s^2 (Estación).	e_a^2	e_d^2	e_t^2	e_m^2	e_b^2	E^2
Lisboa	$2,4^2$	$4,7^2$	0,0	$0,6^2$	$0,4^2$	$5,8^2$	$1,1^2$	63,22
Figueira da Foz	$2,4^2$	$3,2^2$	0,0	$0,6^2$	$0,2^2$	$4,6^2$	$1,0^2$	38,56
Oporto	$2,4^2$	$3,3^2$	0,0	$0,5^2$	$0,2^2$	$7,0^2$	$1,4^2$	67,90
Praia da Rocha	$2,4^2$	$3,0^2$	0,0	$0,5^2$	$0,5^2$	$5,8^2$	$0,7^2$	49,39

Extrayendo las raíces cuadradas de los valores contenidos en la última columna tendremos los errores **E** para la duración de la oscilación en cada una de las estaciones.

Lisboa	$E = \pm 8{,}0 \times 10^{-7}$
Figueira da Foz	$E = \pm 6{,}2 \times 10^{-7}$
Oporto	$E = \pm 8{,}2 \times 10^{-7}$
Praia da Rocha	$E = \pm 7{,}0 \times 10^{-7}$

CAPÍTULO IX

VALORES DE LA INTENSIDAD DE LA FUERZA DE LA GRAVEDAD

CAMPAÑA DE 1923

Para determinar los valores de **g**, o sea los valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en cualquiera estación, aplicaremos la fórmula

$$g = g_m - 2g_m \frac{s - s_m}{s_m} + 3g_m \left(\frac{s - s_m}{s_m}\right)^2 + \ldots\ldots$$

En la cual **g** es el valor de la gravedad que se quiere determinar en una estación cualquiera; g_m el valor de la gravedad en Madrid, que es 979,981; **s** el valor de la duración de oscilación en la estación que se trata, obtenido con un péndulo determinado, y s_m el valor de la duración de oscilación en Madrid, obtenido con el mismo péndulo.

Los valores de s_m para cada péndulo son:

Péndulo	104.....	$s_m = 0{,}5014856$
Id.	105.....	$s_m = 0{,}5015475$
Id.	106.....	$s_m = 0{,}5015048$
Id.	107.....	$s_m = 0{,}5065625$

Aplicando, pues, la fórmula anterior, llegaremos a los resultados que figuran en el siguiente cuadro:

AÑO	ESTACIONES	PÉNDULOS	VALORES DE g PARA CADA PÉNDULO	VALORES DE g — Promedios.
1923	Lisboa	104	980,088	980,088
		105	090	
		106	085	
	Figueira da Foz	104	980,223	980,224
		106	226	
		107	224	
	Oporto	104	980,285	980,290
		106	289	
		107	296	
	Praia da Rocha	104	980,003	980,005
		106	003	
		107	010	

Los errores correspondientes a estos valores de **g**, que representaremos por E_g, pueden obtenerse por medio de la fórmula

$$E_g = \pm \frac{2g_m}{s_m} E,$$

en la cual g_m es el valor de la gravedad en Madrid, 979,981; s_m el promedio de las duraciones de oscilación en Madrid en las estaciones de salida y cierre, o sea 0,5015214 y **E** los errores que han resultado anteriormente para las duraciones de oscilación reducidas.

Su aplicación da los resultados siguientes:

Lisboa ..... $E_g = \pm 3{,}1 \times 10^{-3}$
Figueira da Foz ..... $E_g = \pm 2{,}4 \times 10^{-3}$
Oporto ..... $E_g = \pm 3{,}2 \times 10^{-3}$
Praia da Rocha ..... $E_g = \pm 2{,}8 \times 10^{-3}$

En resumen, tendremos finalmente para valores de la intensidad de la gravedad.

Lisboa ..... $g = 980{,}088 \pm 0{,}0031$
Figueira da Foz ..... $g = 980{,}224 \pm 0{,}0024$
Oporto ..... $g = 980{,}290 \pm 0{,}0032$
Praia da Rocha ..... $g = 980{,}005 \pm 0{,}0028$

La reducción de estos valores al nivel del mar la haremos por la fórmula

$$g'' = g + \delta g + \delta' g,$$

siendo

$$\delta g = 0{,}0003086\ H \qquad y \qquad \delta' g = \frac{3}{4} \times \frac{\theta}{\theta_m} (g - g_0)$$

en las que representan:

H, altitud, en metros, sobre el nivel del mar del plano determinado por los centros de las lentejas de los péndulos.

θ_m, densidad media de la tierra, igual a 5,52.

θ, densidad media de la meseta de observación.

En el cuadro siguiente tenemos el conjunto de estos datos y los valores deducidos de los mismos.

ESTACIONES	g	H	θ	δg	$\delta' g$
Lisboa.....	980,088	75	2,4	+ 0,023	— 0,007
Figueira da Foz..	980,224	5	2,6	+ 0,002	— 0,001
Oporto.....	980,290	94	2,6	+ 0,029	— 0,010
Praia da Rocha..	980,005	17	2,6	+ 0,005	— 0,002

De los cuales deduciremos los valores de

$$g_0 = g + \delta g \qquad y \qquad g_0'' = g_0 + \delta' g$$

que serán respectivamente:

ESTACIONES	g_0	g_0''
Lisboa.....	980,111	980,104
Figueira da Foz.....	980,226	980,225
Oporto.....	980,319	980,309
Praia da Rocha.....	980,010	980,008

El cálculo teórico de los valores de g, que representaremos por γ_0, lo haremos por la fórmula de Helmert (1915)

$$\gamma_0 = 978{,}052\ (1 + 0{,}005285\ \text{sen}^2\varphi - 0{,}000007\ \text{sen}^2 2\varphi).$$

En el cuadro siguiente se expresan los valores de γ_0 correspondientes a los diversos de φ, que representa la latitud del lugar de observación.

ESTACIONES	φ	γ_0
	° '	
Lisboa.....	38 43	980,069
Figueira da Foz.....	40 9	980,194
Oporto.....	41 8	980,282
Praia da Rocha.....	37 7	979,928

Finalmente, el conjunto de valores encontrados se ve reunido en el cuadro siguiente:

Resumen de los valores obtenidos en la campaña de 1923

Número.	ESTACIONES	LATITUD	LONGITUD	ALTITUD	θ	g	g_0	g_0''	$\bar{\jmath}_0$	$g_0'' - \bar{\jmath}_0$	$g_0 - \bar{\jmath}_0$
		° ′	° ′ ″	m		cm	cm	cm	cm	cm	cm
94	Lisboa.....	38 42,5	9 11 10,5 W	75	2,4	980,088	980,111	980,104	980,069	+ 0,035	+ 0,042
95	Figueira da Foz.....	40 9	8 52 33,5	5	2,6	980,224	980,226	980,225	980,194	+ 0,031	+ 0,032
96	Oporto.....	41 8,2	8 36 8,0	94	2,6	980,290	980,319	980,309	980,282	+ 0,027	+ 0,037
97	Praia da Rocha..	37 7	8 32 42,5	17	2,6	980,005	980,010	980,008	979,928	+ 0,080	+ 0,082

ÍNDICE

Páginas.

INTRODUCCIÓN..... 5

CAPÍTULO PRIMERO.—Resultados de las observaciones en la campaña de 1921..... 9

CAPÍTULO SEGUNDO.—Invariabilidad de los péndulos y precisión de las observaciones en la campaña de 1921..... 45

CAPÍTULO TERCERO.—Valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en la campaña de 1921..... 55

CAPÍTULO CUARTO.—Resultados de las observaciones en la campaña de 1922..... 61

CAPÍTULO QUINTO.—Invariabilidad de los péndulos y precisión de las observaciones en la campaña de 1922..... 87

CAPÍTULO SEXTO.—Valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en la campaña de 1922..... 97

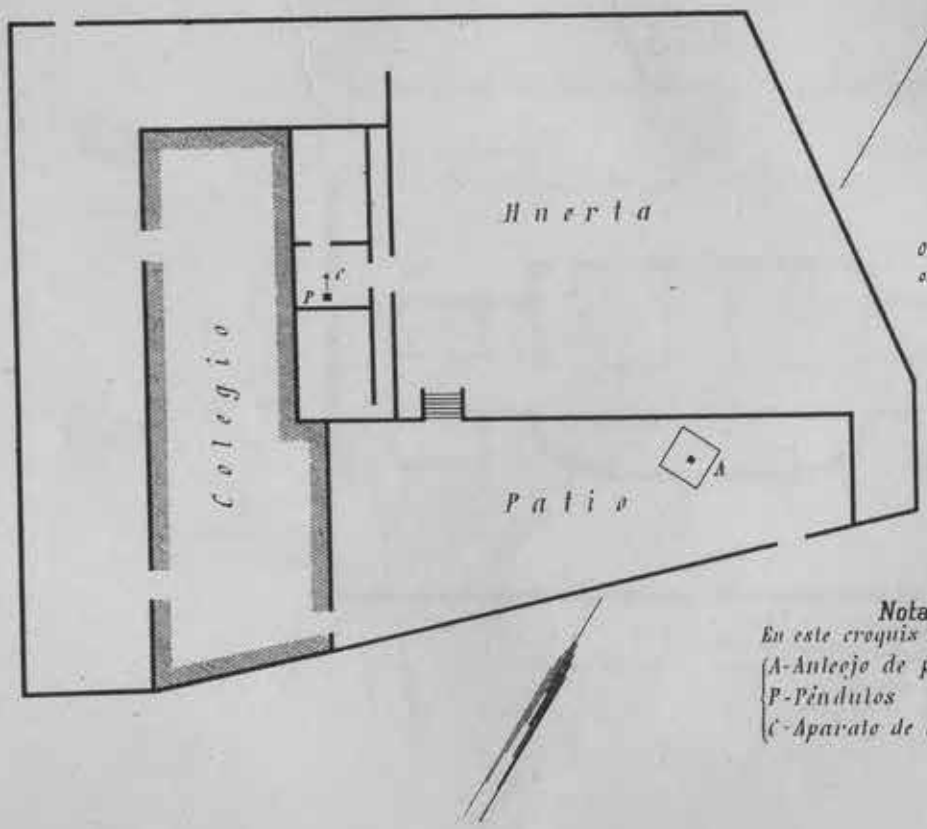
CAPÍTULO SÉPTIMO.—Resultados de las observaciones en la campaña de 1923..... 103

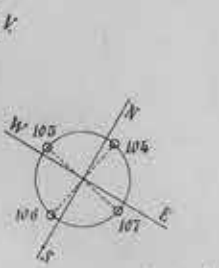
CAPÍTULO OCTAVO.—Invariabilidad de los péndulos y precisión de las observaciones en la campaña de 1923..... 127

CAPÍTULO NOVENO.—Valores de la intensidad de la fuerza de la gravedad en la campaña de 1923..... 135

TANGER

Instalación del péndulo en una clase del Colegio del Sagrado Corazón de los P.P. Franciscanos





Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

Escala de 1:500

Nota

En este croquis representan

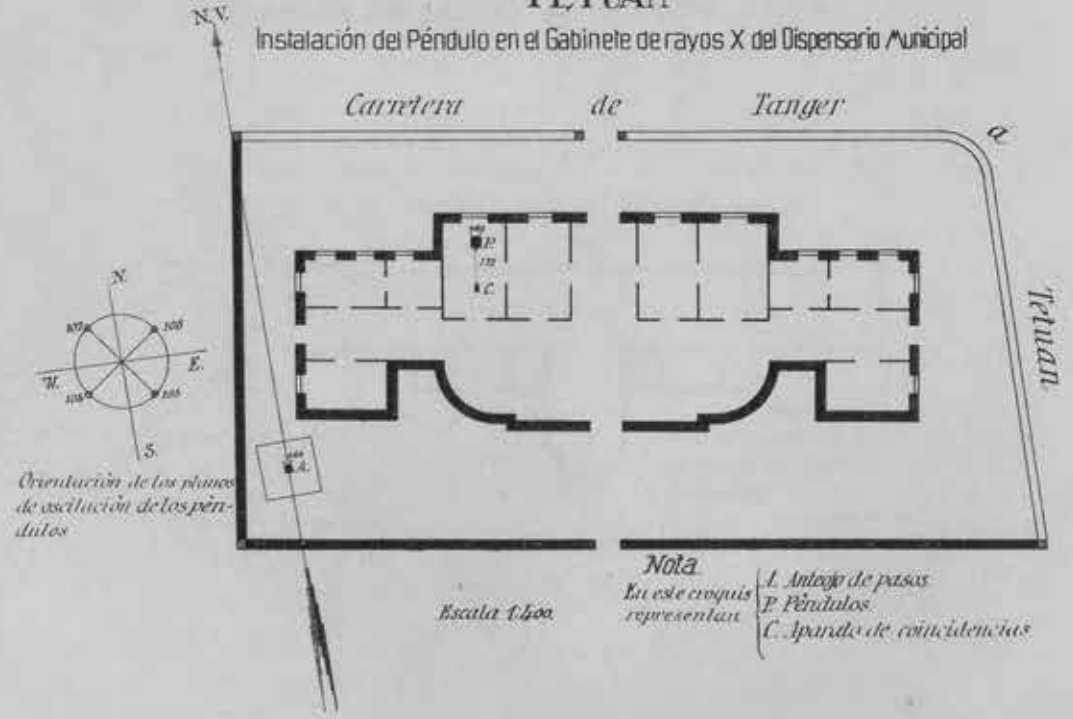
A-Anteojo de pasos

P-Péndulos

C-Aparato de coincidencias

TETUAN

Instalación del Péndulo en el Gabinete de rayos X del Dispensario Municipal



Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

Escala 1:100

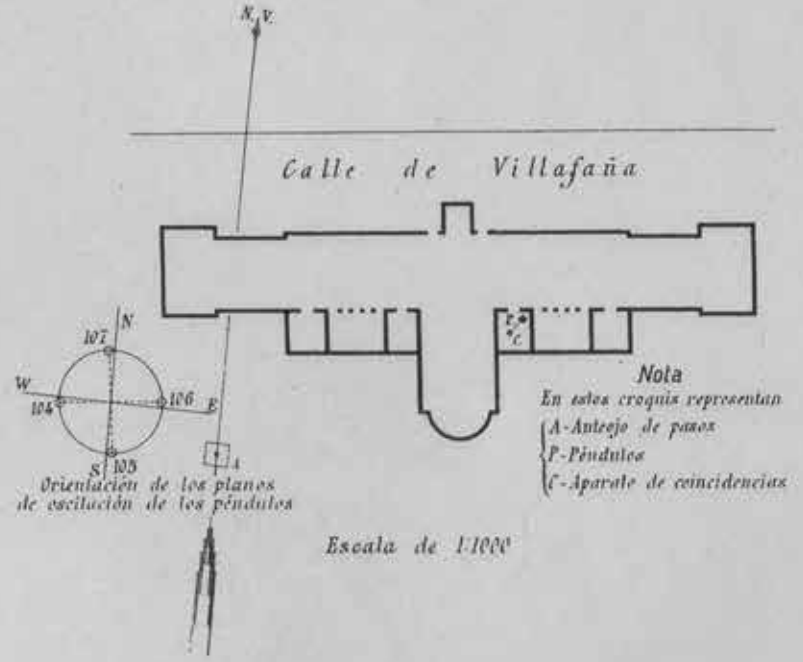
Nota

En este croquis representan

I. Anteojo de pasos
P. Péndulos
C. Aparato de coincidencias

MELILLA

Instalación del péndulo en el Grupo Escolar



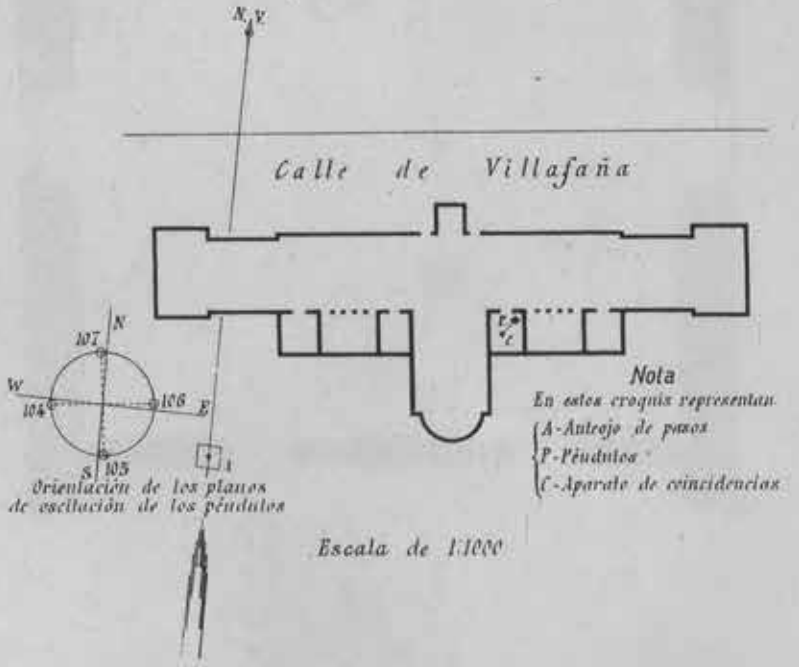
Nota

En estos croquis representan

- *A - Anteojo de paso*
- *P - Péndulos*
- *C - Aparato de coincidencias*

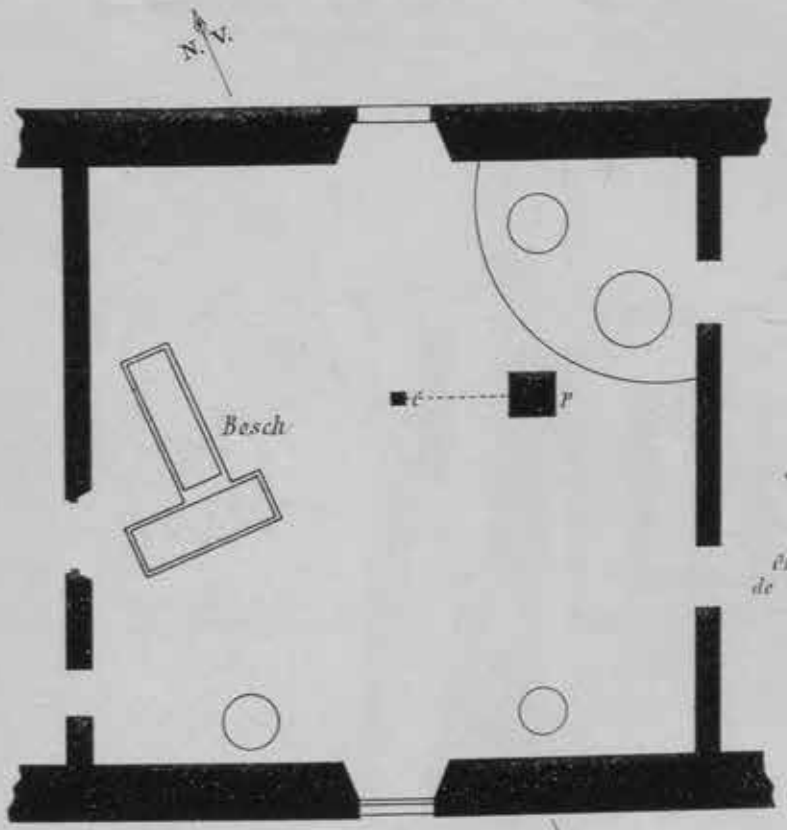
MELILLA

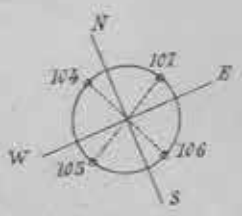
Instalación del péndulo en el Grupo Escolar



MÁLAGA

Instalación del péndulo en la sala de aparatos de la Estación Sismológica





Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

Escala de 1:100

Nota

En este croquis representan

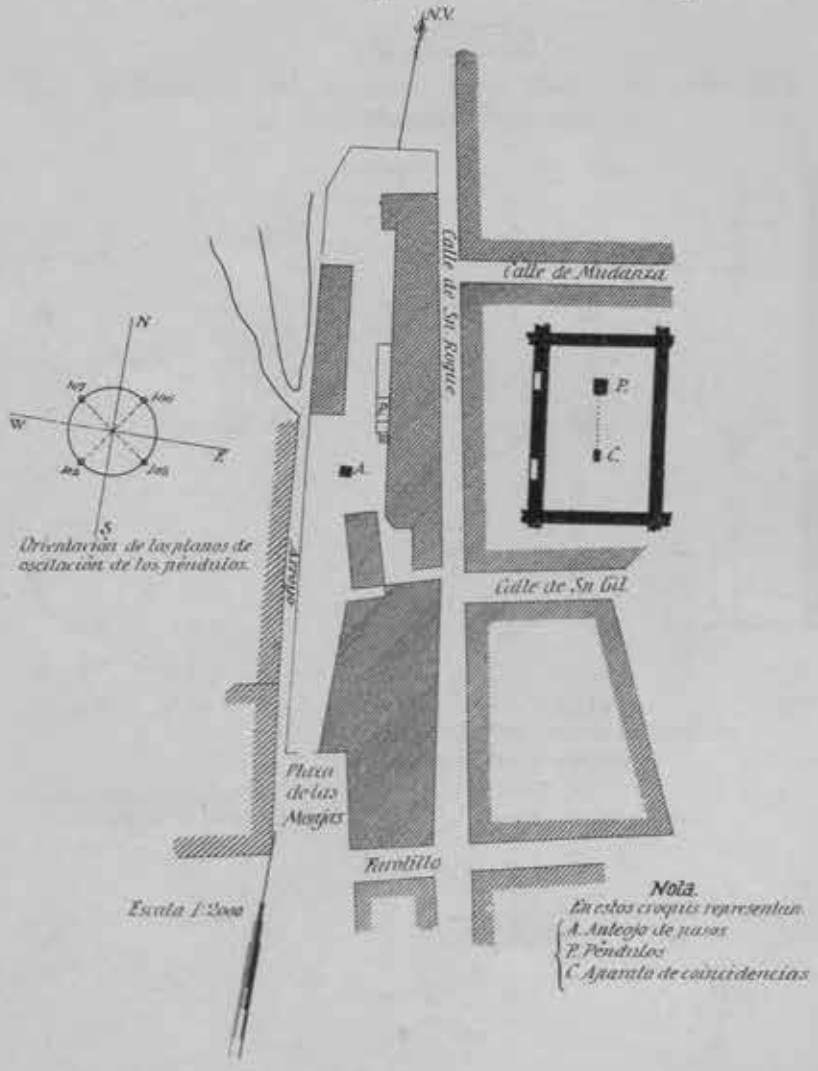
P-Péndulos

C-Aparato de coincidencias

El pilar del anteojo de pasos se levantó á 37'5 metros al S. de la fachada S.W. de la estación

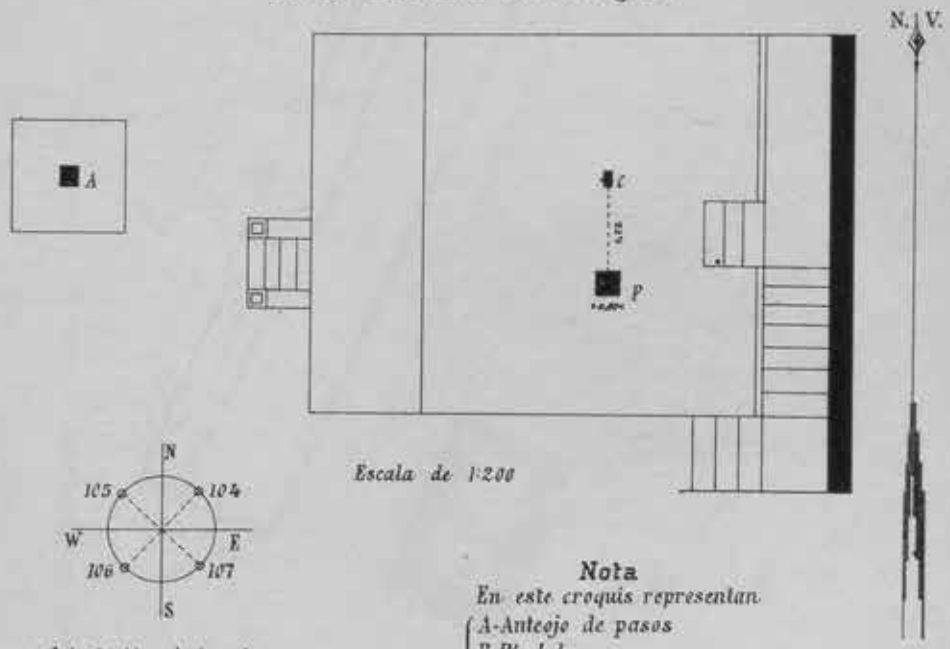
MOTRIL

Instalación del péndulo en la antigua fundición de mineral de plomo "San Caralampio."



ALMERIA

Instalación del péndulo en la Sala de aparatos de la Estación Sismológica



Escala de 1:200

Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

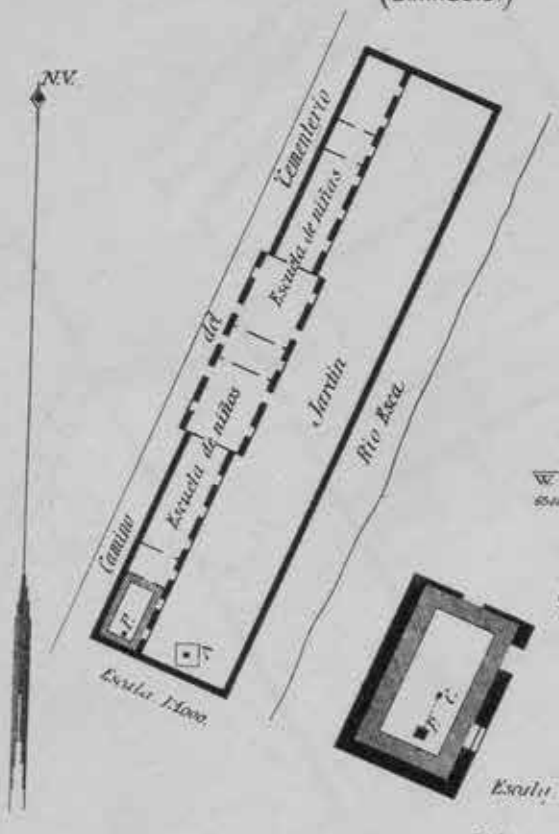
Nota

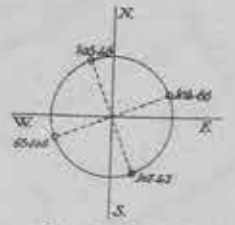
En este croquis representan

- *A-Anteojo de pasos*
- *P-Péndulo*
- *C-Aparato de coincidencias*

RONCAL

Instalación del Péndulo en las Escuelas Municipales (Gimnasio.)





Orientación de los planes de oscilación de los péndulos.

Escala 1:100.



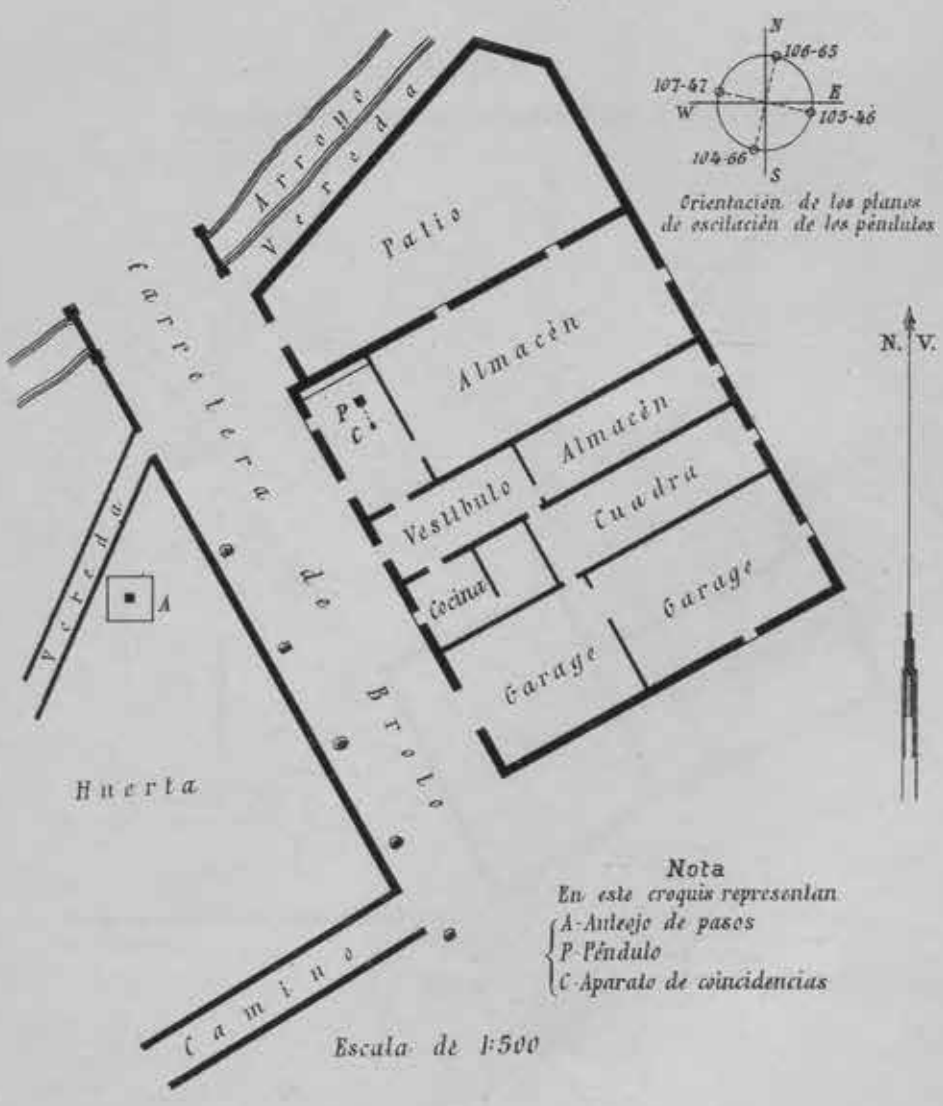
Nota.

En este croquis representan.

E Péndulos.
C Aparato de coincidencias.
A Anteojo de pasos.

BOLTAÑA

Instalación del péndulo en la Posada de San Martin (propiedad de Don Enrique Gistau)



Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

Nota

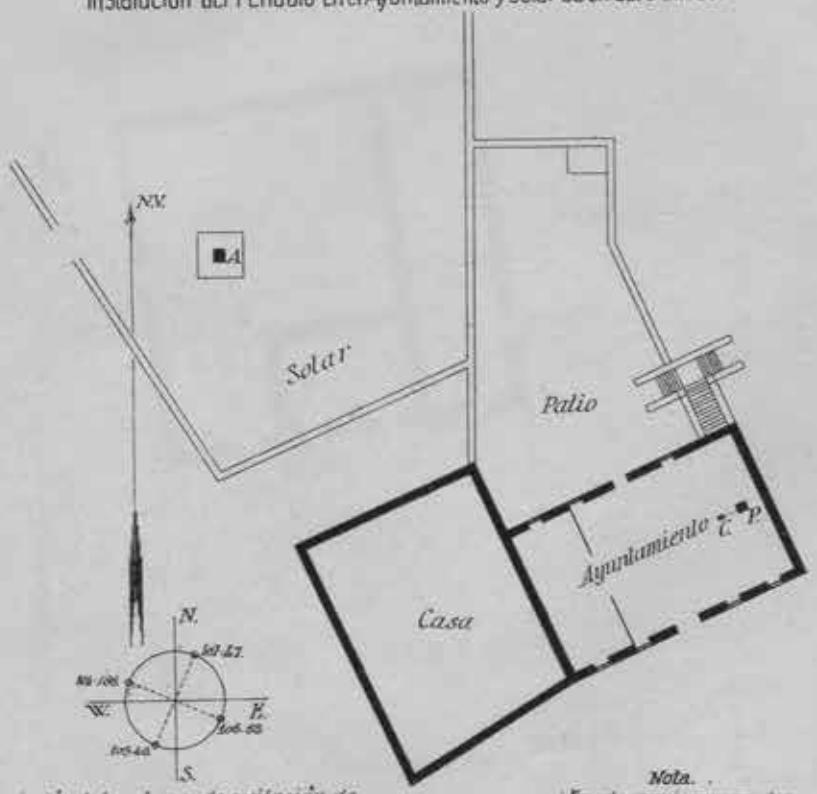
En este croquis representan

A-Anteojo de pases
P-Péndulo
C-Aparato de coincidencias

Escala de 1:500

SORT

Instalación del Péndulo en el Ayuntamiento y solar de D. Pedro Olives.



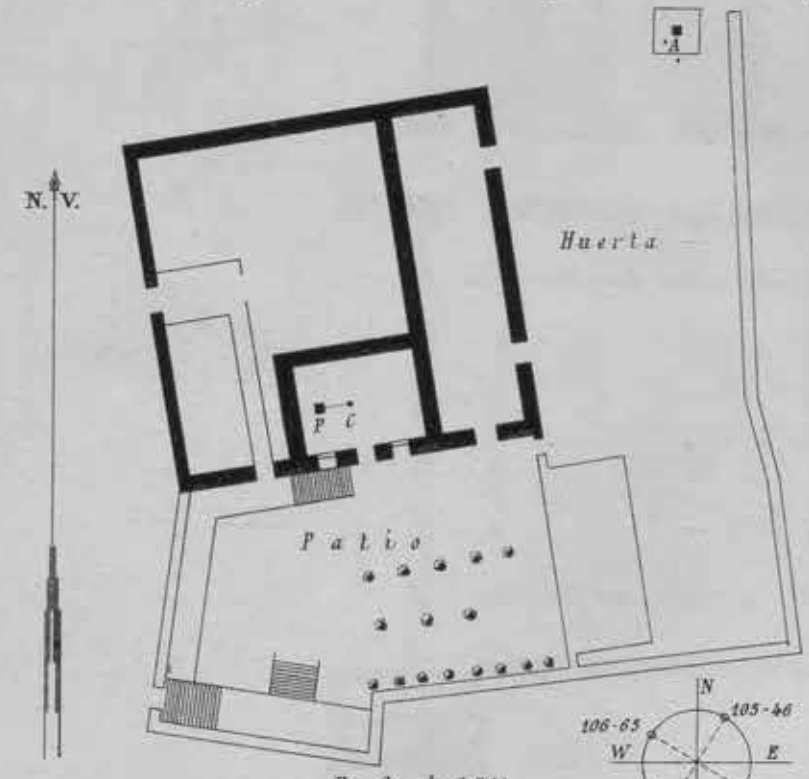
Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

Escala 1:500.

Nota.
En este croquis corresponden.
A. Antiguo de pasos.
P. Péndulos.
C. Aparato de coincidencias.

PUIGCERDÁ

Instalación del péndulo en el Colegio de P.P. Escolapios



Escala de 1:500

Nota

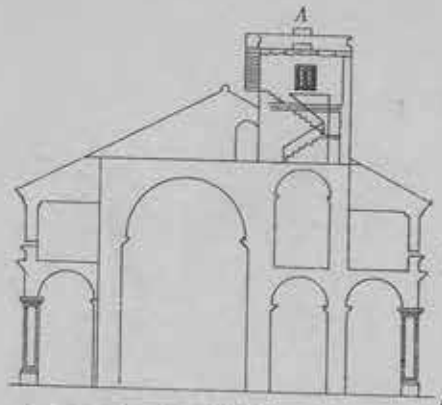
En este croquis representan

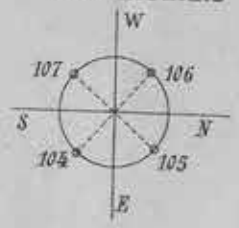
- *A-Antejo de pases*
- *P-Péndulos*
- *C-Aparato de coincidencias*

Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

LISBOA

Instalación del péndulo en la planta baja del Instituto Geográfico e Cadastral



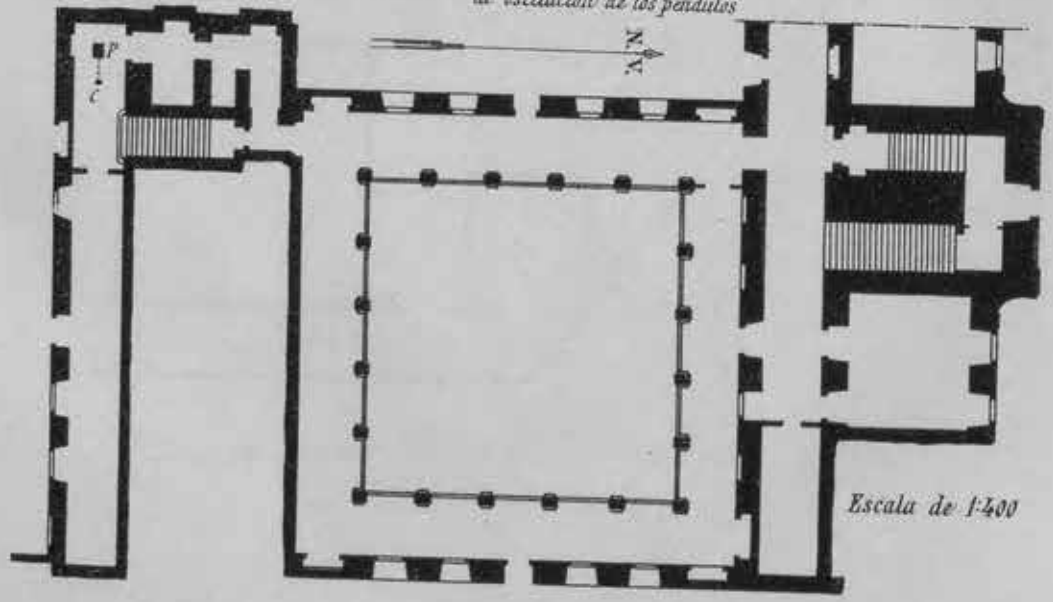


Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

Nota

En este croquis representan

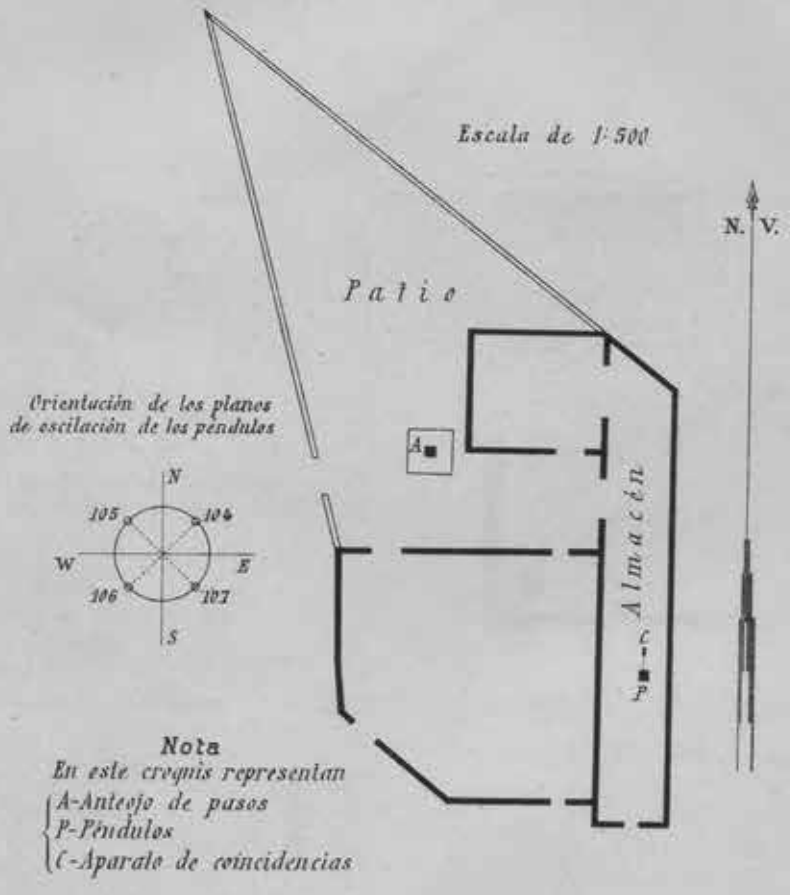
A-Anteojo de pasos
P-Péndulos
C-Aparato de coincidencias



Escala de 1:400

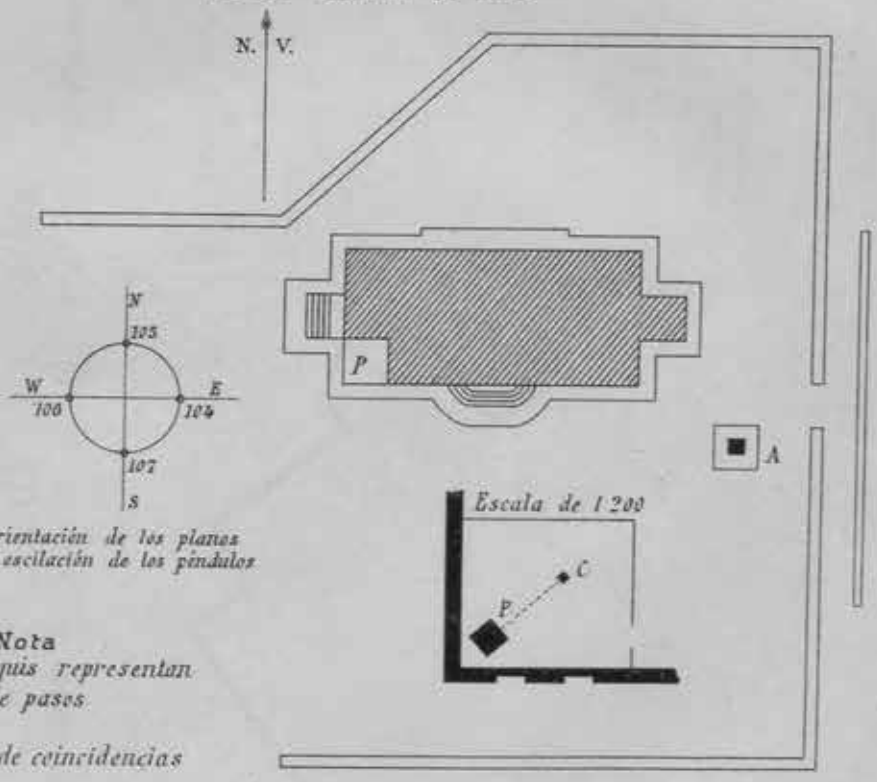
FIGUEIRA DA FOZ

Instalación del péndulo en el almacén de la Junta de Obras del Puerto



OPORTO

Instalación del péndulo en el Observatorio Metereológico de la Serra do Pilar



Orientación de los planos de oscilación de los péndulos

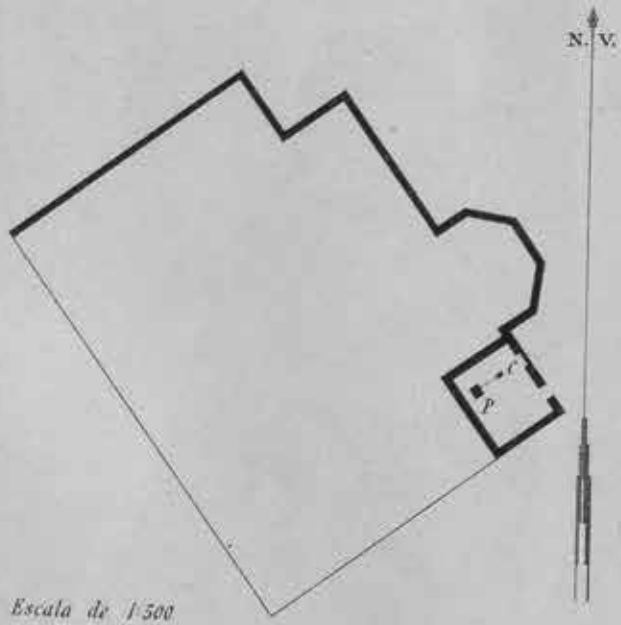
Nota

En este croquis representan

A-Anteojo de pases
P-Péndulos
C-Aparato de coincidencias

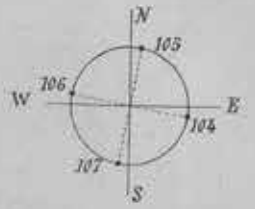
PRAIA DA ROCHA

Instalación del péndulo en el Casino (en construcción)



Escala de 1/500

Orientación de los planos de oscilación de los péndulos





Nota

En este croquis representan

A-Anteojo de pases
P-Péndulos
C-Aparato de coincidencias



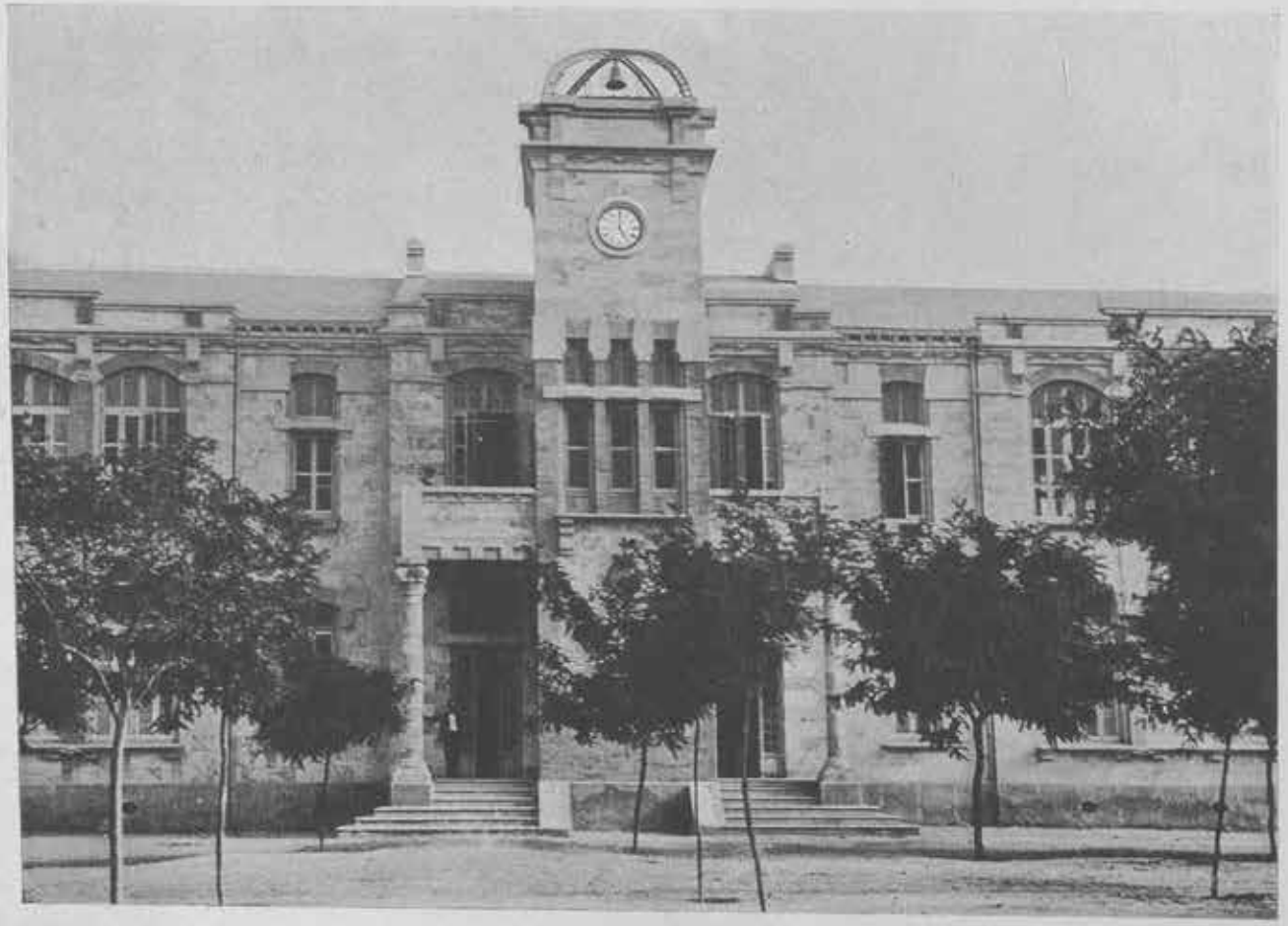
TÁNGER.-Colegio de Franciscanos y barraca astronómica



TETUÁN.-DISPENSARIO MUNICIPAL



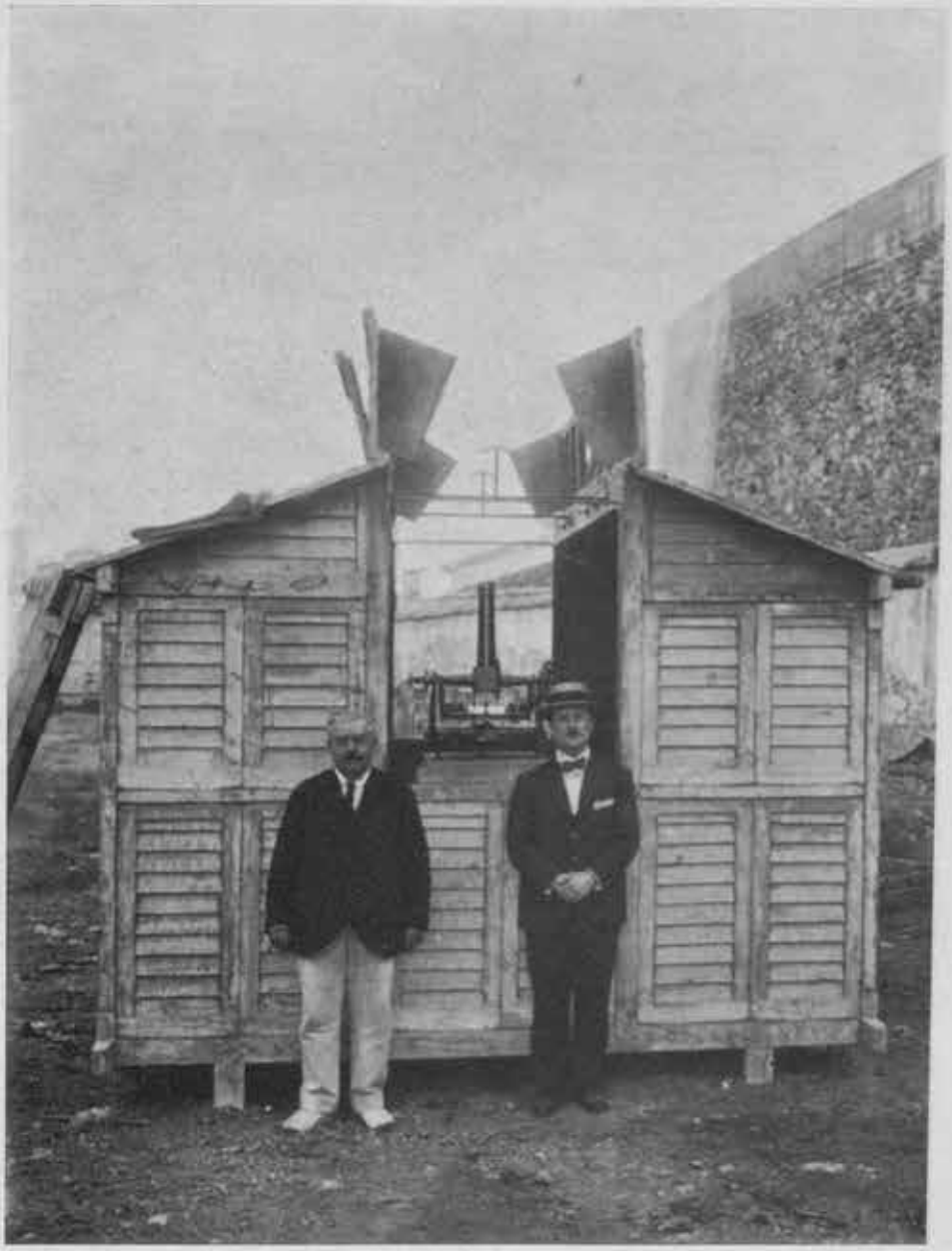
CEUTA.-Barraca astronómica en la batería de San Nicolás



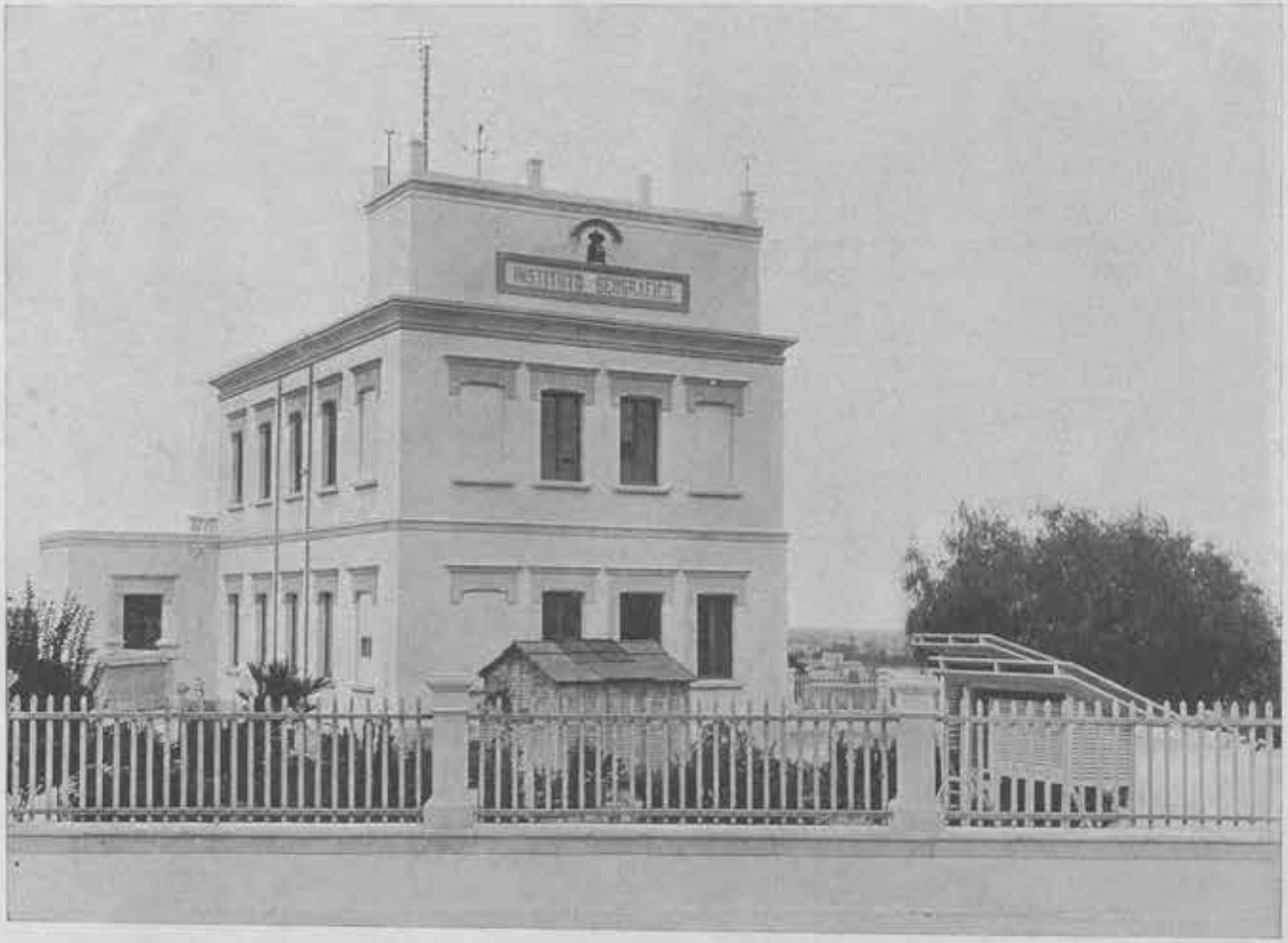
MELILLA.-EDIFICIO DEL GRUPO ESCOLAR



MÁLAGA.-Barraca astronómica en el cerro de Santa Catalina



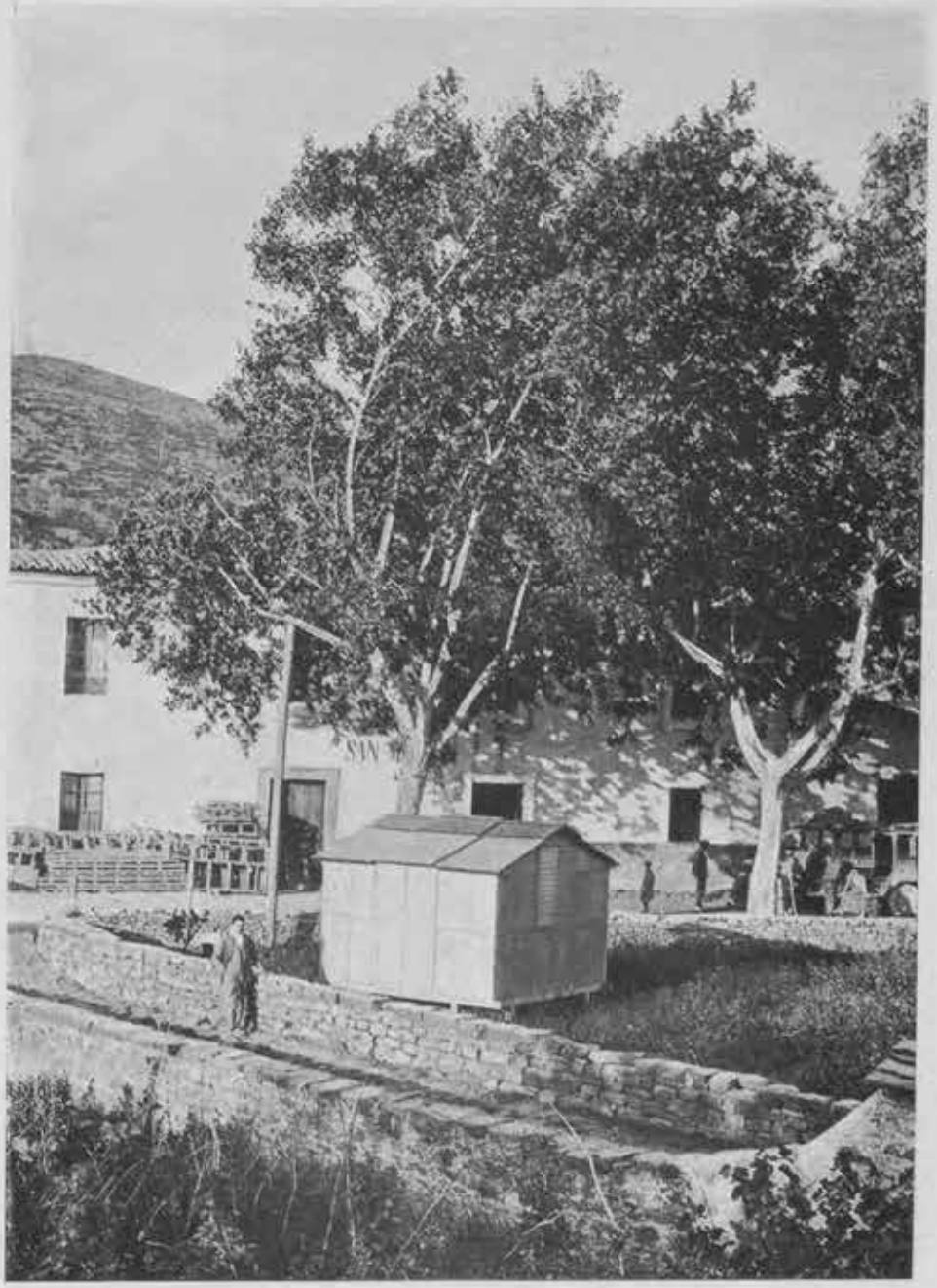
MOTRIL.-Barraca astronómica en el patio de la antigua fundición San Caralampio



ALMERÍA.- Estación sismológica



RONCAL.-En primer término las Escuelas municipales



BOLTAÑA.-Barraca astronómica y local de instalación



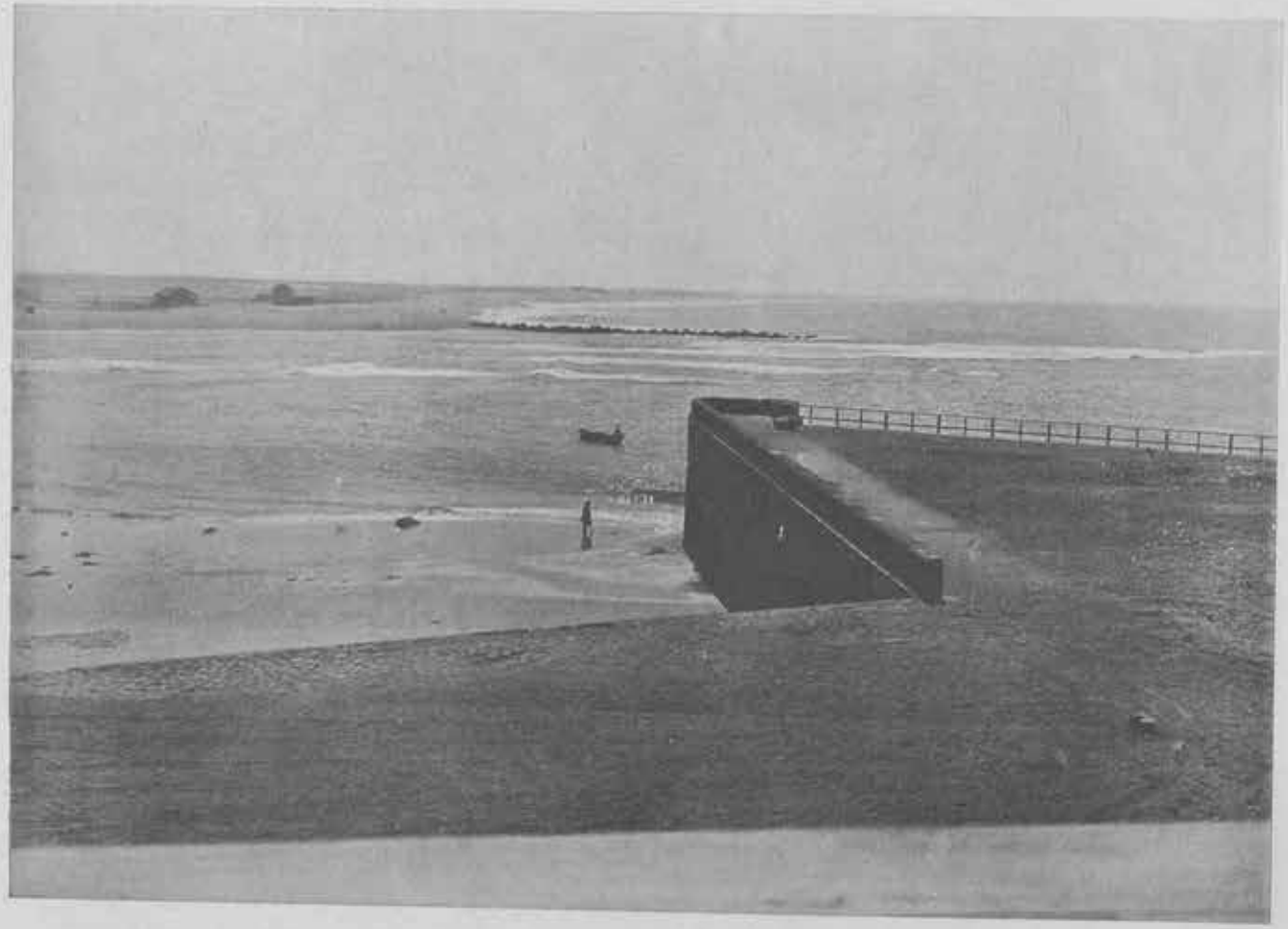
SORT.-AYUNTAMIENTO



PUIGCERDÁ - COLEGIO DE ESCOLAPIOS Y BARRACA ASTRONÓMICA



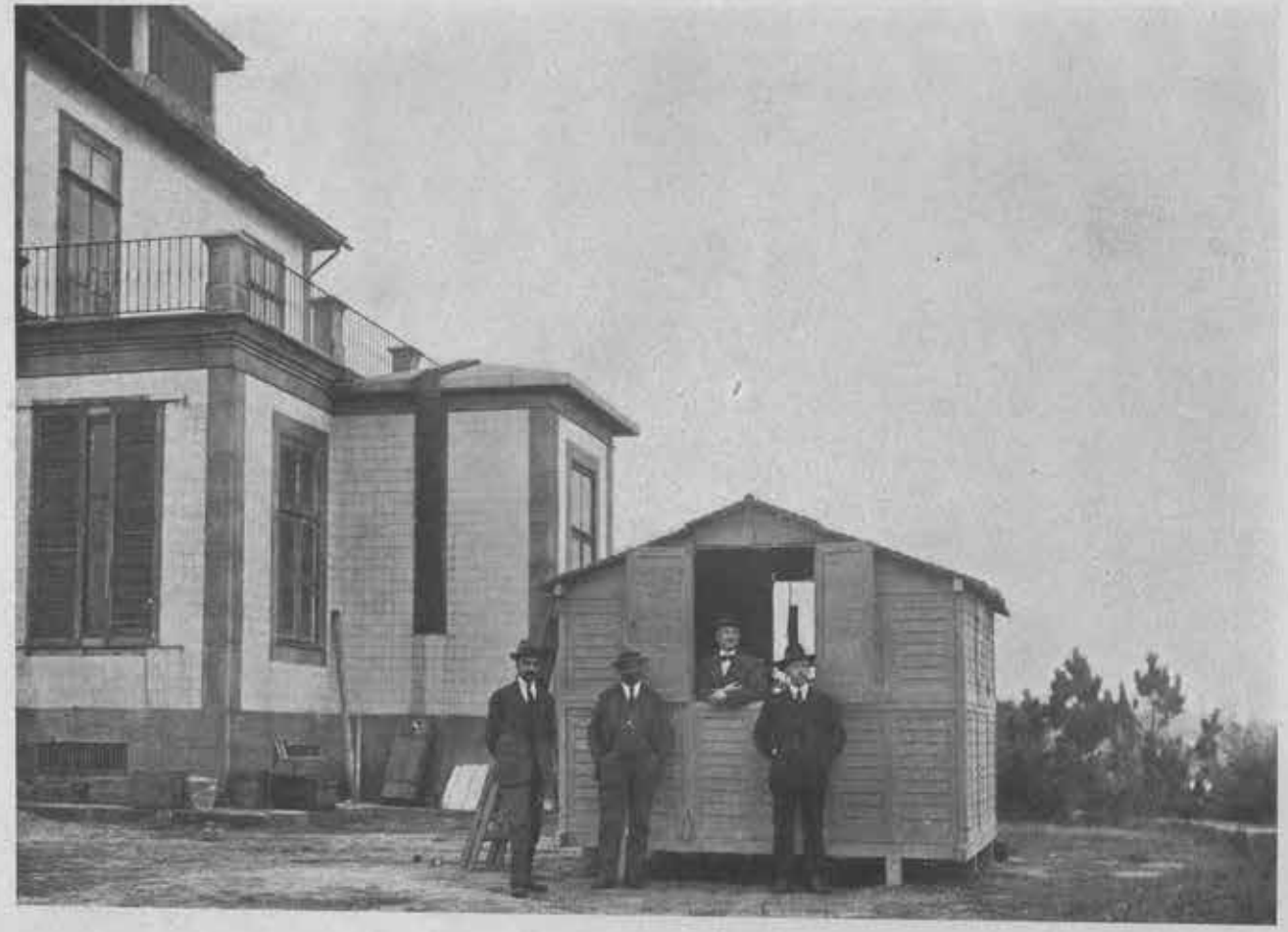
LISBOA - Instituto Geográfico y Catastral



FIGUEIRA DA FOZ.- DESEMBOCADURA DEL RÍO MONDEGO DESDE LAS PROXIMIDADES DEL LOCAL DE INSTALACIÓN



OPORTO.-Vista de la ciudad desde el Observatorio Meteorológico



OPORTO.-Observatorio Meteorológico y barraca astronómica



PRAIA DA ROCHA.-Local de instalación y barraca astronómica

MEMORIAS

DEL

INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL

TOMO XV

VIII

NIVELACIONES DE ALTA PRECISIÓN

RESULTADOS OBTENIDOS DURANTE LA CAMPAÑA DE 1925

en la Sección A. M. del Polígono A

ALICANTE-SAGUNTO

POR

MANUEL DE CIFUENTES

Jefe del Servicio.



MADRID

TALLERES DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL

1927

NIVELACIONES DE ALTA PRECISIÓN

RESULTADOS OBTENIDOS DURANTE LA CAMPAÑA DE 1925

EN LA SECCIÓN A. M. DEL POLÍGONO A

ALICANTE-SAGUNTO

EXPOSICIÓN

El objeto de este informe es poner de manifiesto los resultados obtenidos durante la campaña de 1925 por la Brigada de campo afecta a este servicio que ha llevado a cabo la nivelación entre Alicante y Sagunto bajo la inmediata dirección del Ingeniero Sr. Gil Lasantas.

Por tratarse de la primera sección del nuevo proyecto y, por lo tanto, de la primera vez que con carácter definitivo se llevan a la práctica los procedimientos y normas por los que se han de regir en lo sucesivo estos nuevos trabajos de alta precisión, se ha creído conveniente exponer detalladamente los resultados obtenidos teniendo en cuenta la precisión, economía y rendimiento alcanzados, factores de la mayor importancia y cuya influencia es igualmente decisiva para el éxito de los trabajos.

Consecuentes con las ideas expuestas en nuestro proyecto, se ha escogido para iniciar estos trabajos la sección A. M. del polígono *A*, no sólo por tratarse de un itinerario que se desarrolla próximo al litoral, sino también porque en su punto de partida situado en Alicante se dispone de observaciones de mareas que permiten referir al nivel medio del mar los resultados de las observaciones.

La longitud de este itinerario es de 213 kilómetros aproximadamente, casi todos por la vía férrea, a excepción de 16 kilómetros, que son por carretera.

Este trabajo que proporciona las altitudes de 222 señales principales ha sido ejecutado por cuatro Topógrafos observadores, interviniendo también personalmente el Jefe de la Brigada cuando ha sido necesario.

No estando organizada la sección de cálculo por falta de personal, que debe funcionar al mismo tiempo que se ejecutan los trabajos en el campo, esos mismos señores han tenido a su cargo el cálculo de las observaciones, así como la descripción de las señales y el estudio comparativo de las miras, siendo digna de elogio por este concepto la labor por ellos realizada.

SUMARIO

Exposición.—Organización de la Brigada. Instrumentos empleados.—Establecimiento de las señales principales. Estudio de las miras.—Resultados obtenidos en la nivelación.—Errores accidental y sistemático.—Estudio de los errores.—Investigación del error sistemático.—Corrección ortométrica.—Altitudes ortométricas provisionales.—Cotas dinámicas.—Nivel medio del mar en Alicante.—Nivel medio del mar en Sagunto.—Altitudes fundamentales del itinerario.—Rendimiento alcanzado en los trabajos.—Gasto de los trabajos.—Comparaciones de los resultados con los obtenidos por los antiguos trabajos.—Resumen.

ORGANIZACIÓN DE LA BRIGADA

La Brigada, bajo la inmediata dirección del Ingeniero Sr. Gil Lasantas, se dividió en cuatro secciones, encargándose de cada una de ellas los Topógrafos Sres. Gómez de Salazar, Ruiz Magán, Labrador y Aranda, que durante la campaña de 1924 habían realizado en el polígono de ensayo trabajos análogos, con resultados satisfactorios, para conseguir su entrenamiento en el manejo de los nuevos aparatos, establecimiento de las señales, cálculo de las observaciones, etc., etc.

Cada Jefe de sección ha dispuesto de seis peones para los trabajos: uno para cada mira, dos para el nivel y los otros dos con la cinta métrica, midiendo sobre el terreno las distancias, para que el aparato, en todas las estaciones, quedara equidistante entre las miras, más o menos la tolerancia admitida de 15 centímetros, y el material de campo que ha llevado consigo cada sección para ejecutar los trabajos se compone, principalmente, de un nivel con su trípode, dos miras con sus trípodes, dos planchas para el apoyo de las mismas, una cinta métrica, una sombrilla de campo grande, otra más pequeña y un cierto número de señales metálicas secundarias, que habían de colocarse simultáneamente con las operaciones.

No se ha empleado el campamento, y como en algunas zonas el itinerario se encuentra apartado de los pueblos, ha habido que perder mucho tiempo al ir y al regresar del sitio de los trabajos.

Toda la sección ha sido nivelada dos veces en sentidos opuestos, y para conseguirlo en las mejores condiciones se ha dividido en dos partes aproximadamente de la misma longitud: la primera (véase el gráfico) desde Alicante hasta la estación de Molinell, en la divisoria de las provincias de Alicante y Valencia, y la segunda desde la citada estación hasta Sagunto, encargándose los Sres. Ruiz Magán y Aranda de la primera y Gómez de Salazar y Labrador de la segunda.

Primer itinerario: Alicante-Molinell.

Este itinerario, de una longitud aproximada de 106 kilómetros, se dividió a su vez en otros más pequeños de 15 ó 20 kilómetros de longitud que tenían que ser nivelados en direcciones opuestas, partiendo cada observador al mismo tiempo de sus extremos, entendiéndose que esa distancia es suficiente para conseguir que las condiciones climatológicas sean distintas para cada observador, no siendo prudente aumentarla a causa del peligro que pueden correr las señales secundarias que se establecen de 500 en 500 metros, y que, aun cuando no se utilizan más que para calcular los

errores, es indispensable, por eso mismo, que permanezcan inalterables durante el tiempo que transcurre entre las dos nivelaciones.

Estas subsecciones fueron las siguientes:

1.ª	Alicante-Campello	12 kms.
2.ª	Campello-Villajoyosa	18
3.ª	Villajoyosa-Altea	20
4.ª	Altea-Benisa	22
5.ª	Benisa-Denia	20
6.ª	Denia-Molinell	14
	Total	106

nivelando el Sr. Ruiz Magán desde Alicante, siempre en la misma dirección, hasta llegar a Molinell, y el Sr. Aranda en sentido contrario, y sucesivamente desde Campello, Villajoyosa, Altea, Benisa, Denia y Molinell.

El segundo itinerario, comprendido entre Molinell y Sagunto, se dividió análogamente en las subsecciones siguientes:

7.ª	Molinell-Gandía	16 kms.
8.ª	Gandía-Jaraco	9
9.ª	Jaraco-Cullera	21
10.ª	Cullera-Sollana	16
11.ª	Sollana-Valencia	21
12.ª	Valencia-Masalfasar	15
13.ª	Masalfasar-Sagunto	14
	Total	112

que fueron niveladas por el Sr. Gómez de Salazar, siempre en el mismo sentido, desde el origen en Molinell hasta el final del itinerario en Sagunto, y por el Sr. Labrador en dirección contraria, arrancando sucesivamente de Gandía, Jaraco, Cullera, Sollana, Valencia, Masalfasar y Sagunto. A causa de enfermedad de este observador el Jefe de la Brigada le sustituyó en la séptima subsección: Molinell-Gandía.

Todas estas subsecciones han sido divididas a su vez en trozos de tres kilómetros de longitud, limitados por grupos de tres señales metálicas principales, y éstos en otros intervalos más pequeños (de 500 metros), donde se han colocado señales metálicas secundarias sólo para la práctica de las operaciones relacionadas con el estudio de los errores; es decir, que una vez ejecutada la doble nivelación pueden desaparecer. Se han encontrado con frecuencia túneles y puentes en el itinerario que por su poca longitud no hay necesidad de comentar separadamente el trabajo de nivelación, pero su número ha sido tan crecido que ha perturbado la marcha normal de las operaciones, obligando al observador a intensificar el trabajo con un rendimiento menor.

En los ríos, aun cuando no era indispensable, pues se ha podido conducir la nivelación ordinaria con variada dificultad por encima de los puentes, se ha ensayado también el procedimiento de las visuales largas y simultáneas a través de los cauces con arreglo a las instrucciones dictadas por el Servicio, comparándose los resultados obtenidos que, como no podía menos de suceder, concuerdan satisfactoriamente.

INSTRUMENTOS EMPLEADOS

Se han empleado cuatro niveles de precisión Wild-Zeiss del modelo núm. 3, con dispositivo para desplazar la visual, que permite leer directamente la mira sin recurrir a la estima. La rapidez y la precisión en el trabajo son las características principales de este magnífico instrumento, empleado también con todo éxito por Suiza, Austria y Grecia para sus nivelaciones geodésicas, y seguramente, cuando sea más conocido, será adoptado por otros países y en general por Ingenieros y particulares por su manera rápida y segura de operar.

Las miras del mismo constructor y complemento indispensable de los niveles tienen una cinta metálica de acero de Invar donde van grabadas las divisiones de medio en medio centímetro. Lo mismo éstas que aquéllos se describen detalladamente en el *Proyecto de Nivelaciones de alta precisión* presentado por los Ingenieros del Servicio Sres. Cifuentes y Gil Lasantas.

ESTABLECIMIENTO DE LAS SEÑALES PRINCIPALES

Las señales principales fueron establecidas en el terreno con anterioridad a los trabajos, siguiendo las normas dictadas por el Servicio, utilizando los modelos que han sido aprobados y que se describen en el citado *Proyecto de Nivelaciones de alta precisión;* fueron colocadas durante los meses de Mayo y Junio por el Jefe de la Brigada y los Topógrafos Sres. Ruiz Magán, Labrador y Aranda, eligiendo indistintamente la superficie del suelo o las fachadas de los edificios de permanente y sólida construcción.

El procedimiento seguido asegura, desde ese aspecto tan importante de las referencias de los trabajos, el éxito de los mismos de una manera absoluta y definitiva.

Como se ha empleado con más generalidad un modelo de señal metálica recientemente construido y que por esta causa no se describe en el mencionado *Proyecto*, se acompaña un dibujo en escala natural del mismo, por el que puede observarse la doble curvatura que tiene en la cabeza, con objeto de asegurar en un punto el contacto de ella con el talón plano de la mira, lo mismo cuando se establece verticalmente en el terreno que cuando se incrusta horizontalmente en las paredes de los edificios. La mayor parte de las señales establecidas pertenecen a este modelo, de precio económico, y los resultados obtenidos han sido muy satisfactorios. En el adjunto gráfico de las señales puede verse su distribución por grupos de tres cada tres kilómetros, constituyendo cada grupo una referencia permanente de los trabajos. El grupo situado en Alicante, origen del itinerario, está constituído por cinco señales establecidas en las inmediaciones de la Estación Sismológica, y a él ha sido referida la antigua señal N. P. 1 situada en el Ayuntamiento; sólo 52 señales han sido establecidas en las paredes de los edificios; las demás, hasta 213, lo han sido sobre la superficie del terreno, y en este caso, siempre que ha sido posible, en la roca viva y cuando no en bloques de cemento, hundidos verticalmente en el suelo y recibidos por otros de cemento y hormigón de un metro cúbico de volumen. La proximidad relativa de las señales de cada grupo y su colocación en condiciones diferentes garantizan, al tener

que tomarlas como punto de arranque de otras nivelaciones posteriores, la seguridad de poder elegir la altitud de partida del nuevo itinerario en buenas condiciones.

Las reseñas minuciosamente descritas de cada una de las señales con los gráficos y croquis que las acompañan ponen de manifiesto la cuidadosa atención prestada por el citado personal que las ha establecido, a este extremo de la mayor importancia.

ESTUDIO DE LAS MIRAS

Las ocho miras que han intervenido en estos trabajos han sido comparadas después de la campaña utilizando el comparador de tres metros recientemente adquirido por el Instituto Geográfico.

En el estado que adjunto se acompaña se expresan los valores relativo y absoluto obtenidos para el metro medio en cada una de las miras.

Como cada mira tiene dos escalas y cada observador utiliza dos miras para sus trabajos, los desniveles obtenidos se han corregido teniendo en cuenta el promedio de los cuatro metros que han intervenido en las observaciones.

Estos promedios son: para las miras 1 y 2, $p = 1{,}000182$.

Para las miras 3 y 4, $p = 1{,}000171$.

Para las miras 5 y 6, $p = 1{,}000182$.

Para las miras 7 y 8, $p = 1{,}000157$.

Las pequeñas diferencias entre estos valores y el pequeño desnivel que presenta este itinerario que se desarrolla próximo al litoral, hacen que sea también muy pequeña la influencia que sobre los resultados de las observaciones es debida a la incertidumbre en el verdadero valor del metro de mira que interviene en las operaciones.

COMPARACIÓN DE LAS MIRAS DE INVAR

Resultados obtenidos directamente de la observación y referidos al patrón de las miras (P. m.), considerando su metro como unidad.

RESULTADOS RELATIVOS

FECHA	TEMPERATURA	REGLAS	LONGITUD DEL METRO MEDIO			LONGITUD ENTRE SEÑALES	
			Escala *I.*	Escala *D.*	Promedio.	Madera.	Invar.
			m.	m.	m.	m.	m.
Enero 1926.....	20°	P. m.	»	»	1,00000	»	2,900000
		Mira 1	1,000154	1,000145	150	2,900867	468
		2	160	159	159	1239	955
		3	165	166	165	0840	450
		4	116	129	122	425	545
		5	157	155	156	346	438
		6	151	155	153	638	414
		7	119	124	121	870	382
		8	161	153	157	723	519

Los resultados anteriores teniendo en cuenta la verdadera longitud del patrón de las miras (P. m.).

RESULTADOS ABSOLUTOS

FECHA	TEMPERATURA	REGLAS	LONGITUD del metro.	OBSERVACIONES
			m.	
Febrero 1926....	20°	P. M.	1,000011	P. M. Patrón de Metrología.
		P. m.	028	Longitud a 0° = $3^{m} - 42^{\mu},6$.
		Mira 1	178	Dilatación por metro y grado: $1^{\mu},280$.
		2	187	»
		3	193	P. m. Patrón de las miras.
		4	150	Se desconoce su dilatación.
		5	184	»
		6	181	Cinta de Invar de las miras.
		7	149	Dilatación por metro y grado: $2^{\mu},212$.
		8	185	»

RESULTADOS OBTENIDOS EN LA NIVELACIÓN

Itinerario Alicante-Molinell.

Este itinerario ha sido nivelado entre Julio y Diciembre de 1925, interviniendo los niveles 3 y 4 y las miras 5, 6, 7 y 8.

Las longitudes de estas miras sólo se han deducido de la comparación que se ha hecho en Madrid inmediatamente después de la campaña.

Con arreglo a estos valores se han corregido los desniveles obtenidos en el campo, cuyos resultados se exponen a continuación, estando basadas las altitudes en la altitud provisional ortométrica $3^{m},4095$ obtenida por la escala de mareas para la señal N. P. 1 situada en el Ayuntamiento de Alicante.

PRIMERA PARTE: ALICANTE-MOLINELL

Resultados obtenidos en la nivelación entre las señales principales 34 013 1814 35 014 y 125 034 124.

INTERVALOS			DIFERENCIAS DE NIVEL			DISCORDANCIAS		Señales principales.	Distancia al origen.	Altitudes observadas sobre el nivel del mar.
Señales.		Distancias	Ida.	Vuelta.	Promedio.	Parcial.	Total.			
		km.	m.	m.	m.	mm.	mm.		km.	m.
»		»	»	»	»	»	»			
								34	1,816	34,5115
34	013	0,027	+ 0,6226	— 0,6224	+ 0,6225	— 0,2	+ 1,0	013	1,789	35,1340
013	N. P. 1814	0,011	— 0,6038	+ 0,6035	— 0,6036	+ 0,3	+ 1,8	N. P. 1814	1,778	34,5303
N. P. 1814	35	0,101	— 1,5253	+ 1,5253	— 1,5253	0,0	+ 1,5	35	1,677	33,0049
35	014	0,042	— 0,1897	+ 0,1897	— 0,1897	0,0	+ 1,5	014	1,635	32,8152
014	N. P. 1	1,635	— 29,4065	+ 29,4050	— 29,4057	+ 1,5	+ 1,5	**N. P. 1**	»	**3,4095**
N. P. 1	36	1,039	+ 0,8974	— 0,8964	+ 0,8969	— 1,0	— 1,0	36	1,039	4,3064
36	015	0,018	+ 0,5112	— 0,5107	+ 0,5109	— 0,5	— 1,5	015	1,057	4,8174
015	N. P. 1813	0,016	— 0,6665	+ 0,6666	— 0,6665	— 0,1	— 1,6	N. P. 1813	1,073	4,1508
N. P. 1813	38	2,946	+ 4,6753	— 4,6716	+ 4,6734	— 3,7	— 5,3	38	4,019	8,8242
38	40	0,030	— 1,0839	+ 1,0835	— 1,0837	+ 0,4	— 4,9	40	4,049	7,7405
40	39	0,086	— 1,5567	+ 1,5560	— 1,5563	+ 0,7	— 4,2	39	4,135	6,1842
39	41	2,873	— 4,7040	+ 4,7042	— 4,7041	— 0,2	— 4,4	41	7,008	1,4801
41	42	0,059	+ 0,0015	— 0,0009	+ 0,0012	— 0,6	— 5,0	42	7,067	1,4812
42	43	0,063	+ 0,5578	— 0,5579	+ 0,5578	+ 0,1	— 4,9	43	7,130	2,0391
43	017	2,798	+ 2,5121	— 2,5144	+ 2,5132	+ 2,3	— 2,6	017	9,928	4,5524
017	44	0,042	— 1,4427	+ 1,4430	— 1,4428	— 0,3	— 2,9	44	9,970	3,1096
44	45	0,065	+ 0,0822	— 0,0822	+ 0,0822	0,0	— 2,9	45	10,035	3,1917
45	46	3,643	+ 15,3139	— 15,3152	+ 15,3145	+ 1,3	— 1,6	46	13,678	18,5063
46	47	0,094	+ 0,1802	— 0,1800	+ 0,1801	— 0,2	— 1,8	47	13,772	18,6864
47	018	0,043	+ 1,1167	— 1,1169	+ 1,1168	+ 0,2	— 1,6	018	13,815	19,8032
018	48	2,440	— 9,2989	+ 9,3028	— 9,3008	— 3,9	— 5,5	48	16,255	10,5022
48	49	0,114	— 1,0974	+ 1,0979	— 1,0976	— 0,5	— 6,0	49	16,369	9,4046
49	50	0,071	+ 0,2161	— 0,2160	+ 0,2160	— 0,1	— 6,1	50	16,440	9,6206
50	51	3,211	+ 27,0795	— 27,0806	+ 27,0800	+ 1,1	— 5,0	51	19,651	36,7007
51	52	0,049	+ 0,3254	— 0,3254	+ 0,3254	0,0	— 5,0	52	19,700	37,0261
52	53	0,107	— 0,0903	— 0,0903	— 0,0903	0,0	— 5,0	53	19,807	36,9358
53	54	3,130	— 5,2168	+ 5,2173	— 5,2170	— 0,5	— 5,5	54	22,937	31,7187
54	55	0,022	+ 0,9430	— 0,9429	+ 0,9429	— 0,1	— 5,6	55	22,959	32,6617
55	56	0,048	— 1,7573	+ 1,7569	— 1,7571	+ 0,4	— 5,2	56	23,007	30,9046
56	57	3,186	+ 8,2348	— 8,2294	+ 8,2321	— 5,4	— 10,6	57	26,193	39,1366
57	58	0,033	— 0,5145	+ 0,5146	— 0,5145	— 0,1	— 10,7	58	26,226	38,6221
58	59	0,027	— 0,5063	+ 0,5064	— 0,5063	— 0,1	— 10,8	59	26,253	38,1158
59	60	2,887	— 15,4318	+ 15,4356	— 15,4337	— 3,8	— 14,6	60	29,140	22,6821
60	61	0,044	+ 0,0114	— 0,0109	+ 0,0111	— 0,5	— 15,1	61	29,184	22,6932
61	62	0,040	— 0,2951	+ 0,2950	— 0,2950	+ 0,1	— 15,0	62	29,224	22,3982
62	63	2,609	+ 4,9585	— 4,9637	+ 4,9611	+ 5,2	— 9,8	63	31,833	27,3593
63	019	0,044	+ 0,9143	— 0,9143	+ 0,9143	0,0	— 9,8	019	31,877	28,2735
019	64	0,032	— 0,7287	+ 0,7288	— 0,7287	— 0,1	— 9,9	64	31,909	27,5448

INTERVALOS			DIFERENCIAS DE NIVEL			DISCORDANCIAS		Señales principales.	Distancia al origen.	Altitudes observadas sobre el nivel del mar.
Señales.		Distancias	Ida.	Vuelta.	Promedio.	Parcial.	Total.			
		km.	m.	m.	m.	mm.	mm.		km.	m.
64	65	3,764	+ 21,4984	— 21,4999	+ 21,4991	+ 1,5	— 8,4	65	35,673	49,0439
65	66	0,036	— 0,0151	+ 0,0150	— 0,0150	+ 0,1	— 8,3	66	35,709	49,0289
66	67	0,033	— 0,0115	+ 0,0115	— 0,0115	0,0	— 8,3	67	35,742	49,0174
67	68	2,909	+ 12,8172	— 12,8175	+ 12,8173	+ 0,3	— 8,0	68	38,651	61,8347
68	69	0,041	— 0,1495	+ 0,1497	— 0,1496	— 0,2	— 8,0	69	38,692	61,6851
69	70	0,039	+ 0,1481	— 0,1486	+ 0,1483	+ 0,5	— 7,7	70	38,731	61,8335
70	71	2,037	+ 3,5908	— 3,5892	+ 3,5900	— 1,6	— 9,3	71	40,768	65,4234
71	72	0,017	— 0,0038	+ 0,0036	— 0,0037	+ 0,2	— 9,1	72	40,785	65,4198
72	73	0,028	+ 0,0246	— 0,0243	+ 0,0244	— 0,3	— 9,4	73	40,813	65,4442
73	74	2,139	— 8,1115	+ 8,1117	— 8,1116	— 0,2	— 9,6	74	42,952	57,3325
74	020	0,067	+ 0,4430	— 0,4433	+ 0,4431	+ 0,3	— 9,3	020	43,019	57,7757
020	75	0,023	— 0,5460	+ 0,5457	— 0,5458	+ 0,3	— 9,0	75	43,042	57,2298
75	76	2,450	13,3209	+ 13,3229	— 13,3219	— 2,0	— 11,0	76	35,292	43,9079
76	77	0,020	+ 0,0357	— 0,0359	+ 0,0358	+ 0,2	— 10,8	77	35,312	43,9437
77	78	0,040	— 0,0930	+ 0,0931	— 0,0930	— 0,1	— 10,9	78	35,352	43,8507
78	79	1,990	— 5,2391	+ 5,2388	— 5,2389	+ 0,3	— 10,6	79	37,342	38,6117
79	021	0,036	+ 0,8816	— 0,8817	+ 0,8816	+ 0,1	— 10,5	021	37,378	39,4934
021	80	0,072	— 0,8885	+ 0,8879	— 0,8882	+ 0,6	— 9,9	80	37,450	38,6052
80	81	4,589	— 29,1864	+ 29,1895	— 29,1879	— 3,1	— 13,0	81	42,039	9,4173
81	022	0,035	+ 0,8007	— 0,8009	+ 0,8008	+ 0,2	— 12,8	022	42,074	10,2181
022	82	0,055	— 0,9164	+ 0,9157	— 0,9155	— 0,3	— 13,1	82	42,129	9,3024
82	83	3,397	+ 25,3296	— 25,3269	+ 25,3282	— 2,7	— 15,8	83	45,526	34,6307
83	024	0,036	+ 0,5953	— 0,5952	+ 0,5952	— 0,1	— 15,9	024	45,562	35,2259
024	84	0,067	— 1,4793	+ 1,4792	— 1,4792	+ 0,1	— 15,8	84	45,629	33,7467
84	85	3,449	+ 62,1807	— 62,1762	+ 62,1784	— 4,5	— 20,3	85	48,078	95,9252
85	88	0,050	+ 0,8826	— 0,8825	+ 0,8825	— 0,1	— 20,4	88	48,128	96,8077
88	89	0,082	+ 1,5363	— 1,5364	+ 1,5363	+ 0,1	— 20,3	89	48,210	98,3440
89	87	3,734	+ 3,0908	— 3,0899	+ 3,0903	— 0,9	— 21,2	87	51,944	101,4345
87	023	0,083	+ 0,9874	— 0,9873	+ 0,9873	— 0,1	— 21,3	023	52,027	102,4218
023	86	0,026	— 0,4533	+ 0,4535	— 0,4534	— 0,2	— 21,5	86	52,053	101,9683
86	90	3,293	— 0,7888	+ 0,7903	— 0,7895	— 1,5	— 23,0	90	55,346	101,1788
90	91	0,058	— 0,1954	+ 0,1950	— 0,1952	+ 0,4	— 22,6	91	55,404	100,9836
91	92	0,056	+ 0,1111	— 0,1109	+ 0,1110	— 0,2	— 22,8	92	55,460	101,0946
92	93	3,281	+ 30,0245	— 30,0227	+ 30,0236	— 1,8	— 24,6	93	58,741	131,1182
93	94	0,137	— 0,1750	+ 0,1751	— 0,1750	— 0,1	— 24,7	94	58,878	130,9431
94	95	0,096	— 0,0587	+ 0,0588	— 0,0587	— 0,1	— 24,8	95	58,974	130,8843
95	96	3,366	+ 53,2824	— 53,2761	+ 53,2792	— 6,3	— 31,1	96	62,340	184,1636
96	025	0,137	+ 0,6532	— 0,6535	+ 0,6533	+ 0,3	— 30,8	025	62,477	184,8169
025	97	0,056	— 1,4723	+ 1,4725	— 1,4724	— 0,2	— 31,0	97	62,533	183,3445
97	98	2,488	— 31,8755	+ 31,8792	— 31,8773	— 3,7	— 34,7	98	65,021	151,4672
98	026	0,060	+ 1,1722	— 1,1715	+ 1,1718	— 0,7	— 35,4	026	65,081	152,6390
026	99	0,030	— 0,7813	+ 0,7808	— 0,7810	+ 0,5	— 34,9	99	65,111	151,8580
99	110	3,340	— 41,6373	+ 41,6306	— 41,6339	+ 6,7	— 28,2	110	68,451	110,2240
110	101	0,049	— 0,8351	+ 0,8350	— 0,8350	+ 0,1	— 28,1	101	68,500	109,3890
101	102	0,048	— 0,7059	+ 0,7062	— 0,7060	— 0,3	— 28,4	102	68,548	108,6830
102	103	3,268	— 29,9778	+ 29,9768	— 29,9773	+ 1,0	— 27,4	103	71,816	78,7057
103	027	0,051	+ 0,9195	— 0,9190	+ 0,9192	— 0,5	— 27,9	027	71,867	79,6250
027	104	0,047	— 0,8853	+ 0,8851	— 0,8852	+ 0,2	— 27,7	104	71,914	78,7397

INTERVALOS			DIFERENCIAS DE NIVEL			DISCORDANCIAS		Señales principales	Distancia al origen	Altitudes observadas sobre el nivel del mar
Señales.		Distancias	Ida.	Vuelta.	Promedio.	Parcial.	Total.			
		km.	m.	m.	m.	mm.	mm.		km.	m.
(1) 158	159	»	»	»	»	»	»	159	»	»
158	035	0,093	+ 0,3303	— 0,3301	+ 0,3302	— 0,2	+ 7,7	035	134,821	12,1524
035	160	2,978	— 8,3882	+ 8,3899	— 8,3890	— 1,7	+ 6,0	160	137,799	3,7633
160	161	0,047	+ 0,8561	— 0,8559	+ 0,8560	— 0,2	+ 5,8	161	137,846	4,6193
161	162	0,062	— 0,2165	+ 0,2164	— 0,2164	+ 0,1	+ 5,9	162	137,908	4,4028
162	163	3,233	— 1,0594	+ 1,0619	— 1,0606	— 2,5	+ 3,4	163	141,141	3,3422
163	036	0,024	+ 0,4367	— 0,4356	+ 0,4361	— 1,1	+ 2,3	036	141,165	3,7784
036	164	0,057	— 0,0043	+ 0,0033	— 0,0038	+ 1,0	+ 3,3	164	141,222	3,7746
164	165	2,966	— 0,1557	+ 0,1570	— 0,1563	— 1,3	+ 2,0	165	144,188	3,6182
165	166	0,037	— 0,2169	+ 0,2168	— 0,2168	+ 0,1	+ 2,1	166	144,225	3,4013
166	167	0,055	— 0,3783	+ 0,3776	— 0,3779	+ 0,7	+ 2,8	167	144,280	3,0234
167	169	3,084	+ 1,9085	— 1,9072	+ 1,9078	— 1,3	+ 1,5	169	147,364	4,9313
169	037	0,039	+ 0,3519	— 0,3519	+ 0,3519	0,0	+ 1,5	037	147,403	5,2832
037	168	0,013	+ 0,2808	— 0,2809	+ 0,2808	+ 0,1	+ 1,6	168	147,416	5,5640
168	170	3,305	— 1,2469	+ 1,2445	— 1,2457	+ 2,4	+ 4,0	170	150,721	4,3184
170	171	0,047	+ 0,0881	— 0,0887	+ 0,0884	+ 0,6	+ 4,6	171	150,768	4,4068
(1) 171	172	»	»	»	»	»	»	172	»	»
171	173	3,744	— 1,7286	+ 1,7312	— 1,7299	— 2,6	+ 2,0	173	154,512	2,6769
173	174	0,030	— 0,0493	+ 0,0489	— 0,0491	+ 0,4	+ 2,4	174	154,542	2,6278
174	175	0,032	— 0,0266	+ 0,0272	— 0,0269	— 0,6	+ 1,8	175	154,574	2,6009
175	176	2,953	+ 0,8391	— 0,8392	+ 0,8391	+ 0,1	+ 1,9	176	157,527	3,4401
176	038	0,028	+ 0,4718	— 0,4718	+ 0,4718	0,0	+ 1,9	038	157,555	3,9119
038	177	0,026	— 0,5096	+ 0,5096	— 0,5096	0,0	+ 1,9	177	157,581	3,4024
177	178	3,650	— 0,8677	+ 0,8662	— 0,8669	+ 1,5	+ 3,4	178	161,231	2,5354
178	180	0,035	+ 0,1134	— 0,1130	+ 0,1132	— 0,4	+ 3,0	180	161,266	2,6486
180	179	0,024	— 0,1357	+ 0,1353	— 0,1355	+ 0,4	+ 3,4	179	161,290	2,5131
179	181	3,262	+ 3,6359	— 3,6394	+ 3,6376	+ 3,5	+ 6,9	181	164,552	6,1508
181	182	0,040	+ 0,2757	— 0,2756	+ 0,2756	— 0,1	+ 6,8	182	164,592	6,4264
182	183	0,054	+ 0,9147	— 0,9142	+ 0,9144	— 0,5	+ 6,3	183	164,646	7,3409
183	185	2,700	+ 4,1806	— 4,1798	+ 4,1802	— 0,8	+ 5,5	185	167,346	11,5211
185	184	0,033	— 0,6269	+ 0,6266	— 0,6265	+ 0,3	+ 5,8	184	167,379	10,8944
184	039	0,090	+ 0,6997	— 0,6997	+ 0,6997	0,0	+ 5,8	039	167,469	11,5941
039	186	4,405	— 3,2910	+ 3,2890	— 3,2900	+ 2,0	+ 7,8	186	171,874	8,3040
186	040	0,063	+ 0,7162	— 0,7163	+ 0,7162	+ 0,1	+ 7,9	040	171,937	9,0203
040	187	0,060	— 0,3091	+ 0,3087	— 0,3089	+ 0,4	+ 8,3	187	171,997	8,7114
187	188	2,477	+ 2,7840	— 2,7859	+ 2,7849	+ 1,9	+ 10,2	188	174,474	11,4964
188	041	0,017	+ 0,2303	— 0,2305	+ 0,2304	+ 0,2	+ 10,4	041	174,491	11,7268
041	189	0,052	— 0,3654	+ 0,3655	— 0,3654	— 0,1	+ 10,3	189	174,543	11,3613
189	190	2,973	— 0,4208	+ 0,4180	— 0,4194	+ 2,8	+ 13,1	190	177,516	10,9419
190	191	0,039	+ 0,1895	— 0,1896	+ 0,1895	+ 0,1	+ 13,2	191	177,555	11,1314
191	192	0,043	+ 0,4968	— 0,4970	+ 0,4969	+ 0,2	+ 13,4	192	177,598	11,6283
192	194	2,284	+ 2,4775	— 2,4809	+ 2,4792	+ 3,4	+ 16,8	194	179,882	11,1075
(2) 194	043	»	»	»	»	»	»	043	»	»
(2) 043	N. P. 1533	»	»	»	»	»	»	N. P. 1533	»	»

(1) No se pudo utilizar.
(2) Figuran los datos al final.

INTERVALOS		Distancias	DIFERENCIAS DE NIVEL			DISCORDANCIAS		Señales principales	Distancia al origen	Altitudes observadas sobre el nivel del mar
Señales.			Ida.	Vuelta.	Promedio.	Parcial.	Total.			
		km.	m.	m.	m.	mm.	mm.		km.	m.
194	195	3,526	— 7,4747	+ 7,4730	— 7,4738	+ 1,7	+ 18,5	195	183,408	6,6336
195	196	0,085	+ 0,1276	— 0,1289	+ 0,1282	+ 1,3	+ 19,8	196	183,493	6,7619
196	197	0,108	— 0,8803	+ 0,8812	— 0,8807	— 0,9	+ 18,9	197	183,601	5,8811
197	N. P. 1534	1,734	— 2,4205	+ 2,4214	— 2,4209	— 0,9	+ 18,0	N. P. 1534	185,335	3,4601
N. P. 1534	044	0,012	+ 0,4371	— 0,4368	+ 0,4369	— 0,3	+ 17,7	044	185,347	3,8970
(1) 044	198	»	»	»	»	»	»	198	»	»
044	199	2,515	— 1,8370	+ 1,8346	— 1,8358	+ 2,4	+ 20,1	199	187,862	2,0612
199	200	0,054	+ 0,0241	— 0,0234	+ 0,0237	— 0,7	+ 19,4	200	187,916	2,0850
200	201	0,047	— 0,1304	+ 0,1302	— 0,1303	+ 0,2	+ 19,6	201	187,963	1,9546
201	N. P. 1535	2,650	+ 1,5521	— 1,5547	+ 1,5534	+ 2,6	+ 22,2	N. P. 1535	190,613	3,5081
N. P. 1535	045	0,012	+ 0,7038	— 0,7049	+ 0,7043	+ 1,1	+ 23,3	045	190,625	4,2125
045	222	0,039	— 0,6962	+ 0,6965	— 0,6963	— 0,3	+ 23,0	222	190,664	3,5161
222	203	2,294	+ 1,6137	— 1,6132	+ 1,6134	— 0,5	+ 22,5	203	192,958	5,1295
203	204	0,050	+ 0,1261	— 0,1260	+ 0,1260	— 0,1	+ 22,4	204	193,008	5,2555
204	205	0,049	+ 0,0385	— 0,0388	+ 0,0386	+ 0,3	+ 22,7	205	193,057	5,2942
(1) 205	N. P. 1536	»	»	»	»	»	»	N. P. 1536	»	»
205	046	1,990	+ 4,2293	— 4,2260	+ 4,2276	— 3,3	+ 19,4	046	195,047	9,5218
046	206	0,031	— 0,0014	+ 0,0008	— 0,0011	+ 0,6	+ 20,0	206	195,078	9,5207
206	047	3,638	+ 2,2306	— 2,2285	+ 2,2295	— 2,1	+ 17,9	047	198,716	11,7503
047	N. P. 1537	0,011	— 0,6553	+ 0,6562	— 0,6557	— 0,9	+ 17,0	N. P. 1537	198,727	11,0945
N. P. 1537	207	0,060	— 0,1338	+ 0,1338	— 0,1338	0,0	+ 17,0	207	198,787	10,9607
207	N. P. 1538	3,226	+ 2,2521	— 2,2492	+ 2,2506	— 2,9	+ 14,1	N. P. 1538	202,013	13,2114
N. P. 1538	048	0,012	+ 0,4644	— 0,4643	+ 0,4643	— 0,1	+ 14,0	048	202,025	13,6757
048	208	0,085	— 0,9859	+ 0,9866	— 0,9862	— 0,7	+ 13,3	208	202,110	12,6894
(1) 208	209	»	»	»	»	»	»	209	»	»
208	210	3,257	— 0,9393	+ 0,9410	— 0,9401	— 1,7	+ 11,6	210	205,367	11,7493
210	211	0,036	+ 0,2110	— 0,2106	+ 0,2108	— 0,4	+ 11,2	211	205,403	11,9601
211	N. P. 1539	3,734	+ 29,5135	— 29,5161	+ 29,5148	+ 2,6	+ 13,8	N. P. 1539	209,137	41,4749
N. P. 1539	049	0,013	+ 0,4888	— 0,4887	+ 0,4887	— 0,1	+ 13,7	049	209,150	41,9636
049	212	0,028	— 0,6532	+ 0,6543	— 0,6537	— 1,1	+ 12,6	212	209,178	41,3099

Ramal en Valencia.

»		»	»	»	»	»	+ 16,8	194	179,882	14,1075
194	043	0,129	— 0,0382	+ 0,0375	— 0,0378	+ 0,7	+ 17,5	043	180,011	14,0696
043	N. P. 1533	0,034	— 0,4195	+ 0,4189	— 0,4192	+ 0,6	+ 18,1	N. P. 1533	180,045	13,6504

Se ha considerado la discordancia positiva cuando el desnivel obtenido en la vuelta da para el punto de llegada la altitud más alta sobre el nivel del mar, y en el caso contrario, negativa. Es decir, que la discordancia siempre tendrá el mismo signo que el desnivel obtenido en la ida, cuando este desnivel sea el menor, y signo contrario en el otro caso.

(1) No se pudo utilizar.

ERRORES ACCIDENTAL Y SISTEMÁTICO

Los errores accidental y sistemático se han calculado por las fórmulas impuestas por la Asociación Geodésica cuando se creó la nueva categoría de nivelaciones de alta precisión.

Estas fórmulas son:

Para el error accidental

$$\varepsilon_r^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2}\,\Sigma\frac{S^2}{L}\right]$$

y para el error sistemático

$$\varepsilon_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L}\,\Sigma\frac{S^2}{L},$$

en las que

L es la longitud total o parcial del itinerario.

Δ la discordancia entre la ida y la vuelta entre dos señales metálicas contiguas.

r la distancia entre esas señales.

S la discordancia sistemática total obtenida entre la ida y la vuelta en todo el itinerario o en la parte que se considere.

Como los dos errores vienen en función de la discordancia sistemática total es preciso determinar este valor con el mayor cuidado posible, y para ello se ha seguido el procedimiento explicado por Lallemand en su *Tratado de Nivelaciones de alta precisión* (pág. 713).

Este método consiste en considerar como abscisas las distancias en kilómetros entre las distintas señales metálicas sucesivas, a partir de una señal determinada tomada como inicial, y como ordenadas las discordancias correspondientes obtenidas entre la ida y la vuelta, pero acumulándolas teniendo en cuenta su signo.

La línea que une todos estos puntos, a pesar de su forma irregular, manifiesta de una manera clara y definida una inclinación con respecto al eje de las X, proporcional al error sistemático que haya influenciado las operaciones.

Por lo tanto, si trazamos una línea recta a través del mayor número de puntos de esa línea de modo que represente de la mejor manera posible la tendencia de la línea irregular a separarse del eje horizontal, las distintas ordenadas de esa recta representarán gráficamente las discordancias sistemáticas para el trozo que se considere.

Para mayor facilidad esa recta se traza a ojo y se comprueba de manera que el área comprendida entre ella y la línea por su parte superior, sea igual al área comprendida entre la recta y la línea por su parte inferior.

Esta recta pasará o no por el origen; en el primer caso la ordenada de su extremo representará gráficamente la discordancia sistemática total, y en el segundo caso esta discordancia será la diferencia entre las dos ordenadas de los extremos.

Para el cálculo de los errores en la sección Alicante-Sagunto se han considerado separadamente las dos subsecciones en que ha sido dividida, no sólo porque los ob-

servadores han sido diferentes, sino porque se ha observado que la discordancia total acumulada en cada uno de esos trozos tiene signo contrario.

En el siguiente estado se consignan los datos de las anteriores fórmulas para cada una de las subsecciones, y también para todo el itinerario.

SUBSECCIONES	L	S	N	$\Sigma\Delta^2$	Σr^2	$\frac{S^2}{L}$	$\frac{S}{3L}$
	km.	mm.					mm.
Alicante a Molinell.	109	30	209	279	57	8,3	0,092
Molinell a Sagunto.....	113	14	217	257	61	1,7	0,041
Total.....	222		426	536	118	10,0	

Error accidental

$$r_r^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} - \Sigma\frac{S^2}{L}\right] = \frac{1}{9}(2{,}414 - 0{,}026) = 0{,}265.$$

$$r_r = \pm\, 0{,}515 \text{ mm.}$$

Error sistemático

$$r_r^2 = \frac{1}{9\Sigma L}\Sigma\frac{S^2}{L} = \frac{1}{9}\cdot\frac{10}{222} = 0{,}005.$$

$$r_r = \pm\, 0{,}07 \text{ mm.}$$

El error probable accidental kilométrico para toda la línea es $\pm\, 0^{mm},515$.

El error probable sistemático kilométrico para toda la línea es $\pm\, 0^{mm},07$.

Estos errores indican una precisión más grande que la exigida a las nivelaciones de alta precisión por la Asociación Geodésica, que señaló como límites para esos errores un milímetro y dos décimas de milímetro, respectivamente.

En la fórmula del error accidental el término $\Sigma\frac{S^2}{L}$ representa la influencia que el error sistemático ejerce por kilómetro sobre la discordancia accidental, aumentando aparentemente su magnitud; si se prescinde de ese término para el cálculo del error en la línea que consideramos, el resultado es aproximadamente el mismo.

El último término del estado proporciona los valores de $\frac{S}{3L}$, que es la expresión del error probable sistemático por kilómetro según la fórmula de Lallemand, y cumple también, obtenido de esa manera, con las tolerancias impuestas por la precisión de los trabajos.

ESTUDIO DE LOS ERRORES. — INVESTIGACIÓN DEL ERROR SISTEMÁTICO

Las instrucciones generales para los trabajos tienen por objeto disminuir o eliminar en lo posible el efecto de todas las causas conocidas capaces de producir errores accidentales o sistemáticos.

Muchas de estas causas se evidencian por sí mismas durante las operaciones, y el observador puede prevenirse contra ellas llevando constantemente corregidos el instrumento y las miras, y, sobre todo, vigilando con el mayor esmero el uso de las planchas de hierro que les sirven de apoyo.

En esas condiciones la construcción tan perfecta de los niveles Wild-Zeiss y de las miras metálicas que se utilizan en los trabajos garantiza la eliminación de esos errores al tomar el promedio de las dos nivelaciones, y como esto, sin embargo, no ha ocurrido así en la nivelación ejecutada entre Alicante y Sagunto, donde no ha podido eliminarse el error sistemático, es necesario hacer algunas consideraciones señalando las causas más importantes que pueden influir accidentalmente o de una manera sistemática en los resultados de una doble nivelación.

Los errores se ponen de manifiesto observando las discordancias parciales obtenidas en los diferentes trozos, la discordancia total acumulada para toda la línea y los cierres de los polígonos. Ninguna de estas condiciones, sin embargo, señala exactamente la existencia de un error en un trozo cualquiera de la línea.

Las causas principales de los errores accidentales es probable que sean:

a) Lectura deficiente en las miras.

b) Efectuar estas lecturas sin que los extremos de la burbuja coincidan perfectamente (se supone el aparato corregido), y

c) Cambios rápidos en la refracción vertical.

Y la de los errores sistemáticos:

a) Cambios lentos en la refracción vertical.

b) Influencia de la refracción en los terrenos de fuerte pendiente, y

c) Otras condiciones atmosféricas que, posiblemente, dependen de la orientación del itinerario, de la hora del día, del estado del cielo y del estado del tiempo.

Algunos de estos errores pueden ser sistemáticos en la nivelación sencilla y disminuir, e incluso desaparecer, al tomar el promedio de las dos nivelaciones.

El efecto del gradiente de la refracción se ha eliminado prácticamente en los trabajos ejecutados entre Alicante y Sagunto leyendo alternativamente primero la mira de frente y la mira de espalda, según sean las estaciones pares o impares.

En igualdad de condiciones y cualquiera que sea el método operatorio que se siga, es lógico que los errores accidentales aumenten más allá de cierto límite con la rapidez con que se llevan los trabajos, siendo muy probable que sean sus causas principales, como ya hemos dicho, los cambios rápidos en la refracción vertical y la mayor o menor incertidumbre al bisectar con el hilo nivelador las divisiones de las miras. Otra causa de error accidental es la inercia del líquido del nivel, puesto que el

observador, una vez corregida la coincidencia de los extremos de la burbuja, debe esperar unos cuantos segundos para asegurarse de su inmovilidad, y si la burbuja continúa moviéndose tiene que procurar otra vez la coincidencia de sus extremos antes de hacer la lectura sobre la mira.

También se puede producir otro error accidental si se enfoca más de una vez la imagen de la mira entre las dos niveladas, porque se alterará seguramente la relación entre la línea de fe del nivel y la línea de colimación.

La discordancia total acumulada, sobre todo en la primera parte de la línea (Alicante-Molinell), en que ha sido siempre negativa, ha llegado a alcanzar un valor relativamente grande (— 35 mm.), disminuyendo después hacia el final hasta tener el valor de — 24 milímetros.

En la otra mitad de la sección (Molinell-Sagunto) ha tenido signo contrario, y su magnitud más reducida ha tenido un máximo de + 23 milímetros, con una manifiesta tendencia a desaparecer si el itinerario hubiera tenido más longitud. En uno y otro caso la influencia de un error sistemático es evidente, siendo muy difícil señalar concretamente las causas que lo ha producido. No son conocidos en esta acumulación los efectos del sol, pendiente de los trazos, temperatura media y orientación del itinerario, y por este motivo, con objeto de eliminar su efecto de las observaciones, o de reducirlas al mínimo, se dispone en las instrucciones que la ida y la vuelta se ejecuten en condiciones climatológicas diferentes, dejando transcurrir cierto número de días entre ambos trabajos. La rápida acumulación de las discordancias, en muchos casos, puede ser debida a los malos hábitos adquiridos por el portamiras, especialmente con el uso de las planchas de hierro, y el observador debe prevenirse constantemente, sobre todo al apoyar la mira y en el momento de girarla para la otra observación.

El uso constante de la plancha de hierro, que ya de por sí tiene tantos inconvenientes, sobre todo en cierta clase de terrenos, exige por parte del observador el mayor cuidado en la vigilancia del portamiras, que no puede, si no es un hombre constantemente dedicado a estos trabajos, hacerse cargo de la importancia que tiene la absoluta inmovilidad del cero de la mira durante el tiempo que dura la doble observación.

Es muy probable que en la discordancia acumulada no ejerza influencia alguna el error sistemático de las lecturas sobre las miras, siguiendo lo dispuesto en las instrucciones de empezar alternativamente las lecturas por la mira de espalda o por la mira de frente, pues esto conduce prácticamente a un proceso simétrico por lo que se refiere al observador, siendo también el objeto principal que con ello se persigue eliminar en el cálculo final de las altitudes el efecto de cualquier tendencia sistemática en el nivel, de hundirse o de elevarse durante las observaciones.

En cambio, es muy posible que la discordancia acumulada pueda ser debida a la refracción si el itinerario tiene fuertes pendientes y se hace la observación a ciertas horas del día, en las que la superficie del suelo y del aire tienen temperaturas distintas.

Si la temperatura del aire es uniforme o varía uniformemente con la altura sobre el nivel del mar, entonces la densidad de una capa cualquiera a determinada altitud será constante para toda ella, pues desde luego se supone que para la distancia infe-

rior a 100 metros que separa las dos miras no ejerce influencia alguna el efecto de la presión y el estado higrométrico de los puntos intermedios.

Sobre esa base de temperatura uniforme, o de temperatura que varía uniformemente con la altura sobre el nivel del mar, el coeficiente de refracción para las dos visuales (que tienen igual longitud) será el mismo. Pero cuando la atmósfera y la superficie del terreno tienen temperaturas diferentes, la capa que está en contacto con el suelo tenderá a igualar su temperatura y, por consiguiente, la densidad del aire tenderá a variar con la distancia a la superficie del terreno, en vez de con la altura sobre el nivel del mar.

Esto sólo para una distancia del suelo de uno a dos metros, que es precisamente donde trabaja el nivel. Si el terreno es llano, no habrá diferencia en el coeficiente de refracción para las dos visuales; pero si la pendiente es fuerte, la visual alta pasará a través de capas de aire de diferentes densidades, mientras que la visual baja atravesará el aire en unas condiciones más normales, en lo que a la densidad se refiere.

El efecto de la refracción en la visual alta tendrá signos contrarios, según que la superficie del terreno sea más o menos fría que el aire. Estos errores, sin duda alguna, son pequeños, sobre todo cuando la atmósfera no está tranquila y corre un ligero viento. En los días nublados la temperatura del aire y la de la superficie del terreno son muy parecidas y, por consiguiente, el error de refracción no es tan grande como en los días con sol, circunstancia que deben tener muy en cuenta los observadores acostumbrándose a la idea de que no son nada favorables para obtener buenos resultados en la nivelación las horas tempranas del amanecer en los días despejados y tranquilos. En estos días el error de la refracción tiene un mínimum durante las horas próximas al mediodía, que es cuando la temperatura del aire y del terreno son próximamente iguales, y dos máximos, pero de signos contrarios, al amanecer y a la caída de la tarde.

Este error, como ya hemos indicado, es despreciable cuando el terreno es llano y las dos visuales, como efectivamente sucede, son de la misma longitud, pero si el terreno es accidentado y se permite que la visual caiga cerca del apoyo de la mira entonces será apreciable.

Es imposible predecir a qué distancia sobre el suelo debe quedar la visual, pero es casi seguro, de acuerdo con lo que disponen las instrucciones, que la perturbación debida a la refracción desaparece casi por completo, no permitiendo que el más bajo de los tres hilos descienda más de 30 centímetros sobre el terreno.

Sin duda alguna que la orientación del itinerario con respecto al Sol puede ejercer su influencia en la acumulación de la discordancia, debido a la desigualdad en la iluminación de las dos miras. En este caso el error de bisección en una mira iluminada directamente por los rayos del Sol tiene que ser distinto que en la otra mira que está en sombra, y es muy posible que este fenómeno sea una de las causas en la acumulación en las discordancias si la ida, por ejemplo, se ha hecho constantemente en dirección al Sol y la vuelta en sentido contrario. En una línea orientada en sentido Este-Oeste este error, si existe, probablemente quedará eliminado al tomar el promedio entre las dos nivelaciones; pero si la orientación del itinerario es en sentido Norte-Sur, como sucede en la sección Alicante-Sagunto, ya no sucederá lo mismo.

Es inevitable que una nivelación sencilla esté afectada de cierto error sistemático, cuya magnitud y signo probablemente dependerá de la dirección del itinerario con respecto al Sol, de la hora del día y del estado más o menos tranquilo de la atmósfera. Se observa con frecuencia que la doble nivelación concuerda más exactamente en los días nublados y con cierto viento que en los días claros y serenos, lo cual es muy posible porque cuando el aire está en movimiento la temperatura de las diferentes capas es más uniforme y, por consiguiente, menos temible la refracción. Este error sistemático de la nivelación sencilla, debido a las condiciones atmosféricas, puede actuar de una manera accidental al tomar el promedio si la segunda nivelación se hace en condiciones opuestas. Por ejemplo: si la ida se ha hecho por la mañana con temperatura cada vez más alta y con el Sol a la derecha, la segunda nivelación puede destruir el error sistemático si se hace por la tarde con temperatura descendente y con el Sol a la izquierda. Esto, desde luego, no tiene aplicación en los días nublados en que los errores debidos a las condiciones atmosféricas es muy probable que sean despreciables.

RELACIÓN ENTRE EL ERROR SISTEMÁTICO Y EL VALOR DE LAS DISCORDANCIAS ACUMULADAS

El valor de la discordancia total acumulada entre la ida y la vuelta no puede dar una idea exacta de la magnitud del error sistemático que afecta a la línea, puesto que ese valor puede ser muy pequeño o muy grande y, sin embargo, el promedio permanecer el mismo en los dos casos. La mejor medida para el error sistemático está basada en el cierre de los polígonos, y por eso no hay más remedio que esperar a que estén nivelados los primeros polígonos del proyecto para calcular, en función de sus cierres, de una manera más precisa, el error sistemático de cada uno de sus lados.

Como resumen de todo lo expuesto, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos entre Alicante y Sagunto, en los que se observa que las discordancias más acentuadas corresponden a los trozos de pendiente más pronunciada, se puede establecer que aun cuando el observador haya tomado toda clase de precauciones para eliminar el efecto de los errores de los trabajos, ciertos errores de carácter sistemático se manifiestan inexorablemente al tomar el promedio entre la ida y la vuelta, aun cuando el instrumento haya estado siempre perfectamente corregido, las constantes de las miras cuidadosamente determinadas y las dos nivelaciones efectuadas en días diferentes y bajo condiciones climatológicas también distintas, no teniendo, en general, el observador necesidad, si el terreno es llano, para conseguir la precisión marcada por la fórmula internacional, más que dejar pasar cierto número de días entre la ida y la vuelta; pero si la pendiente es pronunciada, además de esto, es necesario no hacer muchas observaciones al amanecer en los días despejados y tranquilos, y, sobre todo, no permitir que la visual sobre la mira del hilo inferior se aproxime a menos de 30 centímetros sobre el terreno.

CORRECCIÓN ORTOMÉTRICA.—ALTITUDES ORTOMÉTRICAS PROVISIONALES.—COTAS DINÁMICAS

La corrección ortométrica tiene por objeto corregir las altitudes obtenidas directamente por la observación para que representen efectivamente las distancias sobre el nivel medio del mar, medidas a lo largo de la vertical que pasa por el punto que se considere. Las altitudes deducidas de la observación no representan esas distancias, debido a que en el cálculo de desniveles se supone equivocadamente que las superficies engendradas por el nivel son paralelas entre sí, y como esas superficies convergen hacia los polos se hace necesario aplicar la debida corrección, que es función de esa convergencia polar, y, por consiguiente, de la altitud a que trabaja el nivel y de los grados de latitud recorridos.

En el *Proyecto de Nivelaciones de alta precisión para la Península*, publicado por el Servicio, se exponen con toda amplitud las teorías ortométrica y dinámica y la manera de aplicar las correcciones respectivas a los desniveles observados en el campo para obtener, en función de esas correcciones, las altitudes ortométricas y las cotas dinámicas.

En los estados que se acompañan figuran esos valores para cada una de las señales principales del itinerario, en función de la altitud ortométrica provisional de la señal N. P. 1, situada en el Ayuntamiento de Alicante.

Hubiera sido preferible calcular las altitudes ortométricas en función de las de los dos extremos de la línea, pero por la carencia de observaciones mareográficas en Sagunto esto no ha sido posible, y no ha habido más remedio que deducirlas todas de la altitud ortométrica de la señal ya citada, obtenida directamente en el año 1871 por observaciones sobre la escala de mareas del puerto de Alicante. Por esta circunstancia, y por tener que sufrir el día de mañana la corrección inherente al cierre del polígono *A*, así como las que se deriven de la compensación general de toda la red, es por lo que estas altitudes no pueden llamarse por ahora sino altitudes ortométricas provisionales.

La corrección ortométrica para toda la línea no es sino de tres milímetros, como tenía que suceder considerando la longitud, relativamente pequeña para esta corrección, del itinerario (ochenta y cinco minutos de latitud), y sobre todo por la poca altitud sobre el mar a que ha trabajado casi siempre el nivel.

Los valores de las cotas dinámicas representan unidades de trabajo, en el mismo sistema elegido, y, como es lógico, si se expresan en kilográmetros tienen que ser muy parecidas a las altitudes expresadas en metros.

Comparación entre las altitudes ortométricas y las cotas dinámicas.

SEÑALES principales.	ALTITUD observada.	LATITUD φ	CORRECCIÓN ortométrica $-Chd\varphi$	ALTITUD ortométrica h	CORRECCIÓN dinámica total.	COTA dinámica H
	m.	° ′	mm.	m.		kgm.
34	34,5115	38 21	+ 0,03	34,5115	— 21,5	34,4900
013	35,1340		+ 0,03	35,1340	— 21,5	35,1125
N. P. 1814	34,5303		+ 0,03	34,5303	— 21,5	34,5088
35	33,0049		+ 0,03	33,0049	— 21,0	32,9839
014	32,8152		+ 0,03	32,8152	— 21,0	32,7942
N. P. 1	**3,4095**	38 20	00	3,4095	— 1,0	3,4085
36	4,3064		00	4,3064	— 2,0	4,3044
015	4,8174		00	4,8174	— 2,5	4,8149
N. P. 1813	4,1508		00	4,1508	— 2,0	4,1488
38	8,8242	38 21	— 0,01	8,8242	— 5,5	8,8187
40	7,7405		0,01	7,7405	— 5,0	7,7355
39	6,1842		0,01	6,1842	— 3,5	6,1807
41	1,4801	38 23	0,02	1,4801	— 0,5	1,4796
42	1,4812		0,02	1,4812	— 0,5	1,4807
43	2,0391		0,02	2,0391	— 1,0	2,0381
017	4,5524	38 24	0,02	4,5524	— 3,0	4,5494
44	3,1096		0,02	3,1096	— 2,0	3,1076
45	3,1917		0,02	3,1917	— 2,0	3,1897
46	18,5063	38 26	0,05	18,5063	— 11,5	18,4947
47	18,6864		0,05	18,6863	— 12,0	18,6743
018	19,8032		0,05	19,8031	— 12,5	19,7906
48	10,5022		0,05	10,5021	— 6,0	10,4956
49	9,4046		0,05	9,4045	— 6,5	9,3985
50	9,6206		0,05	9,6205	— 6,0	9,8140
51	36,7007	38 27	0,08	36,7006	— 22,5	36,6781
52	37,0261		0,08	37,0260	— 22,5	37,0035
53	36,9358		0,08	36,9357	— 22,5	36,9132
54	31,7187	38 28	0,13	31,7186	— 19,0	31,6996
55	32,6617		0,13	32,6616	— 20,0	32,6416
56	30,9046		0,13	30,9045	— 19,0	30,8855
57	39,1366	38 29	0,19	39,1364	— 24,0	39,1124
58	38,6221		0,19	38,6219	— 24,0	38,5979
59	38,1158		0,19	38,1156	— 23,0	38,0926
60	22,6821	38 30	0,23	22,6819	— 14,0	22,6679
61	22,6932		0,23	22,6930	— 14,0	22,6790
62	22,3982		0,23	22,3980	— 13,0	22,3850
63	27,3593		0,23	27,3591	— 16,5	27,3426
019	28,2735		0,23	28,2733	— 17,0	28,2563
64	27,5448		0,23	27,5446	— 17,0	27,5276
65	49,0439	38 31	0,29	49,0436	— 29,5	49,0141
66	49,0289		0,29	49,0286	— 29,5	48,9991
67	49,0174		0,29	49,0171	— 29,5	48,9876
68	61,8347	38 32	0,37	61,5344	— 37,0	61,7974
69	61,6851		0,37	61,6848	— 37,0	61,6478
70	61,8335		0,37	61,8331	— 37,0	61,7961

SEÑALES principales.	ALTITUD observada.	LATITUD φ	CORRECCIÓN ortométrica $-Chd\varphi$	ALTITUD ortométrica h	CORRECCIÓN dinámica total.	COTA dinámica H
	m.	° ′	mm.	m.		kgm.
71	65,4234	38 32	0,37	65,4229	— 39,0	65,3839
72	65,4198	38 33	0,46	65,4193	— 39,0	65,3803
73	65,4442		0,46	65,4437	— 39,0	65,4047
74	57,3325		0,46	57,3320	— 34,5	57,2975
020	57,7757		0,46	57,7752	— 35,0	57,7402
75	57,2298		0,46	57,2293	— 34,5	57,1948
76	43,9079		0,46	43,9074	— 27,0	43,8804
77	43,9437		0,46	43,9432	— 27,0	43,9162
78	43,8507		0,46	43,8502	— 27,0	43,8232
79	38,6117	38 34	0,53	38,6112	— 23,0	38,5882
021	39,4934		0,53	39,4929	— 23,0	39,4699
80	38,6052		0,53	38,6047	— 23,0	38,5817
81	9,4173	38 36	0,60	9,4167	— 5,5	9,4112
022	10,2181		0,60	10,2175	— 6,0	10,2115
82	9,3024		0,62	9,3018	— 5,5	9,2963
83	34,6307	38 37	0,62	34,6301	— 20,0	34,6101
024	35,2259		0,62	35,2253	— 20,0	35,2053
84	33,7467		0,62	33,7461	— 19,5	33,7266
85	95,9252	38 38	0,72	95,9245	— 56,5	95,8680
88	96,8077		0,72	96,8070	— 57,0	96,7500
89	98,3440		0,72	98,3433	— 57,5	98,2858
87	101,4345	38 39	0,86	101,4336	— 59,0	101,3746
023	102,4218		0,86	102,4209	— 60,0	102,3609
86	101,9683		0,86	101,9674	— 60,0	101,9074
90	101,1788	38 40	1,02	101,1778	— 59,0	101,1188
91	100,9836		1,02	100,9826	— 59,0	100,9236
92	101,0946		1,02	101,0936	— 59,0	101,0346
93	131,1182	38 41	1,19	131,1170	— 77,0	131,0400
94	130,9431		1,19	130,9419	— 77,0	130,8649
95	130,8843		1,19	130,8831	— 77,0	130,8061
96	184,1636	38 43	1,43	184,1622	— 108,0	184,0542
025	184,8169		1,43	184,8155	— 109,0	184,7065
97	183,3445		1,43	183,3431	— 107,0	183,2361
98	151,4672	38 44	1,68	151,4655	— 88,5	151,3770
026	152,6390		1,68	152,6373	— 90,0	152,5473
99	151,8580		1,68	151,8563	— 90,0	151,7663
110	110,2240	38 45	1,87	110,2221	— 64,0	110,1581
101	109,3890		1,87	109,3871	— 63,5	109,3236
102	108,6830		1,87	108,6511	— 63,5	108,6176
103	78,7057	38 47	2,02	78,7037	— 46,0	78,6577
027	79,6250		2,02	79,6230	— 46,5	79,5765
104	78,7397		2,02	78,7377	— 46,5	78,6912
106	79,4579		2,05	79,4558	— 46,5	79,4093
105	77,9527		2,05	77,9506	— 46,0	77,9046
107	76,8841		2,05	76,8820	— 45,0	76,8370
108	43,4896	38 48	2,15	43,4875	— 24,0	43,4635
109	42,3116		2,15	43,3095	— 23,5	42,2860
100	41,8793		2,15	41,8772	— 23,5	41,8537

SEÑALES principales.	ALTITUD observada.	LATITUD φ	CORRECCIÓN ortométrica $-Chd\varphi$	ALTITUD ortométrica h	CORRECCIÓN dinámica total.	COTA dinámica H
	m.	° '	mm.	m.		kgm.
111	15,4653	38 49	2,19	15,4631	— 8,5	15,4546
112	14,8760		2,19	14,8738	— 8,5	14,8653
113	14,8741		2,19	14,8719	— 8,5	14,8634
114	2,6302	38 50	2,20	2,6280	— 2,0	2,6260
115	2,1572		2,20	2,1550	— 1,5	2,1535
028	2,6378		2,20	2,6356	— 2,0	2,6336
116	6,7529	38 51	2,21	6,7507	— 4,0	6,7467
117	6,7858		2,21	6,7836	— 4,0	6,7799
118	7,7725		2,21	7,7703	— 5,0	7,7653
119	7,9517		2,21	7,9495	— 5,0	7,9445
120	7,8719		2,21	7,8697	— 5,0	7,8647
121	7,5341		2,21	7,5319	— 5,0	7,5269
122	17,7406		2,21	17,7384	— 10,0	17,7284
029	18,1931		2,21	18,1909	— 10,0	18,1809
123	16,9452		2,21	16,9430	— 10,5	16,9325
125	1,3668	38 52	2,23	1,3646	— 0,5	1,3641
030	3,2224		2,23	3,2202	— 2,0	3,2182
124	1,9013		2,23	1,8991	— 1,0	1,8981
126	1,7252	38 53	2,23	1,7230	— 1,0	1,7220
127	1,6833		2,23	1,6811	— 1,0	1,6801
128	1,6853		2,23	1,6831	— 1,0	1,6821
129	4,8841	38 54	2,23	4,8819	— 3,0	4,8789
131	5,0267		2,23	5,0245	— 3,0	5,0215
130	5,3255		2,23	5,3233	— 3,0	5,3203
132	4,7823	38 55	2,24	4,7801	— 3,0	4,7771
031	5,6762		2,24	5,6740	— 3,0	5,6705
133	4,8609		2,24	4,8587	— 3,0	4,8557
134	14,3921	38 56	2,26	14,3898	— 7,5	14,3823
135	14,6269		2,26	14,6246	— 8,0	14,6166
136	14,7893		2,26	14,7870	— 8,0	14,7790
137	19,8488	38 57	2,28	19,8465	— 11,5	19,8350
138	19,3973		2,28	19,3950	— 11,0	19,3840
139	20,1393		2,28	20,1370	— 11,5	20,1255
140	19,6537	38 58	2,31	19,6514	— 11,0	19,6404
032	20,0426		2,31	20,0403	— 11,0	20,0293
141	19,5717		2,31	19,5694	— 11,0	19,5584
142	3,7006	39 00	2,35	3,6983	— 2,5	3,6958
143	3,6582		2,35	3,6559	— 2,5	3,6534
144	4,4330		2,35	4,4307	— 2,5	4,4282
145	4,0271	39 01	2,35	4,0247	— 2,5	4,0222
033	4,9722		2,35	4,9698	— 3,0	4,9668
146	4,1156		2,35	4,1132	— 2,5	4,1107
147	11,3292	39 02	2,37	11,3268	— 6,5	11,3203
034	12,7561		2,37	12,7537	— 7,0	12,7467
148	11,8420		2,37	11,8396	— 6,5	11,8331
149	3,2199	39 03	2,38	3,2175	— 1,5	3,2160
150	3,2529		2,38	3,2505	— 1,5	3,2490
151	3,3675		2,38	3,3651	— 1,5	3,3636

SEÑALES principales.	ALTITUD observada.	LATITUD φ	CORRECCIÓN ortométrica $-Chd\varphi$	ALTITUD ortométrica h	CORRECCIÓN dinámica total.	COTA dinámica H
	m.	° ′	mm.	m.		kgm.
153	4,6747	39 05	2,39	4,7623	— 3,0	4,6693
152	3,9933		2,39	3,9909	— 2,5	3,9884
154	3,7293		2,39	3,7269	— 2,5	3,7244
155	8,9421	39 06	2,40	8,9397	— 5,0	8,9347
157	7,1103		2,40	7,1079	— 4,0	7,1039
156	7,8593		2,40	7,8570	— 4,5	7,8525
158	11,8222	39 08	2,43	11,8198	— 6,5	11,8133
159 (1)	»	»	»	»	»	»
035	12,1524	39 08	2,43	12,1500	— 6,5	12,1435
160	3,7633	39 09	2,44	3,7609	— 2,0	3,7589
161	4,6193		2,44	4,6169	— 2,5	4,6144
162	4,4028		2,44	4,4004	— 2,0	4,3984
163	3,3422	39 10	2,45	3,3398	— 2,0	3,3378
036	3,7784		2,45	3,7760	— 2,0	3,7740
164	3,7746		2,45	3,7722	— 2,0	3,7702
165	3,6182	39 11	2,45	3,6158	— 1,5	3,6143
166	3,4013		2,45	3,3989	— 1,5	3,3974
167	3,0234		2,45	3,0210	— 1,5	3,0195
169	4,9313	39 12	2,46	4,9288	— 2,5	4,9263
037	5,2832		2,46	5,2807	— 2,5	5,2782
168	5,5640		2,46	5,5615	— 3,0	5,5585
170	4,3184	39 14	2,47	4,3159	— 2,0	4,3139
171	4,4068		2,47	4,4043	— 2,0	4,4023
172 (1)	»	»	»	»	»	»
173	2,6769	39 15	2,47	2,6744	— 1,5	2,6729
174	2,6279		2,47	2,6254	— 1,5	2,6239
175	2,6009		2,47	2,5984	— 1,5	2,5969
176	3,4401	39 17	2,48	3,4376	— 1,5	3,4361
038	3,9119		2,48	3,9094	— 2,0	3,9074
177	3,4024		2,48	3,3999	— 1,5	3,3984
178	2,5354	39 18	2,48	2,5329	— 1,5	2,5314
180	2,6486		2,48	2,6461	— 1,5	2,6446
179	2,5131		2,48	2,5106	— 1,5	2,5091
181	6,1508	39 20	2,50	6,1483	— 3,0	6,1453
182	6,4264		2,50	6,4239	— 3,0	6,4209
183	7,3409		2,50	7,3384	— 3,5	7,3349
185	11,5211	39 22	2,52	11,5186	— 7,5	11,5111
184	10,8944		2,52	10,8919	— 7,0	10,8849
039	11,5941		2,52	11,5916	— 7,5	11,5841
186	8,3040	39 24	2,55	8,3014	— 4,0	8,2974
040	9,0203		2,55	9,0177	— 5,0	9,0127
187	8,7114		2,55	8,7088	— 5,0	8,7038
188	11,4964	39 25	2,57	11,4938	— 6,0	11,4878
041	11,7268		2,57	11,7242	— 6,5	11,7177
189	11,3613		2,57	11,3587	— 6,0	11,3527

(1) No se pudo utilizar.

SEÑALES principales.	ALTITUD observada	LATITUD φ	CORRECCIÓN ortométrica $-Chd\varphi$	ALTITUD ortométrica h	CORRECCIÓN dinámica total.	COTA dinámica H
	m.	° '	mm.	m.		kgm.
190	10,9419	39 26	2,59	10,9393	— 6,0	10,9333
191	11,1314		2,59	11,1288	— 6,0	11,1228
192	11,6283		2,59	11,6257	— 6,5	11,6192
194	14,1075	39 28	2,62	14,1049	— 7,0	14,0979
043	14,0696		2,62	14,0670	— 7,0	14,0600
N. P. 1533	13,6504		2,62	13,6478	— 7,0	13,6408
195	6,6336		2,62	6,6310	— 3,5	6,6275
196	6,7619		2,62	6,7593	— 3,5	6,7558
197	5,8811		2,62	5,8785	— 3,0	5,8755
N. P. 1534	3,4601		2,62	3,4575	— 1,5	3,4560
044	3,8970		2,62	3,8944	— 2,0	3,8924
198 (1)	»	»	»	»	»	»
199	2,0612	39 29	2,64	2,0586	— 1,0	2,0576
200	2,0850		2,64	2,0824	— 1,0	2,0814
201	1,9546		2,64	1,9520	— 1,0	1,9510
N. P. 1535	3,5081	39 30	2,66	3,5054	— 2,0	3,5034
045	4,2125		2,66	4,2098	— 2,0	4,2078
222	3,5161		2,66	3,5134	— 2,0	3,5114
203	5,1295	39 32	2,67	5,1268	— 2,5	5,1243
204	5,2555		2,67	5,2528	— 2,5	5,2503
205	5,2942		2,67	5,2915	— 2,5	5,2890
N. P. 1536 (1)	»	»	»	»	»	»
046	9,5218	39 34	2,70	9,5191	— 5,0	9,5141
206	9,5207		2,70	9,5180	— 5,0	9,5130
047	11,7503	39 35	2,71	11,7476	— 6,0	11,7416
N. P. 1537	11,0945		2,71	11,0918	— 5,5	11,0863
207	10,9607		2,71	10,9580	— 5,5	10,9525
N. P. 1538	13,2114	39 37	2,75	13,2086	— 6,5	13,2021
048	13,6757		2,75	13,6729	— 7,0	13,6659
208	12,6894		2,75	12,6866	— 6,5	12,6801
209 (1)	»	»	»	»	»	»
210	11,7493	39 39	2,79	11,7465	— 6,0	11,7405
211	11,9601		2,79	11,9573	— 6,0	11,9513
N. P. 1539	41,4749	39 41	2,87	41,4721	— 19,5	41,4526
049	41,9636		2,87	41,9607	— 20,0	41,9407
212	41,3099		2,87	41,3070	— 19,5	41,2875

Las correcciones ortométricas que figuran en la columna correspondiente son correcciones acumuladas, es decir, que la diferencia entre dos valores cualesquiera es la corrección para el intervalo correspondiente.

(1) No se pudo utilizar.

NIVEL MEDIO DEL MAR EN ALICANTE

En 1.º de Julio de 1870, y utilizando una escala de marea situada en el interior del puerto, empezaron en Alicante las observaciones para determinar la posición del nivel medio respecto a un punto fijo que servía de apoyo a la escala y situado en la berma del cimiento del puerto. Se hicieron cuatro observaciones diarias sin ninguna interrupción durante dos años seguidos y siempre a las mismas horas (nueve mañana, mediodía, tres tarde y seis tarde), y el valor obtenido como promedio de las 2.924 observaciones registradas en admirable forma por el personal de las obras del puerto, dió para la altitud del nivel medio referida al cero de la escala $+ 0^{m},43$, y referida a la señal N. P. 1 situada en el Ayuntamiento $— 3^{m},4095$ más o menos un error medio que resultó ser de $\pm 7^{mm},3$. Esta altitud ha servido de punto de partida para correr altitudes a toda la red de los antiguos trabajos de nivelaciones, y su precisión también satisface las necesidades de los nuevos trabajos, pues mientras los extremos de los itinerarios que se apoyen en el nivel del mar estén separados, como en el caso presente, por una distancia de 225 kilómetros, el error medio cometido en la nivelación puede ser, según lo establecido, de $1^{mm},5\sqrt{K} = 22^{mm},5$, mientras que esa diferencia de nivel obtenida por observaciones sobre escala, efectuadas en las mismas condiciones en Alicante y en Sagunto, sólo estará afectada de un error, en este caso, aproximadamente igual a $\sqrt{e^2 + e^2} = 11^{mm}$. Puede ser, por lo tanto, doble la precisión alcanzada por las escalas de mareas en Alicante y en Sagunto que la obtenida por la nivelación de alta precisión, en el supuesto, como es lógico, de que el nivel medio del Mediterráneo es el mismo a lo largo del litoral entre los citados puertos.

Puede considerarse, por lo tanto, la altitud de $3^{m},4095 \pm 0^{m},0073$ como un valor suficientemente exacto para expresar la longitud de la normal bajada desde la señal N. P. 1 a la superficie del nivel medio del mar en Alicante, o sea la altitud ortométrica de la citada señal en aquella época, ya lejana, en que se estableció.

Desgraciadamente queda la incertidumbre del movimiento posible que esta señal ha podido experimentar en su primitiva posición durante los cincuenta y cuatro años transcurridos desde que se estableció en el primer peldaño de la escalera principal del Ayuntamiento de Alicante. Aislada en el terreno y sin haberse ejecutado posteriormente otros trabajos de nivelaciones, es de todo punto imposible aclarar este extremo tan importante, siendo problemáticas todas las conjeturas que se puedan hacer tratándose además de una de las zonas de actividad sísmica de la Península.

Esta falta de previsión al establecer la señal fundamental de los trabajos podía haber quedado subsanada si durante los cincuenta años en que ha estado funcionando el mareógrafo de Alicante lo hubiera hecho en buenas condiciones, periodo más que suficiente para vigilar el movimiento de la señal N. P. 1, partiendo de la invariabilidad del nivel medio del mar. Pero desgraciadamente, como ahora veremos al estudiar esas observaciones, han sido tantas las omisiones cometidas en la determinación de la constante del aparato registrador, que los resultados obtenidos sólo son

relativos y no se pueden emplear en la determinación absoluta del nivel medio del mar, no habiendo más remedio, para poder conocer la altitud ortométrica en el momento actual de la señal N. P. 1, que esperar a que el nuevo mareógrafo, que está casi terminado, registre durante trescientos sesenta y cinco días sucesivos sus diagramas en forma que las precauciones que se han tomado y los modernos aparatos de que dispone, fundadamente hacen confiar en el éxito de las mismas.

EL MAREÓGRAFO DE ALICANTE

La escala de mareas que se estableció en el puerto de Alicante no tenía más objeto que determinar una primera altitud provisional del nivel medio del mar, hasta que por el funcionamiento del mareógrafo que se iba a establecer en la costa se pudiera conseguir un valor más exacto, considerando que las observaciones continuas de un aparato registrador independientes de las perturbaciones locales, que siempre se manifiestan en el interior del puerto, con más seguridad lo podía proporcionar.

Con este fin se estableció en la parte exterior del puerto el mareógrafo de Alicante, que empezó a registrar sus observaciones el día 1.° de Marzo de 1874.

El aparato registrador construído por el Ingeniero Adie, de Londres, hoy día se encuentra instalado en la sala de aparatos de Geodesia de la Dirección general y en buenas condiciones para seguir prestando servicio.

Su mecanismo, fuerte y sencillo, está descrito con todo detalle en las *Memorias del Instituto Geográfico*, y como en todos los aparatos de flotador se reduce, en esencia, a transmitir el movimiento que al flotador imprime el agua del mar a un trazador que se apoya en una hoja de papel arrollada en un cilindro. Este cilindro es horizontal en el aparato «Adie» y la transmisión del movimiento vertical del flotador al del trazador siempre se hace convenientemente reducida, según sea la amplitud de la marea, y es aproximadamente de la cuarta parte en este aparato. Si el cilindro estuviera quieto el trazador se limitaría a recorrer una generatriz; pero como un aparato de relojería le permite dar una vuelta completa en veinticuatro horas, el trazador describe una sinusoide en el diagrama con dos máximos y dos mínimos correspondientes a las dos pleamares y las dos bajamares de un día de observación. Como es imposible sumergir el flotador directamente en el mar, se hace dentro de un pozo, que se comunica directamente con el mar, o por medio de un sifón. Sea cualquiera el procedimiento que se elija es indispensable impedir que las ondulaciones de corto periodo que agitan la superficie del agua por causas puramente fortuitas penetren en el interior del pozo, con objeto de que el trazador dibuje en el papel una curva suave de marea debida exclusivamente a la influencia astronómica, que es la que importa registrar.

Esto se consigue haciendo que el tubo de comunicación sea muy largo y su sección muy pequeña respecto a la sección del pozo; pero dificultades que se presentan en la práctica impiden muchas veces realizar ese ideal, siendo inevitable en casi todas las instalaciones esos edentados que aparecen en la curva de marea, sobre todo en los días de temporal y que tanto dificultan el análisis de los diagramas, especialmente

en las instalaciones en el Mediterráneo en que la marea producida por el viento tiene generalmente más amplitud que la debida a causas astronómicas que se trata de registrar.

El flotador en el aparato «Adie» cuelga del extremo de una cadena cuyos eslabones pasan por la garganta de una polea provista de clavijas, con objeto de evitar su resbalamiento, y por el otro extremo termina en un contrapeso para asegurar su tensión cuando sube el flotador con el nivel del agua.

El diagrama adjunto es un modelo de los que el aparato «Adie» empleaba para registrar sus observaciones durante veinticuatro horas.

Las ordenadas o generatrices del cilindro representan las alturas del agua reducidas en la escala de 1 : 3,97 y las abscisas son la representación gráfica del tiempo; y como el desarrollo del cilindro es de 24 centímetros y da una vuelta completa en veinticuatro horas, cada hora viene representada en el diagrama por un centímetro. Se comprende fácilmente que a consecuencia del movimiento rectilíneo del trazador sobre las generatrices de un cilindro, que gira a su vez con velocidad uniforme por su aparato de relojería, aparezca en el diagrama una curva $GPP'H$, que tiene que ser la representación gráfica de la oscilación que ha tenido el nivel del agua en el día de la observación.

Si elegimos ahora una línea de referencia cualquiera, EF, para medir las infinitas ordenadas de la curva, el promedio de estos valores será la ordenada MQ del nivel medio del mar en el día de la observación; es decir, la ordenada del nivel del agua en reposo.

Como esto se puede repetir para todos los días del año, el promedio de esos 365 valores nos dará, si hemos tenido la precaución de elegir la misma línea de referencia, la posición del nivel medio anual con respecto a esa línea, posición perfectamente definida y representada por la distancia QM, expresada gráficamente en milímetros.

Es fácil conseguir, al colocar la nueva hoja de papel, que la línea EF ocupe siempre la misma posición respecto a la base del cilindro, puesto que todas las hojas son idénticas, y además porque en el cilindro hay unos índices que permiten adaptar la hoja todas las veces de la misma manera; pero como no sucede lo mismo respecto a las posiciones relativas que el trazador puede ocupar sobre el cilindro, hay que estudiar por qué motivos, aparte de las oscilaciones propias del nivel de agua, se puede modificar la posición relativa del trazador. El trazador está sujeto en el extremo de un hilo de plata, que se arrolla en una pequeña polea que está en conexión con la polea grande de la cadena del flotador. De la relación de los radios entre ambas poleas depende el coeficiente de reducción del aparato, en este caso igual a 1 : 3,97.

Si la instalación del aparato no se modifica y ha permanecido la misma la longitud y la posición de la cadena, así como la posición y la longitud del hilo del trazador, todas las veces que el trazador pase por la misma referencia en el papel (la recta CD, por ejemplo), será siempre la misma la longitud del hilo del trazador y la longitud de la cadena dentro del pozo, desde el nivel del agua hasta una señal cualquiera que se coloque en el brocal. Por consiguiente, si en el momento en que el trazador pasa por la línea CD hacemos en la cadena una señal que enrase con el clavo metálico situado en el brocal, no tendremos más que vigilar esta coincidencia todas las veces que el trazador atraviese la línea CD para estar seguros del funcionamiento del

mareógrafo y, por lo tanto, de que ha sido la misma la línea de referencia EF elegida en todos los diagramas para medir las ordenadas. Pero como estas condiciones de invariabilidad de los distintos órganos del aparato no puede sostenerse durante mucho tiempo, sobre todo por lo que respecta a la longitud del hilo del trazador, no hay más remedio que observar todos los días el paso del trazador por la línea CD y obtener en seguida la longitud correspondiente de la cadena desde el nivel del agua hasta la señal situada en el pozo.

El hilo del trazador se rompe con frecuencia, como ha sucedido en Alicante, y al reponerlo es muy fácil acortarlo o alargarlo en seis o siete centímetros que, con arreglo a la escala, suponen en la longitud de la cadena variaciones de 24 a 28 centímetros, que falsean en la misma magnitud la determinación del nivel medio.

De lo dicho se desprende que las observaciones de un mareógrafo no son más que relativas; es decir, que no se pueden utilizar mientras no se las transforme en observaciones absolutas, comparándolas a cada momento con las de una escala de mareas. El cálculo de los diagramas de un mareógrafo nos proporciona la longitud en milímetros gráficos de la distancia QM, que separa la posición CD del nivel medio de la línea de referencia, elegida en el papel para medir las ordenadas; pero este resultado relativo no interesa a las nivelaciones de precisión mientras no se conozca la posición de ese nivel medio, referida a una señal metálica sólidamente establecida en el terreno.

Los resultados obtenidos por el mareógrafo de Alicante son, en su mayor parte, relativos, y como se ha descuidado la determinación frecuente de la constante para convertirlos en absolutos, no se pueden utilizar períodos enteros de bastantes años por ser imposible referir la posición del nivel medio CD proporcionada por los cálculos al clavo metálico situado en el brocal del pozo del mareógrafo. A pesar de los cincuenta años de su funcionamiento no se puede elegir un solo año en que haya seguridad de que la constante aplicada a los resultados del cálculo sea la verdadera. Existe esa seguridad para periodos de dos, tres o cuatro meses sucesivos; pero si el tiempo es más largo, ante la necesidad de aplicar un valor para saber la altitud del nivel medio anual referida a la señal N. P. 1 se ha hecho, pero dentro de la mayor incertidumbre.

MANERA DE CONVERTIR LAS OBSERVACIONES RELATIVAS DE UN MAREÓGRAFO EN OBSERVACIONES ABSOLUTAS

Constante del diagrama.

Las observaciones sobre una escala de mareas son siempre eficaces, son observaciones absolutas; no tienen más inconveniente, respecto a las del mareógrafo, sino que la observación no puede ser continua, pues no se puede exigir, sin comprometer demasiado la honradez profesional del observador, el que éste ejecute más de cuatro observaciones diarias. En cambio, el mareógrafo proporciona una observación con-

tinua, un número infinito de alturas de agua observadas en todos los momentos, comprendidas las pleamares y las bajamares, cuyos datos son tan esenciales en los análisis de los diagramas para el estudio científico de la marea. Desde este punto de vista no hay comparación posible entre el rendimiento de un mareógrafo y el de una escala; pero desde el punto de vista de las nivelaciones, que lo que interesa es conocer la altitud del nivel medio referido a una señal fija del terreno y, por lo tanto, la necesidad de relacionar su funcionamiento con la observación de una escala, ya no compensa, considerando el objetivo que se persigue, la labor que supone la construcción y sostenimiento de un mareógrafo, con todos sus gastos y complicaciones, pues la práctica ha puesto de manifiesto que esas necesidades pueden quedar satisfechas con un cierto número de observaciones hechas en buenas condiciones, como ha ocurrido en Alicante.

El cometido de un mareógrafo es medir repetidas veces la distancia vertical entre el nivel del agua y un clavo metálico que, generalmente, se sitúa en el brocal del pozo cuando el aparato es de flotador.

El promedio de estas medidas da, como es consiguiente, la altitud del nivel medio referida a ese clavo, que luego se transporta por las nivelaciones a donde se quiera. Esta altitud es tanto más exacta cuanto más largo sea el período de observaciones, siendo un año más que suficiente para satisfacer, por muy exigentes que sean, las necesidades de la Geodesia.

Si en un momento cualquiera después de empezar la observación, por ejemplo a las cinco horas (véase el diagrama), medimos dentro del pozo la altura del clavo hasta el nivel del agua y en aquel instante marcamos la posición P que ocupa el trazador, como el clavo se encuentra más alto que la pleamar, si en la ordenada que pasa por P medimos hacia la parte superior del diagrama una longitud PN igual a la medida que hemos hecho en el pozo, dividida por la escala, el punto N que se obtenga pertenecerá a la horizontal que pasa por el clavo metálico.

Si diez horas más tarde repetimos la misma operación en otra posición P' del trazador, obtendremos otro punto N' de la misma horizontal, y promediando los dos valores podremos trazar en el diagrama la recta AB, que será la representación gráfica de la horizontal que pasa por el clavo metálico, con tanta más exactitud cuanto mayor haya sido la precisión de las medidas directas hechas en el pozo.

Su distancia entre esta recta y la línea EF, que ha sido elegida para medir las ordenadas, se llama constante del diagrama, igual, en el caso que consideramos, a 190 milímetros y nos permite en cualquier instante referir el nivel del agua al clavo metálico, pues bastará restar de ese valor la distancia gráfica obtenida por el cálculo. Así, por ejemplo, en el diagrama adjunto el nivel medio del día de la observación referida al clavo metálico será igual a $NM - QM = NQ = 120$ milímetros como altitud gráfica, y como altitud real ese valor multiplicado por 3,97, o sea aproximadamente 480 milímetros.

Como en el aparato «Adie» había que colocar una hoja nueva todos los días, esa determinación había que hacerla a diario en función de dos medidas directas en el pozo, como mínimum, para poderla obtener con alguna garantía, y, sin embargo, se pasaban semanas, meses y años enteros sin hacer ninguna determinación, consignando en el reverso de los diagramas el mismo valor para la constante primitivamente obtenida.

Determinada a diario la constante en la forma que se acaba de explicar, ya no importa que la posición relativa del trazador se modifique por variaciones en la longitud de su hilo o de la cadena; si esto ha sucedido, la longitud de la constante NM ya no será la misma, pero la diferencia entre el nuevo valor y el MQ, también distinto, obtenido por el cálculo, será sensiblemente el mismo NQ para todos los diagramas.

DETERMINACIÓN DEL NIVEL MEDIO SOBRE LA LÍNEA DE REFERENCIA

La curva $GPP'H$ representa la oscilación del nivel del agua en las veinticuatro horas. Si no hubiera habido oscilaciones el trazador hubiera marcado la sección circular CD, cuya ordenada QM es el promedio de todas las ordenadas de la curva.

Para determinarla, si con un planímetro medimos la superficie comprendida por la curva, las ordenadas extremas y la línea de referencia, y dividimos esta superficie por la línea de referencia EF, que es la base, el cociente que resulta será la altura QM del rectángulo $CDFE$ de superficie equivalente y, por consiguiente, QM el promedio de todas las ordenadas de la curva, o sea la que corresponde al nivel medio.

Como el mismo valor MN de la constante no es posible sostenerlo durante muchos días seguidos, como la práctica repetidamente ha puesto de manifiesto, no hay más remedio que calcular para cada día el valor $NM - QM = NQ$ para poder deducir del promedio de 365 valores análogos la altitud del nivel medio anual referida al clavo metálico; es decir, que no se puede, como se ha hecho en los cálculos del mareógrafo de Alicante, tomar el promedio de los 365 valores MQ que proporciona el cálculo gráfico para restarlo de la constante MN supuesta igual para todo el año sin cometer grandes errores en el resultado definitivo.

Como resumen de todo lo expuesto, es de la mayor importancia en la observación tomar todos los días, por lo menos, dos alturas sobre el agua en el pozo, marcando las posiciones P y P' que en aquel momento ocupa el trazador en el papel, y respecto a los cálculos, señalar en cada diagrama el valor de su constante para obtener la altitud de nivel medio del día de la observación referida al clavo metálico situado en el brocal del pozo. Este clavo no se puede considerar como una referencia permanente; situado en el brocal de un pozo recientemente construído participará del asentamiento gradual y progresivo de la construcción, inevitable en todos los edificios y mucho más en los mareógrafos por las condiciones de sus emplazamientos. No hay más remedio, por lo tanto, que vigilar con frecuencia esos movimientos, nivelando, por lo menos una vez al año, el itinerario entre el clavo y la referencia permanente del mareógrafo sólidamente establecida en terreno firme y a la distancia que sea necesaria. En Alicante no hay otra referencia permanente para el mareógrafo que la señal N. P. 1 situada en el Ayuntamiento, y las tres veces que se ha hecho la nivelación del itinerario entre el clavo y la referencia permanente del mareógrafo, entre los años 1872 y 1908, se ha puesto de manifiesto un descenso progresivo del clavo con respecto a la referida señal, que llegó a alcanzar el valor de cinco centímetros en la última de las fechas mencionadas.

Es necesario tener en cuenta una porción de causas que producen pequeños errores en los mareógrafos que funcionan correctamente, como son las dilataciones de la cadena del flotador, del hilo del trazador del papel del diagrama y, sobre todo, del atraso y adelanto del reloj.

En el caso del mareógrafo de Alicante, por las incidencias que han ocurrido en su funcionamiento, esos errores son absolutamente despreciables.

RESULTADOS OBTENIDOS POR EL MAREÓGRAFO DE ALICANTE

Como el mareógrafo ha tenido en el puerto de Alicante dos instalaciones en sitios diferentes y, por lo tanto, han tenido que ser también distintas las circunstancias que han influido en las observaciones, se han agrupado los resultados que corresponden a cada una de ellas y que comprenden desde el año 1874 al 1911 para la primera instalación, y desde el año 1914 al 1924 para la segunda, refiriéndose todos ellos a la señal N. P. 1 situada en el Ayuntamiento.

La altitud de la señal N. P. 1 sobre el nivel medio del mar en Alicante registrada por las observaciones del mareógrafo se compone de dos partes diferentes, la primera obtenida por la nivelación hasta el clavo metálico situado en el brocal, y la segunda desde esta referencia hasta el nivel medio del agua dentro del pozo del mareógrafo y debida exclusivamente al funcionamiento del aparato.

Se ha elegido como abscisa para referir las ordenadas de la curva la línea media del papel; es decir, aquella que tiene la cota cero en el diagrama y se determina la constante, midiendo dentro del pozo la distancia entre el nivel del agua y el clavo metálico situado en el brocal, esperando el momento en que el trazador pasaba por la referida línea media del papel.

No siempre se medía la altura dentro del pozo desde el brocal; al principio se hacía desde el plano de la mesa del aparato y otras veces desde la generatriz más elevada del cilindro. Con objeto de poder comparar los resultados se han hecho las correspondientes reducciones, considerándose siempre que la altura sobre el nivel del agua se ha medido desde el clavo del brocal del pozo.

En el adjunto estado se expresa el resultado de los cálculos, así como las incidencias más importantes ocurridas en ambas instalaciones. Los valores de la columna *C* son los valores *MQ* del diagrama para todo el año directamente deducidos de los cálculos que, multiplicados por la escala, proporciona los resultados relativos de la observación de la columna *D*.

En la columna *E* se indican los valores de la constante cuando ha sido determinada. Representa en el diagrama la longitud *NM* multiplicada por la escala; es el dato más importante e indispensable para poder utilizar los resultados de la columna *D*. La columna *F* es la diferencia entre la constante y los valores de la columna *D*, o sea el nivel medio anual referido absolutamente al clavo del pozo. En la columna *G* se expresan los resultados obtenidos en distintas épocas al hacer la nivelación entre la señal N. P. 1 y el clavo del brocal del pozo, y estos valores, sumados a los de la columna *F*, proporcionan, por último (columna *H*), la altitud de la señal N. P. 1 sobre el nivel medio anual debido a las observaciones del mareógrafo.

PRIMERA INSTALACIÓN EN EL PUERTO

Como base para poder interpretar los resultados se supone que la medida de las superficies está bien ejecutada, así como todas las operaciones numéricas de los cálculos; es decir, que los valores de la columna *D* se ajustan a la verdad. En este supuesto se ve en seguida, al considerar sus diferencias, las continuas variaciones experimentadas por la constante, confirmadas en todas las ocasiones en que se ha deducido un nuevo valor. Sólo cinco veces, en un período de treinta y ocho años, ha sido determinada, habiendo resultado otros tantos valores distintos, y en esas circunstancias es imposible saber el valor que corresponde a los años intermedios.

Se determinó por primera vez en Abril de 1874 con toda clase de precauciones para asegurar la precisión de la medida, ejecutando numerosas observaciones con distintos observadores, y así se obtuvo el valor de 1,795, haciéndose una señal permanente en la cadena en la parte que enrasaba con el plano de la mesa del aparato en el momento en que el trazador pasaba por la línea media del papel, con el objeto de que el observador no tuviera más que vigilar, para lo sucesivo, si se verificaba esa coincidencia siempre que el trazador pasaba por la línea media del diagrama.

Este equilibrio no podía sostenerse durante mucho tiempo, como efectivamente ocurrió a los pocos días en que el observador daba cuenta de que cuando se verificaba la coincidencia de la señal no había llegado todavía el trazador a la línea media. Entonces se corrigió este error gráfico acortando o alargando el hilo del trazador lo que hacía falta; y aun cuando hay que reconocer que el cuidado y atención que se prestó al funcionamiento del mareógrafo en sus primeros años no ha sido superado ni igualado en los años posteriores, no hay nada que garantice el valor de esa constante al poco tiempo de su determinación, como la práctica puso de manifiesto, cuando diez años más tarde se determinó un nuevo valor que discrepaba en 62 milímetros del anterior, falseando en la misma cantidad la altitud del nivel medio si fuera indebidamente aplicada. Era necesario que el observador hubiera determinado la constante para cada diagrama, tomando todos los días una o dos medidas sobre el nivel del agua en cualquier posición del trazador, sin preocuparse para nada de si pasaba o no por la línea media del papel, y en esa forma, el promedio de esos 365 valores sí representará el valor de la constante para todo el año, que sin inconveniente alguno puede ser aplicada al resultado anual de las observaciones relativas del mareógrafo.

En el caso presente, aplicar para todo el año 1874 el valor 1,795 obtenido el día 8 de Abril equivale a suponer la invariabilidad durante todo ese tiempo de las posiciones relativas de la cadena del flotador, del hilo del trazador y de la hoja de papel al ser arrollada en el cilindro, cosa imposible de admitir, sobre todo en lo que respecta al hilo del trazador que tantas roturas ha sufrido en el transcurso de las observaciones. Es probable, sin embargo, que ese error para los años 1874 y 1875 sea pequeño por lo que antes hemos dicho del mayor cuidado con que se hacían los cálculos y las observaciones, y en esa confianza, si aplicamos ese valor de la constante a los resultados de esos dos años, se obtiene, para la altitud del nivel medio referida al clavo *(F)* 1,762 y 1,765, que sumadas a la diferencia de nivel obtenida *(G)* dan,

por último, como altitud ortométrica de la señal N. P. 1 por las observaciones del año 1874, $H = 3{,}421$, y por las del año 1875, $H = 3{,}424$. Estos valores concuerdan perfectamente y además con el resultado obtenido por la escala $H = 3{,}409$, y para el objeto que se persigue no hay inconveniente en combinarlos, obteniendo un valor correcto para la altitud ortométrica de la señal N. P. 1; pero se referiría a aquella época y no al momento actual, que es lo que interesa conocer.

Las tres veces que la nivelación *(G)* ha determinado la diferencia de nivel entre la señal N. P. 1 y el clavo del brocal, pone de relieve un hundimiento de cinco centímetros que el último ha tenido respecto a la señal, de acuerdo con los resultados de la columna *F* obtenidos en función de los cinco valores de la constante y de acuerdo también con lo que tenía que ocurrir al ser colocado el clavo en el brocal de un pozo recién construido y constantemente batido por el agua del mar. El desconocimiento del valor anual de la constante y la incertidumbre de los valores de la columna *G* por no haberse ejecutado la nivelación, por lo menos una vez al año, impiden conocer la altitud de la señal N. P. 1 sobre el nivel medio para todos los años transcurridos entre 1876 y 1908. En este año se determinó la constante y se ejecutó la nivelación, y admitiendo la posibilidad de aplicar a todo el año el valor 1,989 obtenido para aquélla en el mes de Mayo, resulta para altitud ortométrica de la señal N. P. 1 por las observaciones del año 1908 $H = 3{,}432$, también de acuerdo con los valores anteriores, acusándose, por lo tanto, una tendencia por las observaciones en esta primera instalación a atribuir a la señal N. P. 1 una altitud sobre el nivel medio de 3,424, que guarda estrecha relación con el valor 3,409 obtenido por la escala del puerto.

SEGUNDA INSTALACIÓN DEL MAREÓGRAFO EN LA CASA DE PRÁCTICOS

Lo primero que se deduce al examinar los resultados en este segundo periodo de las observaciones es que, por el mero hecho de cambiar la instalación del mareógrafo, el nivel medio del mar en Alicante ha subido, respecto a la señal N. P. 1, ocho o nueve centímetros. En este segundo período, lo mismo que en la primera instalación, la incertidumbre constante subsiste, desconociéndose su valor anual, así como el movimiento de descenso que ha tenido que experimentar el clavo del pozo, puesto que no se ha hecho más que una sola vez la nivelación hasta la señal N. P. 1. En estas condiciones el único valor obtenido en 1916, $G = 1{,}1343$, no ofrece ninguna garantía para los años posteriores, y los valores obtenidos para *H* no pueden expresar nada. Estas observaciones fueron suspendidas en Marzo de 1924, y el personal de las obras del puerto dispuso de la habitación donde estaba instalado el mareógrafo al poco tiempo de desmontarse el aparato, quitando toda posibilidad de haber ejecutado en esta campaña una nivelación que tanto hubiera facilitado la interpretación de los resultados. Otra circunstancia que hay que tener presente en esta segunda instalación es lo deficiente de la comunicación del pozo del flotador con el mar, así como la frecuencia de las interrupciones debidas al aparato de relojería, y sobre todo a la rotura del hilo del flotador, que hace que todavía sean más inciertos estos resultados que, por su época más reciente, eran de la mayor importancia para nuestro objeto.

Como resumen de todo lo expuesto, se desprende:

Que no es posible conseguir una altitud ortométrica definitiva para la señal N. P. 1, basada en los resultados obtenidos por el mareógrafo de Alicante durante su funcionamiento; y

Que ante la necesidad de tener que adoptar un valor provisional para esa altitud, con objeto de poder utilizar los resultados de los nuevos trabajos de nivelación, es preferible conservar el valor 3,4095 obtenido por las observaciones de la escala del puerto en el año 1870, al que también están referidos los antiguos trabajos de nivelación, hasta que el nuevo mareógrafo, cuya construcción ha terminado, registre más de un año de observaciones.

Antes hemos indicado que la única incertidumbre de adoptar para altitud ortométrica de la señal N. P. 1 el valor 3,4095, proporcionado por las observaciones de la escala en el año 1870, puede derivarse del posible movimiento que haya podido tener la señal N. P. 1, teniendo en cuenta que ya han transcurrido más de cincuenta años desde que se estableció. Acerca de este movimiento es conveniente hacer algunas aclaraciones. Desde luego queda descontada la posibilidad de un desplazamiento voluntario a consecuencia de obras realizadas en el Ayuntamiento, como también el de asentamiento a que inevitablemente están sujetas las señales que se establecen en un edificio de reciente construcción. Por tratarse de un edificio tan antiguo como el Ayuntamiento de Alicante, y por las manifestaciones recogidas en el mismo, hay la seguridad de que la señal N. P. 1 se conserva en el mismo sitio donde primitivamente se estableció, y únicamente se alude, cuando se habla de posible desplazamiento, a perturbaciones de carácter sísmico habidas en la región. Es, por lo tanto, muy probable que la señal N. P. 1 no haya sufrido movimiento, y si lo ha habido sea éste insignificante, como así lo comprueban las distintas nivelaciones hechas en épocas diferentes entre las mismas señales; pero por tratarse de una fecha ya lejana y de una señal que ha sido, y seguirá siendo, la referencia principal del nuevo mareógrafo permanente, es conveniente adoptar cuantas precauciones sean necesarias y no pronunciarse definitivamente en ningún sentido hasta recoger las observaciones registradas por el nuevo mareógrafo. Hoy día esa señal ya está enlazada a un grupo de cinco señales principales situadas en las inmediaciones de la Estación Sismológica, y por lo tanto, su situación asegurada para lo sucesivo.

Aparato «Adie» de flotador. Cilindro registrador horizontal. Coeficiente de reducción = 3,97.
Los años se consideran de Marzo a Marzo.
Constante del mareógrafo es la altura desde el clavo situado en el brocal, sobre el nivel del agua dentro del pozo, medida en el instante en que el trazador pasa por la línea media del diagrama.

Primera instalación en la parte exterior del puerto.

AÑOS	DÍAS observados.	NIVEL MEDIO REFERIDO A LA LÍNEA MEDIA DEL DIAGRAMA (Resultado de los cálculos.)		CONSTANTE — Altura del clavo sobre el agua en el pozo cuando el trazador pasa por la línea media del diagrama.	ALTITUD del nivel medio referida al clavo del brocal del pozo.	DIFERENCIA de nivel entre la señal N. P. 1 y el clavo del brocal del pozo.	ALTITUD del nivel medio referida a la señal N. P. 1.	OBSERVACIONES
		Distancias gráficas.	Distancias reales.					
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	
		mm.	mm.	m.	m.	m.	m.	
1874	365	»	+ 33	1,795	1,762	1,6586	3,421	*E.* 8 Abril.
1875	365	»	+ 30	»	1,765	»	3,424	»
1876	365	»	+ 58	»	»	»	»	Octubre: Acortamiento de la cadena en 92 mm.
1877	365	»	+ 48	»	»	»	»	»
1878	365	»	+ 69	»	»	»	»	Marzo: Acortamiento de la cadena 50 mm. más.
1879	366	»	+ 67	»	»	»	»	Empieza la obstrucción en el tubo de comunicación.
1880	365	»	+ 85	»	»	1,6777	»	»
1881	244	»	+ 50	»	»	»	»	Ensanche de las obras del mareógrafo.
1882	365	»	+ 184	»	»	»	»	Empieza la obstrucción en el tubo de comunicación.
1883	334	»	+ 200	»	»	»	»	Obstrucción en el tubo de comunicación.
1884	364	»	+ 176	1,857	1,681	»	»	*E.* 1.º Agosto: Reparación de la tubería.
1885	365	»	+ 125	»	»	»	»	Reparación y refuerzo del mareógrafo.
1886	335	»	+ 104	»	»	»	»	»
1887	306	»	+ 135	»	»	»	»	Obstrucción en el tubo de comunicación.
1888	227	»	+ 118	»	»	»	»	Obstrucciones en el tubo de comunicación.
1889	343	»	+ 145	»	»	»	»	Limpieza de la tubería.
1890	360	»	+ 175	»	»	»	»	Reparación del edificio.
1891	362	»	+ 199	»	»	»	»	»
1892	356	»	+ 98	1,841	1,743	»	»	*E.* Diagrama del 4 Mayo.
1893	359	»	+ 57	»	»	»	»	»
1894	364	»	+ 78	»	»	»	»	»
1895	299	»	+ 18	»	»	»	»	»

1897	363	»	— 17	»	»	»	»	»
1898	350	»	+ 81	»	»	»	»	»
1899	282	»	+ 81	»	»	»	»	»
1900	150	»	+ 127	»	»	»	»	»
1901	364	»	+ 171	»	»	»	»	»
1902	274	»	+ 172	»	»	»	»	»
1903	340	»	+ 182	»	»	»	»	»
1904	181	»	+ 152	»	»	»	»	»
1905	361	»	+ 175	1,905	1,730	»	»	*E.* Aparece este valor en el diagrama del 1.º de Marzo de 1905 y sigue consignándose hasta el derribo del mareógrafo.
1906	225	»	+ 180	»	»	»	»	»
1907	237	»	+ 268	»	»	»	»	»
1908	208	»	+ 266	1,989	1,723	1,7095	3.432	*E.* 17, 18, 19, 21, 23 Mayo.—*G.* 18 Mayo.
1909	336	»	+ 273	»	»	»	»	»
1910	346	»	+ 283	»	»	»	»	Derribo del mareógrafo.
1911	151	»	+ 286	»	»	»	»	»

Segunda instalación en la casa de prácticos hasta el 1.º de Marzo de 1924, en que fué suspendido el servicio mareográfico en Alicante.

1914	205	»	— 25	2,031-2,018	»	»	»	*E.* 2 Junio: Modificación del pozo.
1915	334	»	+ 68	2,323	»	»	»	*E.* 3, 4, 5, 6 Octubre.—*G.* 3 Octubre.
1916	364	»	+ 143	2,347	2,204	1,1343	3,338	En esta segunda instalación es muy grande la marejada dentro del pozo y, como consecuencia, son muchas las veces que se ha roto el hilo del trazador.
1917	359	»	+ 93	»	»	»	»	»
1918	357	»	+ 136	»	»	»	»	»
1919	313	»	+ 107	»	»	»	»	»
1920	363	»	+ 108	»	»	»	»	»
1921	363	»	+ 108	»	»	»	»	»
1922	351	»	+ 85	2,329	2,244	»	3,378	*E.* Todo el mes de Diciembre.
1923	352	»	+ 116	2,331	2,215	»	3,339	*E.* Todo el mes de Enero.

NIVEL MEDIO DEL MAR EN SAGUNTO

Situado Sagunto en uno de los extremos de la sección, la altitud de su señal principal debe ser determinada directamente por observaciones mareográficas, y con este objeto ha sido elegido su puerto y forma parte del proyecto de red mareográfica para la Peninsula; pero debido a las obras que actualmente se están realizando, por ahora no es posible establecer ni siquiera una escala de mareas, y ante esta dificultad, este Servicio, confiando que en el puerto de Valencia se disponia de una señal por debajo de la cual se conociera con suficiente aproximación para estos trabajos la altitud del nivel medio del mar, se ha dirigido a la Junta de Obras del Puerto interesando el referido dato con objeto de enlazar esa señal al itinerario de los trabajos que también pasa por Valencia, no habiéndose consignado resultado alguno por no haber sido favorables los informes recibidos. En estas condiciones no queda más remedio que interesar el establecimiento de escalas de mareas en cualquiera de los citados puertos, con objeto de recoger sus observaciones en la misma forma que se ha hecho en Alicante, servicio que debe ejecutar el personal de la Junta de Obras, y si esto no fuera posible, por el que designe esta Dirección general.

ALTITUDES FUNDAMENTALES DEL ITINERARIO

Se consideran como altitudes fundamentales de este itinerario las altitudes ortométricas de las señales de sus extremos situadas en Alicante y en Sagunto, directamente obtenidas por las observaciones de sus mareógrafos durante un periodo de trescientos setenta días sucesivos. Una vez conocidas, toda la sección debe ser compensada aplicando a cada kilómetro la corrección que sea necesaria para conseguir que el itinerario quede ajustado entre las citadas altitudes.

RENDIMIENTO ALCANZADO EN EL TRABAJO

El rendimiento diario conseguido por observador ha sido de 12,50 estaciones niveladas, teniendo en cuenta todos los dias (lluviosos, festivos, etc., etc.) transcurridos entre el 15 de Julio y el 15 de Diciembre, en que terminaron los trabajos.

Ese número se ha obtenido dividiendo el total de estaciones observadas (7.500) por ciento cincuenta días, y por el número cuatro de observadores. Corresponden a unos 750 metros de itinerario, que equivale, aproximadamente, a 22,5 kilómetros al mes y a unos 112 kilómetros para toda la campaña. El desarrollo progresivo de los trabajos obtenidos en esta forma es muy lento, pues si en la campaña venidera el rendimiento fuera el mismo, serían precisos cuarenta y cinco años para terminar la

nivelación de todo el proyecto, que comprende, aproximadamente, 10.000 kilómetros de itinerario. Es cierto que sólo dos parejas de observadores no pueden acometer esa labor para terminarla en un número razonable de campañas, y que no es necesario demostrar la necesidad de aumentar el personal, sobre todo en la sección de cálculo, si se quiere que el proyecto prácticamente sea realizable; pero también es cierto que el rendimiento obtenido en la nivelación de esta línea ha sido escaso, no habiendo más remedio que buscar en el procedimiento operatorio la causa que ha impedido sacar todo el partido posible, y que el nivel Zeiss está en condiciones de proporcionar. De acuerdo con lo que tuve el honor de informar antes de empezar esta campaña, sigo creyendo que no es compatible con la precisión de estos trabajos ni que el observador registre personalmente las observaciones, ni que, simultáneamente con éstas, se tomen medidas sobre el terreno para conseguir las posiciones del nivel equidistantes entre las dos miras. Estas mediciones deben hacerse independientes aprovechando las horas del día en que no se pueda nivelar, y si esto no fuera posible por falta de tiempo debe, incluso, sacrificarse esa equidistancia, conformándose con la que se obtenga con la medición hecha a pasos, introduciéndose, como es natural, en los cálculos, las correspondientes correcciones para eliminar los errores de curvatura y de refracción.

La precisión de estos trabajos lleva consigo la necesidad de pasar rápidamente con el nivel sobre el terreno, es decir, de observar cada estación en cuatro o cinco minutos; esto únicamente se consigue llevando el observador un escribiente con el cuaderno y no perdiendo tiempo con la cinta para marcar sobre el terreno las sucesivas posiciones del nivel.

Éste necesita estar poco tiempo en estación, y la mira el menor tiempo posible sobre sus apoyos. De nada sirve que un observador excesivamente meticuloso tome toda clase de precauciones para asegurar la visual sobre la mira; si el tiempo de observación ha sido largo, los resultados no serán exactos. El Jefe de la Brigada que recibió oportunamente las instrucciones dictadas en este sentido por este Servicio, no pudo, sin embargo, llevarlas a la práctica por no encontrar cuatro auxiliares con la cultura necesaria para registrar las observaciones. Ensayó, sin embargo, el procedimiento llevando personalmente el cuaderno de uno de los observadores y los resultados fueron completamente satisfactorios.

La longitud media de la nivelada en estos trabajos ha sido de 30 metros, y es este un factor de la mayor importancia que sólo la experiencia personal de cada observador puede manejar con habilidad. Si un observador es exageradamente precavido y utiliza para sus observaciones visuales excesivamente cortas para asegurar fácilmente la lectura de las miras, es casi seguro que su trabajo estará exento de rectificaciones, pero el rendimiento habrá sido escaso. Si, por el contrario, fuerza la longitud de la visual más allá del límite fijado para los trabajos, habrá numerosas rectificaciones, y, por consiguiente, el rendimiento también será escaso.

Es, por lo tanto, muy probable que la máxima velocidad compatible con la precisión de los trabajos tenga que ser conseguida graduando continuamente la longitud de la nivelada, de tal manera que tenga que ejecutarse un cierto número de rectificaciones. La ausencia de éstas no indica más que un excesivo cuidado del observador, mientras que un tanto por ciento moderado de ellas pondrá de manifiesto el deseo

del observador para obtener en el trabajo el máximo progreso, compatible con la precisión y no falta de habilidad en la manera de trabajar.

Esto es puramente personal y cada observador, según su propia experiencia, debe fijar ese límite máximo para la visual que le permita sacar al trabajo el mayor rendimiento posible.

GASTO DE LOS TRABAJOS

Establecidas las señales antes de la ejecución de los trabajos, nos referiremos por separado a cada una de estas épocas por determinar sucesivamente el gasto medio por señal establecida, el gasto medio por estación o por kilómetro doblemente nivelado y este mismo gasto combinándolo también con el que corresponde a las señales establecidas. No se han tenido en cuenta para hacer este cómputo los sueldos, pero sí las indemnizaciones devengadas por el personal de la Brigada durante el tiempo de los trabajos, así como el precio de coste de las señales (5,75 por unidad).

Sobre esta base, y teniendo en cuenta los gastos que en los estados corresponden a la primera parte de la campaña (meses de Abril, Mayo y Junio), resulta para gasto medio por señal principal establecida 68,70 pesetas, que corresponde muy aproximadamente a un kilómetro de itinerario.

Considerando los gastos realizados durante las observaciones (desde el 20 de Julio a 15 de Diciembre), se deduce para gasto medio de una estación doblemente nivelada 9,56 pesetas, que equivale a 162,50 por kilómetro doblemente nivelado, teniendo en cuenta que en las condiciones normales de esta sección un kilómetro comprende, aproximadamente, 17 estaciones, hipótesis muy admisible puesto que también resulta el mismo valor (162,50 pesetas) combinando la totalidad de los gastos con todos los kilómetros del itinerario.

Como antes hemos dicho que 68,70 pesetas es el gasto que corresponde a un kilómetro por el establecimiento de las señales principales, tendremos como gasto medio total para un kilómetro de esta sección, doblemente nivelado y con las señales establecidas, 231,22 pesetas. Claro es que este valor puede variar considerablemente de un año para otro debido a una porción de causas.

En algunas líneas la Brigada puede tener alojamientos convenientemente situados, mientras que en otras forzosamente tendrá que establecer campamentos, o perder muchísimo tiempo para trasladarse al sitio de los trabajos. Habrá itinerarios con fuertes pendientes mientras otros se desarrollarán por regiones completamente llanas. La abundancia en las construcciones permitirá, en ciertos itinerarios, utilizarlas para incrustar las señales principales, evitando el gasto, siempre crecido, de los bloques de cemento, etc., etc.

Considerando, sin embargo, los anteriores resultados como promedios para todo el conjunto de la red, resulta en definitiva que el gasto medio obtenido de 231,22 pesetas por kilómetro doblemente nivelado con las señales establecidas, eleva a pesetas 2.313.200 la cantidad necesaria para observar los 10.000 kilómetros del proyecto, y en un plazo de tiempo, que no puede ser inferior a cuarenta y cinco años, conservando los actuales elementos.

COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS CON LOS OBTENIDOS POR LOS ANTIGUOS TRABAJOS

La circunstancia de que la parte del itinerario comprendida entre Valencia y Sagunto fué nivelada en el año 1912 y forma parte de la antigua red de nivelaciones de precisión, ha permitido comparar los resultados obtenidos, consiguiéndose en esta primera campaña uno de los objetos más importantes de los nuevos trabajos, que es el de comprobar y rectificar sucesivamente los resultados obtenidos en otro tiempo que por la fecha, ya remota, en que se hicieron los trabajos, no tiene nada de particular que alguna de sus señales haya sufrido movimientos de consideración.

Está dispuesto en las nuevas instrucciones la necesidad de utilizar, siempre que sea posible, las señales principales de los antiguos trabajos que se encuentren en el itinerario, y debido a esto se han vuelto a nivelar ocho señales principales antiguas, expresándose en los estados adjuntos las discordancias obtenidas. Todas ellas ponen de manifiesto la bondad de los primeros trabajos, pues aun cuando hay una diferencia de nivel entre las señales N. P. 1813 y N. P. 1533 que discrepa en 97 milímetros, realmente esos valores no son comparables, porque por los nuevos trabajos de alta precisión se ha obtenido esa diferencia de nivel directamente siguiendo el itinerario próximo al litoral, mientras que para obtenerla por los trabajos antiguos es necesario combinar tres itinerarios distintos ejecutados en los años 1871, 1874 y 1912, y en esas condiciones, y teniendo además en cuenta la distancia de 200 kilómetros que separa las citadas señales, está más que justificada esa discordancia.

La consecuencia inmediata ha sido que el plano de comparación se ha elevado al llegar a Sagunto, rectificando favorablemente en esa cantidad (97 milímetros) el famoso error de 60 centímetros que se encuentra localizado en Molins del Rey, cerca de Barcelona, y que ha sido objeto de tantas investigaciones infructuosas en los trabajos antiguos de nivelaciones de precisión.

Discrepancias con los antiguos trabajos de nivelaciones de precisión al comparar las diferencias de nivel obtenidas entre las mismas señales metálicas.

Señales N. P.	Distancias.	Fechas.	DIFERENCIAS DE NIVEL		Discrepancias.
			Trabajos antiguos.	Trabajos nuevos.	
	km.		m.	m.	mm.
1814- 1	4,1	1916-1925	31,143	31,121	22
1-1813	1,0	1916-1925	0,766	0,741	25
1813-1533	196,0	1912-1925	9,402	9,499	97
1533-1534	5,5	1912-1925	10,196	10,190	6
1534-1535	5,5	1912-1925	0,049	0,048	1
1535-1537	8,0	1912-1925	7,570	7,586	16
1537-1538	3,3	1912-1925	2,125	2,117	8
1538-1530	7,0	1912-1925	28,253	28,264	11

Discrepancias con los antiguos trabajos de nivelaciones de precisión al comparar las altitudes obtenidas por la observación para las mismas señales metálicas y referidas al mismo origen.

Señales N. P.	Distancia al origen.	Fechas.	ALTITUDES		Discrepancias.
			Trabajos antiguos.	Trabajos nuevos.	
	km.		m.	m.	mm.
I	0	1872-1925	3,409	3,409	00
1533	196	1912-1925	13,577	13,650	73
1534	202	1912-1925	3,381	3,460	79
1535	207	1912-1925	3,430	3,508	78
1537	215	1912-1925	11,000	11,095	95
1538	218	1912-1925	13,125	13,211	86
1539	226	1912-1925	41,378	41,475	97
1813	1	1916-1925	4,175	4,151	24
1814	4	1916-1925	34,552	34,530	22

RESUMEN

El personal que ha ejecutado las observaciones ha sido orientado y dirigido en el sentido de alcanzar la mayor precisión en los resultados, subordinando a esta consideración todas las demás.

Es lógico y natural que haya sucedido eso así en esta primera campaña por tratarse de llevar a la práctica por primera vez métodos de trabajo completamente nuevos, que inician la ejecución de un proyecto cuyo éxito depende, como es natural, del obtenido en los primeros trabajos; pero eso no quiere decir que el criterio que se ha seguido sea el más acertado y el que debe imperar para lo sucesivo.

A mi juicio es preferible sacrificar un poco la precisión (siempre que se conserve dentro de los límites impuestos) en beneficio del desarrollo de los trabajos, pues hay que tener muy en cuenta que las tres condiciones, de precisión, economía y rendimiento, son de la mayor importancia, no debiendo prevalecer ninguna de ellas en perjuicio de las demás, siendo más acertado nivelar la mayor cantidad posible de itinerario con cierta precisión (señalada por la fórmula $4^{mm}\sqrt{K}$), que conseguir poco rendimiento de una precisión exagerada. Esto puede realizarse aumentando, por ejemplo, la longitud de las niveladas hacia el límite que las condiciones atmosféricas u ópticas del anteojo lo consientan, y nadie mejor, como ya hemos indicado en otra parte de este informe, que el observador para graduar prudentemente esa longitud, y sobre todo en los días nublados en que puede hacerse sin peligro ninguno de la refracción. Por las consideraciones expuestas en el estudio de los errores esto no produciría, probablemente, influencia en el error sistemático sino más bien en el accidental, y la posible rectificación, por consiguiente, de alguno de los trozos de tres kilómetros comprendidos entre los grupos de tres señales principales; pero ya hemos dicho también que

un tanto por ciento moderado de estas rectificaciones armoniza mejor la precisión y el rendimiento de los trabajos que la ausencia completa de ellas, que no pone de manifiesto sino precauciones exageradas del observador, perjudiciales para el desarrollo de los trabajos. La visual debe y puede prolongarse hasta 50 ó 60 metros con objeto de conseguir, sin alterar por ahora las demás condiciones de los trabajos, un rendimiento mensual de 30 kilómetros nivelados en vez de los 20 hasta ahora obtenidos en esta primera campaña.

Claro es que independientemente de este incremento en el desarrollo de los trabajos, que sin perjudicar la precisión de los resultados puede conseguirse modificando el procedimiento operatorio, hay que reconocer que, por la mucha amplitud que tiene el proyecto, realmente es poco una sola Brigada de cuatro observadores para terminarlo en un plazo prudencial de tiempo, y sería muy conveniente que otra Brigada con los mismos elementos, y en condiciones de absoluta independencia, participara también en los trabajos, nivelando, por ejemplo, los polígonos del litoral del Cantábrico, apoyándose en la cota ortométrica conocida y directamente determinada por las observaciones mareográficas efectuadas en Vigo y en Santander, y de esta manera el plazo de cuarenta o cincuenta años, a que inevitablemente se está sujeto para poder nivelar los 10.000 kilómetros que abarca la totalidad del proyecto, si se sigue operando en la forma que se ha hecho, y contando con los mismos elementos, podría reducirse a un plazo prudencial comprendido entre 15 ó 20 campañas.

De todos modos la adquisición de nuevo material es indispensable; hoy día no se dispone más que de cuatro niveles y ocho miras metálicas, es decir, de cuatro equipos completos, y como tienen que operar por parejas, en el caso, que no tendría nada de particular, de que se inutilizara cualquiera de esos elementos, no hay manera de sustituirlo, ni tampoco de poder efectuar por el Servicio trabajos de rectificación cuando se estimara conveniente. La adquisición de nuevos niveles y miras metálicas debe hacerse en seguida, independientemente de la organización de la otra nueva Brigada, pues por la construcción tan perfecta de esos instrumentos y su magnífico rendimiento, esa adquisición no ofrece sino ventajas indiscutibles a las Corporaciones que tienen la suerte de poseerlos (1).

Ha sido sensible que no se haya podido, por las razones que da el Jefe de Brigada en su informe, conseguir que el observador lleve un auxiliar que al mismo tiempo que registra las observaciones verifique rápidamente el control de la estación. Es casi una necesidad en estos trabajos de alta precisión, y en todos los países donde se practican se considera indispensable, pues al mismo tiempo que se favorece el rendimiento de los trabajos observando rápidamente las estaciones, se consigue que el operador trabaje despreocupadamente, en condiciones inmejorables para resistir el cansancio físico y moral, que en otra forma es inevitable a poco tiempo de empezar los trabajos, en perjuicio de la bondad de las observaciones. De tal importancia sería el beneficio obtenido en los trabajos que creo compensaría el sueldo y gratificación del auxiliar que, debidamente entrenado en el Servicio, se destinara con ese objeto como ayudante del observador.

(1) En el momento de mandar estas cuartillas para la imprenta se han recibido en el Servicio otros cuatro niveles, con sus miras metálicas correspondientes.

Estas modificaciones en la manera de operar, y otras que también pueden introducirse en beneficio de obtener una mayor economía y rendimiento que el conseguido en la nivelación entre Alicante y Sagunto, pueden ensayarse con carácter experimental en alguno de los trozos de tres kilómetros comprendidos entre dos grupos sucesivos de señales principales que con ese objeto se elijan en el itinerario de los trabajos.

Cuando el personal de la Brigada esté más penetrado de la manera de influir las causas que motivan los errores accidental y sistemático, él mismo, por su propia iniciativa, introducirá durante las operaciones modificaciones provechosas en beneficio de los resultados, alargando, cuando el terreno es llano y el tiempo se muestra propicio, la longitud de la visual hasta límites que hoy día le pueden parecer exagerados, así como cuidará de consignar en los cuadernos de observación el estado del tiempo, naturaleza del terreno, dirección y fuerza del viento, orientación del itinerario respecto al Sol y hora del día a que se hacen las observaciones, que son los elementos de que se puede disponer para la investigación del error sistemático.

El personal de la Brigada ha trabajado con entusiasmo, lo mismo en la colocación de las señales principales en el terreno, cuyas reseñas han sido obtenidas con todo detalle y esmero, que por la escrupulosa atención con que han efectuado las observaciones, lo que ha permitido obtener unos errores para los trabajos muy por bajo de los límites impuestos, consiguiéndose una labor útil y completa en esta primera campaña, que más bien tenía que considerarse como un ensayo de los nuevos trabajos de nivelaciones de alta precisión, mereciendo por este concepto los plácemes del Servicio y de la Dirección general.

NOTA

También se incluyen en este trabajo, aun cuando son independientes de la nivelación ejecutada entre Alicante y Sagunto, los croquis correspondientes al *Proyecto de Nivelaciones de alta precisión para la Península*, el del Polígono de ensayo y el de la Sección Alicante-Albacete, nivelada en la campaña de 1926.

BIBLIOGRAFÍA

Las excelentes publicaciones del U. S. Coast and Geodetic Survey, editadas en Washington, de las que es ilustre autor el Dr. William Bowie, Chief division of Geodesy, han sido de gran utilidad para este informe, especialmente en la parte que se refiere al estudio de los errores e investigación del error sistemático, expuesta con tanta claridad en la «Special publication nº 18», de donde se han tomado numerosos datos.

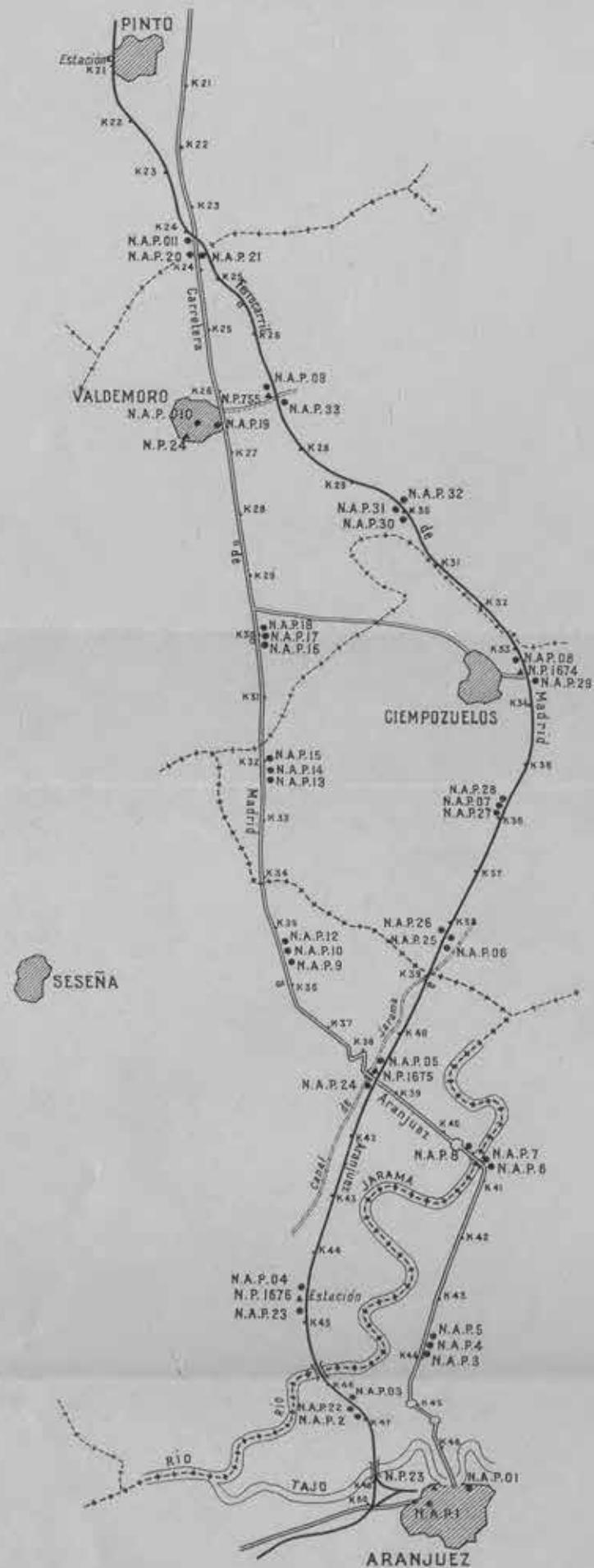
El Jefe del Servicio,

MANUEL DE CIFUENTES.

NIVELACIONES DE ALTA PRECISIÓN

POLÍGONO DE ENSAYO

Escala de 1:100000



NIVELACIÓN DE ALTA PRECISIÓN

POLÍGONO A-SECCIÓN A-M.- ALICANTE-GANDIA-CULLERA-VALENCIA-SAGUNTO

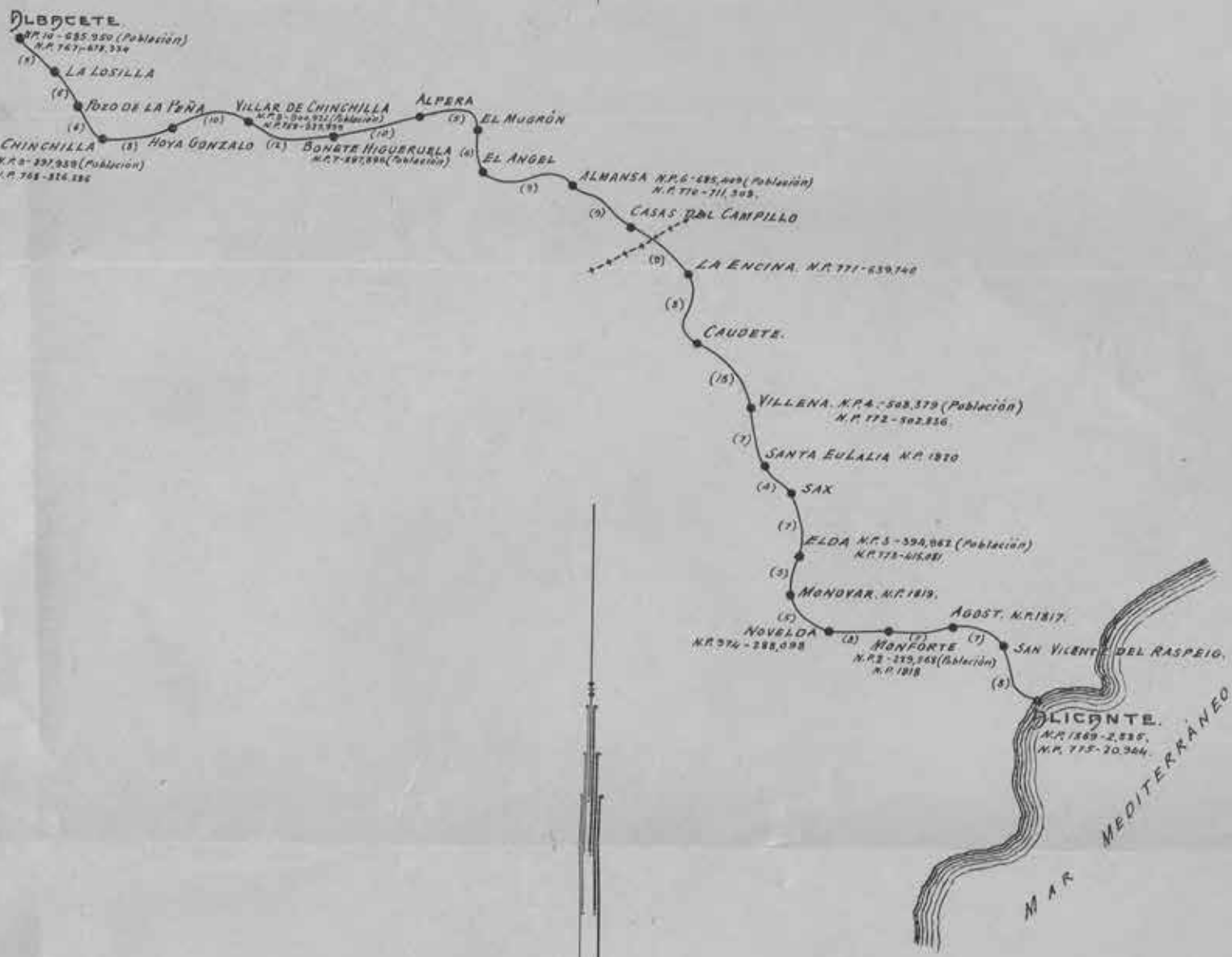
Escala aproximada 1: 700 000



NIVELACIÓN DE ALTA PRECISIÓN

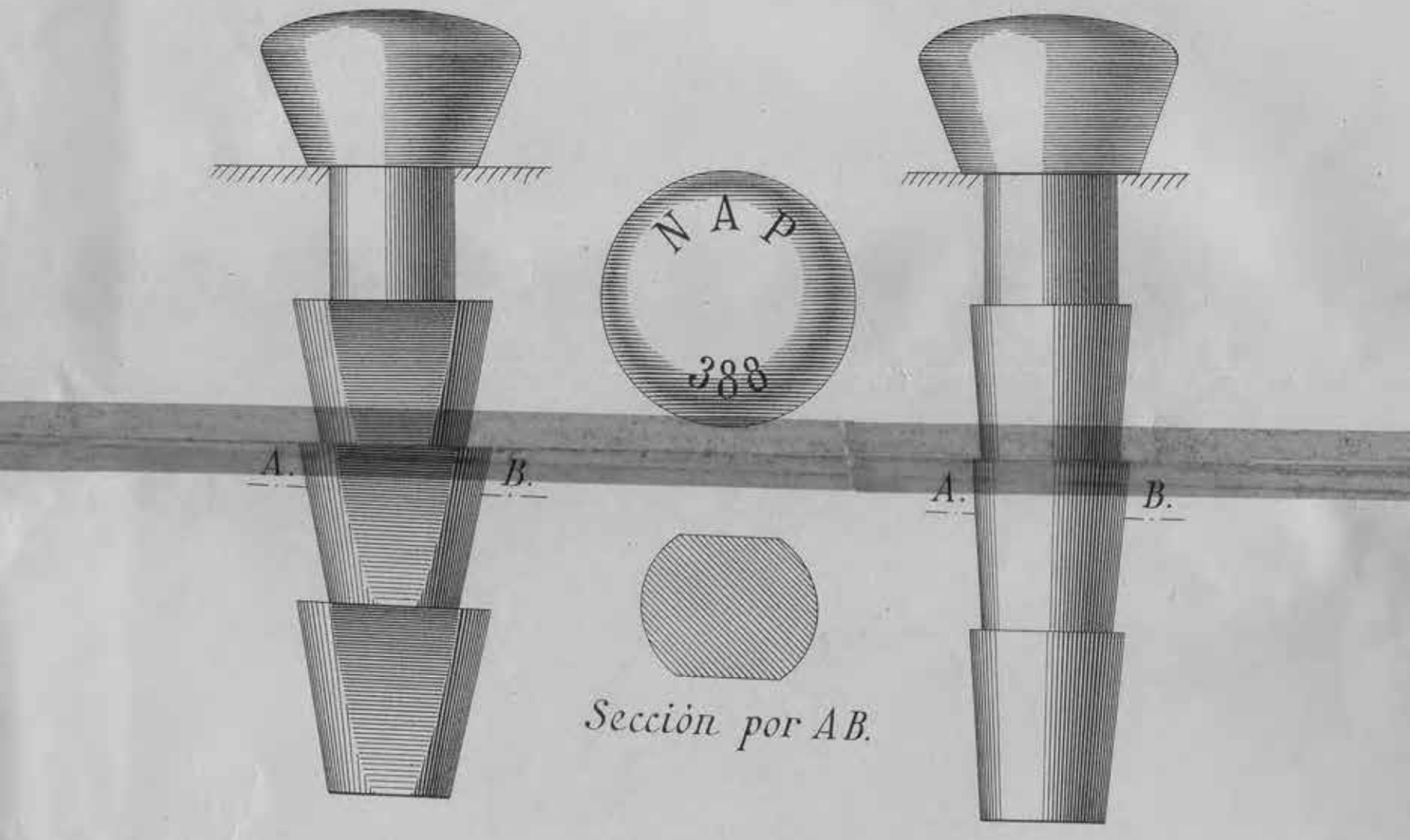
POLÍGONO A:-SECCIÓN A:V.- ALICANTE-ALBACETE.

ESCALA DE 1: 700,000



NIVELACIÓN DE ALTA PRECISIÓN

Modelo de Señal metálica con cabeza de bronce y vástago de fundición para ser incrustado indistintamente en superficies horizontales y verticales.



Sección por AB.

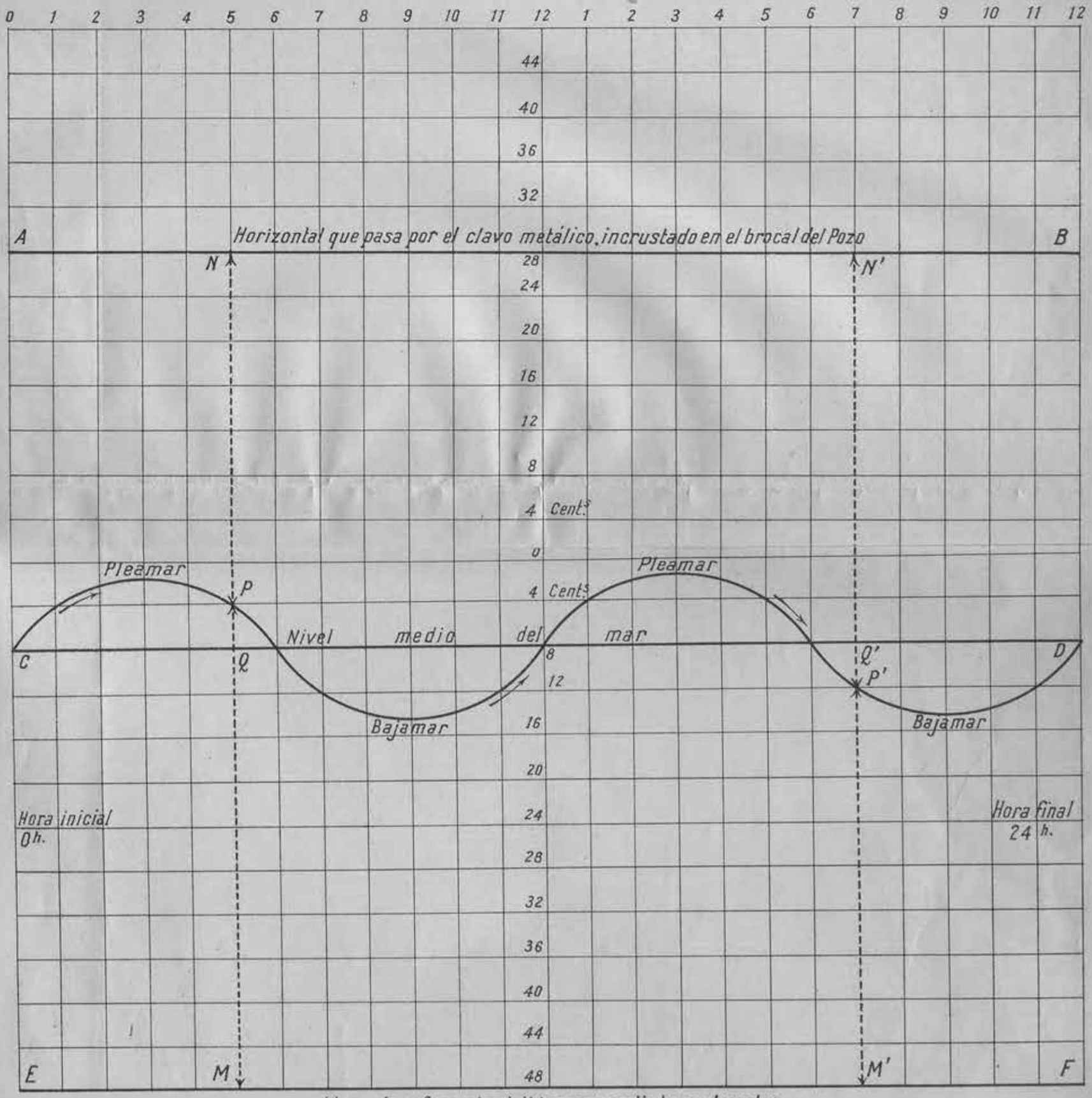
ESCALA NATURAL.

PROYECTO DE NIVELACIONES DE ALTA PRECISIÓN


FRANCIA
SANTANDER
S.SEBASTIAN
BILBAO
VITORIA
PAMPLONA
OVIEDO
LUGO
LA CORUÑA
LEÓN
PONTEVEDRA
ORENSE
BURGOS
PALENCIA
LOGROÑO
HUESCA
ZARAGOZA
LÉRIDA
GERONA
BARCELONA
TARRAGONA
ZAMORA
VALLADOLID
SALAMANCA
SEGOVIA
SUADALAJARA
MADRID
TERUEL
CUENCA
CASTELLÓN
VALENCIA
TOLEDO
CÁCERES
CIUDAD-REAL
ALBACETE
BADAJOZ
CÓRDOBA
JAÉN
SEVILLA
HUELVA
CÁDIZ
ALMERIA
MÁLAGA
ALICANTE
GALLAECIA
PORTUS
CARTHAGINENSIS
Santander
Oviedo
Vitoria
Pamplona
Zaragoza
Barcelona
Madrid
Valencia
Alicante
Badajoz
Sevilla
Cádiz
Málaga
Almeria
Murcia
Granada
Córdoba
Toledo
Ciudad-Real
Albacete
Cuenca
Teruel
Lérida
Tarragona
Gerona
Huesca
Logroño
Burgos
Palencia
Valladolid
Zamora
Salamanca
Segovia
Guadalajara
Lugo
Orense
Pontevedra
La Coruña
Santiago
Vigo
Tuy
Bilbao
Irún
Tolosa
Mirande de Ebro
Reinosa
Gijón
Avilés
Ribadesella
Llanes
Infiesto
Pravia
Luarca
Ribadeo
Viveiro
Ferrol
Betanzos
Puentedeume
Neda
Villagarcia
Monforte
Ponferrada
Astorga
Benavente
Medina del Campo
Olmedo
Aranda de Duero
Sepúlveda
Segovia
Riaza
Almazán
Soria
Salas de los Infantes
Sto Domingo de la Calzada
Logroño
Tudela
Calatayud
Daroca
Teruel
Alcañiz
Caspe
Fraga
Balaguer
Tremp
Seo de Urgel
Puigcerdá
Ripoll
Vich
Figueras
Port-Bou
Le Perthus
Le Somport
Canfranc
Jaca
Sangüesa
Roncesvalles
Irurita
Tolosa
Eibar
Durango
Izarra
Reinosa
Arbas
Santiago
Villagarcia
Redondela
Tuy
Puente Internacional Rio Miño
Campomanes
Puente Internacional Rio Caya
Badajoz
Merida
Almendralejo
Zafra
Los Santos
Fregenal de la Sierra
Jerez de los Caballeros
Valencia de Alcantara
Alcantara
Rio Eljas
Piedras Albas
Brozas
Arroyo de la Luz
Plasencia
Arroyo de Malpartida
Torrijos
Aranjuez
Algodor
Toledo
Alcazar de S. Juan
Tembleque
Villalba
Guadarrama
Segovia
Riaza
Sepúlveda
Cuenca
Cañete
Almodovar del Pinar
Motilla del Palancar
La Roda
Albacete
Almansa
Chinchilla
Hellin
Cieza
Murcia
Lorca
Totana
Alhama
Cartagena
La Unión
Aguilas
Vera
Sorbas
Tabernas
Almeria
Roquetas
Tortosa
Amposta
Alcanar
Vinaroz
Benicarló
Peñiscola
Castellón
Sagunto
Valencia
Cullera
Gandia
Denia
Alicante
Elche
Orihuela
Torrevieja
Benavente
Puebla de Sanabria
Zamora
Toro
Tordesillas
Medina del Campo
Olmedo
Valladolid
Palencia
Aguilar de Campoo
Reinosa
Santander
Torrelavega
Santillana
Unquera
Ribadesella
Gijón
Avilés
Pravia
Luarca
Ribadeo
Viveiro
Ferrol
Betanzos
Puentedeume
Neda
El Ferrol
La Coruña
Carballo
Santiago
Villagarcia
Redondela
Vigo
Tuy
Puente Internacional Rio Miño
Campomanes
Monforte
Ponferrada
Astorga
León
Benavente
Zamora
Salamanca
Fuente de Oro
Puente del Arzobispo
Talavera de la Reina
Navalmoral de la Mata
Plasencia
Coria
Alcantara
Valencia de Alcantara
Badajoz
Merida
Almendralejo
Zafra
Los Santos
Fregenal de la Sierra
Jerez de los Caballeros
Aracena
Ayamonte
Huelva
Gibraleón
Sevilla
Ecija
Puente Genil
Lucena
Antequera
Loja
Granada
Baza
Jaén
Linares
Andujar
Puente Genil
Córdoba
Pozoblanco
Peñarroya
Belmez
Fuente Ovejuna
Los Pedroches
Puertollano
Ciudad-Real
Valdepeñas
Infantes
Alcaraz
Almansa
Chinchilla
Hellin
Cieza
Murcia
Lorca
Totana
Alhama
Cartagena
La Unión
Aguilas
Vera
Sorbas
Tabernas
Almeria
Motril
Torre del Mar
Nerja
Velez
Malaga
Marbella
Estepona
Algeciras
Tarifa
San Fernando
Cadiz
Puerto Real
Jerez de la Frontera
Arcos de la Frontera
Ronda
Olvera
Utrera
Osuna
Estepa
Puente Genil
Lucena
Antequera
Loja
Granada
Baza
Jaén
Linares
Andujar

MAREÓGRAFO DE ALICANTE.

Abcisas = representacion gráfica del tiempo = una hora = un centimetro. Ordenadas = representación gráfica de las alturas del agua = 3 cmts 97 = un centimetro constante del diagrama = M N = 190 milimetros



Linea de referencia elejida para medir las ordenadas