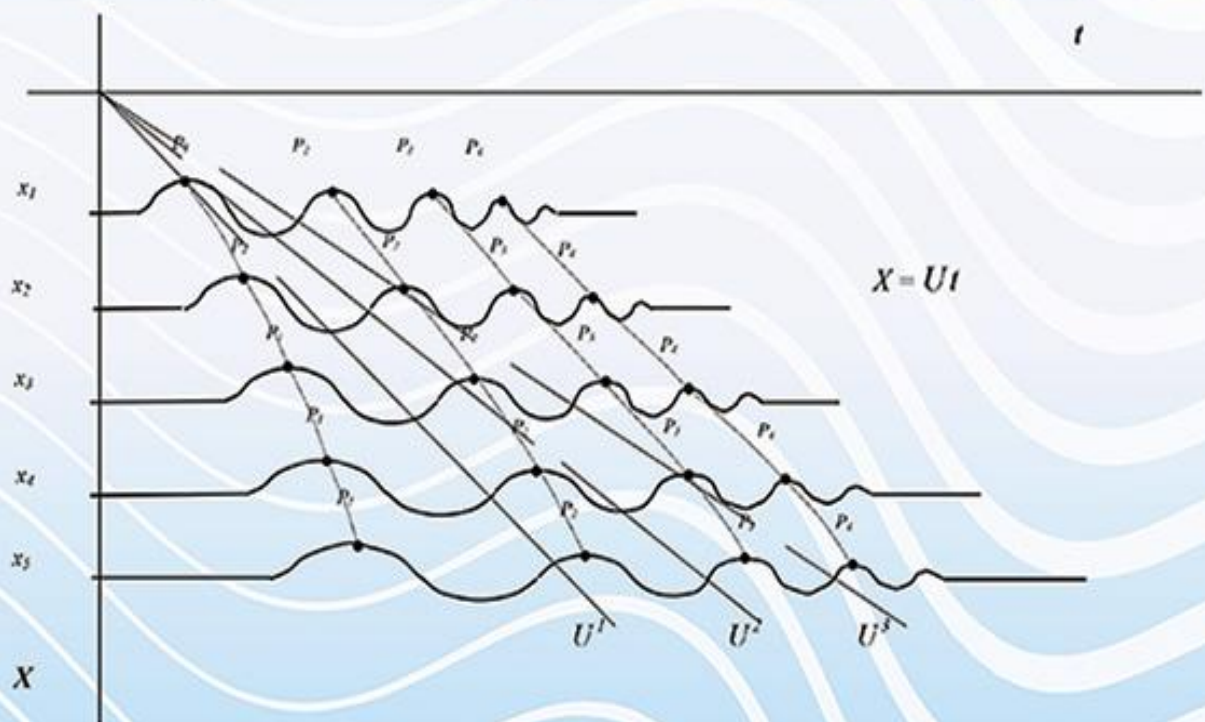


# Teoría sobre la propagación de ondas sísmicas.

## Ondas Lg



*Catálogo de Publicaciones de la Administración General del Estado*  
<http://publicacionesoficiales.boe.es>

Gf lek»p'F ki kcn"° q'4239

**Edita:**

Egptq'P cekqpcnf g'kphqto cek»p'I gqi tª hec"EP K +

Í "kpwkwwq'I gqi tª heq'P cekqpcn'4239

Í "f g"guw"gf lek»p<Egptq'P cekqpcnf g'kphqto cek»p'I gqi tª hec"4239

P RRQ<384/39/236/5

F QK32063; B840804239

g/o ckn'lddtcxqB hqo gpvq0gu

Cwqt<Lqu² 'Dgpkq'Dtcxq'O qpi g

*Jefe de Servicio de Datos Sísmicos.*

*Subdirección General de Astronomía, Geofísica y Aplicaciones Espaciales*

Ⓜ UVKWWQ'I GQI TCHÆQ'P CEKQPCN

*A mi hija Elena, mi alegría; a mi mujer que me soporta y a mi madre que me anima.*

# Capítulo 1.

## Introducción general.

### Estudio sobre la naturaleza de la onda *Lg*

Si se busca la definición de onda *Lg* en los textos clásicos de sismología, se puede encontrar la definición siguiente: **“Ondas canalizadas que se propagan a través de largos caminos continentales dentro de la capa granítica o intermedia de la corteza. Pueden coincidir con los modos superiores de propagación de las ondas superficiales.”**

Lo que es evidente para esta fase, y se puede asegurar, es que suele ser la fase de mayor amplitud en los sismogramas regionales para trayectorias continentales y que su velocidad, tiene un valor esencialmente igual a la velocidad de las ondas de cizalla (aprox. 3.6 km/s) en la parte superior de la corteza continental, con periodos que van desde 0,33s a 6 s (Ewing *et al.*, 1957).

La onda *Lg* se puede considerar como onda canalizada o guiada que se propaga a grandes distancias, supuestamente a través de la capa granítica. Esto implicaría que si no estuviese esta capa, como ocurre en los océanos, la onda *Lg*, no se podría transmitir, aunque este aspecto hoy día no está muy claro. También se puede deducir de la definición que dicha fase está relacionada con los modos superiores de vibración de la onda Rayleigh y de la onda Love, (Oliver & Ewing (1958), Knopoff *et al.* (1979) y Panza & Calcagnille (1975)).

Se pueden citar una gran cantidad de autores que, desde hace mucho tiempo vienen estudiando la onda *Lg*. Desde el aspecto más teórico, utilizando diferentes interpretaciones y diferentes métodos de cálculo, además de los anteriormente citados, se pueden poner como ejemplo, Wang & Herrmann (1980), Hasegawa (1983), Herrmann & Kijko (1983), Kenett (1984, 1985, 1989a y 1989b), Bostock & Kenett (1990), Kenett *et al.* (1990), Gibson *et al.* (1994),

Saika (1994), Zhang & Lay (1995), Keers *et al.* (1996), Furumura & Kennett (1997) y Wu & Wu (2001). Desde un punto de vista más experimental, observando la propagación de la onda Lg en diferentes regiones del mundo y en diferentes rangos de frecuencia y distancias, citemos dentro de una bibliografía muy extensa a los siguientes autores: Oliver & Ewing (1958), Street *et al.* (1975), Bollinger (1979), Chazalon *et al.* (1993), Kvamme *et al.* (1995), Akinci *et al.* (1995), Shapiro *et al.* (1996), Cong *et al.* (1996), Dominguez & Rebollar (1997), Mitchell *et al.* (1997), Rial & Ritzwoller (1997), Furumura & Kennett (1998), Fan & Lay (1998a y 1998b), Wu *et al.* (2000).

La definición que se ha dado al comienzo de este trabajo, no parece una definición completa para una fase tan relevante y también tan compleja. Intenta describir la onda sobre la base de lo que uno observa rutinariamente en los sismogramas. Aunque la definición data de cierto tiempo, parece no haberse modificado mucho, y aún hoy quedan aspectos por resolver, en cuanto a su naturaleza y modo de propagación por la corteza. Esta fase es una de las más importantes de los sismogramas de tipo regional (Ver Figura 1.1), y normalmente se utiliza en el cálculo de la magnitud de los terremotos regionales (Rueda, 1995). Su amplitud comparada es una herramienta muy importante para distinguir explosiones no muy grandes, de eventos sísmicos naturales, dentro del contexto del Tratado de No Proliferación de Armas Nucleares (CTBT). Sólo a modo de ejemplo citaremos a Fan & Lay (1998a) y, a Taylor (1996). Sin embargo, para otro tipo de Ondas y Fases en el campo regional (distancias epicentrales entre 0 y 1500 Km), como pueden ser las Fases Pg, Pn, Sn, Sg, PmP, etc., uno fácilmente puede hacerse una idea intuitiva de que tipo de onda es, cual es su trayectoria y demás características, desde el punto de vista de la elemental Teoría de Rayos. Por estas y otras razones que ya se irán tratando, se justifican sobradamente cuantos trabajos ayuden a la comprensión de la onda Lg.

Este trabajo tiene como objetivo, aportar ciertas ideas nuevas sobre la Onda Lg y desarrollar otras, ya dadas por otros autores, desde un punto de vista que sea comprensible, pero apoyado siempre en una base matemática que justifique los diferentes conceptos que se irán exponiendo y que concuerden con las observaciones.

Se verá como la onda Lg, a pesar de que el mecanismo de generación de dicha fase no es fácil de comprender, es muy útil para el cálculo de las magnitudes en el ámbito regional. También veremos como ocurre la transición de la fase Sg (Onda supuestamente directa) a la fase Lg (Onda canalizada), que hoy día se discrimina de una forma empírica en función de la distancia al Epicentro.

Se comenzará este trabajo con una interpretación de la onda Lg a partir de la Teoría de Modos de Propagación de Ondas Canalizadas, y su relación con la Teoría de Rayos en los **Capítulos 2 y 3**. En la segunda parte del **Capítulo 2**, veremos desde un enfoque diferente el Fenómeno General de la Dispersión, y con ello, los conceptos de Velocidad de Fase y Velocidad de Grupo, aplicados a

cualquier tipo de Ondas, haciendo hincapié en la idea de que el medio es el dispersor y la onda en cuestión es dispersa. En el **Capítulo 3**, sobre la base de lo visto en los anteriores capítulos, se profundizará en ciertos aspectos de la dispersión, con modelos más complicados, el comportamiento de las ondas inhomogéneas, y se verá porqué las Ondas P no se canalizan tan eficientemente como las Ondas S en los medios sólidos.

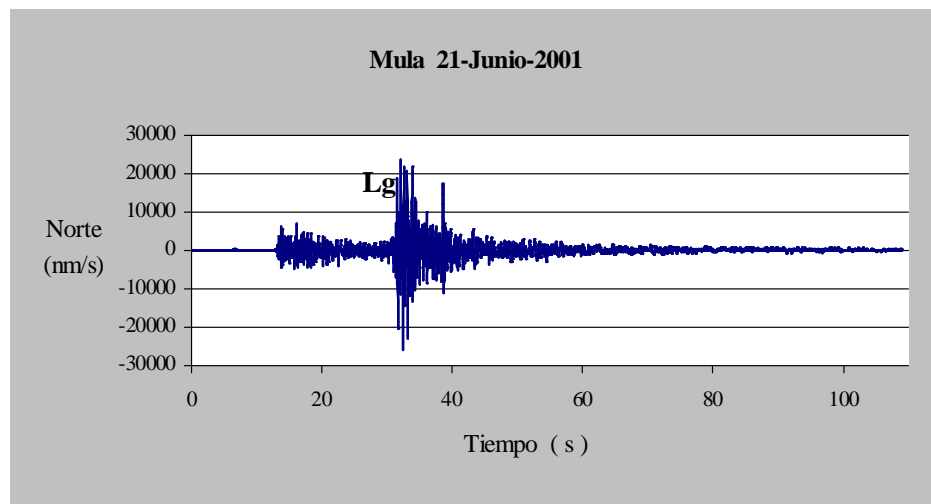


Figura 1.1. A modo de ejemplo, se presenta el registro de la componente horizontal en la estación de Banda Ancha EQES (Quesada, Jaén), para un terremoto regional, localizado cerca del pueblo de Mula (Murcia), el 21 de Junio de 2001 de Mag. 3.6, a 145 km de distancia epicentral. La fase Lg es la más sobresaliente en el sismograma.

En el estudio, los modelos de corteza utilizados están compuestos de capas planas y paralelas de velocidad constante, separadas por superficies de discontinuidad en cuanto a sus propiedades elásticas. En el **Capítulo 4**, se estudiará, desde el punto de vista teórico, el comportamiento de los frentes de ondas en los medios elásticos, y se justifica la aplicación, generalmente, de la Teoría de Rayos.

En el **Capítulo 5** se hará una breve exposición de las escalas de magnitudes regionales o locales, para seguir con la justificación de la utilización de la Onda Lg, como fase para medir la amplitud en casi todas estas escalas, y también se verá cuándo esta fase deja de ser la más indicada para el cálculo de dichas magnitudes.

En el **Capítulo 6**, se abordará el problema del frente de ondas esférico en medios estratificados y la consideración de ondas no armónicas (tratando ambos problemas por separado). Hasta entonces se habían supuesto frentes de onda

planos y con una dependencia armónica del tiempo. En este capítulo, se verá, que la complejidad matemática aumenta, sin embargo, se pueden obtener ciertas propiedades muy interesantes de las ondas canalizadas (valor de amplitud, atenuación con la distancia, etc.), lo que no es posible con los frentes de onda planos.

En una serie de **Apéndices** se muestran aspectos físicos y matemáticos que ayudarán a una mejor comprensión de todo lo expuesto, sin tener que recurrir a la bibliografía más fundamental.



## Capítulo 2.

# Teoría de Modos de Propagación de Ondas Canalizadas.

## 2.1 Introducción.

En este capítulo, se expondrá parte de la teoría clásica de los Modos de Propagación para una mejor comprensión de la onda  $Lg$ , considerada esta como una onda canalizada.

También se expondrán los conceptos físicos y los argumentos matemáticos necesarios para, más adelante, deducir algunas características de ciertas fases regionales y, especialmente, de la onda  $Lg$ . Gran parte de la teoría que se expondrá aquí pertenece a la teoría de ondas superficiales, cuyo estudio en la bibliografía está profusamente tratado, si bien, se hará hincapié en los aspectos más interesantes de la onda  $Lg$ .

Recordemos que en Física, se entiende por *Guía de Ondas* o *Canalizador de Ondas*, cualquier estructura capaz de dirigir la energía en una determinada dirección o direcciones, de tal forma que la energía queda atrapada dentro de dicha estructura o en las proximidades de sus límites. Es evidente que un determinado sistema se comportará como una guía de ondas dependiendo de las frecuencias de las ondas en estudio.

## 2.2 Teoría de Modos de Vibración.

### 2.2.1 Ecuación de Dispersión y Teoría de Rayos.

Es conocido que la denominada Ecuación de Dispersión es la ecuación que nos relaciona la velocidad de fase (junto con la de velocidad de grupo, más adelante se expondrá más detalladamente estos conceptos), o el número de onda de una onda canalizada, con las frecuencias de dicha onda. En cualquier texto de

sismología se puede encontrar la deducción de la Ecuación de Dispersión a partir de la Ecuación de Ondas y las condiciones de contorno asociadas, para un medio semi-infinito, con una capa superpuesta. La solución más sencilla se obtiene para la componente SH de una onda plana que se transmite en una determinada dirección. Recuerde el lector que la componente SH, es la componente del movimiento, que es paralela a la superficie de contacto de los dos medios, y a la superficie libre, si consideramos capas paralelas. Podemos obtener en el libro de Lay T. & Wallace T. (1995), en el Capítulo 4.3, la deducción de dicha ecuación, que viene dada por:

$$\tan(H\check{S}\sqrt{1/S_1^2 - 1/c^2}) = \frac{\check{\sim}_2\sqrt{1/c^2 - 1/S_2^2}}{\check{\sim}_1\sqrt{1/S_1^2 - 1/c^2}} \quad (\text{ec. 2.1})$$

Donde:

$S_1$  y  $S_2$ : son las velocidades para las ondas de Cizalla (onda S), en la capa y en el medio semi-infinito respectivamente.

$H$ : es el espesor de la capa.

$\check{S}$ : es la frecuencia angular de dicha onda.

$\check{\sim}_1$  y  $\check{\sim}_2$ : son los módulos de cizalla o rigidez de la capa y del medio semi-infinito, respectivamente (que junto con  $\check{S}$ , es una de las constantes de Lamé del medio).

$c$ : es la Velocidad de Fase, en nuestro caso de la onda SH.

Conviene saber que “ $c$ ”, representa la velocidad aparente que el frente de ondas tiene en la superficie de separación entre dos medios distintos (Figura 2.1)

$$c = \frac{S_1}{\text{sen } i_1} = \frac{S_2}{\text{sen } i_2} \quad (\text{ec. 2.2})$$

Esta última igualdad, viene dada por la Ley de Snell.

Y se verifica que:

$$S_1 < C < S_2$$

También en Lay & Wallace (1995), se puede encontrar la deducción de la Ecuación de Dispersión, a partir de la interferencia constructiva de Rayos SH,

reflejados entre la superficie libre y la base de la capa, con rayos con ángulos incidentes mayores que el ángulo crítico  $i_c$  (en la ecuación 2.2, se puede ver que si  $i_1 = i_c$ , entonces  $i_2 = 90^\circ$ ).

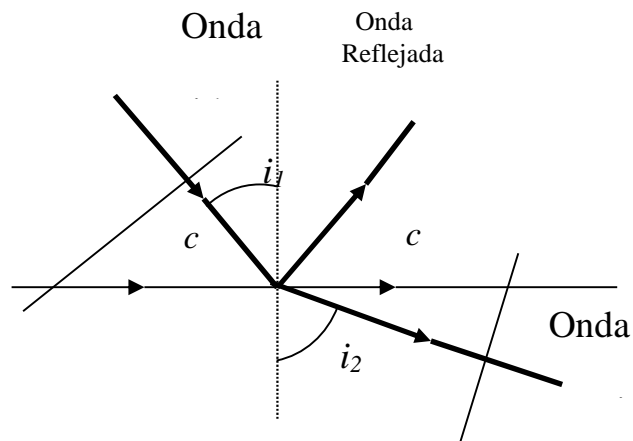


Figura 2.1 Rayos Transmitidos y Reflejados para dos medios en contacto.

Para nuestros propósitos, se va a desarrollar la demostración de lo que se acaba de decir, (ver Figura 2.2). Consideremos un punto  $A$  del frente de ondas ( $PQ$ ) en un tiempo “ $t$ ”, que incide en la superficie de separación entre la capa y el medio con un ángulo “ $i_1$ ” (mayor que el ángulo crítico  $i_c$ ) y el punto  $B$  del frente de ondas  $P'Q'$ , inmediatamente después de incidir en la superficie libre. Para que los frentes de ondas  $PQ$  y  $P'Q'$  interfieran constructivamente, la diferencia de fase debe ser un número entero de ciclos, es decir, una diferencia de  $2nf$  (con  $n = 1, 2, 3, \dots$ )

Se recuerda que se consideran frente de ondas planos, con la misma dirección.

La diferencia de fase viene dada para los dos puntos:

$$w_A - w_B = \overline{AOB}(\lambda) + w_1 + w_2 \quad (\text{ec. 2.3})$$

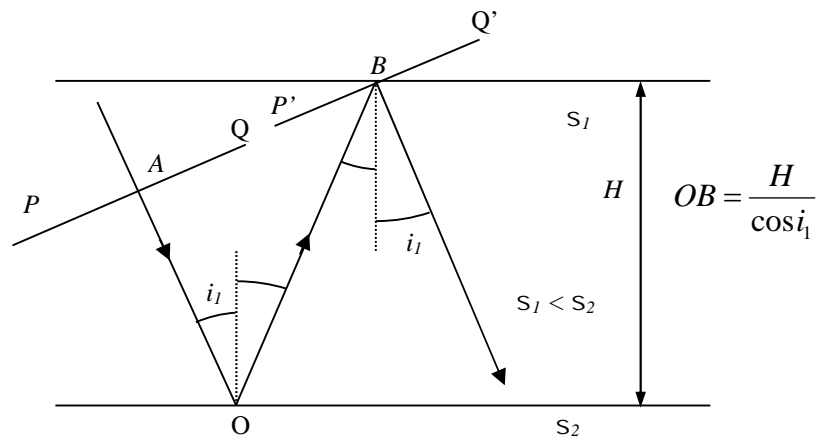


Figura 2.2 Interferencia constructiva de los frentes de  $PQ$  y  $P'Q'$ .

donde:

$\overline{AOB}(\cdot)$ : Que es el primer término del segundo miembro, corresponde a la diferencia de fase, debido a la diferencia de distancia recorrida por los dos frentes de onda que estamos considerando, es función de la longitud de onda ( $\cdot$ ).  
 Sabiendo que (según se puede deducir de la Figura 2.2):

$$\overline{AOB} = 2H \cos i_1$$

$w_1$ : Es el ángulo que representa el cambio de fase que el frente de ondas  $P'Q'$ , experimenta tras su reflexión en la interfase capa - medio semi-infinito.

Para  $i_1 > i_c$ ;  $i_c$  es el Ángulo Crítico que viene dado por:

$$w_1 = 2 \arctan \left( \frac{\sim_2 \sqrt{1/c^2 - 1/S_2^2}}{\sim_1 \sqrt{1/S_1^2 - 1/c^2}} \right) \quad (\text{ec. 2.4})$$

$w_2$ : Es el cambio de fase tras la reflexión en la superficie libre. Aquí  $w_2=0$ .

Se define el Número de Ondas Horizontal como:

$$k = \frac{\tilde{S}}{c} = \frac{2f}{\} _0} \text{sen } i_1 = k_0 \text{sen } i_1 = 2f / \} \quad (\text{ec. 2.5})$$

Luego sustituyendo en Fórmula 2.3, se obtiene:

$$2nf = \frac{4fH \cos i_1}{\} \text{sen } i_1} - 2 \arctan \left( \frac{\sim_2 \sqrt{1/c^2 - 1/S_2^2}}{\sim_1 \sqrt{1/S_1^2 - 1/c^2}} \right) \quad (\text{ec. 2.6})$$

De la Ecuación 2.2, se puede escribir:

$$\cos i_1 = \sqrt{1 - \frac{S_1^2}{c^2}}$$

Que nos permite reescribir la ecuación 2.6 de una forma más completa:

$$\tan(H\tilde{S} \sqrt{1/S_1^2 - 1/c^2} - nf) = \frac{\sim_2 \sqrt{1/c^2 - 1/S_2^2}}{\sim_1 \sqrt{1/S_1^2 - 1/c^2}} \quad (\text{ec. 2.7})$$

Que es la ecuación de Dispersión de las Ondas Love, y permite obtener la velocidad de fase de la onda “c”, en función de la frecuencia “Š”. Como se ha mencionado antes, esta ecuación se puede obtener de la resolución de la Ecuación de Ondas aplicando las condiciones de contorno, pero que aquí se ha obtenido a partir de la teoría de rayos.

Esta demostración que se acaba de exponer aquí, se puede encontrar en los libros de sismología, como en el ya mencionado Lay & Wallace (1995). En ese texto podemos encontrar una discusión detallada de la solución de esta ecuación. Podemos ver que para cada “n = 0, 1, 2, ...”, se obtiene los diferentes Modos de Vibración. Así para n = 0, se obtiene el Modo Fundamental y para n = 1, los Modos Superiores. Decir aquí tan sólo que para el Modo n = n<sub>0</sub>, sólo podrán existir ondas con frecuencias Š > Š<sub>c<sub>0</sub></sub>, donde:

$$\tilde{S}_{c_0} = \frac{n_0 f}{H \sqrt{1/S_1^2 - 1/S_2^2}} \quad (\text{ec. 2.8})$$

La velocidad de fase se encuentra acotada entre los siguientes valores  $S_2 \leq c \leq S_1$ . Para  $\tilde{S} = \tilde{S}_c$  se verifica que  $c = S_2$  y, a medida que aumenta la frecuencia, disminuye la velocidad de fase, y para “ $\tilde{S}$ ” tendiendo a infinito, “ $c$ ” tiende a  $S_1$ . Para una frecuencia dada, el valor más bajo de la velocidad de fase, corresponde al modo fundamental, siendo mayor para los modos superiores.

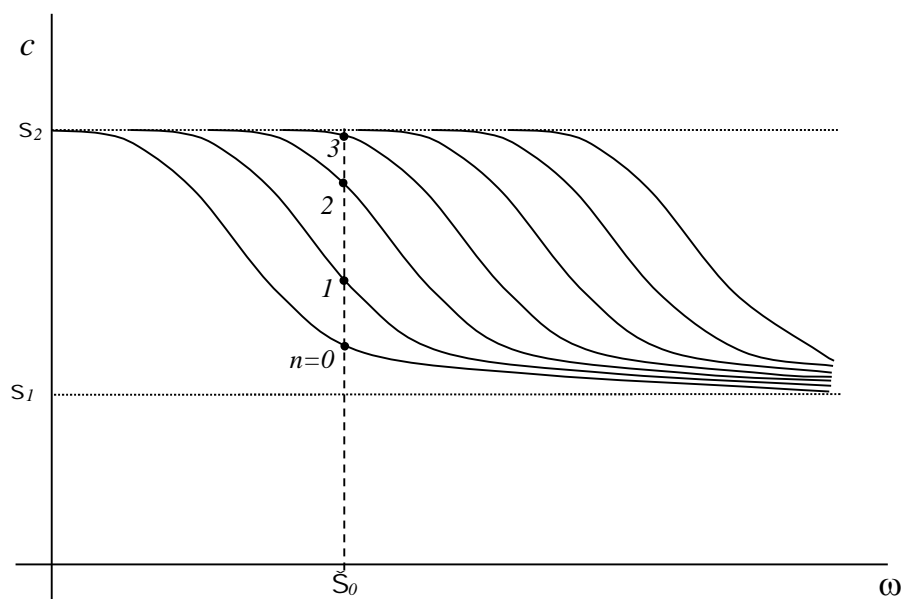


Figura 2.3. Representación cualitativa de las curvas de dispersión de una capa sobre un medio semi-infinito, para Ondas SH. Modo Fundamental y Superiores.

En Udías & Mézcua (1997) podemos encontrar una deducción de cómo son los desplazamientos. Enfocando el problema desde otro punto de vista, considérese la ecuación 2.5, y sustituyamos la velocidad aparente “ $c$ ”, en función del ángulo de incidencia  $i_l$ , en la ecuación 2.7. Se obtiene:

$$\tan\left(\frac{\check{S}}{S_1} H \cos i_1 - nf\right) = r_{-s} \frac{\sqrt{r_s^2 \text{sen}^2 i_1 - 1}}{\cos i_1} \quad (\text{ec. 2.9})$$

donde:

$$r_{-s} = \frac{\sim_2 S_1}{\sim_1 S_2} \quad \text{y} \quad r_s = \frac{S_2}{S_1}$$

Esta última ecuación nos relaciona el ángulo de incidencia  $i_1$ , con la frecuencia, para cada valor de  $n$  (valor del Modo de Vibración). Para el modelo de corteza elegido al comienzo de este apartado.

Si fijásemos una frecuencia determinada  $\check{S} = \check{S}_0$ , sólo podrán existir ciertos Modos de Vibración sea:  $n_1, n_2, \dots$  (Ver Figura 2.3).

De una forma simplificada podemos expresar la ecuación 2.9, como:

$$i_1 = i_1(\check{S}_0, n) \quad \text{para } n = n_1, n_2, \dots$$

Para cada modo válido, se obtiene un ángulo de incidencia diferente, es decir, un frente de ondas con una dirección diferente, que incide tanto en la base de la capa como en la superficie libre con un ángulo distinto. Se puede concluir: **Que desde la perspectiva de la Óptica Geométrica, para una frecuencia determinada, cada Modo en la Ecuación de Vibración, representa un Rayo diferente atrapado en la capa.**

Se ha relacionado aquí estrechamente la Teoría de Modos con la Teoría de Rayos de la Óptica Geométrica. Más adelante, en el Apartado 5.3, cuando hablemos de la distribución espacial de la energía, se verán las implicaciones de lo que se acaba de exponer.

## 2.3 Onda *Lg*

Con lo visto en el apartado anterior se pueden ya extraer ciertas conclusiones sobre la onda *Lg* y algunas fases regionales típicas, que se observa en este tipo de sismogramas.

A través de diversos trabajos, a lo largo del tiempo, encontramos diferentes interpretaciones sobre la naturaleza de la onda *Lg*, y la zona de la corteza por donde se propaga. En un principio, se pensó sobre la existencia de un canal de baja velocidad en el interior de la corteza que permitiría una propagación muy efectiva de la onda S (Ewing *et al.*, 1957, Panza & Calgánille, 1975, entre otros,...). Hoy día parece aceptada la teoría que postula que la onda *Lg*, está formada por la suma de los modos más altos de vibración de las ondas Rayleigh y Love, considerando toda la corteza (Knopoff *et al.*, 1973, Cara & Minster, 1981a, 1981b, etc).

Siguiendo la definición que ya dimos, se considera pues, la onda *Lg*, formada por todos los Modos (o bien, Rayos) de las ondas Rayleigh y Love, que se encuentran en un rango de frecuencias (periodos) que van desde los 2 ó 3 Hz a los 0.3 Hz (3s), aproximadamente. Esto dependerá del tamaño de la fuente sísmica, pues cuanto mayor es el terremoto, más importancia tiene las bajas frecuencias frente a las altas frecuencias y viceversa. Más adelante insistiremos en este tema.

La idea que se quiere transmitir, con lo dicho hasta ahora, es que la onda *Lg*, más que ser considerada como un rayo único, la consideraremos como un tren de ondas. Éste, estaría formado por un conjunto de rayos de onda S, con diferentes ángulos de incidencia. Comprendería, por tanto el tren de ondas, el rayo directo, los rayos con múltiples reflexiones, y el rayo que sale hacia el interior de la Tierra y sólo se refleja una vez en la base de la Corteza (Fase *SmS*). Éste último es el que aportará más energía y hace atribuir a la onda *Lg*, velocidades características de la onda S en la corteza. El tiempo de recorrido de esta fase *SmS*, para grandes distancias, es prácticamente igual al de la onda directa, (ver Figura 2.4). Así Olen *et al.* (1983), consideran la *SmS*, y las sucesivas reflexiones en el Moho, *SmSSmS*,... parte del tren de ondas para modelizar la onda *Lg*.



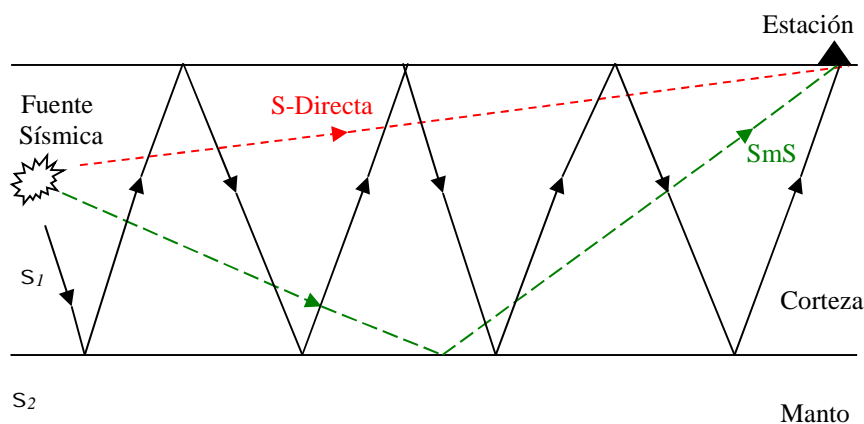


Figura 2.4 La onda  $Lg$  como superposición de muchos rayos.

## 2.4. Fases $S_n$ y $R_g$ .

Desde esta interpretación mixta, utilizando la teoría Modal y la Teoría de Rayos, se pueden analizar las fases  $S_n$  y  $R_g$ , con el objetivo de explicar la existencia de estas fases como dependientes unas de otras. Las Fases Regionales  $S_n$  y  $R_g$ , y la misma Fase  $Lg$ , están íntimamente relacionadas, compartiendo la misma naturaleza. Se distinguen unas de otras, en función del rango de frecuencias y de las velocidades que estemos considerando. Una interpretación en la misma línea se puede encontrarla en el libro de Kennett (1983), en Stephens & Isacks (1972) y también en Park & Levin (2001).

### 2.4.1. Fase $S_n$ .

Desde un punto de vista geométrico, la Fase  $S_n$  (y la  $P_n$ ) se considera como el rayo de onda  $S$  (ó  $P$ ), que incide en la base de la Corteza con un ángulo igual al ángulo crítico, y que viaja por la interfase entre la Corteza y el Manto Superior, conocida como Discontinuidad de Mohorovicic o Moho<sup>1</sup> (Ver Figura 2.5). Hemos de suponer que siempre la fuente se encuentra en el medio de menor velocidad ( $S_1$ ), en el modelo que se ha venido considerando.

<sup>1</sup> Debido a su descubridor, el croata S. A. Mohorovicic, en 1909.

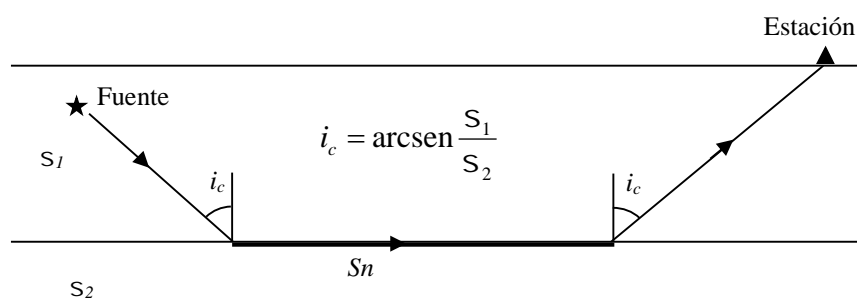


Figura 2.5 Fase  $S_n$ , corresponde a la trayectoria de la Refractada Crítica.

Donde el ángulo crítico viene dado por la Ley de Snell:

$$\text{sen } i_c = \frac{S_1}{S_2}.$$

Una explicación detallada a nivel teórico de las características de la fase  $S_n$  (y  $P_n$  por similitud), se pueden encontrar en Aki & Richards (1980), pág. 208 y ss. En la literatura inglesa se conoce a esta fase como “Headwave” o “conical wave”, es decir, ondas cónicas. Es evidente, que si se imagina uno un modelo en tres dimensiones (ver Figura 2.5), las trayectorias de esta fase forman un cono cuando se alejan de la fuente. Un estudio más práctico se puede encontraren Rodgers *et al.* (1997).

Si se observan atentamente las gráficas de Velocidad de Fase y Velocidad de Grupo en función de la frecuencia, para la componente  $SH$  (ondas Love), considerando un modelo de dos capas planas y paralelas de velocidad constante sobre un medio semi-infinito, también de velocidad constante, como el propuesto en la Tabla 2.1, la fase  $S_n$ , corresponde a la suma de todos los modos, cuya Velocidad de Grupo, es igual a la velocidad del medio semi-infinito. En este caso la Velocidad de Grupo es igual a la Velocidad de Fase (Ver Figura 2.6).

**Tabla 2.1**  
Modelo de corteza de 2 capas y Moho a 40 km.

$H$ (km)	$V_P$ (km/s)	$V_S$ (km/s)	(gr/cm <sup>3</sup> )
10	6,0	3,5	2,5
30	7,0	4,0	2,8
$\infty$	8,0	4,7	3,3

**Ondas Love**

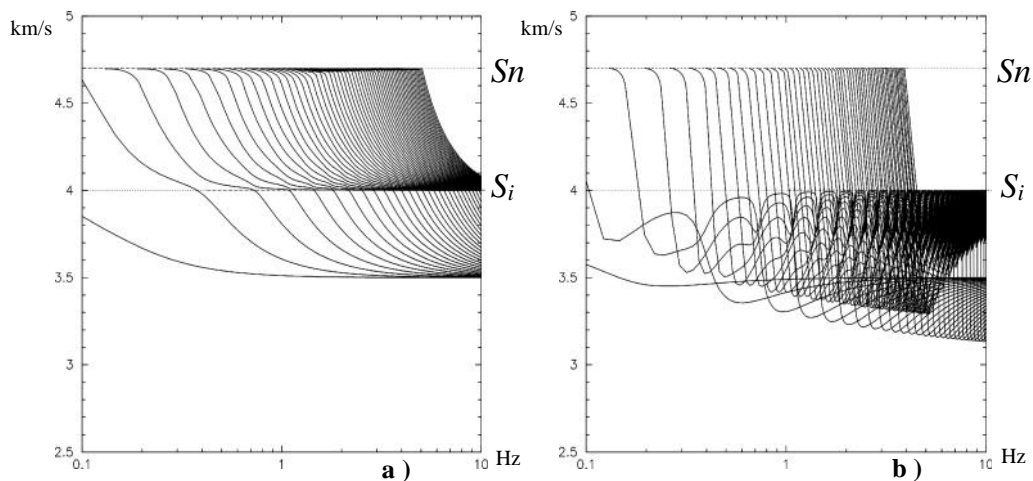


Figura 2.6 Curvas de Dispersión de ondas Love (Componente  $SH$ ), para un modelo de dos capas sobre un medio semi-infinito (ver Tabla 2.1), Modo Fundamental y Superiores: **a)** Velocidad de Fase **b)** Velocidad de Grupo. Dentro del rango de frecuencias del espectro regional, interpretamos desde la Teoría Modal las Fases  $S_n$  y  $S_i$ .

Se hace alusión también dentro de este modelo, a la fase  $S$  refractada crítica entre las dos capas. Esta sería la correspondiente fase  $S_i$  o  $S^*$  o también  $S_b$  (la “ $b$ ” indica basáltica), que aparece en los sismogramas regionales a cortas distancias. Esta fase tiene lugar en la llamada Discontinuidad de Conrad (descubierta por V. Conrad, en 1923 y H. Jeffreys, en 1926), que como sabemos separa la Corteza Superior de la Inferior (Vogfjörd, 1997). Se puede observar que desde una interpretación modal, esta fase corresponde a la suma de todos los modos de vibración, cuya Velocidad de Grupo es prácticamente constante e igual a la velocidad de la capa más profunda, ver Figura 2.6.b (en este caso 4,0 km/s). Como para el caso de la fase  $S_n$ , las Velocidades de Fase y de Grupo son prácticamente iguales, lo que implica que para este caso concreto, no se comporte en general como una onda dispersa. Todo lo que se lleva dicho se

verifica para frecuencias medianamente altas. Si ahora se consideran frecuencias cada vez más pequeñas, las curvas de los modos de vibración (inferiores), no reflejan tan claramente la discontinuidad entre las capas, o discontinuidad de Conrad. Esto hace que a grandes distancias, donde las altas frecuencias se encuentran muy atenuadas, la fase  $S_i$ , pierda identidad, y el fenómeno de dispersión comienza a ser acusado. Este fenómeno que desde el punto de vista de la clásica Teoría de Rayos no es fácil de interpretar. A la luz de la Teoría de Ondas, tiene sin embargo una sencilla explicación, ya que como sabemos, cuando consideramos fenómenos ondulatorios de frecuencias muy bajas, y por ende, con grandes longitudes de ondas, éstos no se ven perturbados por la discontinuidad de separación entre las dos capas. O dicho de otra forma, la longitud de onda es lo suficientemente grande, en comparación con las dimensiones de las capas, que no se puede discernir el límite entre ambas capas. En el **Capítulo 4**, hablaremos extensamente de la Teoría de Ondas y de la Teoría de Rayos y sus condiciones de aplicabilidad.

Unos ejemplos muy representativos de cómo las fases tipo “ $n$ ”, (en concreto la fase  $P_n$ ), poseen características de una onda guiada frente a la fase  $P_g$ , se pueden encontrar para los terremotos de 5 de Enero de 1999 al este del Cabo de Gata (Figura 2.7) y el de 2 de Febrero de 1999 con epicentro próximo a la ciudad de Mula (Figura 2.9). Se puede observar como para las estaciones más cercanas, en general, la fase  $P_g$  (onda directa) presenta mayor amplitud que la fase  $P_n$  (fase refractada crítica) pero, en cambio, para las estaciones más lejanas, la onda  $P_g$  ha disminuido su amplitud de forma muy acusada, mientras que la fase  $P_n$ , ha sufrido mucha menos atenuación (Ver Figuras 2.8.a, b y c, y Figuras 2.10.a, b, c y d, en la que se han representado las llegadas teóricas según el modelo de la Red Sísmica Nacional). Esto se debe a que la fase  $P_g$ , no es una verdadera fase canalizada, ya que existe una fuga de energía hacia el Manto Superior conocida como Fenómeno de Modos a pérdida (*Leaky Mode*).

Deseamos, que en toda esta exposición, se haya comprendido que desde un aspecto global de la teoría, que la fase  $S_n$  supone el comienzo del tren de la onda  $L_g$ . Así Zhang & Lay (1994), Hlatywayo & Midzi (1995), Mendi *et al.* (1997), Mellors *et al.* (1999) y Goldstein *et al.* (2001), ... estudian la correlación existente entre el comportamiento de la Fase  $S_n$  y  $L_g$ , en determinadas circunstancias dependiendo del espesor de la corteza, topografía, etc.

### 2.4.2. Onda $R_g$ .

Estas ondas aparecen muy claramente en eventos muy superficiales (explosiones y terremotos), que siguen a la onda  $L_g$  (o  $S_g$ ), con periodos

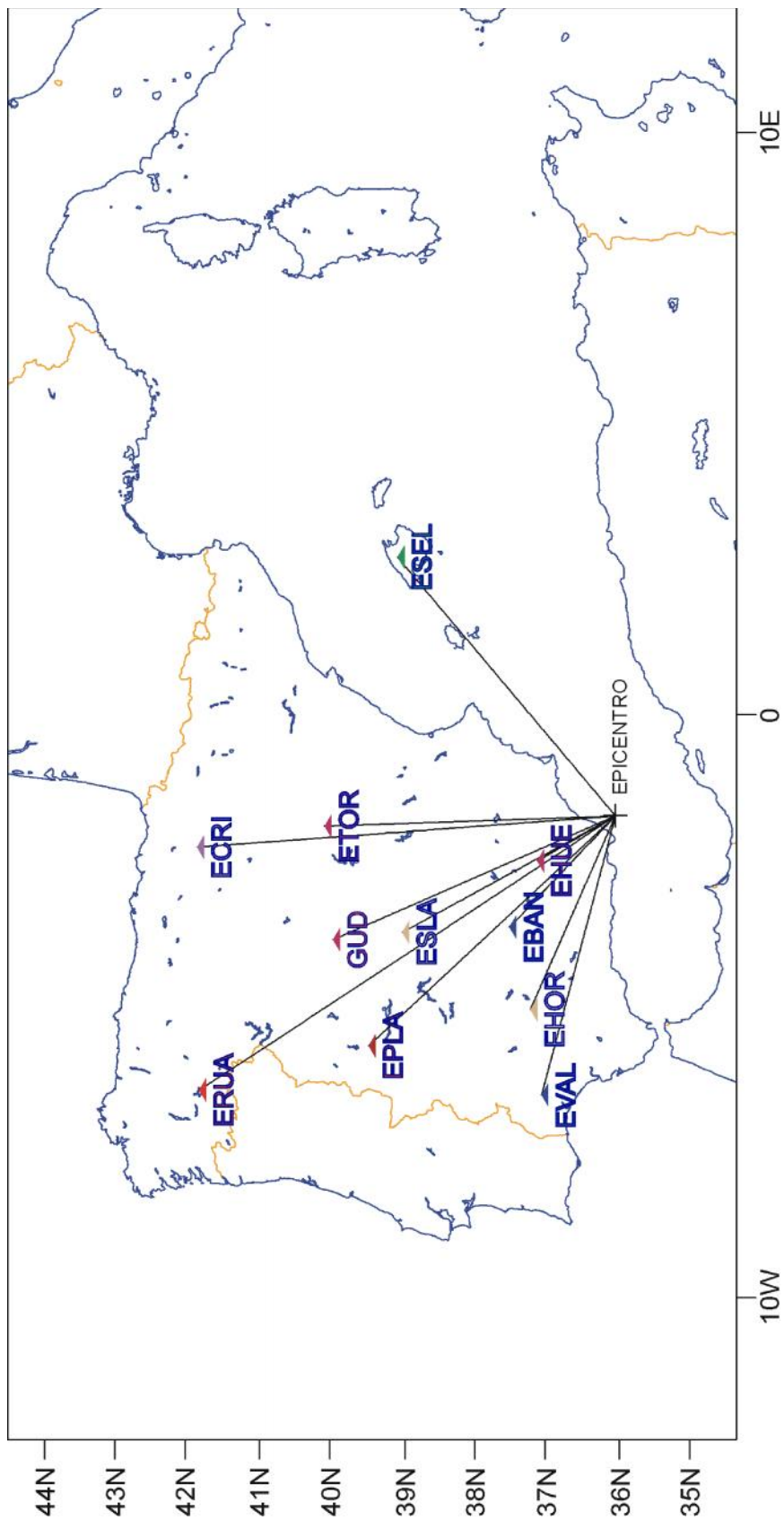


Figura 2.7 Mapa con el Epicentro del terremoto ocurrido al Este del cabo de Gata (Lat. =  $36^{\circ}.7262$ , Lon. =  $-1^{\circ}.7670$ , Prof.  $\approx 11$  Km. y N $^{\circ}$  de Orid = 250638). El 5 de Enero de 1999 a las 19:20:41 de Mag.  $\approx 3.2$ . Y la situación de las Estaciones de la Red Sísmica Nacional (I.G.N.), en las que se seleccionaron sus registros (Ver explicación en el texto).

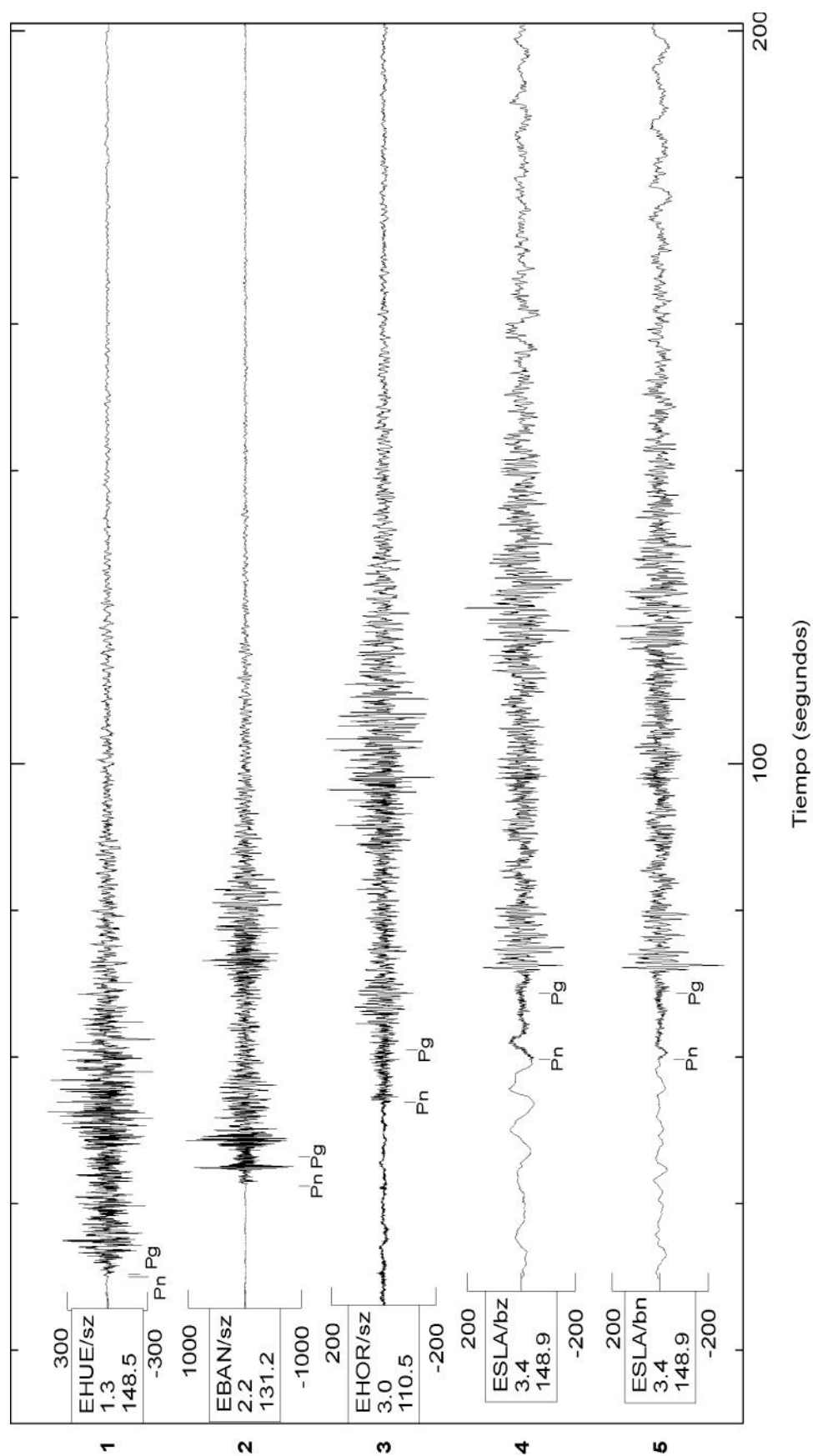


Figura 2.8.a. Registros de las Estaciones de Corto Periodo EHUE (Hucscar), EBAN (Baños), EHOR(Homachuclos) y Banda Ancha ESLA/bz (Sonseca componente vertical) y ESLA/bn (Sonseca componente norte), para el terremoto de la Figura 2.7. Debajo de las siglas de cada estación se indica la distancia epicentral y el backazimut. (Ver explicación en el texto).

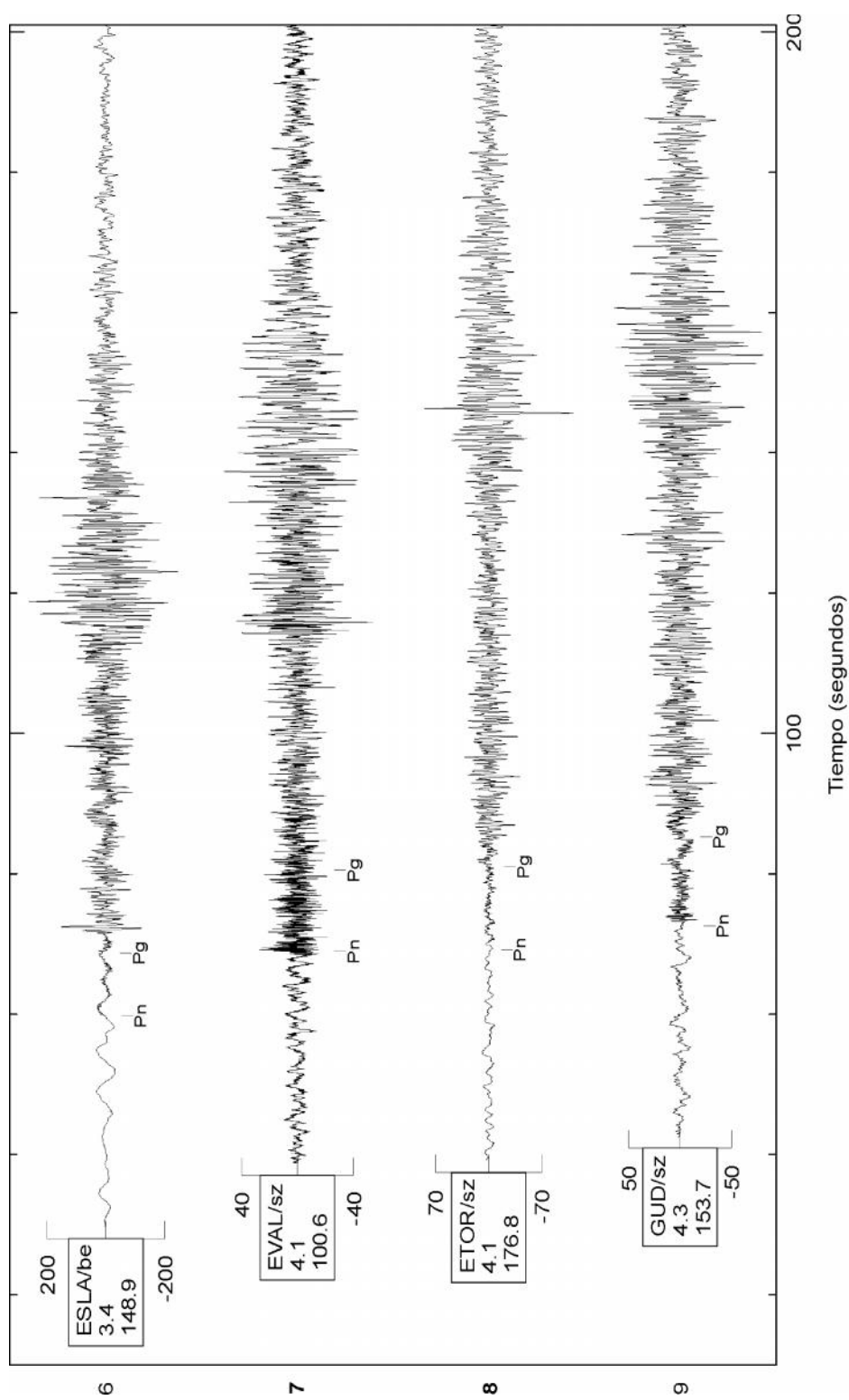


Figura 2.8.b. Registros de las Estaciones de Corto Periodo EVAL (Valverde), ETOR (Torre), GUD (Guadarrama) y Banda Ancha ESLA/be (Sonseca componente este), para el terremoto de la Figura 2.7. Debajo de las siglas de cada estación se indica la distancia epicentral y el backazimut. (Ver explicación en el texto).

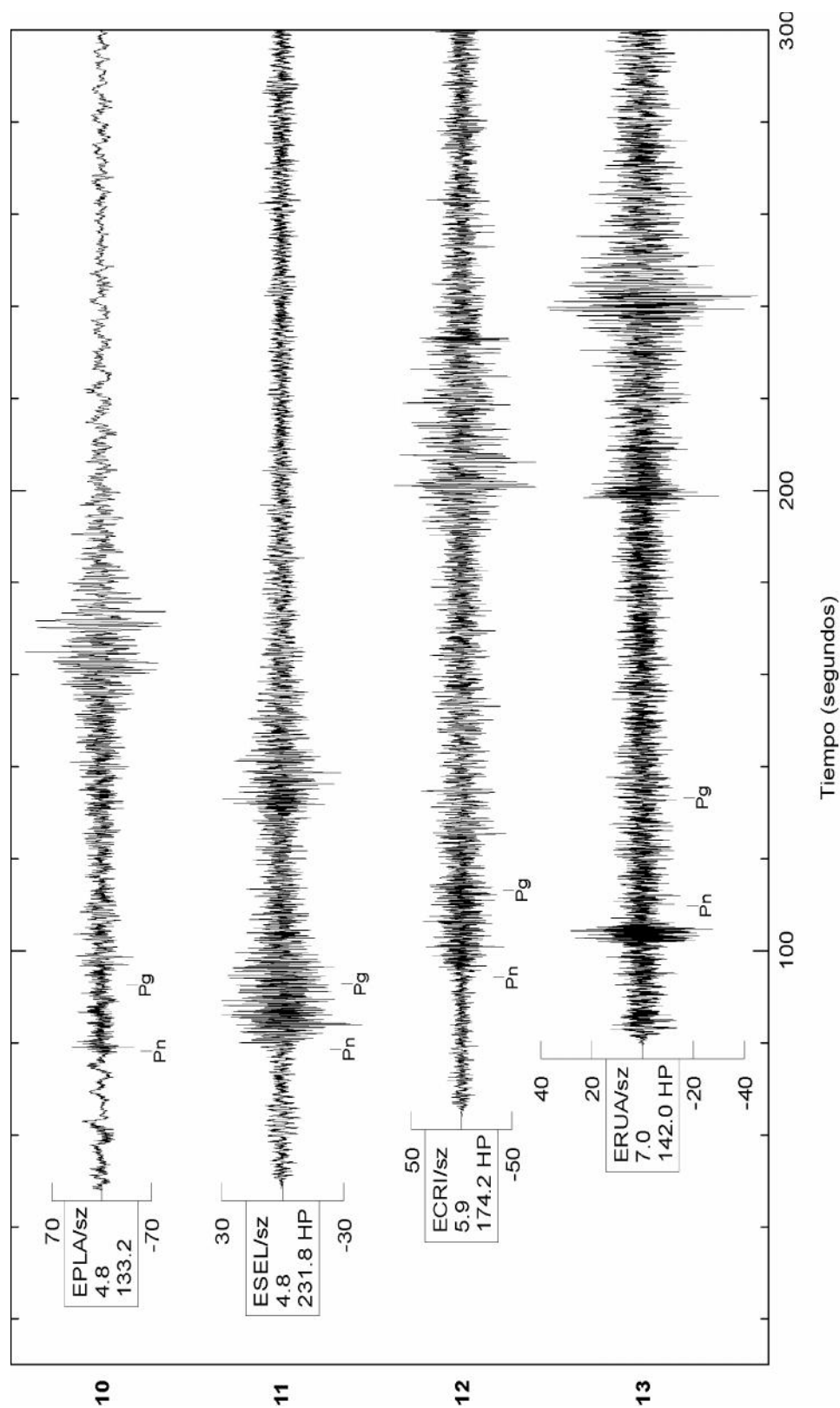


Figura 2.8.c. Registros de las Estaciones de Corto Periodo EPLA (Plasencia), ESEL (Selva), ECRI (Cripán) y ERUA (Rúa), para el terremoto de la Figura 2.7. Debajo de las siglas de cada estación se indica la distancia epicentral y el backazimut. En las estaciones de ESEL, ECRI y ERUA se ha utilizado un filtro Butterworth Pasa Altas ( $f_c = 0,8$  Hz). Ver explicación en el texto.



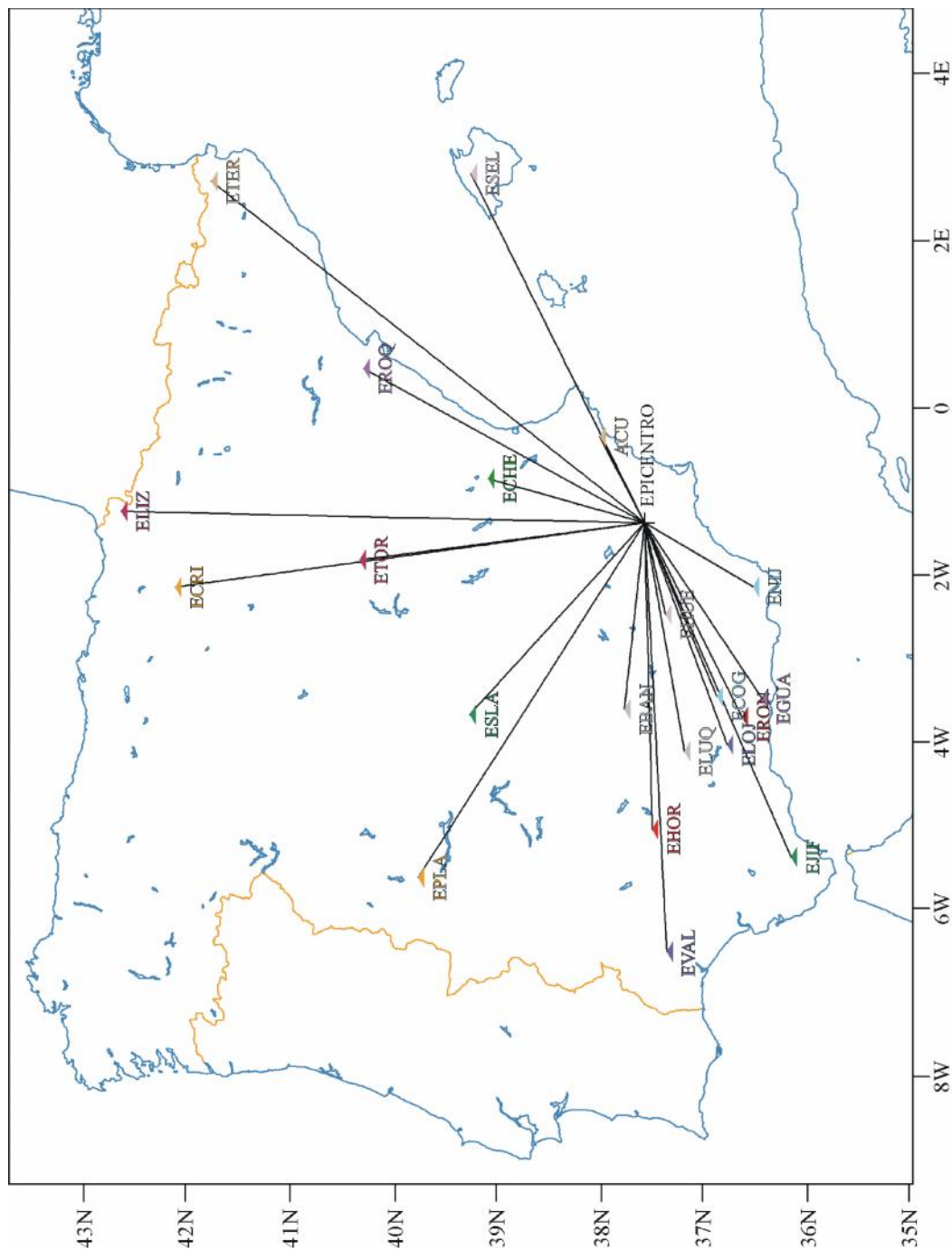


Figura 2.9 Mapa con el Epicentro del terremoto ocurrido próximo a la localidad de Mula (Lat. = 38°.0534, Lon. = -1°.4649, Prof. ≈ 7 Km y Nº de Orid=274833). El 2 de Febrero de 1999 a las 13:22:50 de Mag. ≈ 3.4. Y la situación de las Estaciones de la Red Sísmica Nacional (I.G.N.) en las que seleccionaron sus registros (Ver explicación en el texto).

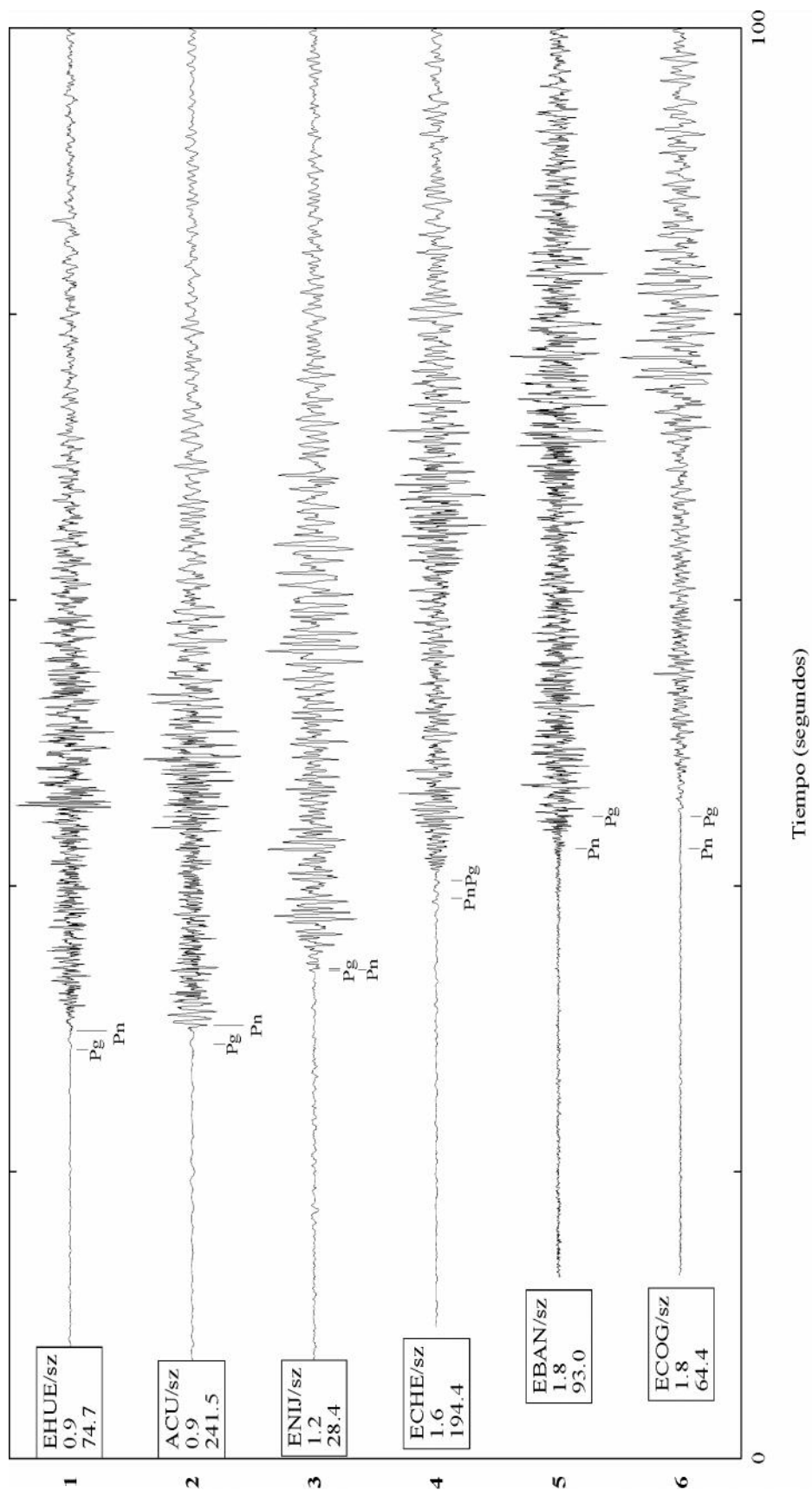


Figura 2.10.a. Registros de las Estaciones de Corto Periodo EHUE (Huescar), ACU (Canalobre), ENIJ (Níjar), ECHE (Chera), EBAN (Baños de la Encina) y ECOG (Cogollos), para el terremoto de la Figura 2.9. Debajo de las siglas de cada estación se indica la distancia epicentral (en grados) y el backazimut. (Ver explicación en el texto).

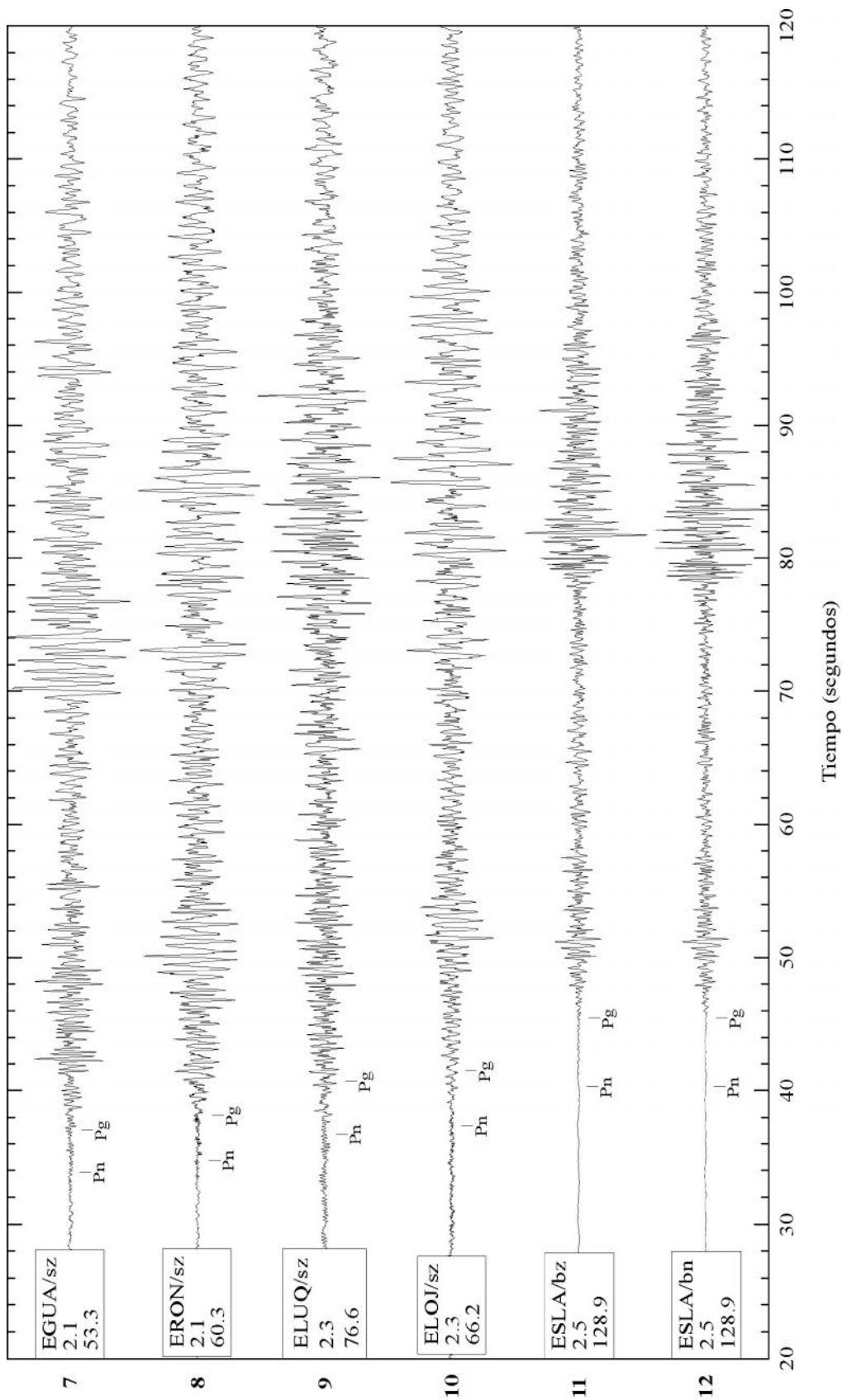


Figura 2.10.b. Registros de las Estaciones de Corto Periodo EGUA (Guaajares), ERON (Agrón), ELUQ (Luque), ELOJ (Loja), y ESLA/bn (Sonseca componente norte), para el terremoto de la Figura 2.9. Debajo de las siglas de cada estación se indica la distancia epicentral (en grados) y el backazimut. (Ver explicación en el texto).

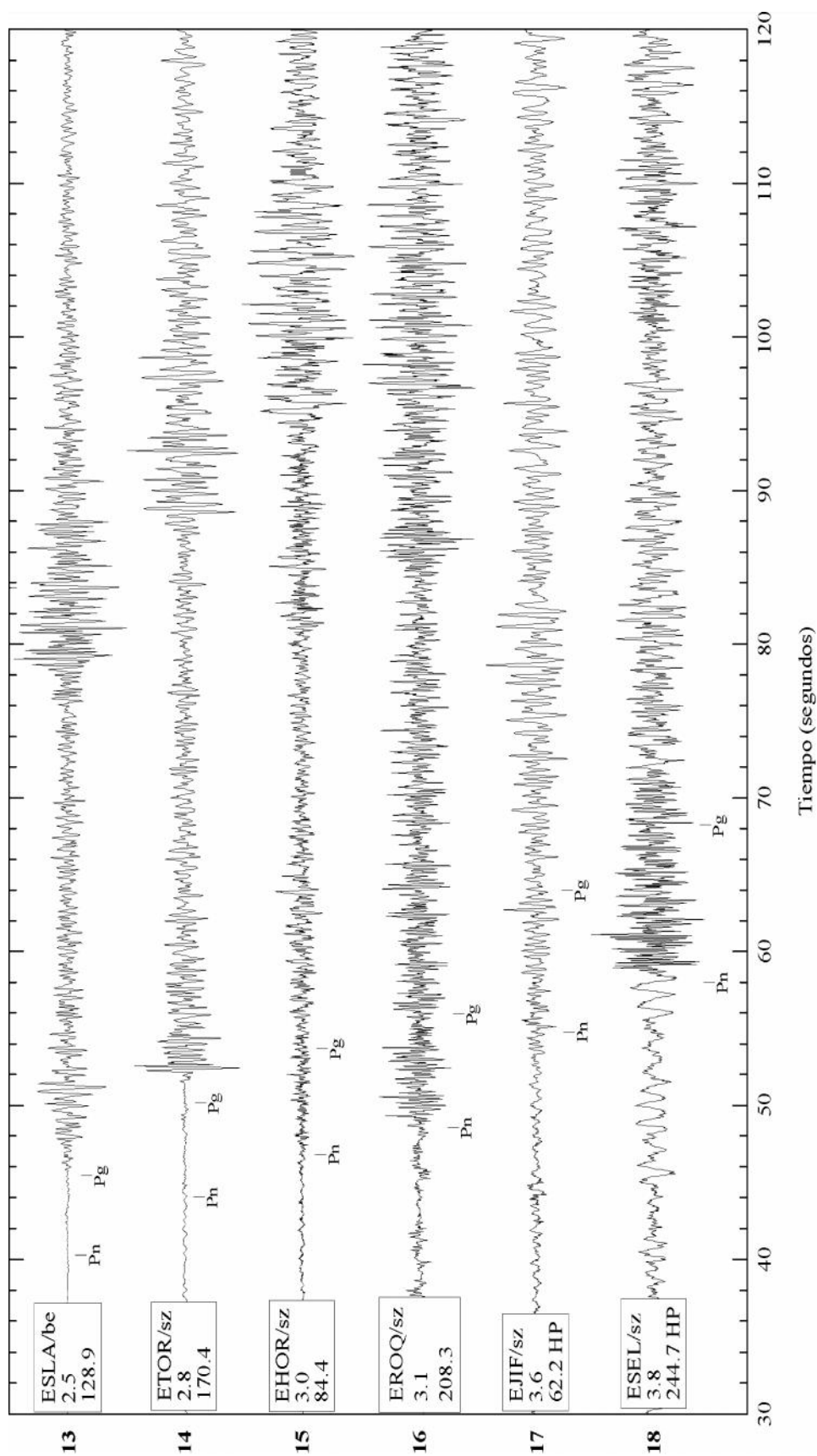


Figura 2.10.c. Registros de las Estaciones de Banda Ancha de ESLA/be (Sonseca componente este) y de Corto Periodo ETOR (Torete), EHOR (Hornachuelos), EROQ (Roquetas), EJIF (Jimena) y ESEL (Selva), para el terremoto de la Figura 2.9. Debajo de las siglas de cada estación se indica la distancia epicentral (en grados) y el backazimut. En las estaciones de EJIF y ESEL se ha utilizado un filtro Butterworth Pasa Altas ( $f_c = 0,8$  Hz). Ver explicación en el texto.

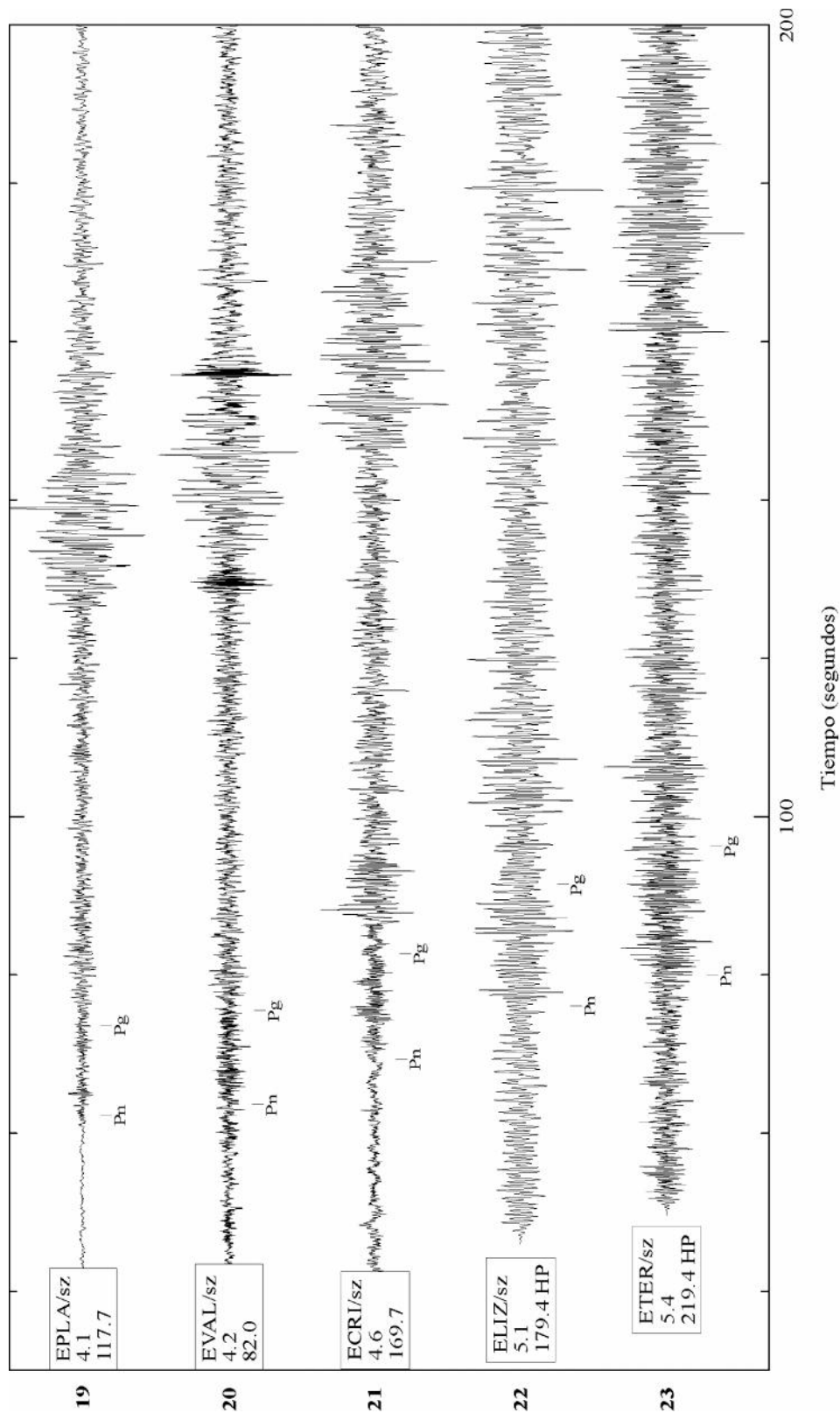


Figura 2.10.d. Registros de las Estaciones de Corto Periodo EPLA (Plasencia), EVAL (Valverde del Camino), ECRI (Cripán), ELIZ (Elizondo) y ETER (Terrades), para el terremoto de la Figura 2.9. Debajo de las siglas de cada estación se indica la distancia epicentral (en grados) y el backazimut. En las estaciones de ELIZ y ETER se ha utilizado un filtro Butterworth Pasa-Altas ( $f_c = 0,8$  Hz). Ver explicación en el texto.

mayores que estas últimas, comprendidos entre 10s y 1 s. Desde el punto de vista que lo estamos enfocando, se puede considerar la onda  $Rg$ , como la suma de todos los modos de la onda Rayleigh y Love, comprendidos entre los periodos antes mencionados, y con pequeñas velocidades de grupo (entre 2,8 km/s y 1,5 km/s). Estos rayos inciden con ángulos mayores que el crítico en las capas más superficiales de la corteza terrestre.

Esto último expuesto implica que la fuente debe ser muy superficial, para así justificar el que se encuentre en el medio de más baja velocidad, y que puedan existir rayos atrapados en estas capas. La componente de bajas frecuencias de estas ondas se debe a que, al transmitirse por las capas más superficiales de la corteza, que son estratos sedimentarios poco consolidados y muy heterogéneos, hacen que se presente una gran atenuación (sobre todo de “scattering”), es decir, valores muy bajos del Factor de Calidad “ $Q$ ”. Esto hace que las frecuencias más altas ( $> 1$  Hz) se atenúen muy rápidamente (Ver Figura 2.11).

Las ondas  $Rg$  aparecen a distancias relativamente cercanas al epicentro, debido a que los rayos se canalizan rápidamente, en las primeras capas de la corteza (como se ha mencionado), ya que tienen muy poco espesor y un fuerte contraste con las capas más profundas (Navarro *et al.*, 1997). Estas ondas no se propagan a grandes distancias, por las razones de atenuación que se acaban de exponer en el párrafo anterior.

Para el terremoto ejemplo, que se presenta en la Figura 2.11, teniendo en cuenta que la fuente y la estación de registro (EQUE) están en paralelos muy próximos, sean las coordenadas geográficas del terremoto  $37^{\circ} 21' N$  y  $2^{\circ} 18' O$ , y para la estación  $37^{\circ} 12' N$  y  $3^{\circ} 26' O$ . Podemos observar como las mayores amplitudes de la onda  $Rg$  se obtienen para las componentes transversales (Norte y Vertical), como corresponden a una onda de Cizalla, y también se puede observar, como el comienzo del tren se encuentra ligeramente adelantado en la componente Norte-Sur, como corresponde a una onda  $SH$  (Lay & Wallace, 1995), aunque esta diferencia es muy pequeña al ser un terremoto regional, donde la distancia epicentro y estación, es de poco más de 100 km.

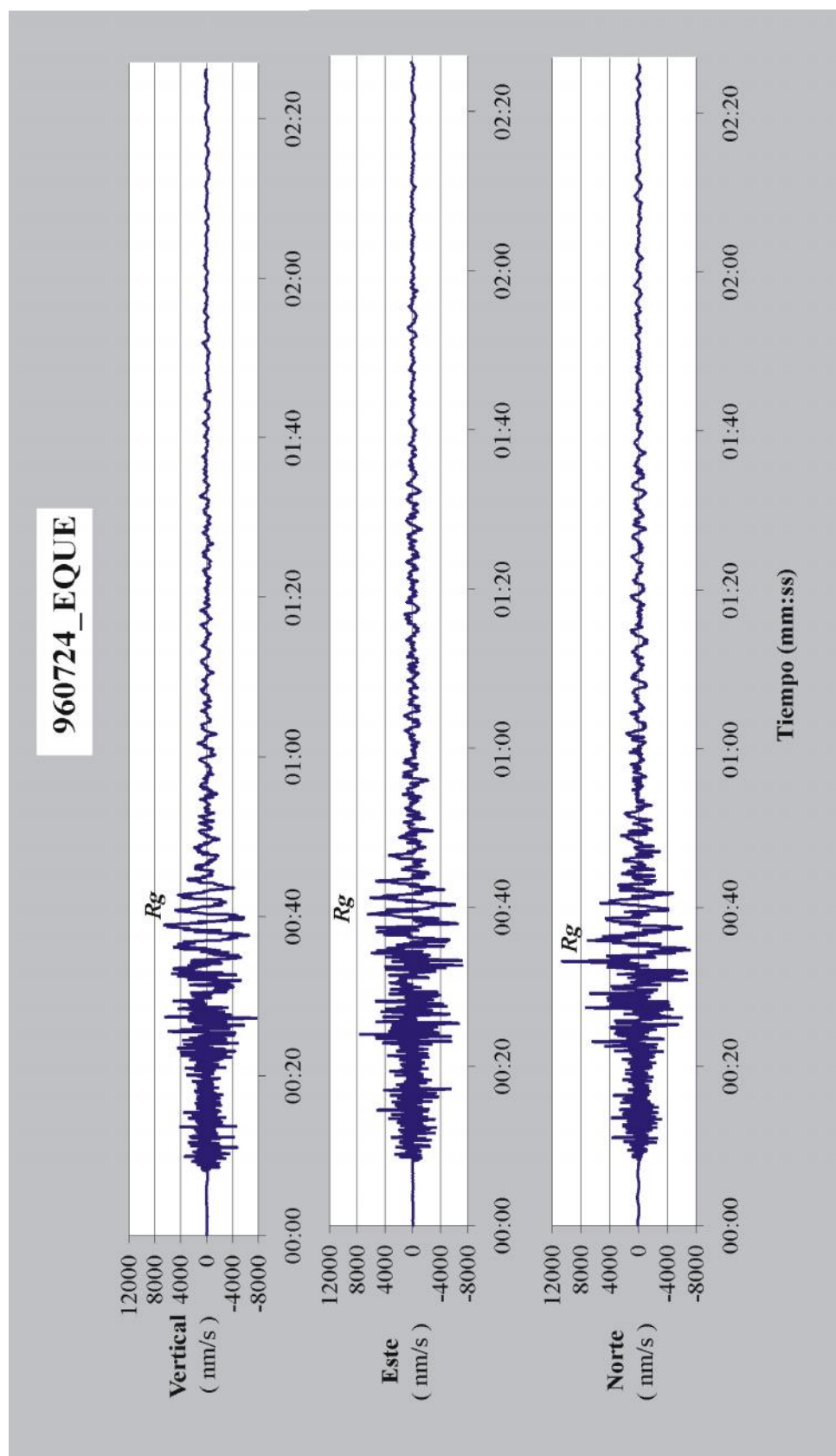


Figura 2.11 Terremoto de Olula del Río (Almería), ocurrido el 24 de Julio de 1996, de Magnitud 3.7. Registrado en la Estación de EQUÉ (de Banda Ancha), en Granada, distancia aproximada entre el epicentro y la estación es de 100 km. Donde podemos ver con claridad las Ondas Rg, como parte final de las Ondas S.

## 2.5 Velocidad de Fase y Velocidad de Grupo.

### 2.5.1 Introducción.

En este capítulo se van a tratar los conceptos velocidad de Fase y de Grupo ya mencionados anteriormente y además, se incluirá el concepto de ondas Guiadas, donde aparece el fenómeno de la dispersión.

Sobre estos conceptos se puede encontrar mucha información en los textos de sismología, podemos consultar Udías & Mézcua (1997), que tratan el tema de una forma sencilla y aplicada a las ondas Superficiales, también en Lay & Wallace (1995), que trata el tema un poco más en profundidad. Estos conceptos expuestos de una forma más general, los tenemos en el libro del autor Athanasios Papoulis, "The Fourier Integral and it's Applications". En él, las deducciones son mucho más generales, y permitirán comprender mucho mejor los conceptos de velocidad de Fase y velocidad de Grupo, aplicables además a cualquier medio físico y tipo de ondas. Consideraremos el **medio** por el que se propaga una onda, como un determinado sistema físico que actúa como una especie de filtro espacial, es decir, a medida que la onda se propaga por dicho medio, va sufriendo una serie de modificaciones o perturbaciones. Más adelante se relacionarán todos estos conceptos que aquí veremos de una forma general, con nuestro interés, en el campo de la sismología.

### 2.5.2. Conceptos de Retraso de Grupo, de Fase y de Frente de la Señal.

#### A) Definiciones.

Estos términos son aplicados para describir el "retraso" que sufren diferentes partes de una señal temporal. Llamaremos " $f(t)$ ", a la entrada de lo que consideraremos un Sistema Lineal (ver Papoulis, A.,1962, Cap.5, sobre definiciones de un Sistema Lineal y en el **Apéndice D**, de este trabajo). Sea



“ $g(t)$ “, la señal temporal respuesta a la señal de entrada arbitraria “ $f(t)$ “. Ver Figura 2.12.

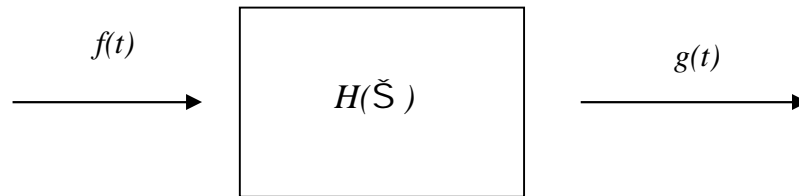


Figura 2.12. Representación de un Sistema, cuya respuesta en frecuencia viene representada por  $H(\check{S})$ .

Sea la Función de Transferencia del Sistema, en el dominio de la Frecuencia, “ $H(\check{S})$ “. Lo representamos matemáticamente, como:

$$H(\check{S}) = A(\check{S})e^{-i_{\omega}(\check{S})} \quad (\text{ec. 2.10})$$

Donde:

$A(\check{S})$ , es la Amplitud de la Transformada de Fourier  
 $\omega(\check{S})$ , representa el Espectro de Fases de Fourier.  
 Como sabemos  $i = \sqrt{-1}$ .

Y, en el dominio del tiempo, la función de transferencia queda definida, como:

$$h(t) = L^{-1}[H(\check{S})] \quad (\text{ec. 2.11})$$

Donde:

$L^{-1}$  representa el Operador Transformada Inversa de Fourier, según la definición de Papoulis (1962).

Denotamos por “ $h(t)$ “, a la función temporal que representa el sistema, que para un Sistema Lineal, no es más que la respuesta del Sistema a un Impulso en el Tiempo (Delta de Dirac).

Definimos:

- **Retraso de Fase** ( $t_{ph}$ ) como:

$$t_{ph} = \frac{\varphi(\check{S})}{\check{S}} \quad (\text{ec. 2.12})$$

En el plano  $(\check{S}, \varphi(\check{S}))$ ,  $t_{ph}$  representa la pendiente de la línea que va desde el punto origen, al punto de la curva de fase,  $\varphi(\check{S})$ , donde se calcula  $t_{ph}$  (Ver Figura 2.13).

- **Retraso de Grupo** ( $t_{gr}$ ) como:

$$t_{gr} = \frac{d\varphi(\check{S})}{d\check{S}} \quad (\text{ec. 2.13})$$

Representa la pendiente de la curva  $\varphi(\check{S})$ , para una frecuencia dada (Ver Figura 2.13).

- **Retraso del Frente de Señal** ( $t_{fr}$ ), como:

$$t_{fr} = \lim_{\check{S} \rightarrow \infty} \frac{d\varphi(\check{S})}{d\check{S}} \quad (\text{ec. 2.14})$$

Es la pendiente de la asíntota de la Curva de Fase, cuando  $\check{S}$  tiende a infinito. Es pues independiente de la frecuencia. Por supuesto, esta definición tiene sentido si dicho límite existe. (Ver también Figura 2.13).

**Significado de  $t_{ph}$  y  $t_{gr}$ .**

Vamos a profundizar sobre las definiciones que acabamos de dar para los conceptos de Retraso de Grupo y Fase, dejando para el **Apéndice A**, el concepto de Retraso del Frente de Señal.

Supondremos que la señal de entrada  $f(t)$ , es una señal modulada en Amplitud que, matemáticamente, representamos por:

$$f(t) = f_i(t)\cos\check{S}_0 t \quad (\text{ec. 2.15})$$

Esta restricción respecto al tiempo sobre la señal de entrada, nos permitirá exponer los conceptos anteriores más claramente, pero ello no supone pérdida de generalidad.

Sea:

$F_i(\check{S})$ : La Transformada de Fourier de la Envolvente  $f_i(t)$  de la señal  $f(t)$ . Esta señal se denomina de Banda Limitada (en la literatura inglesa se define como "Narrow-Band"). Matemáticamente, lo podemos expresar como:

$$\times F_i(\check{S}) \times = 0, \quad \text{para} \quad \times \check{S} - \check{S}_0 \times > h \quad (\text{ec. 2.16})$$

Donde  $\Omega$ , es una frecuencia determinada.

$\check{S}_0$  : Es la frecuencia de la señal portadora.

Supongamos que nuestro sistema, definido al principio de este apartado y representado en el dominio de las frecuencias por  $H(\check{S})$ , se va a comportar como un Filtro Pasabanda (Función de Transferencia), y el rango de frecuencias  $(\check{S}_0-h, \check{S}_0+h)$ , se encuentra dentro de la banda de paso, de tal forma que:

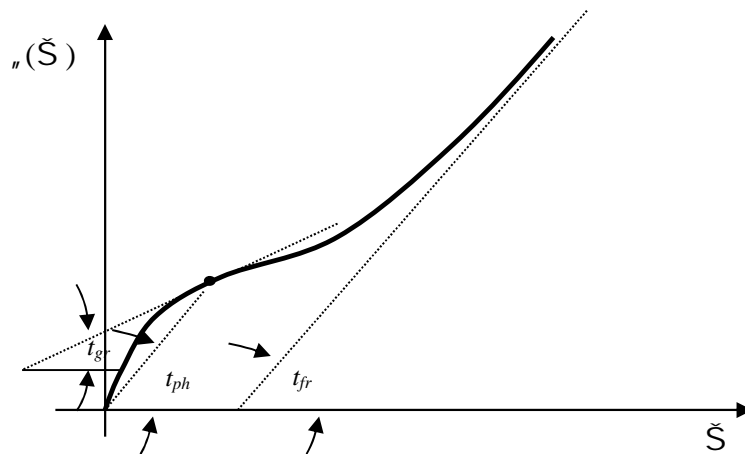


Figura 2.13 Representación Gráfica de los diferentes conceptos de  $t_{ph}$ ,  $t_{gr}$  y  $t_{fr}$ .

$$A(\check{S}) \approx K, \text{ para } \check{S}_0 - h < \check{S} < \check{S}_0 + h \quad (\text{ec. 2.17})$$

Con  $K$ , constante.

Supongamos también que la fase del Sistema se puede aproximar por el siguiente desarrollo de Taylor en potencias de frecuencias (para un entorno de  $\check{S}_0$ ), conservando sólo el término lineal:

$$\varphi(\check{S}) \approx \varphi(\check{S}_0) + \varphi'(\check{S}_0)(\check{S} - \check{S}_0) \quad (\text{ec. 2.18})$$

Donde " $\varphi'(\check{S}_0)$ ", es la derivada de la fase respecto a la frecuencia, calculada en la frecuencia  $\check{S}_0$ . Es condición necesaria que la frecuencia  $\check{S}_0$  se encuentre dentro de la Banda de Paso del Sistema (considerado este como un filtro).

De las definiciones, dadas por las ecuaciones 2.12, 2.13, y la ecuación 2.18, podemos escribir, la fase del sistema:

$$\varphi(\check{S}) \approx \check{S}_0 t_{ph}(\check{S}_0) + (\check{S} - \check{S}_0) t_{gr}(\check{S}_0) \quad (\text{ec. 2.19})$$

Donde  $t_{ph}(\tilde{\omega}_0)$  y  $t_{gr}(\tilde{\omega}_0)$ , son los respectivos Retrasos de Fase y Grupo calculados en  $\tilde{\omega}_0$ .

Entonces, la respuesta  $g(t)$ , se puede demostrar, que viene dada por:

$$g(t) \approx K \tilde{f}_i(t - t_{gr}) \cos[\tilde{\omega}_0(t - t_{ph})] \quad (\text{ec. 2.20})$$

La demostración detallada de esta última ecuación la podemos encontrar en el ya citado libro de A. Papoulis (1962), en el capítulo 7.

Podemos ver que el Retraso de Grupo  $t_{gr}$ , evaluado en la frecuencia portadora de nuestra señal,  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$ , es igual al Retraso de la envolvente,  $\tilde{f}_i(t)$ , de la señal de entrada<sup>2</sup>, y el Retraso de Fase,  $t_{ph}$ , en la frecuencia de la portadora, es igual al retraso de la componente portadora de la señal. (Ver Figura 2.14).

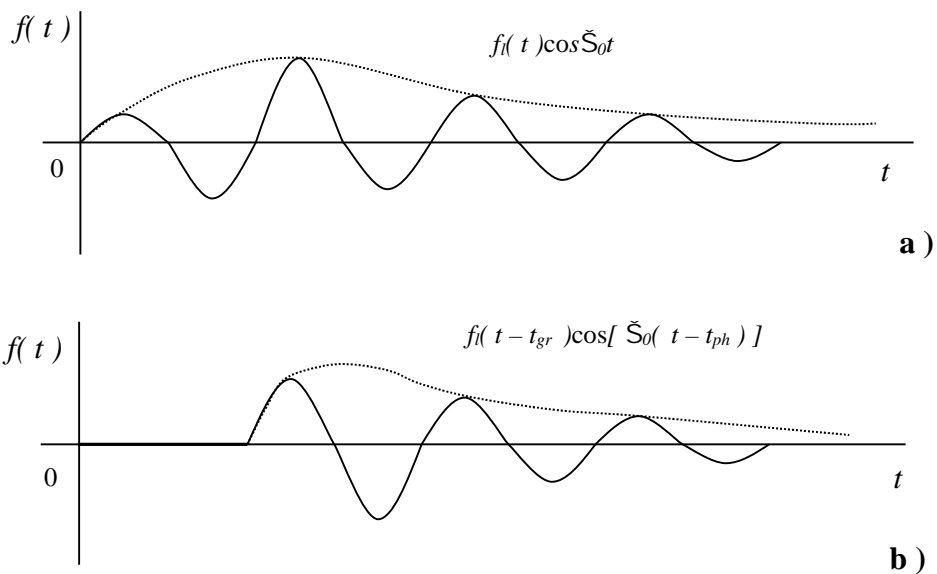


Figura 2.14. Aplicación gráfica de los conceptos de Retraso de Fase y Grupo, a un ejemplo sencillo. **a)** Señal original, modulada en amplitud, por  $f_i(t)$ , con una frecuencia portadora de  $\tilde{\omega}_0$ , **b)** Señal Retrasada. De forma intuitiva el Retraso de Grupo actúa sobre la envolvente y el Retraso de Fase, sobre la componente portadora.

<sup>2</sup> Dicho de otra forma, equivaldría al retraso del “centro de gravedad” de la señal.

Si algunas de las condiciones impuestas al sistema anterior, dejaran de cumplirse, es decir, si  $A(\tilde{S})$  no fuese constante en el rango de frecuencias considerado y  $\omega(\tilde{S})$  no fuese lineal (es decir, no pudiésemos considerar sólo el término  $\tilde{S} - \tilde{S}_0$  en el desarrollo de la ec. 2.18, con cierta precisión), se produciría una distorsión y un ensanchamiento de la función envolvente,  $f(t)$ , junto con una posible modulación en frecuencia.

Las condiciones impuestas al sistema en las ecuaciones 2.18 ó 2.19 las hemos expresado como aproximaciones. Los sistemas físicos reales (en particular, en sismología), suelen cumplir las condiciones impuestas dentro de un rango de validez, lo que implica que obtenemos soluciones sólo con una cierta aproximación. Si las condiciones se cumpliesen exactamente, sustituiríamos los símbolos de “aproximación” por símbolos “iguales”, y en particular en la ecuación final (ec. 2.20).

En nuestro desarrollo se ha impuesto que las señales sean de Banda Limitada (ec. 2.16). Conviene recordar que en sismología no existen señales con estas características en el sentido estricto, pero sí que podemos atribuir a las señales reales rangos de frecuencias donde casi la totalidad de la energía de la señal está concentrada, y otros rangos, donde apenas la señal es perceptible.

A tenor de todo lo dicho y demostrado hasta este momento, se puede ver que la Velocidad de Grupo está asociada con la velocidad de transporte de la energía de la señal y que la Velocidad de Fase, con la velocidad con que se propaga cada armónico dentro de un Tren de Ondas. El Sistema Lineal del que hemos hablado, lo identificaremos con el Medio de Propagación, aunque todo lo dicho puede aplicarse a cualquier Sistema Lineal (p.ej. un sismómetro).

### **2.5.3 Velocidad de Fase y Velocidad de Grupo.**

#### **A) Introducción: El Fenómeno de la Propagación.**

Hasta ahora hemos considerado tan solo una señal temporal, es decir, una función cuya única variable es el tiempo. Los términos de Velocidad de Fase y Grupo caracterizan la propagación de varias partes de una onda que viaja en el espacio, que de una forma genérica denotamos por “ $f(x, t)$ ”. Consideremos ahora una señal que sólo se propaga en una dirección determinada.

Ya se ha dicho, que el Sistema Lineal que hemos venido considerando, no es otra cosa que el medio material por donde se propaga la onda viajera. (Ver Figura 2.15).

Sea “ $H(\check{S}, x)$ “, la función que representa la respuesta del medio, en frecuencia, para una posición “ $x$ “. Podemos escribir:

$$H(\check{S}, x) = A(\check{S}, x)e^{-i_n(\check{S}, x)} \quad (\text{ec. 2.21})$$

Donde hemos seguido una notación análoga, a la que venimos utilizando.

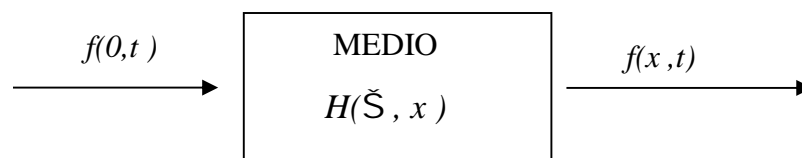


Figura 2.15. Representación del Fenómeno de la propagación de una señal en un medio, por un sistema físico. Ver texto.

Sea “ $f(0,t)$ “, la señal de entrada al sistema físico, y “ $f(x,t)$ “, la salida. Este último es el valor de la señal a una distancia  $x$ , en el instante  $t$ .

A partir de ahora consideraremos  $f(x,t)$ , como una función totalmente general, sin ningún tipo de restricción en su dependencia con el tiempo (como la expresada por la ecuación 2.15).

Por la definición de la Transformada de Fourier, o mejor dicho por la antitransformada o transformada inversa (ver Papoulis, 1962, pág. 1), y por las propiedades de un Sistema Lineal, como venimos considerando (Teorema de la Convolución en el dominio de las frecuencias), se puede escribir:

$$f(x,t) = \frac{1}{2f} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\check{S}) \cdot A(\check{S}, x) e^{i[\check{S}t - k(\check{S})x]} \cdot d\check{S} \quad (\text{ec. 2.22})$$

donde hemos sustituido:

\* El término  ${}_n(\check{S})$ , como;

$${}_n(\check{S}, x) = k(\check{S}) x \quad (\text{ec. 2.23})$$

$k(\check{S})$ , representa de una forma general, el Número de Onda. Vamos a fijar nuestra atención ahora en este término. Consideramos por supuesto, este parámetro, como una función de la frecuencia. Esto es lo que conocemos como Ecuación de Dispersión del Medio:

$$k = k(\check{S}) \quad (\text{ec. 2.24})$$

\*  $A(\check{S}, x)$  : en este término se ha incluido la **Atenuación de la Amplitud** con la distancia que el medio ejerce sobre la señal. Aquí se puede incluir también la atenuación anelástica, scattering, etc,...

\*  $F(\check{S})$  : es la Transformada de Fourier en el tiempo de la función. En general es una función compleja, con su propia amplitud y fase.

$$F(\check{S}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\check{S}t} \cdot dt \Rightarrow F(\check{S}) = |F(\check{S})| e^{i\varphi(\check{S})}$$

Tanto en la ecuación 2.21, como en la ecuación 2.23, se puede comprobar, que hemos atribuido, de una manera lógica como luego veremos, toda la dependencia espacial de nuestra señal a una característica del medio por donde se propaga la perturbación.



**B) Definiciones.**

\* **Velocidad de Grupo ( $U$ );**

$$U = \frac{x}{t_{gr}} \quad (\text{ec. 2.25})$$

Sabiendo que el valor de  $t_{gr}$ , viene dado (ec. 2.13 y 2.23):

$$t_{gr} = \frac{d_n(\check{S})}{d\check{S}} = \frac{dk(\check{S})}{d\check{S}} \cdot x \quad (\text{ec. 2.26})$$

Y sustituyendo en la ecuación 2.24, obtenemos:

$$U = \frac{1}{\frac{dk}{d\check{S}}} = \frac{d\check{S}}{dk} \quad (\text{ec. 2.27})$$

Por analogía, con las discusiones anteriores, diríamos que la envolvente de la señal,  $f(0, t)$ , alcanzaría el punto “  $x$  “, con un retraso  $t_{gr}$ . Así pues, la Velocidad de Grupo ( $U$ ), es la **Velocidad de Propagación de la envolvente** de  $f(x, t)$ . Esta velocidad se corresponde con el transporte de energía, como veremos cuando hablemos del *Principio de Fase Estacionaria* (Apartado 2.5.5).

\* **Velocidad de Fase ( $c$ );**

$$c = \frac{x}{t_{ph}} \quad (\text{ec. 2.28})$$

y el valor de  $t_{ph}$ , a partir de las ec. 2.12 y 2.23, lo podemos poner, como:

$$t_{ph} = \frac{n(\check{S})}{\check{S}} = \frac{k(\check{S})}{\check{S}} \cdot x \quad (\text{ec. 2.29})$$

La Velocidad de Fase ( $c$ ), es la velocidad de propagación, de cada una de las “**portadoras**” que componen la señal,  $f(x, t)$ . Si suponemos que una señal real está compuesta por la suma de muchos **armónicos** que poseen cada uno, una frecuencia de vibración diferente (más información el *Análisis de Armónicos de Fourier*, Bath, 1982), la Velocidad de Fase, sería la velocidad de cada uno de los armónicos (frecuencias), que componen la señal real.

Si volvemos a la ecuación 2.29, operando y sustituyendo la ec. 2.29 en la ec. 2.28, se obtiene para la Velocidad de Fase:

$$c = \frac{\check{S}}{s(\check{S})} \quad (\text{ec.2.30})$$

Que nos da la Velocidad de Fase en función del parámetro  $s(\check{S})$ , que habíamos identificado con el número de onda. Si sustituimos este parámetro de la última ecuación 2.30, en la ecuación 2.26 y a su vez, ésta, en la definición de Velocidad de Grupo (ec. 2.25), obtendríamos:

$$U(\check{S}) = \frac{1}{\frac{1}{c(\check{S})} - \frac{\check{S}}{c^2} \cdot \frac{dc(\check{S})}{d\check{S}}} \quad (\text{ec. 2.31})$$

Ecuación que nos da el valor de la Velocidad de Grupo,  $U$ , en función de la Velocidad de Fase,  $c$ , y de la frecuencia de la señal,  $\check{S}$ .

Recordemos que  $c$ , depende de la frecuencia a través del parámetro  $k(\check{S})$ , de cuya dependencia no se ha supuesto nada todavía.

#### 2.5.4. El Fenómeno de la Dispersión.

El Fenómeno de la Dispersión, ocurre:

- A) Cuando en el medio que estamos considerando, el parámetro  $k(\check{S})$  de la ecuación 2.23, no tiene una dependencia lineal con la frecuencia. (Es la llamada Ecuación de Dispersión).

- B)** Cuando la señal que estamos considerando posee un rango de frecuencias más o menos amplio.

Teniendo presente la ecuación 2.29 y las dos premisas anteriores, obtenemos que cada componente armónico, o cada “portadora” que componen nuestra señal, tendrá una Velocidad de Fase diferente;

$$c(\check{S}) = \frac{\check{S}}{k(\check{S})} \quad (\text{ec. 2.32})$$

En la ecuación 2.31, la Velocidad de Grupo ( $U$ ) será una función más o menos complicada, dependiendo de la frecuencia, y en general diferente a la Velocidad de Fase.

El sentido físico de lo que acabamos de decir es que, a medida que la onda se va desplazando por el medio, los diferentes componentes armónicos se van separando en el tiempo. Es decir, la onda se dispersa. En la Figura 2.16, las líneas continuas indican diferentes Velocidades de Grupo; cada línea continua es una línea recta en el diagrama de espacio-tiempo y más adelante, demostraremos que la Velocidad de Grupo se relaciona con el espacio recorrido ( $X$ ) y el tiempo transcurrido ( $t$ ), mediante la ecuación

$$X = U t$$

y como en general,  $U = U(\check{S})$ , si  $U = \text{constante}$ , entonces cada línea  $c^i$  ( $i=1, 2$  y  $3$ ), representa la Velocidad de Grupo para una frecuencia fija  $\check{S}_i$  ( $i=1, 2$  y  $3$ ). Por otra parte, en la misma figura, las líneas discontinuas indican diferentes velocidades de fase para los puntos  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$  y  $4$ ).

Por el contrario, diremos que el medio no es dispersivo si:

$$k(\check{S}) = a\check{S} \quad (a, \text{ es una constante real}).$$

$$c(\check{S}) = \frac{1}{a} \quad ; \text{ constante.}$$

A partir de la ecuación 2.31, la Velocidad de Grupo y Fase serían iguales y constantes,

$$c = U$$

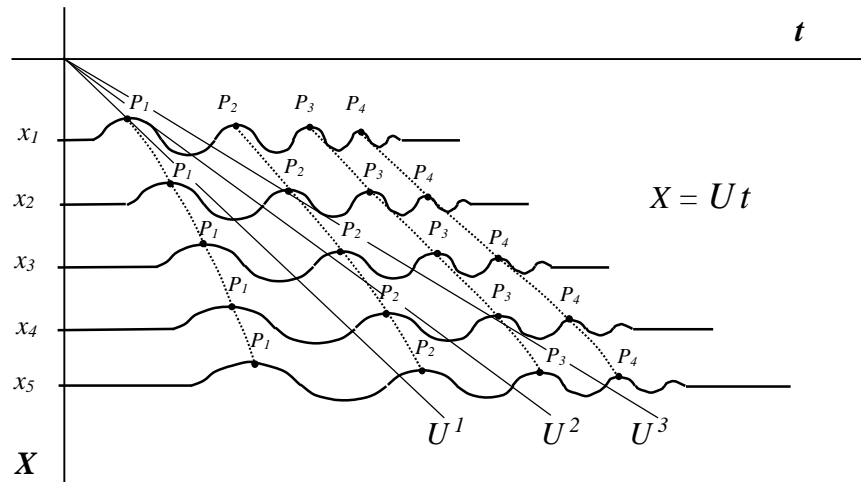


Figura 2.16. Deformación de una onda por efecto de la Dispersión con la Distancia-Tiempo. Las líneas discontinuas unen puntos que tienen la misma fase. Son pues las curvas que representan los cambios de la Velocidad de Fase con la distancia. Por otra parte, las líneas continuas (de pendiente constante), en este diagrama espacio-tiempo, como más adelante demostraremos, representan “curvas”, de Velocidad de Grupo constante (figura modificada de Lay & Wallace, 1995). Para este ejemplo se supone que la distancia entre las estaciones no es muy grande.

Además, no son función de la frecuencia, de manera que todos los componentes armónicos de nuestra señal viajan a la misma velocidad. Así pues, en un punto cualquiera del medio  $x_0$ , en el instante  $t_0$  ( $=c\bar{n} x_0$ ), llega la energía de todas las frecuencias que componen la señal, en ese mismo instante.

## 2.5.5. Principio de Fase Estacionaria.

### A) Aplicación.

La propagación de una señal temporal está determinada por integrales de la forma expresada en la ecuación 2.22 (en las que intervienen coordenadas espaciales y temporales):

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\check{S}, x) e^{i\check{\omega}(\check{S}, x)} \cdot d\check{S} \quad (\text{ec. 2.33})$$

Consideramos propagación en una sola dirección. Por lo demás, la función  $f(x,t)$ , es una función totalmente general respecto al parámetro tiempo “ $t$ ”, del que *a priori* no haremos ninguna suposición.

En la ecuación 2.33:

$$M(\check{S}, x) = \frac{1}{2f} F(\check{S}) A(\check{S}, x) \quad (\text{ec. 2.34})$$

$$\check{\omega}(\check{S}, x) = \check{\omega} - \frac{x}{t} k(\check{S}) \quad (\text{ec. 2.35})$$

Esta última expresión representa el cambio de fase al propagarse la señal por el medio.

La evaluación exacta de la ecuación 2.33, es en general muy complicada. Nosotros intentaremos aquí hallar el valor de  $f(x,t)$ , considerando la aproximación para grandes valores de la distancia “ $x$ ” y, lógicamente, como supondremos una velocidad finita, implicará grandes valores del tiempo, “ $t$ ”.

Trataremos de resolver el valor de la integral de la ecuación 2.33 de una manera asintótica, para grandes valores de “ $t$ ”, (matemáticamente lo expresaremos por: “ $t \rightarrow \infty$ ”), en cuyo caso, podemos aplicar el *Principio de Fase Estacionaria* (método que se debe a Kelvin y Stokes).

Este Principio viene a decir, que cuando el parámetro “ $t \rightarrow \infty$ ” (es decir, físicamente toma valores muy grandes), la integral de la ecuación 2.33 tiende a

cero (o lo que es lo mismo,  $f(x, t) \rightarrow 0$ ), excepto en los puntos donde la fase (la función  $\tilde{w}(\tilde{S}, x)$ ), es **estacionaria**. Más adelante veremos qué significa esto.

Aquí en este trabajo, vamos a intentar dar una demostración general, somera y con apoyo gráfico, de dicho Teorema. Una demostración rigurosa la podemos encontrar en el ya citado libro de A. Papoulis (1962), pag. 139-142, y en M. Bath (1968), pág. 41 y ss.

La demostración se basa en la idea del Límite Generalizado (Papoulis, 1962, pag. 277-278) y en el Lema de Riemann-Lebesgue, en el que se verifica la siguiente expresión:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-i\tilde{S}t} w(\tilde{S}) d\tilde{S} = 0 \quad (\text{ec. 2.36})$$

donde “ $b$ ” y “ $a$ ”, son constantes que pueden ser finitas o infinitas, y “ $w(\tilde{S})$ ”, será una función integrable en el intervalo “ $(a, b)$ ”.

La idea intuitiva que se debe retener de esto último que acabamos de decir se basa en que, cuando “ $t \rightarrow \infty$ ”, el factor “ $e^{-i\tilde{S}t}$ ”, oscilará muy rápidamente, y “ $w(\tilde{S})$ ”, cambiará de forma comparativa muy lentamente, de tal manera que las frecuencias muy cercanas interfieren destructivamente, anulándose entre sí.

Sin embargo, el “Principio de Fase Estacionaria”, nos dice que la integral de la ecuación 2.33, puede aproximarse por los puntos donde la fase se hacía **estacionaria**, es decir, donde:

$$\tilde{w}'(\tilde{S}, x) = \left. \frac{d\tilde{w}(\tilde{S}, x)}{d\tilde{S}} \right|_{\tilde{S}=\tilde{S}_0} = 0 \quad (\text{ec. 2.37})$$

La fase,  $\tilde{w}(\tilde{S}, x)$ , se hace **estacionaria** en el punto  $\tilde{S}_0$ , cuando podemos considerarla prácticamente constante en frecuencias próximas a  $\tilde{S}_0$  (ver Figura 2.16).

Para calcular de una forma aproximada la integral de la ecuación 2.33, y con ello el valor de  $f(x, t)$  en determinados puntos, considerados estos como las frecuencias donde la fase se hace estacionaria, aplicamos un desarrollo en serie de Taylor de la Fase  $\tilde{w}(\tilde{S}, x)$  en dicho punto (de momento supondremos que la fase sólo posee un punto donde es estacionaria).

$$\tilde{w}(\tilde{S}, x) \approx \tilde{w}(\tilde{S}_0, x) + \tilde{w}'(\tilde{S}_0, x)(\tilde{S} - \tilde{S}_0) +$$

$$+ 1/2 \ddot{\tilde{\tau}}(\tilde{S}_0, x) (\tilde{S} - \tilde{S}_0)^2 + \dots$$

Donde  $\ddot{\tilde{\tau}}(\tilde{S}_0, x)$  es la derivada segunda en el punto  $\tilde{S}_0$ :

$$\ddot{\tilde{\tau}}(\tilde{S}, x) = \left. \frac{d^2 \tilde{\tau}(\tilde{S}, x)}{d\tilde{S}^2} \right|_{\tilde{S}=\tilde{S}_0}$$

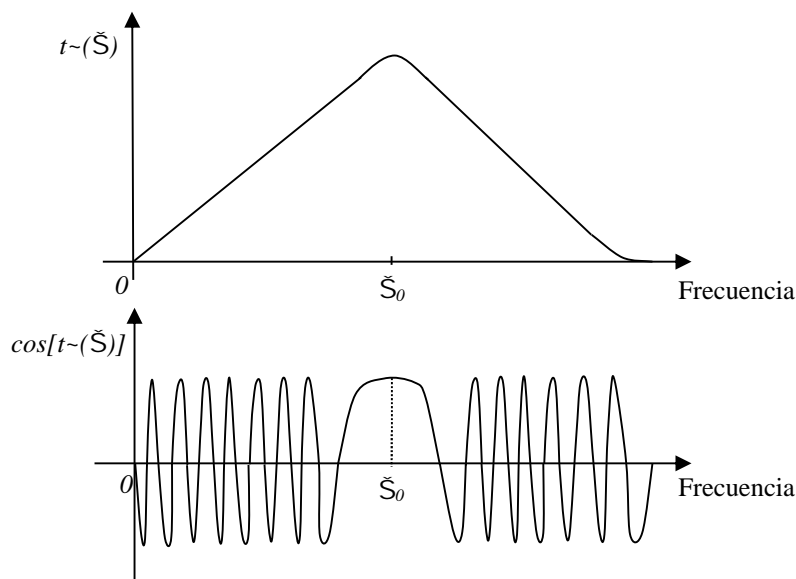


Figura 2.17. Representación gráfica de un punto de Fase Estacionaria,  $\tilde{S}_0$ . En general la función  $\cos[ t\text{-}(\tilde{S}) ]$ , oscilará muy rápidamente, excepto donde su argumento sea estacionario.

Como se ha considerado  $\tilde{S}_0$ , un punto donde la fase se hace estacionaria, el término lineal es nulo y nos quedamos sólo con el término cuadrático para la frecuencia<sup>3</sup>,

$$\tilde{\tau}(\tilde{S}, x) \approx \tilde{\tau}(\tilde{S}_0, x) + 1/2 \ddot{\tilde{\tau}}(\tilde{S}_0, x) (\tilde{S} - \tilde{S}_0)^2 + \dots \quad (\text{ec. 2.38})$$

<sup>3</sup> Suponiendo que la Fase tiene un comportamiento lo suficientemente suave respecto a la frecuencia, las derivadas de orden mayor que dos, son despreciables.

Si se sustituye esta aproximación de la fase en la ecuación 2.32, sabiendo que el término  $\tilde{\omega}(\tilde{S}_0, x)$  es constante para la frecuencia, ya que está particularizado para la frecuencia  $\tilde{S}_0$ , se puede sacar fuera de la integral. También podemos aproximar,  $M(\tilde{S}, x) \approx M(\tilde{S}_0, x)$ . Siendo pues, este último factor también constante, para las frecuencias. Obtenemos pues;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(\tilde{S}, x) e^{i\tilde{\omega}(\tilde{S}, x)} \cdot d\tilde{S} \cong M(\tilde{S}_0, x) e^{i\tilde{\omega}(\tilde{S}_0, x)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\omega}(\tilde{S}_0, x) \frac{(\tilde{S} - \tilde{S}_0)^2}{2}} \cdot d\tilde{S} \quad (\text{ec. 2.39})$$

En este caso aunque consideremos tiempos muy grandes (es decir,  $t \rightarrow \infty$ ), ahora, en la integral del segundo miembro de la ec. 2.39 en la que aparece el factor exponencial de la frecuencia (que depende de la potencia cuadrática de la frecuencia), hace que no se anulen los armónicos muy cercanos (como para la integral del Lema Riemann-Lebesgue). Al contrario, estos interfieren constructivamente, así pues, en la integral de la ecuación 2.39, debemos tener en cuenta la influencia de las frecuencias vecinas a la frecuencia  $\tilde{S}_0$ .

Resolviendo la integral del miembro derecho de la expresión 2.39, que es igual al valor de  $\sqrt{i \cdot f}$ , obtenemos el valor de la señal en el punto donde la fase se hace estacionaria:

$$f(x, t) \cong 2 \cdot M(\tilde{S}_0, x) \sqrt{\frac{2f}{xk''(\tilde{S}_0)}} \cdot \cos \left[ \tilde{S}_0 t - xk(\tilde{S}_0) - \frac{f}{4} \right] \quad (\text{ec. 2.40})$$

Hemos supuesto, que  $\tilde{\omega}(\tilde{S}, x)$  es una función impar, de forma que si  $\tilde{\omega}'(\tilde{S}_0, x) = 0$ , entonces también lo es  $\tilde{\omega}'(-\tilde{S}_0, x)$ . Hay pues al menos, dos puntos que hacen la fase estacionaria,  $\tilde{S}_0$  y  $-\tilde{S}_0$ . Como la integral está extendida tanto a valores positivos como negativos de la frecuencia, el integrando de la ecuación 2.39. da lugar a dos términos conjugados que están sumados, quedando sólo los términos reales (como hemos hecho aparecer en la ecuación 2.40).

Hemos tenido en cuenta los valores de  $\tilde{\omega}(\tilde{S}, x)$  y, sus respectivas derivadas respecto a la frecuencia:

$$\tilde{\omega}(\tilde{S}, x) = \tilde{S} - \frac{x}{t} k(\tilde{S}),$$

entonces,



$$\tilde{\omega}'(\tilde{S}, x) = 1 - \frac{x}{t} k'(\tilde{S}) \quad (\text{ec. 2.41})$$

y

$$\tilde{\omega}''(\tilde{S}, x) = -\frac{x}{t} \cdot \frac{d^2 k(\tilde{S})}{d\tilde{S}^2} = -\frac{x}{t} k''(\tilde{S}) \quad (\text{ec. 2.42})$$

Siendo  $k'(\tilde{S})$  y  $k''(\tilde{S})$ , respectivamente, las derivadas primeras y segunda respecto a la frecuencia. Valores estos, que hemos tenido en cuenta para obtener la ecuación final de la función  $f(x, t)$  (ec. 2.40).

Para terminar con esta demostración, si suponemos que la fase  $\tilde{\omega}(\tilde{S}, x)$  contiene “ $n$ -frecuencias” ( $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_n$ ) donde se hace estacionaria, obtenemos:

$$f(x, t) \cong 2 \cdot \sum_{i=1}^n M(\tilde{S}_i, x) \sqrt{\frac{2f}{t \tilde{\omega}''(\tilde{S}_i)}} \cdot \cos \left[ t \tilde{\omega}(\tilde{S}_i, x) + \frac{f}{4} \right] \quad (\text{ec. 2.43})$$

Hemos pasado pues, de una señal, que obteníamos como suma continua de frecuencias (a través de una integral, ec. 2.33), a una señal que se obtiene como un sumatorio discreto, y en principio finito, de armónicos.

## B) Conclusiones.

Vamos a comentar en este apartado, además de lo que ya hemos dicho, algunas de las consecuencias físicas que podemos extraer del resultado anterior, obtenido por el “Método de Fase Estacionaria”, desde un formalismo puramente matemático:

- B.1.** Al igual que el Fenómeno de la Dispersión, el Principio de Fase Estacionaria sólo tiene aplicabilidad para una señal que está formada por una banda de frecuencias más o menos ancha. Si tuviéramos una señal con una frecuencia única, no podríamos hablar de interferencia entre armónicos.

**B.2.** El Principio de Fase Estacionaria tiene soluciones distintas de la trivial, si el medio es dispersivo.

Esto significa que existe una Ecuación de Dispersión para el medio por el que se propaga la señal, en la que el parámetro  $k(\check{S})$  tenga una dependencia más o menos complicada de la frecuencia (siempre que no sea lineal), de tal manera, que lo que hemos llamado la fase de la señal en estudio “ $t\check{\sim}(\check{S}, x)$ ”, se haga estacionaria en determinadas frecuencias. Es decir, que la función  $\check{\sim}(\check{S}, x)$ , tenga un máximo o mínimo en función de la frecuencia.

Así pues, igualando a cero, la derivada de  $\check{\sim}(\check{S}, x)$ , (ec. 2.35):

$$\check{\sim}'(\check{S}_0, x) = 1 - \frac{x}{t} k'(\check{S}_0) = 0 \quad (\text{ec. 2.44})$$

Despejando el valor de la relación “ $x/t$ ”,

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{k'(\check{S}_0)} = U \quad (\text{ec. 2.45})$$

Esta ecuación supone una dependencia entre la relación espacio-tiempo y la(s) frecuencia(s), que hacen estacionaria la fase ( $\check{S}_0$ ). Ya lo habíamos comentado cuando se introdujo la Figura 2.16.

Así pues, la ecuación 2.45, nos permitirá calcular para un posición  $x = x_0$  y en un instante cualquiera  $t = t_0$ , la frecuencia  $\check{S} = \check{S}_0$ , que observaríamos. Fíjese el lector cómo influye la Ecuación de Dispersión del Medio Físico (o mejor dicho su derivada).

En el caso de las Ondas Sísmicas, si consideramos la posición de observación ( $x_0$ ), fija, la ecuación 2.45 nos permite calcular qué frecuencias podemos observar (o registrar) a medida que el tiempo va transcurriendo (y este registro son los sismogramas).

La ecuación final 2.40, la podemos expresar en función del punto de observación ( $x$ ) y el tiempo transcurrido ( $t$ ).

Por otra parte, la expresión 2.45, es la Velocidad de Grupo de la señal para la frecuencia  $\check{S}_0$  (como habíamos definido en su momento):

$$U(\check{S}_0) = \frac{1}{k'(\check{S}_0)} \quad (\text{ec. 2.46})$$

Habíamos dicho que la velocidad de cada armónico (frecuencia), venía dado por la Velocidad de Fase, pero, como una señal real está compuesta por la interferencia (suma) de muchos armónicos (a veces infinitos, recordemos la Integral de Fourier), será la Velocidad de Grupo la que nos permite averiguar qué frecuencias podemos *observar* para una posición e instante de tiempo determinado. Se puede comprobar que la frecuencia instantánea para una posición fija es,

$$\check{S}(t) = \left( \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right)_x$$

Es decir, precisamente el valor de  $\check{S}_0$ .

Relaciones entre la Velocidad de Fase y Grupo en un medio anisótropo<sup>4</sup>, podemos encontrarlo en el libro de Kennett, 2001.

**B.3.** Si consideramos cierta analogía con la función ejemplo, que expusimos al principio de este apartado (ec. 2.15), y el resultado que obtuvimos en su momento (ec. 2.20), la ecuación 2.40, la podemos expresar como:

$$f(x,t) \cong \frac{1}{f} F(\check{S}_0) R(x,t) \cos[W(x,t)] \quad (\text{ec. 2.47})$$

Donde:

$$R(x,t) = A(w_0, x) \sqrt{\frac{2f}{xk''(w_0)}} \quad (\text{ec. 2.48})$$

y,

---

<sup>4</sup> Recuérdese que la **anisotropía** es una característica del medio, en el cual, la velocidad de propagación de una perturbación, depende de la dirección de vibración de dicha perturbación. Ver artículo de Aster *et al.*, 1990.

$$w(x,t) = k(\check{S}_0) \left[ \frac{\check{S}_0}{k(\check{S}_0)} t - x \right] + \frac{f}{4} \quad (\text{ec. 2.49})$$

Sabiendo, que  $\check{S}_0$  es función de la relación  $(t/x)$ , por la ecuación 2.45. Si nos fijamos en el argumento de la función coseno, ec. 2.47,  $w(x,t)$ , podemos considerar la señal  $f(x, t)$  como un señal modulada, con una frecuencia portadora  $\check{S}_0$ , que se propaga con la llamada Velocidad de Fase (ec. 2.30).

$$c(\check{S}_0) = \frac{\check{S}_0}{k(\check{S}_0)} \quad (\text{ec. 2.50})$$

Así pues, la fase queda de la siguiente forma:

$$W(x,t) = k(\check{S}_0) \left[ c(\check{S}_0)t - x \right] + \frac{f}{4} \quad (\text{ec. 2.51})$$

Y en cuento al factor  $R(x,t)$ , diríamos que es el término Modulador en Amplitud de la señal debido al Medio, sabiendo que las frecuencias *observadas* en cada instante ( $\check{S}_0$ ), vienen determinadas por la Velocidad de Grupo (relaciones 2.45 y 2.46).

Ocurre que la señal no estaría sólo modulada en amplitud, si no en frecuencia también, ya que la frecuencia de la señal portadora va cambiando con el tiempo, controlada por Velocidad de Grupo, como ya se ha dicho en varias ocasiones.

El termino  $R(x,t)$  es en principio, inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia recorrida; así pues, aparece el término que conocemos como “Atenuación Geométrica“, sin haber hecho casi ningún tipo de suposición sobre la señal, pero que se corresponde con la dependencia especial de una onda canalizada dentro de un medio (por ejemplo, una capa sobre un medio semi-infinito en el que la onda se propaga sólo en dos dimensiones), y que hemos llamado Señal Estacionaria.

**B.4.** Diremos que nuestra señal se hace estacionaria siempre y cuando consideremos tiempos suficientemente largos (matemáticamente expresados por  $t \gg \lambda$ ), lo que implica grandes distancias, ( $x \gg \lambda$ ). De

aquí que la aparición de las ondas canalizadas (en sismología llamadas Ondas Superficiales), tenga lugar a distancias más o menos lejanas de la fuente. Se pueden consultar las reglas empíricas que han sido dadas para la atenuación geométrica de la onda S a distancias regionales (podemos citar entre otros a Hasegawa, 1983). Se la conoce como onda interna ( $S_g$ ), para distancias menores de 100 km, con una atenuación inversamente proporcional a la distancia para la amplitud (frente de ondas esféricos). También como onda canalizada ( $L_g$ ), para distancias mayores de 100 Km, con una atenuación con la distancia de la amplitud menor que en el caso anterior (en muchos casos se supone inversamente proporcional al inverso de la raíz cuadrada de la distancia, que correspondería con la expansión del frente de ondas según la superficie lateral de un cilindro).

- B.5.** Para terminar esta serie de conclusiones, podemos decir, que nuestra señal (ec. 2.33) se propaga por un medio dispersivo, pero si esto no fuese así (donde no existiera una verdadera Ecuación de Dispersión), por el Lema de Riemann-lebesgue (ec. 2.36), se verificaría para la señal que:

$$f(x, t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

Físicamente quiere decir, que la señal es transitoria, no estacionaria. De tal forma que si en un punto  $x=x_0$ , la onda comenzando en un determinado instante  $t = t_0$ , tendrá una duración finita (dependiendo de la fuente), pero después de un cierto tiempo, como todas las frecuencias viajan a la misma velocidad, la señal se extinguirá. No ocurre lo mismo, con las señales que viajan por un medio dispersivo, donde la señal se hace **estacionaria**. Si la señal de partida tiene un contenido frecuencial más o menos grande, la duración de la señal es mucho mayor, que para un medio no dispersivo, dando lugar a los conocidos “trenes de onda”.

### 2.5.6. Fase de Airy.

Comenzamos preguntándonos ¿qué ocurre si en la ecuación 2.39,  $k''(\tilde{\omega}_0) = 0$ ?. Es decir, si se está en un mínimo (o máximo) de la Ecuación de

Dispersión. Hasta ahora no hemos dicho nada o casi nada, sobre la dependencia con la frecuencia del parámetro  $k(\check{S})$ , o lo que es lo mismo, sobre la forma específica de la Ecuación de Dispersión.

Si en la ecuación 2.39, la fase tuviese un punto doble, es decir;

$$\check{\sim}'(\check{S}_0, x) = \check{\sim}''(\check{S}_0, x) = 0$$

Implicaría (por la ecuación 2.34) que  $k''(\check{S}_0) = 0$ , y que estaríamos ante un mínimo o un máximo de la Velocidad de Grupo, como hemos dicho antes. Tendremos un punto de singularidad para  $\check{S}_0$ , en el resultado final de la ecuación 2.39. Para evitar esta singularidad, si se toma nuevamente el desarrollo en serie de  $\check{\sim}(\check{S}, x)$ , como ya se hizo en su momento, como la segunda derivada de  $\check{\sim}(\check{S}, x)$  se anula en  $\omega_0$ , se incluye el término siguiente (término cúbico), en el desarrollo. Al sustituir este desarrollo en la integral de la ecuación 2.32, aparecen las llamadas integrales de Airy [ver Bath, M. (1968), pp. 58-65, para la resolución de este tipo de integrales].

Las amplitudes que se obtienen para la señal  $f(x, t)$ , en este punto y próximos a él, se denominan Fase de Airy, y viene dada de una forma general, no por la ecuación 2.39, si no por;

$$f(x, t) = M(\check{S}_0, x) \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \left[ \frac{6}{xk'''(\check{S}_0)} \right]^{1/3} \cdot \cos[\check{S}_0 t - k(\check{S}_0)x + \frac{f}{4}] \quad (\text{ec. 2.52})$$

Donde:

$\Gamma(\alpha)$  : es la Función Gamma del valor  $\alpha$ .

$k'''(\check{S}_0)$  : es la derivada de tercer orden del parámetro  $k(\check{S})$ , en la frecuencia  $\check{S}_0$ .

Se observa que para la Fase de Airy, el Factor de la Atenuación Geométrica decrece con una dependencia de la distancia de  $x^{-1/3}$ , para la frecuencia  $\check{S}_0$ , y próximas a éstas, en contra de lo que ocurre para otras frecuencias de la Curva de Dispersión donde la Amplitud decrece como  $x^{-1/2}$ . Esto intuitivamente puede ser explicado diciendo que todas las ondas de frecuencias comprendidas en un entorno a la frecuencia  $\check{S}_0$ , tienen prácticamente la misma velocidad de grupo, lo que permite que lleguen en instantes muy cercanos en el tiempo. Esto hace que se **sumen** las amplitudes de todas ellas. En Udías & Mézcua, 1997, pp. 191 y 192, tenemos una idea gráfica de lo que

acabamos de decir. Volvemos a ver, cómo la atenuación con la distancia de una onda depende de la forma en que los componentes armónicos interfieren entre sí.

El resultado es que a medida que la onda se va propagando en el espacio, la Fase de Airy (las frecuencias próximas a un punto de máximo o mínimo de la velocidad de grupo), se va atenuando más lentamente que el resto de las frecuencias de la Curva de Dispersión. Esto implica que para distancias lo suficientemente grandes, la Fase de Airy presentaría una amplitud mayor que las demás.

### 2.5.7. Aplicación del Fenómeno de la Dispersión.

Hasta ahora se ha tratado el fenómeno de la dispersión de una manera muy general, no se han hecho muchas alusiones a señales sísmicas y al problema sismológico. Hemos querido definir unos conceptos muy generales, con cierta rigurosidad, que bien se pueden aplicar a cualquier otro tipo de señales, que no tienen por que ser las ondas elásticas de la sismología.

La aplicación de todos los conceptos dados arriba, en un plano puramente sismológico, conocido con el nombre de “ Ondas Superficiales “, está tratado en muchos temas, de muchos libros de sismología, por citar algunos: Aki, K. & Richards, D.G. (1980), en el Tomo I, Capítulos 7 y 6, Lay, T. & Wallace, T. (1995), Capítulo 4. Bullen, K.E. & Bolt, B.A. (1993), en el Capítulo 5, y Udías, A. & Mézcua, J. (1997), Capítulo 10.

En el caso concreto de la sismología, el medio por donde se propaga las ondas generadas por una fuente sísmica o terremoto, es el interior de la Tierra cuya función de transferencia habíamos representado por la ecuación 2.21.

$$H(\tilde{S}, x) = A(\tilde{S}, x) e^{-i_n(\tilde{S}, x)}$$

En el término “ $A(\tilde{S}, x)$ ”, podemos incluir la atenuación anelástica, el scattering, etc.,... y hemos asociado todo el fenómeno de la dispersión al término de la fase, “ $i_n(\tilde{S}, x)$ ”.

Dicha ecuación representa un medio no dispersivo para las llamadas ondas internas, P y S, que viajan por el interior de la Tierra, es decir, sus Velocidades de Fase y Grupo son iguales, y por tanto no dependen de la frecuencia. Sin embargo, cuando estas ondas llegan a “canalizarse” por las capas más superficiales de la Tierra; Corteza y Moho Superior, el medio por el que se propagan se comporta como un medio dispersivo, con una Ecuación de Dispersión característica, que depende directamente de las constantes del medio,

---

que en nuestro caso, pueden ser velocidad de las Ondas P y S, rigidez del medio, número de capas, etc.,...



## Capítulo 3.

# Propiedades de la propagación de Ondas Canalizadas.

### 3.1. Introducción.

En este capítulo, se incluyen, diferentes aspectos de la propagación de las Ondas Canalizadas u ondas que se propagan en medios estratificados. No se va a exponer la teoría sobre propagación de ondas en medios estratificados de una forma integra, que el lector podrá encontrar en los textos de sismología que se han citado en el capítulo anterior. No obstante podemos destacar a Aki & Richards (1980), en el Cap. 7, donde trata el Método de la Matriz Propagadora (debido a Gilbert & Backus), particularizada para el método de la Matriz de Thomson-Haskell. Aquí se van a comentar ciertas propiedades interesantes, haciendo hincapié en los aspectos más originales de este trabajo, de una teoría que está sólidamente construida. Nos remitimos al **Apartado 2.2.1**, para retomar las conclusiones expuestas. Más tarde profundizaremos en modelos más complicados.

### 3.2. Relación entre un Modo de Propagación específico y un determinado Haz de Rayos.

#### A) Capa Líquida sobre un medio rígido.

Habíamos supuesto en el **Apartado 2.2.1**, un modelo muy simplificado de corteza, es decir, una capa de un determinado espesor sobre un medio

semi-infinito, cuya velocidad para las ondas elásticas es mayor que la velocidad de la capa. Aunque el modelo es sumamente sencillo, se pueden extraer conclusiones muy generales e importantes. En este apartado se plantea un modelo más simplificado aún, pero que permite deducir con cierta rigurosidad, las propiedades y conclusiones que se verán al final.

Suponer una capa líquida de espesor  $H$ , y velocidad de Ondas  $P$ , " $r$ ", sobre un medio rígido. Sabemos que en el medio líquido no pueden propagarse ondas  $S$ .

Como se ha dicho ya, no se va a plantear aquí la ecuación de ondas, con las condiciones de contorno, que deben ser; para la superficie libre, esfuerzos verticales nulos ( $\ddagger_{33}=0$ ), y en la base de la capa líquida, la componente vertical del desplazamiento es nula. Su resolución no entraña ningún problema, ver Udías (1999) y un tratamiento algo diferente y más completo en Ewing & *et.* (1957), en el Cap. 4-4.

Este modelo nos permite obtener una de las Ecuaciones de Dispersión más sencilla que podemos suponer<sup>5</sup>:

$$\cos\left(kH\sqrt{\frac{c^2}{r^2}-1}\right) = 0 \quad (\text{ec. 3.1})$$

Esto implica que;

$$kH\sqrt{\frac{c^2}{r^2}-1} = \frac{2n+1}{2}f, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{ec. 3.2})$$

Donde:

$c$  ; es la velocidad aparente de las ondas canalizadas dentro de la capa.

Se debe verificar que  $c > r$  ; para que el radical de las ecuaciones anteriores, sea un número real. Recordemos que en función del ángulo de incidencia (ec. 2.2).

$$c = \frac{r}{\text{sen } i}$$

---

<sup>5</sup> Ewing *et al.* (1957), obtiene:

$$\text{tg}\left(kH\sqrt{\frac{c^2}{r^2}-1}\right) \rightarrow \infty.$$

Ecuación, que es análoga a la ecuación 3.1, de este trabajo.

$k$  ; es el número de onda correspondientes a esa velocidad aparente.

$$k = k_r \text{sen} i \quad (\text{ec. 3.3})$$

$k_r$  ; Es el número de onda de la señal en la fuente, y no depende del ángulo de incidencia.

$$r = \frac{\check{S}}{k_r} \quad (\text{ec. 3.4})$$

$\check{S}$  ; es la frecuencia de la señal inicial.

Y la frecuencia de corte para cada modo, viene dado por;

$$\check{S}_c = \frac{f(n + \frac{1}{2})}{H} \quad (\text{ec. 3.5})$$

Obteniéndose para  $\check{S} = \check{S}_c$ ,  $c \Rightarrow \iota$ . (Ver Figura 3.1).

Donde se obtiene esta sencilla Ecuación de Dispersión en función del ángulo de incidencia.

Si se utiliza la ecuación 3.4, para expresar la Ecuación de Dispersión, en función de la **frecuencia**, y considerando  $\check{S} = \check{S}_0$  una frecuencia fija.

$$\frac{\check{S}_0}{r} H \cos i = \frac{(2n + 1)}{2} f \quad (\text{ec. 3.8})$$

Para el modo fundamental;  $n = 0$ , tenemos:

$$\frac{\check{S}_0}{r} H \cos i_0 = \frac{f}{2}$$

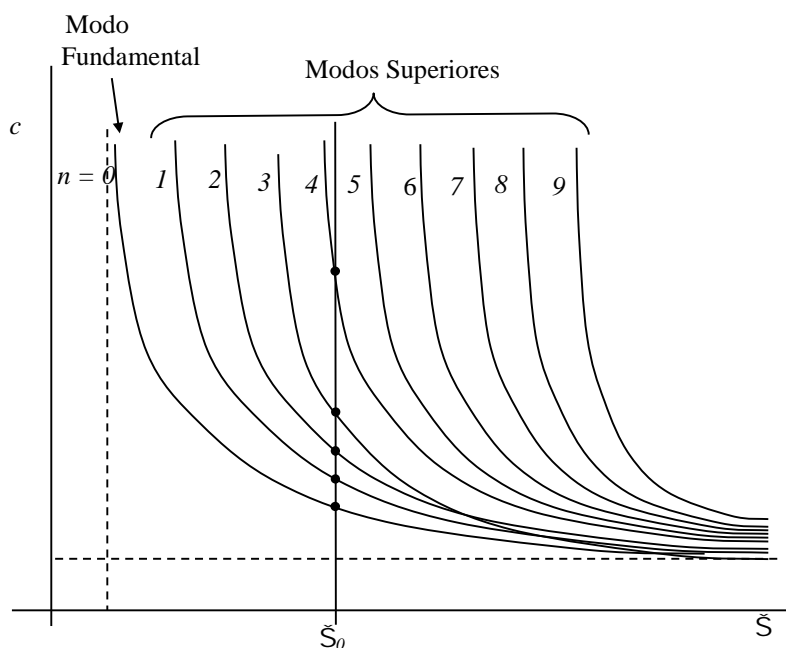


Figura 3.1. Curvas de Dispersión para una Capa Líquida sobre un Medio Rígido. Modo Fundamental ( $n = 0$ ) y Modos Superiores. Sabiendo que:  $c$ ; Velocidad de Fase y,  $\check{S}$ ; frecuencia.

Para los siguientes modos  $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{\check{S}_0}{r} H \cos i_1 = \frac{3f}{2}, \quad \frac{\check{S}_0}{r} H \cos i_2 = \frac{5f}{2}, \dots$$

Luego para una determinada frecuencia tendremos un número de modos limitados, de tal manera que se verifica:

$$\cos i_0 < \cos i_1 < \cos i_2 < \dots$$

O lo que es lo mismo,

$$\frac{f}{2} > i_0 > i_1 > i_2 \dots > 0. \quad (\text{ec. 3.9})$$

En cuanto a los límites impuestos en la expresión de arriba, recordemos el Apartado 2.2.1, donde se dedujo la Ecuación de Dispersión para el caso de una capa sobre un medio semi-infinito, en el que los rayos deberían ser rayos supercríticos, es decir, con ángulos de incidencia mayores que el crítico ( $i_c$ ). En este caso, siendo un medio semi-infinito **rígido**, el ángulo crítico es cero. (Ver **Apéndice B**).

Esta deducción permite concluir, que para una frecuencia determinada ( $\check{S}_0$ ), el modo fundamental representa el rayo con mayor ángulo de incidencia, es decir, es el rayo más rasante a las superficies de separación. Así pues, ordenes de modo mayores, representan rayos más verticales (Ver Figura 3.2).

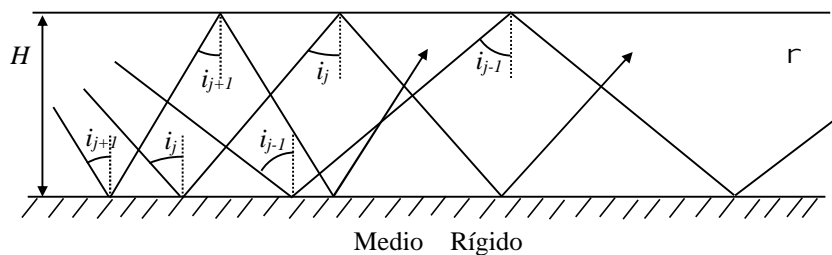


Figura 3.2 Modelo de una Capa Líquida sobre un Medio Rígido. Donde  $i_{j-1}$ ,  $i_j$  e  $i_{j+1}$ ; son los ángulos de incidencia para tres modos de vibración sucesivos, con  $i_{j-1} > i_j > i_{j+1} \dots$

Si volvemos a la ecuación 3.8, se puede ver que cuanto mayor es la frecuencia, mayor es el número de modos (o rayos) que pueden existir. Interesante propiedad que más adelante aplicaremos, de forma particular, a la *Onda Lg*, y para el rango de frecuencias de los terremotos regionales (**Capítulo 5**). Por otra parte, si disminuimos el espesor de la capa ( $H$ ), menor será el número de rayos que podemos tener, para una misma frecuencia.

Esta propiedad, es la que se utiliza en telecomunicaciones, en la tecnología de fibra óptica, donde el diámetro de la fibra se reduce al valor de la longitud de onda (en este caso del haz de luz, como onda electromagnética), obteniéndose una fibra de un solo modo, que se comporta como una **guía de ondas**. Así pues, la luz se propaga paralelamente al eje de la fibra, casi sin rebotar en las superficies (con ángulos de incidencia próximos a  $90^\circ$ ).

## B) Capa Elástica sobre un medio semi-infinito elástico.

Todo lo dicho en el apartado anterior (Apartado A), aunque sea un modelo muy sencillo e ideal, es igualmente válido para el modelo que consideramos en el **Punto 2.2.1**, es decir, propagación de una onda en una determinada dirección, en una capa sólida de espesor  $H$  sobre un medio semi-infinito, cuyas velocidades de las ondas de cizalla habíamos supuesto  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente, y en que los módulos de rigidez eran  $\sim_1$  y  $\sim_2$ , respectivamente, con  $S_2 > S_1$ .

Las curvas se obtenían de la ecuación de dispersión (ec. 2.7), y las frecuencias de corte para cada modo, vienen dadas por la ecuación 2.8.

La ecuación de Dispersión en este caso es mucho más complicada (ec. 2.9), y deducir algún tipo de propiedad para el ángulo de incidencia, resultaría mucho más tedioso y complicado. Se puede observar que a medida que aumentamos el orden del modo, mayor es la velocidad de fase, para una frecuencia determinada ( $\check{S} = \check{S}_0$ ). Véase la Figura 2.3, del Capítulo 2.

$$S_1 < c_0 < c_1 < c_2 < \dots < S_2 \quad (\text{ec. 3.10})$$

Donde  $c_0$  es la velocidad de fase del modo fundamental y,  $c_n$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$ , la velocidad de los modos superiores respectivamente.

Suponiendo que la velocidad de fase, viene dada por la ecuación 2.2;

$$c_n = \frac{S}{\text{sen } i_n} .$$

Donde  $i_n$  es el ángulo de incidencia para el modo  $n$ .

Luego para las desigualdades de las inecuaciones 3.10, se tiene;

$$1 > \text{sen } i_0 > \text{sen } i_1 > \text{sen } i_2 > \dots > \text{sen } i_c .$$

Y por tanto;

$$f/2 > i_0 > i_1 > i_2 > \dots > i_c .$$

Donde  $i_c$ , es el ángulo crítico, que vendrá dado por  $i_c = \arcsen (S_1/S_2)$ .

Al igual que antes, aunque ahora se ha tenido que recurrir a una demostración más o menos gráfica; para una determinada frecuencia el modo fundamental ( $n = 0$ ), representa el rayo más rasante a las interfaces, y a medida que aumentamos el orden del modo ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), menor es el ángulo de incidencia del rayo que representa, es decir, más cerca del ángulo crítico.

Se puede decir que, para una determinada frecuencia<sup>6</sup>, considerando la interpretación de las ondas canalizadas a partir de la interferencia constructiva de rayos, el modo fundamental es el que aparecería a una distancia epicentral mayor (debido a su mayor ángulo de incidencia), véase la Figura 3.3, en la que se representa de forma gráfica, esto último que se acaba de decir.

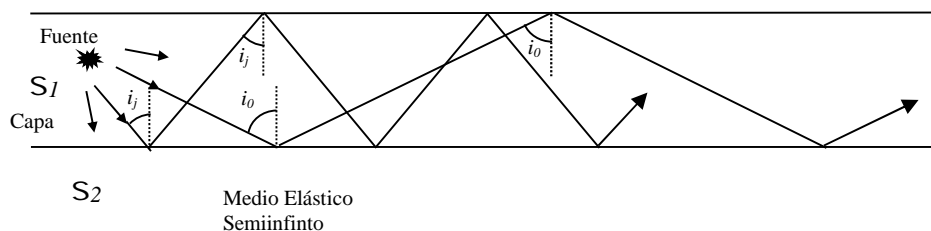


Figura 3.3. Modelo de una Capa Elástica sobre un Medio Elástico Semi-infinito. Sea:  $i_0$  ; ángulo de incidencia asociado al Modo Fundamental,  $i_j$  ; ángulo asociado con un Modo  $j$  Superior. (Véase explicación detallada en el texto).

<sup>6</sup> Las señales sísmicas reales, tienen un contenido energético limitado, en una cierta banda de frecuencias, es decir, señales que no poseen infinitas frecuencias.

### 3.3. Relación entre la Teoría de Rayos y Modos de Vibración para un modelo de dos capas.

Hasta ahora se ha trabajado con un sencillo modelo de una Capa Plana de espesor  $H$ , sobre un medio semi-infinito de mayor velocidad que la capa. (Ver Figura 2.4.). A pesar de su sencillez este modelo ha permitido llegar a importantes conclusiones sobre las ondas canalizadas (ondas  $SH$ ), conclusiones que se pueden considerar del todo generales.

Pero siguiendo en la línea de intentar unir las dos Teorías; la de Rayos y la de Modos, vamos a ver que ocurre cuando se introduce una capa más en el modelo de capas, es decir, se va a considerar un modelo de dos capas planas paralelas de espesores  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente, y velocidades de cizalla  $S_1$  y  $S_2$ , sobre un medio elástico semi-infinito de velocidad  $S_3$ , considerando así, un modelo más realístico de corteza terrestre, y por ende más complicado, con  $S_3 > S_2 > S_1$ .

Se han definido sólo las velocidades de cizalla,  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), pues como en los otros casos, sólo consideraremos ondas de tipo  $SH$  (Ondas Love), ya que permite simplificar el problema en gran medida.

La Ecuación de Dispersión, en esta ocasión, es muy complicada, ver Ewing *et al.* (1957) en Capítulo 4-3, donde resuelve la ecuación de Ondas para un modelo compuesto de dos capas líquidas superpuestas a un medio líquido semi-infinito, dando una expresión analítica para la Ecuación de Dispersión para dicho modelo.

Se pueden observar, las Curvas de Dispersión, para el modelo en cuestión, al principio de este apartado, y cuya Ecuación de Dispersión habría que resolver de una forma numérica (Ver Figura 3.4).

Así pues, para la frecuencia  $\tilde{S}_0$  (considerando una y sólo una frecuencia), el Modo  $n$ , según la interpretación expuesta, representaría un rayo con un ángulo de incidencia  $i_n$ , entre las dos capas y que no se transmite a la capa segunda, pues incide con un ángulo mayor que el crítico ( $i_{c_1}$ ) para estos dos medios. (Ver Figura 3.5).



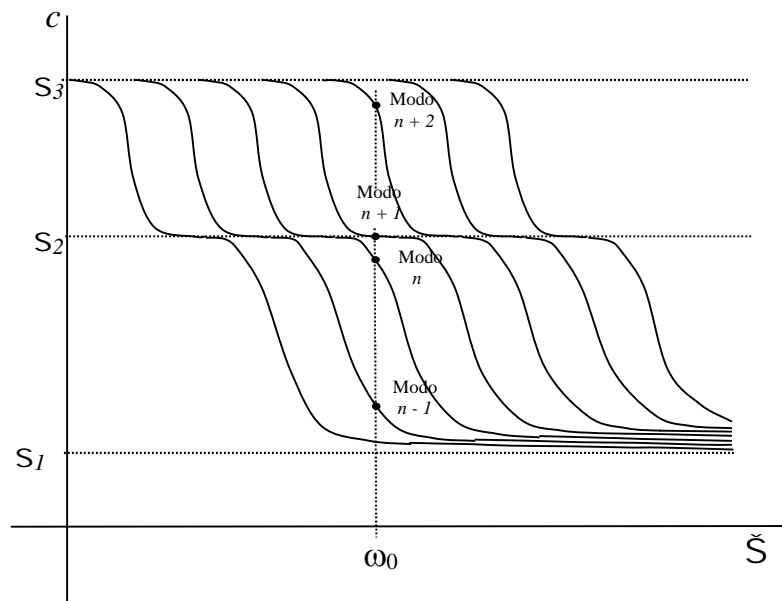


Figura 3.4 Forma cualitativa de las Curvas de Dispersión de Velocidad de Fase de Ondas Love, para un medio de dos capas y un medio semi-infinito.

Sabiendo que:

$$i_{c_1} = \arcsen(S_1/S_2)$$

Sin embargo, para el modo  $n+1$ , (ver Figura 3.4) en la frecuencia  $\tilde{S}_0$ , representa un rayo que si se transmite a la capa 2. Así, pues todos los rayos con ángulos de incidencia comprendidos entre  $i'_c < i < i_{c_1}$ , son rayos supercríticos para el medio semi-infinito, pero que se transmiten a la segunda capa.

Siendo:

$$i'_c = \arcsen(S_1/S_3)$$

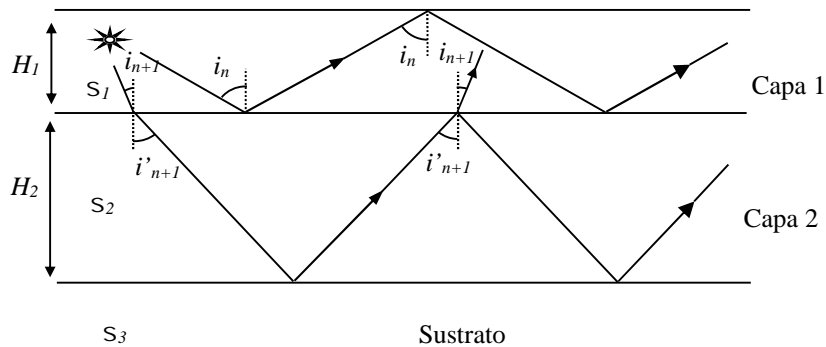


Figura 3.5 Rayos de frecuencia  $\tilde{S}_0$  en interferencia constructiva, para ángulos de incidencia  $i < i_{c1}$ , que llegan a la segunda capa. (Ver texto).

Que fácilmente se deduce de la condición de ángulo crítico, entre la segunda capa y el medio semi-infinito.

Se puede deducir, que en el caso que se está considerando, el modo  $n$ , a la frecuencia determinada  $\tilde{S}_0$ , representa un rayo que viaja canalizado o guiado, tan sólo por la primera capa y no le afecta la presencia de la segunda capa. Sin embargo el Modo  $n + 1$ , representa un rayo que viaja canalizado por ambas capas (Capa 1 y 2). Es decir, representaría un rayo supercrítico entre la segunda capa y el medio semi-infinito, que viaja en interferencia constructiva entre la superficie libre y el medio semi-infinito. (Ver Figura 3.6).

**De lo expuesto, se pueden sacar las siguientes conclusiones:**

- A) Debe quedar claro; que no son los modos de orden más bajos los que penetran más profundamente en el interior de la Tierra, como se puede observar en las Curvas de Dispersión, (Figura 3.4). Por todo lo que se ha dicho aquí, son los modos de orden inferior, los que se propagan por las capas más superficiales de la Corteza, para una determinada frecuencia o rango de frecuencias. Quizás el poder de penetración de los modos (o rayos) está más relacionado, con la banda de frecuencias que estemos considerando y la atenuación (anelástica y “scattering”) del medio. Debemos pensar que los modos de orden inferior, son los que existen a

bajas frecuencias, y estas frecuencias a su vez, son las que menos atenuación sufren.

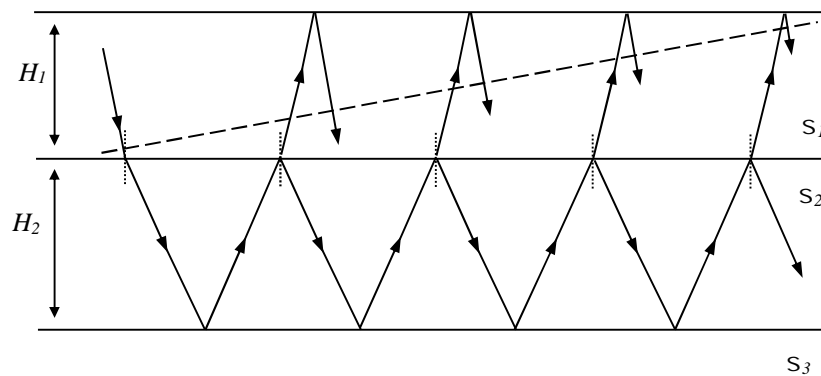


Figura 3.6 Interferencia constructiva para un modelo de dos capas y un medio semi-infinito, (de Ewing *et al.*, 1957).

- B)** En un modelo de varias capas, la capa más superficial siempre contendrá rayos en interferencia constructiva para todos los modos de vibración que pudieran existir, dentro de un rango de frecuencias considerado. Así pues, ciertas características de las capas más superficiales, pueden afectar decisivamente al modelo completo de Corteza, por la que se supone que se propagan ciertas ondas canalizadas (ej. ondas *Lg*). Más adelante se verá de una forma más cuantitativa, la influencia que tiene una capa superficial de sedimentos poco consolidados. En particular, el efecto de su espesor y sobre todo, la gran atenuación que una capa de este tipo tiene.

### 3.4. ¿Por qué las ondas P, no producen ondas superficiales? Fenómeno de *Leaky Modes*.

#### 3.4.1. Modelo de una capa sobre un medio semi-infinito.

En muchos textos de Sismología, incluido este trabajo, consideran que las ondas superficiales, tomadas como Ondas Canalizadas entre la superficie libre y alguna discontinuidad en el interior de la Tierra, se producen por la interferencia constructiva de las ondas S.

Es un hecho constatado, asociar ondas canalizadas u ondas guiadas, como trenes de ondas que aparecen después de las ondas S, con velocidades asociadas más a las ondas de cizalla, que a las ondas P. En la Figura 3.7, se muestra un terremoto con epicentro en Argelia de 4 de Septiembre de 1996, de Magnitud 4,6 registrado en la estación de banda ancha, THOR, estación experimental instalada en el Observatorio de San Pablo de los Montes (Toledo), donde puede verse como aparecen ondas superficiales de gran amplitud inmediatamente después de la onda S, lo cual nos indica que han tenido una formación muy reciente.

En este Apartado, nos proponemos dar una sencilla explicación desde el punto de vista de la teoría clásica de rayos; el porqué no se encuentran “ondas canalizadas“, asociadas a la onda P, del tipo de la onda Lg. Estas últimas se propagan eficientemente por la Corteza a través de largos caminos (recordemos la definición de onda Lg, que se dio al principio de este trabajo). Para la onda Pg, la propagación es mucho menos eficiente. Xie & Lay (1994), han tratado este tema.

Como ya se ha mencionado a lo largo de este trabajo, para que surjan Ondas Guiadas es necesario que los rayos interfieran constructivamente, y que los rayos sean supercríticos (es decir, con ángulos de incidencia mayores que el crítico). Consideremos un modelo de una capa sólida, plana, de espesor  $H$  constante, sobre un medio semi-infinito, también sólido. Sean las velocidades de las ondas  $P$  y  $S$ ;  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente para la capa, y  $v_1$  y  $v_2$ , las respectivas velocidades, para el medio semi-infinito.

Sabiendo que una onda que representa cambios de volumen, (onda P), cuando incide sobre la superficie de separación de dos medios sólidos, como es el caso de la superficie de separación entre la capa y el sustrato, da lugar a ondas

$P$  y  $SV$ , reflejadas<sup>7</sup> (en la capa) y refractadas  $P$  y  $SV$ , (que se transmiten al medio semi-infinito), según la Ley de Snell (Ver Figura 3.8). Este tipo de ondas reflejadas, también se obtienen cuando incide la onda  $P$  en la superficie libre.

Por la Ley de Snell, se puede escribir:

$$\frac{\text{sen } i_p}{\Gamma_1} = \frac{\text{sen } \chi_r}{S_1} = \frac{\text{sen } i_t}{\Gamma_2} = \frac{\text{sen } \chi_t}{S_2} \quad (\text{ec. 3.11})$$

---

<sup>7</sup> La onda  $SV$ , es la componente contenida en el Plano de Incidencia de la onda  $S$ .

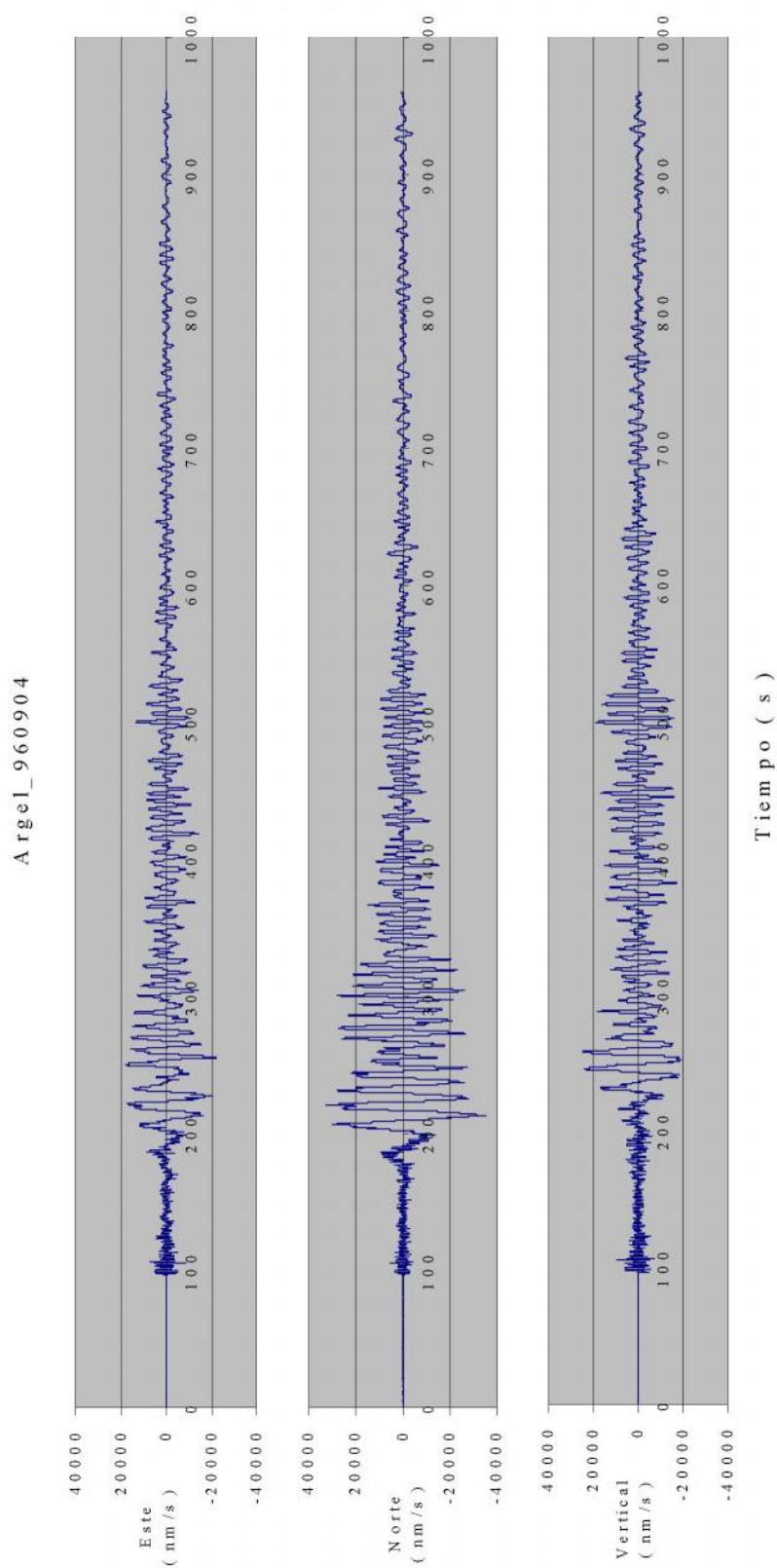
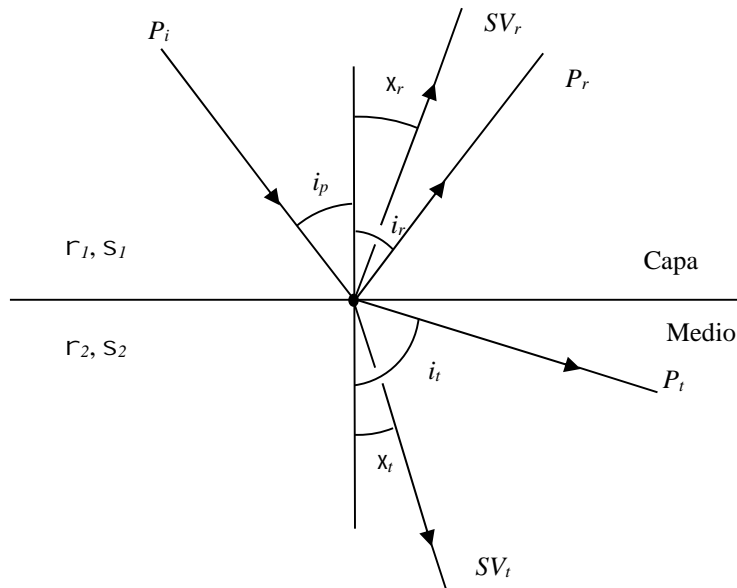


Figura 3.7 Registro de Banda Ancha del Terremoto de Argelia, el 4 de Septiembre de 1996, de  $M_g = 4.6$ , en la Estación THOR (experimental), en el Observatorio Geofísico de San Pablo de los Montes ( Toledo ). Se pueden observar la aparición de Ondas Superficiales después de las Ondas S.

y  $i_r = i_p$  .



Figuras 3.8 Rayos que se obtienen en la interfase de dos medios Sólido, cuando incide una onda P. Denotamos por  $P_r$  y  $SV_r$ ; los Rayos P y SV Reflejados respectivamente. Y por  $P_t$  y  $SV_t$ ; los Rayos P y SV Transmitidos respectivamente.

Donde:

$i_p$  , es el ángulo de incidencia de la Onda P incidente.

$i_r$  ,  $i_t$  , son los ángulos respecto a la normal a la superficie de separación de ambos medios, para los rayos, de la onda P reflejados y transmitidos, respectivamente.

$x_r$  ,  $x_t$  , son los respectivos ángulos para los rayos de la onda SV, reflejados y transmitidos.

No se va a exponer el desarrollo sobre la partición de energía incidente entre las ondas reflejadas y refractadas que se obtienen de la Ecuación de Ondas, particularizada para las condiciones de contorno, en la superficie de separación de ambos medios físicos. La resolución de este “sencillo” problema, para el caso de ondas planas, se puede encontrar en los textos de sismología que se han venido citando.

En esta ocasión, vamos a centrar nuestra atención en un caso particular. Para comenzar, supongamos las siguientes condiciones para las velocidades de ambos medios:

$$r_2 > r_1 \quad (\text{ec. 3.12.a})$$

$$s_2 > s_1 \quad (\text{ec. 3.12.b})$$

Dichas condiciones son necesarias, como ahora veremos, para obtener ondas reflejadas supercríticas  $P$  y  $SV$ , (ver Figura 3.9) y ondas inhomogéneas  $P$  y  $SV$ , en el medio semi-infinito. En la literatura inglesa este tipo de ondas es conocido como “evanescent wave”.

Así pues, por la ya mencionada Ley de Snell particularizada para el ángulo crítico, obtenemos, según el tipo de onda que consideremos:

**A)** Para la onda  $P$  reflejada crítica;

$$\frac{\text{sen } i_{c_1}}{r_1} = \frac{1}{r_2} \Rightarrow \text{sen } i_{c_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Condición que se cumple sin ningún tipo de problema, en cualquier modelo estándar de corteza.

**B)** Para obtener la onda  $SV$  refractada crítica, de manera similar, se tiene que:

$$\frac{\text{sen } i_{c_2}}{r_1} = \frac{1}{s_2}$$



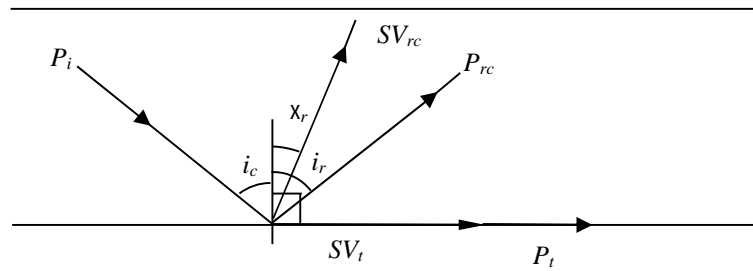


Figura 3.9 Ondas *Inhomogéneas P* y *SV* ( $P_t$  y  $SV_t$ ), que se obtienen para ondas *P-Incidentes*, con ángulos de incidencia mayores que el crítico, según las condiciones de la ecuación 3.12.a y .3.12.b.

Condición que en principio puede ser válida.

$$\text{sen } i_{c_2} = \frac{r_1}{s_2} \quad (\text{ec. 3.13})$$

Vamos ahora a estudiar esta última ecuación para los modelos normales de corteza.

Si se modifica ligeramente, la ecuación 3.13, se puede escribir, sin cambiar su valor:

$$\text{sen } i_{c_2} = \frac{r_1/s_1}{s_2/s_1}$$

Si suponemos una razón más o menos estándar, de Velocidades para las ondas *P* y *S*, en la corteza (que en nuestro caso está representada por la capa), de aproximadamente 1,75, es decir;

$$r_1/s_1 \cong \sqrt{3}$$

Se obtiene, para la expresión del ángulo crítico antes expuesta,

$$\operatorname{sen} i_{c_2} = \frac{\sqrt{3}}{s_2/s_1}$$

$$\frac{s_2}{s_1} \cong \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} i_{c_2}}$$

Como:  $\operatorname{sen} i_{c_2} \leq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} i_{c_2}} \geq \sqrt{3}$

Por lo tanto,

$$s_2/s_1 \geq \sqrt{3} \Rightarrow s_2 \geq 1,75s_1 \quad (\text{ec. 3.14})$$

Se puede comprobar, buscando en los modelos estándar de corteza (p. e. Boletín IGN de Sismos Próximos del año 1997), si dicha condición puede darse fácilmente.

No es fácil encontrar, de forma natural, tal discontinuidad de velocidades entre dos capas contiguas de distinto material. Luego la condición 3.14, no es una condición realista, pero mientras dicha condición no se verifique, habrá una fuga importante de energía en forma de ondas *SV*, hacia el medio semi-infinito en este caso, ya que no quedan atrapadas en la capa. Es lo que se conoce en la literatura inglesa, como Fenómeno de “*Leaky Modes*“ (ver Aki, K. & Richards, P.G., 1980. Cap. 7.6). Más tarde estudiaremos este fenómeno, con un poco más de detalle, cuando se resuelvan las integrales de la Ecuación de Onda, para una *Fuente Puntual*, en una capa sobre un medio semi-infinito, con un desarrollo matemático, mucho más complejo.

El fenómeno de “*Leaky Mode*“, que estudia la energía no canalizada en la capa y que se da para las Ondas *P* de una forma muy importante, explica porque las ondas *P*, no producen ondas Superficiales de una manera eficiente. Este fenómeno, también se da para las ondas *S*, aunque en menor medida. En nuestro caso, para la onda *Lg*, este efecto es realmente importante cuando hay cambios significativos en el modelo de corteza (transición corteza oceánica a continental, y al contrario), con la consiguiente conversión de unos modos de vibración a otros (ver Kenett, 1986 y 1989, y Bostock & Kenett, 1990). Sin embargo a pesar de la importancia que tiene este fenómeno, no se tiene en cuenta en los estudios de atenuación de la Onda *Lg*, por muchos autores... cuando se presentan cambios importantes de Corteza.

Un razonamiento, muy análogo al anterior, sirve para demostrar que una onda *SV incidente*, puede dar lugar a ondas *P* y *SV* refractas supercríticas, tan solo con la condición de que  $r_2 > r_1$  y  $s_2 > s_1$ , a partir de un ángulo crítico<sup>8</sup> ( $\chi_{c_3}$ ), tal:

$$\frac{\text{sen} \chi_{c_3}}{s_1} = \frac{1}{r_1} .$$

### 3.4.2. Ondas Guiadas en un medio semi-infinito.

En este caso, como en los anteriores, no se va a estudiar en detalle las interacciones de las ondas elásticas con la superficie libre. De todos es conocido que dichas ondas, en presencia de la superficie libre de la Tierra (donde se suponen esfuerzos nulos), producen un acoplamiento de energía, que da lugar a ondas que viajan paralelas a la superficie libre, cuyas amplitudes se atenúan exponencialmente con la profundidad. Es este el ejemplo más sencillo de ondas superficiales, y que no sufren dispersión, son las llamadas ondas de Rayleigh, para un medio semi-infinito, que se transmiten a una velocidad constante e independiente de la frecuencia. Para su demostración, partimos de los potenciales para ondas de Dilatación ( $w$ ), y para ondas de Cizalla ( $\mathcal{E}$ ), contenidas en el plano vertical. El caso más simple considera Ondas Planas y Armónicas, (Udías & Mezcua, 1997).

La existencia simultánea de ondas *P* y *SV inhomogéneas* en la superficie libre, que satisfacen las condiciones de contorno, dan lugar a las conocidas ondas Rayleigh, en dicha superficie (ver Figura 3.10).

En Lay, T. & Wallace, T. C. (1995), en el Capítulo 4, se da una demostración convincente de porque una onda *P* y *SV Inhomogénea* no puede existir de forma aislada a lo largo de la superficie libre. La explicación no se puede encontrar en la simple Teoría de Rayos, si no en la más compleja Teoría de ondas.

---

<sup>8</sup> Suponiendo que con este ángulo se obtienen ondas *P-Inhomogéneas*, en la superficie libre.

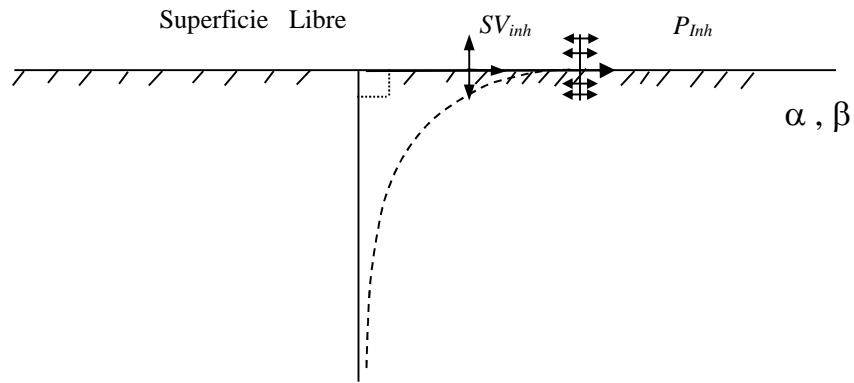


Figura 3.10. La existencia simultánea de ondas  $P$  Inhomogénea ( $P_{inh}$ ) y ondas  $SV$  Inhomogénea ( $SV_{inh}$ ), que se propagan horizontalmente, y los desplazamientos se que atenúan con la profundidad, hace que la interacción de ambas produzcan las llamadas ondas de Rayleigh. (De Lay, T. & Wallace, T.C., 1995).

En el Apartado 6.4 se estudiará con detenimiento el problema de una fuente puntual en un medio semi-infinito, y la generación de ondas de Rayleigh, matemáticamente, a partir de los ceros de la llamada Ecuación de Rayleigh.

## Capítulo 4.

# Teoría de Rayo versus Teoría de Ondas.

### 4.1 Introducción.

Hasta ahora se ha hablado de la Teoría de Rayos y la Teoría Modal, consecuencia esta última de la Teoría de Ondas aplicada a las Ondas Canalizadas, como dos interpretaciones diferentes de un mismo fenómeno observado. Pero no se debe perder de vista, que la Teoría de Rayos, es tan sólo una aproximación simplificada de la Teoría de Ondas más general, que bajo ciertas condiciones, se aplica. De todo cuanto se lleva dicho, la Teoría de Rayos, aparece como una interpretación válida para las *ondas canalizadas o guiadas*, que es el problema esencial que aborda este trabajo. Se verá también la importancia que las ondas inhomogéneas tienen en la generación de ondas atrapadas en un determinado medio. Se dará una idea “intuitiva” de cómo las ondas inhomogéneas intervienen en la formación de las Ondas Canalizadas.

## 4.2 Concepto de Frente de Ondas. Ecuación Eikonal.

Partimos de la Ecuación de Ondas, que como se sabe, se obtiene de la formulación de la segunda Ley de Newton, para un medio sólido, continuo y elástico.

Si las propiedades elásticas del medio cambian de un lugar a otro (heterogeneidad), se generan perturbaciones (ondas) que se propagan con velocidad variable, lo que hace que la resolución de la Ecuación de Ondas sea bastante difícil, y por ello se recurre a la teoría de rayos, suponiendo el medio *isótropo*<sup>9</sup>.

Considérese, la ecuación que representa los cambios de volumen sin cambio de forma (ondas P), cuya solución es el potencial escalar,  $w$

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r^2} \cdot \ddot{w} \quad (\text{ec. 4.1})$$

Donde:

$\ddot{w}$ , es la derivada segunda respecto al tiempo del potencial  $w$ ,

$r$ , es la velocidad de propagación de dicha onda, en nuestro caso  $r=r(\mathbf{x})$ , que depende de la posición en el medio, siendo el vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , teniendo en cuenta que  $x_i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ), forman un sistema de referencia cartesiano en el espacio.

En la obtención de la ecuación 4.1, se ha considerado que el tamaño de los desplazamientos son muy pequeños, de tal forma que el medio se comporta como un medio perfectamente elástico, donde se puede aplicar la Ley de Hooke, que establece que las deformaciones que sufre el medio son proporcionales a los esfuerzos a que está sometido. Es decir, existe una relación de linealidad, entre los esfuerzos y los desplazamientos, lo cual hace que el medio se comporte como un Sistema Lineal, véase el **Apéndice D**, donde se exponen algunas de las características principales de este tipo de sistemas. De hecho, la ecuación 4.1, no es más que una ecuación lineal en derivadas parciales.

---

<sup>9</sup> Un medio Isótropo, es aquel medio en el que sus propiedades son independientes de la dirección de vibración de la perturbación (Bullen & Bolt, 1993 p. 28).

Una posible solución de esta ecuación, puede ser de la forma general:

$$w(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) \cdot F(k_0 S(\mathbf{x}) \pm \check{S}t) \quad (\text{ec. 4.2})$$

Donde:

$A(\mathbf{x})$ , es la **Amplitud** de la onda.

La Función  $F(\{ \})$ , puede ser real o compleja, y,  $\{ \}$ , es la **Eikonal**<sup>10</sup>, que sustituye a:

$$\{ = k_0 S(\mathbf{x}) \pm \check{S}t \quad (\text{ec. 4.3})$$

y representa la fase de la onda.

$\check{S}$ , es la frecuencia de la onda.

$k_0$ , es el número de onda, cuando la velocidad del medio es  $r_0$ ,

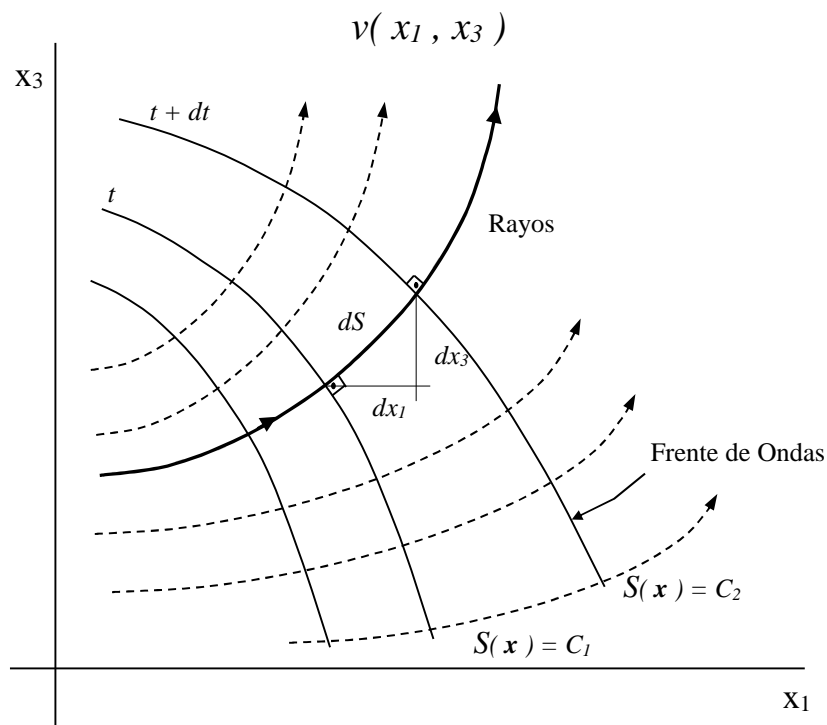
$$k_0 = \check{S} / r_0 \quad (\text{ec. 4.4})$$

El signo + y - en las ecuaciones, tienen en cuenta la solución para dos ondas iguales, pero que viajan en sentidos opuestos. La cantidad  $S(\mathbf{x})$  tiene dos interpretaciones:

- 1°) Si se define el **Frente de Ondas como el lugar geométrico de todos los puntos de igual fase en un instante dado**, entonces,  $S(\mathbf{x}) = \text{Constante}$ , es la ecuación de una superficie en el espacio, que representa los Frentes de Onda para un “instante dado”. El valor de la “Constante”, va cambiando a medida que el frente de onda se mueve en el espacio o mejor dicho se **propaga** hacia una nueva posición. Si se considera que el medio no es homogéneo, la **perturbación** no se propagaría en una dirección fija, si no que iría cambiando a medida que avanzase (Figura 4.1).

<sup>10</sup> La palabra **Eikonal**, procede del griego, y significa “imagen”.

- 2º) Si se define la **Dirección del Rayo**, como la normal al Frente de Ondas, entonces si se considera “  $x = x( S )$  “, representará la ecuación explícita de un rayo particular, a medida que varía el valor de “  $S$  “. En este caso “  $S$  “, recordando nociones elementales de geometría diferencial, representa *la longitud de arco o camino* a lo largo de la trayectoria del rayo. Está relacionado con el tiempo de propagación a lo largo de la trayectoria del rayo y la velocidad del medio, desde un determinado punto de referencia. Más adelante se insistirá en estos conceptos, que se verán con mayor claridad, cuando se deduzca la **Ecuación Eikonal**. Recuérdese, que siempre se considerarán medios isótropos.



**Figura 4.1**  
**Representació**

Se supondrá la propagación del frente de ondas a través de un medio de velocidad variable.

Considerando que sobre el frente de ondas, la fase es constante, se debe cumplir;



$$\frac{d\zeta}{dt} = 0 \quad (\text{ec. 4.5})$$

Y aplicando la regla de la cadena para hallar la derivada total, y considerando que:

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, 3)$$

representaría la **velocidad de Propagación del Frente de Ondas** en un punto del medio (téngase en cuenta que esta velocidad “ $v(x)$ ”, es la misma que la que se ha denotado al principio de este apartado por “ $v(x)$ ” donde se ha cambiado la notación para dar un carácter más general a las conclusiones que siguen, y que no están restringidas a ningún tipo de onda). Continuando con la demostración, se tiene que:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \quad (\text{ec. 4.6})$$

Se puede ver que la **velocidad** tiene en cuenta la relación entre la variación espacial y temporal, de los frentes de ondas (que tienen la misma fase). Ver Figura 4.1.

Sabiendo que  $\vec{\nabla} \zeta$ , es paralela a  $\vec{\nabla} S$ , y que el gradiente de  $S$ , representa la dirección normal a la superficie  $S(x)$  (*constante*), en el espacio. Por otra parte, la dirección de Propagación del Frente de Ondas viene dada por el vector  $\epsilon$ , que en principio, no tiene por que coincidir con la normal al Frente de Ondas.

La Teoría de Rayos, supone que sólo bajo **ciertas condiciones** (que más adelante se verán), *la Dirección de Propagación* (es decir, la dirección de la velocidad), *coincide con la dirección de la normal al frente de ondas* (dirección del rayo), o dicho de otra manera, *las Superficies de Fase Constante se desplazan en la dirección de su normal*.

Así pues, bajo esta suposición, el producto escalar del gradiente de  $\zeta$  por la velocidad de propagación, se puede sustituir simplemente por el producto de la

derivada de  $\{$ , en la dirección normal al Frente de Ondas, por el módulo de velocidad. Así de la ecuación 4.6:

$$\frac{\partial\{}{\partial t} = -v \frac{\partial S}{\partial n} \quad (\text{ec. 4.7})$$

Donde se define la **derivada normal**, por el siguiente valor escalar, que coincide con el módulo del gradiente:

$$\frac{\partial\{}{\partial n} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial\{}{\partial x_i} \right)^2} \quad (\text{ec.4.8})$$

Y sabiendo la forma de  $\{$  (ec. 4.3):

$$\frac{\partial\{}{\partial n} = k_0 \cdot \frac{\partial S}{\partial n} \quad (\text{ec. 4.9.a})$$

y,

$$\frac{\partial\{}{\partial t} = -\check{S} \quad (\text{ec.4.9.b})$$

Luego, la ecuación 4.7, queda, como sigue:

$$vk_0 \frac{\partial S}{\partial n} = \check{S} \quad (\text{ec. 4.10})$$

Sustituyendo el valor de la derivada normal (ec. 4.8), haciendo uso de la ecuación 4.4, y elevando luego al cuadrado, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 \quad (\text{ec. 4.11})$$

Donde se ha desarrollado explícitamente el símbolo sumatorio.

A esta ecuación, se le conoce con el nombre de **Ecuación Eikonal o de Fase**, también **Ecuación de las Funciones Características de Hamilton**.

Esta ecuación, que como puede observarse es una ecuación en derivadas parciales de primer orden, nos permite hacer el siguiente razonamiento: si se conoce como es la velocidad “ $v$ ” en cada punto del medio continuo, entonces, se puede determinar la variación de la trayectoria de los rayos, definidos éstos, como normales al Frente de Ondas. Por lo que se acaba de decir, esta ecuación es usada generalmente como punto de partida para toda la Teoría de Rayos.

Al cociente entre una velocidad inicial de referencia “ $v_0$ ” y la velocidad en un punto cualquiera del medio “ $v(x)$ ”, se le conoce como Coeficiente de Refracción ( $n$ ).

Así pues;

$$n = \frac{v_0}{v} \quad (\text{ec. 4.12})$$

Podemos concluir, que el concepto de **rayo**, del que hace uso la Teoría del mismo nombre, proporciona un instrumento conveniente e intuitivo para el seguimiento de un Frente de Ondas. Concretamente, de cómo se va propagando este último en un determinado medio, ya que los rayos se definen como normales a los Frentes de Ondas (Ver Apéndice C, donde se discute con un ejemplo la utilidad de la Ecuación Eikonal). En el siguiente apartado se verán las condiciones que se deben cumplir para que tenga validez la Teoría de Rayos.

### 4.3. Ecuación de Ondas: Condiciones de aproximación a la Teoría de Rayos.

Volvemos a considerar la Ecuación de Ondas del apartado anterior para la función del potencial escalar, “ $w$ ”, de las ondas P (que elegimos debido a su sencillez) y que, entre otros supuestos, se considera un medio isótropo, Ecuación 4.1;

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r^2} \ddot{w}$$

Supóngase una solución exponencial del tiempo, que sin quitar generalidad a nuestras conclusiones, nos permite operar fácilmente con dicha “solución de intento “. Con esta suposición, la función “ $F$ “, de la ecuación 4.2, debe verificar;

$$\frac{d^n F(\ddagger)}{d\ddagger^n} = F(\ddagger) \quad (\text{con } n = 1, 2, \dots) \quad (\text{ec. 4.13})$$

Y que su amplitud;

$$A(x) = A_0 \quad (\text{ec. 4.14})$$

Donde  $A_0$  es una *Constante*.

Con lo que la solución queda, como sigue:

$$w(x, t) = A_0 \cdot F(k_0 S(x) \pm \check{S}t) \quad (\text{ec. 4.15})$$

Sustituyendo en la Ecuación de Ondas (ec. 4.1), haciendo uso de la condición expresada por la ecuación 4.13 para derivar la función “ $F$ ” y operando convenientemente, se obtiene;

$$\nabla^2 S + k_0 \left( |\vec{\nabla} S|^2 - n^2 \right) = 0 \quad (\text{ec. 4.16})$$

Donde  $n$ , es el Índice de Refracción, que ya se había definido anteriormente (ec. 4.12).

A la vista de la ecuación que se acaba de obtener (ec. 4.16), se van a considerar dos casos límite:

- A) Que “ $k_0$ ” sea lo suficientemente grande que permita considerar el término “ $\ddot{\epsilon}^2 S$ ” despreciable en la ecuación 4.16.

Sabiendo que  $\ddot{\epsilon}^2 S$ , se puede desarrollar como;

$$\nabla^2 S = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} \right) \quad (\text{ec. 4.17})$$

y que;

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = d_i \cdot |\vec{\nabla} S| = d_i \frac{\partial S}{\partial n} \quad (\text{ec. 4.18})$$

Donde  $d_i$ , es el coseno director del rayo de la componente “ $i$ ”.  
Se puede demostrar que:

$$d_i = \cos \chi_i = \frac{dx_i}{dS} \quad (\text{ec. 4.19})$$

Donde  $\chi_i$  sería el ángulo que forma la **normal** al Frente de Ondas (como se definió, la dirección del rayo), con el eje “ $i$ ”, del sistema de referencia que se había definido al principio de este capítulo.

En la ecuación 4.18, se ha hecho uso de la derivada normal (definida en la ecuación 4.8). Sustituyendo la ec. 4.18 en la ec. 4.17, y haciendo uso de la Ecuación Eikonal (ec. 4.11), se obtiene para las Ondas P,

$$\nabla^2 S = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( d_i \frac{r_0}{r} \right) \quad (\text{ec. 4.20})$$

Como ya se mencionó en el apartado anterior. La velocidad de propagación, simbolizada de una forma general por “ $v$ ”, es la misma que la velocidad denotada ahora por “ $r$ ”. Particularizada para el caso de las Ondas P, siendo  $r_0$  la velocidad de las Ondas P en un punto de referencia.

Se puede observar, pues que  $\nabla^2 S$  está relacionado con las derivadas:

$$\frac{\partial d_i}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i},$$

teniendo en cuenta que  $k_0 = \frac{2f}{\lambda_0}$ ,

El suponer que:  $\nabla^2 S \ll 1/\lambda_0$ , como se había dicho en un principio, implica que las longitudes de onda, son lo suficientemente pequeñas (frecuencias suficientemente altas), comparadas con los cambios relativos de la velocidad en el medio, y con la variación de la dirección de la normal al frente de ondas. Todo ello a medida que el frente de ondas se va propagando en el espacio. Es decir;

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \ll 1/\lambda_0 \quad (\text{ec. 4.21})$$

Suponiendo que estas condiciones se verifican, se puede despreciar el primer término de la Ecuación 4.16, con lo que se obtiene la conocida Ecuación Eikonal, que como ya se había dicho, es la Ecuación Fundamental de la Teoría de Rayos. Luego, la Ecuación de Ondas queda reducida a la Ecuación Eikonal de la Teoría de Rayos, siempre y cuando se verifiquen las condiciones expuestas arriba.

Se puede consultar en el libro de Lay & Wallace (1995), donde se hace un desarrollo más general, utilizando conceptos elementales de Geometría Diferencial, y particularizando para una solución del tipo expuesta en la ecuación 4.15, en la que aquí, no se ha querido entrar, en aras de la sencillez, ya que los resultados como se puede comprobar, son análogos.

- B)** Considérese hora el caso asintótico opuesto. Supongamos que se tratan longitudes de onda lo suficientemente grandes, tal que la cantidad “ $k_0$ “, pueda considerarse muy pequeña, con respecto a los cambios relativos de velocidad en el espacio y, dirección del frente de ondas, según las demostraciones expuestas más arriba.

La Ecuación de Ondas vista inicialmente, para nuestro caso, ec. 4.16, al despreciar los términos afectados por el valor de  $k_0$ , queda reducida a la siguiente expresión:

$$\nabla^2 S \approx 0 \quad (\text{ec. 4.22})$$

Lo cual nos dice que los Frentes de Onda no se ven perturbados por los cambios de velocidad. Este fenómeno es el que ocurre cuando Ondas Telesísmicas de muy largo periodo, no se ven afectadas por las pequeñas heterogeneidades existentes en el medio. El lector podrá profundizar en estos temas, en el libro de Aki, K. & Richards, P. G. (1980), en el Capítulo 13, y en particular el Apartado 13.3, donde se estudia las Fluctuaciones de Amplitud y Fase de los rayos sísmicos cuando atraviesan heterogeneidades laterales de pequeño tamaño (comparado con la longitud de onda), y también pequeños en cuanto a la perturbación de velocidad ( gradiente de velocidad), lo que permite a estos autores desarrollar una formulación basada en aproximaciones de primer orden.

Lo que se ha expuesto aquí, es una sencilla *aproximación de orden cero*.

## 4.4. Discontinuidad entre dos Capas.

### A) Descripción del Problema.

De lo dicho anteriormente, las condiciones para poder aplicar la Teoría de Rayos (ec. 4.21) son claramente infringidas en presencia de fuertes gradientes de velocidad, como los que tienen lugar entre los límites de dos materiales con diferentes módulos de elasticidad. Es el caso que se tiene en un modelo de capas con velocidades diferentes, en el contacto entre ellas, en cuyo caso existen **discontinuidades** en las velocidades para las Ondas Elásticas. En este caso, el gradiente de la velocidad podría considerarse muy grande (cuando no infinito). “Parecería” que estas regiones son las menos indicadas para aplicar la Teoría de Rayos.

En rigor, la solución en estas regiones de discontinuidad, se obtienen combinando la Teoría de Rayos e imponiendo condiciones de contorno para la Ecuación de Onda (continuidad en los desplazamientos y en los esfuerzos). Para resolver esta aparente paradoja (donde la velocidad presenta una discontinuidad), se ha de considerar la misma Superficie de Discontinuidad como una fuente de nuevos frentes de ondas, que emite tanto rayos reflejados al primer medio, como

rayos refractados al segundo medio, bajo la acción de un frente de ondas incidente.

## B) Frente de Ondas Plano.

Para comenzar el estudio de este tipo de problemas, el ejemplo más al uso, es utilizar un frente de ondas plano, con lo cual el problema se simplifica enormemente. Si se suponen dos medios separados por una superficie plana (los medios están “soldados” entre sí), cuyas velocidades para las ondas P, sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente, vamos a suponer que incide sobre la superficie de separación, un frente de ondas plano que viaja en el primer medio, en dirección a la superficie con un ángulo de incidencia “ $i$ ” (respecto a la normal a dicha superficie). Podemos imaginar, que sobre la misma superficie de separación se propaga una “perturbación”; a partir de ahora la denominaremos de esta manera de una forma genérica, (Phiney, 1961 utiliza este término), cuya velocidad viene dada por la velocidad aparente “ $c$ ”, función del ángulo de incidencia;

$$c = \frac{\Gamma_1}{\text{sen } i} \quad (\text{ec. 4.23})$$

El tiempo que tarda un punto cualquiera del frente de ondas incidente en llegar a la superficie de discontinuidad, es el mismo que el que tardaría la *perturbación*, propagándose por la propia superficie de separación. (Ver Figura 4.2).

El tiempo que tarda el punto  $A_1$ , del frente de onda incidente en alcanzar el punto  $B_1$  de la superficie de discontinuidad, viene dado por:

$$t_1 = \frac{x}{\Gamma_1} \quad (\text{ec. 4.24})$$

Donde  $\overline{A_1B_1} = x$ .

Que en función del ángulo de incidencia  $i_1$ , puede escribirse:



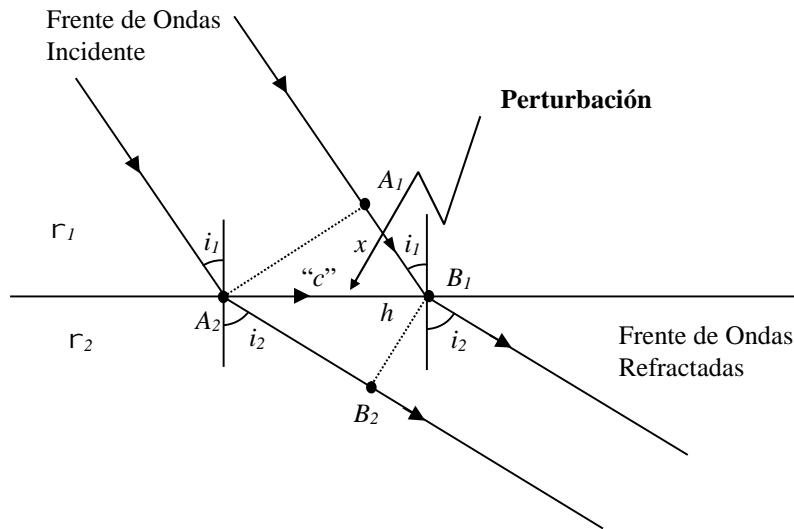


Figura 4.2 Frente de Ondas Planos incidentes en la superficie de separación de dos medios de velocidades constantes y diferentes;  $r_1$  y  $r_2$ , y la “perturbación” que se propaga por la superficie de discontinuidad de ambos medios con velocidad “ $c$ ”.

$$t_1 = \frac{h \operatorname{sen} i_1}{r_1} \quad (\text{ec. 4.25})$$

Si denominamos por  $t^*$ , al tiempo que la *perturbación* con velocidad “ $c$ ”, tarda en recorrer el camino  $\overline{A_2 B_1} (= h)$ .

$$t^* = \frac{\overline{A_2 B_1}}{c} = \frac{h}{c} \quad (\text{ec. 4.26})$$

Haciendo uso de la definición de *velocidad aparente*, para  $i = i_1$  en la ecuación 4.23.

$$t^* = \frac{h \operatorname{sen} i_1}{r} \quad (\text{ec. 4.27})$$

Como se puede comprobar:

$$t_1 = t^* \quad (\text{ec. 4.28})$$

Si se supone una dependencia armónica de la fase para el frente de ondas incidente y para la “perturbación” y se considera  $k_I$  el número de onda de la onda incidente y  $k$ , el número de onda de la *perturbación* en la superficie de separación, se tiene:

$$k = k_I \text{ sen } i_1 \quad (\text{ec. 4.29})$$

Se denomina también Número de Onda Horizontal.

Así pues, para los potenciales de las ondas que se están considerando; incidente y perturbación, se puede escribir que:

$$W_1(x,t) \sim e^{i(k_I x - \check{S}t_1)} \quad (\text{ec. 4.30})$$

$$W^*(h,t) \sim e^{i(k_I h - \check{S}t^*)} \quad (\text{ec. 4.31})$$

Donde  $x$  y  $h$ , han sido definidos anteriormente. Si se denota por:

$$\Sigma_1 = k_I x - \check{S}t_1 \quad (\text{ec. 4.32})$$

y

$$\Sigma^* = k_I h - \check{S}t^* \quad (\text{ec. 4.33})$$

Haciendo uso del valor de  $k$  (ec. 4.29), y que  $t_1 = t^*$ , se verifica que:

$$\Sigma_1 = \Sigma^* \quad (\text{ec. 4.34})$$

Se ha considerado que la frecuencia ( $\check{S}$ ), en las ecuaciones de 4.30 a 4.33, es la misma para la onda incidente y para la “perturbación” que se propaga por la superficie de discontinuidad. Como sabemos, en un problema lineal como éste, la frecuencia permanece inalterable (ver **Apéndice D**).

Luego, el hecho de que ambas señales lleguen al mismo punto de la superficie de discontinuidad con la misma fase, hace que la *perturbación* se refuerce, a medida que llega a la superficie de separación la Onda Incidente en el primer medio.

Conviene dejar claro, que es la *perturbación* la que se comporta como un nuevo emisor de Ondas de Rayos Reflejados en el primer medio y de Rayos

Refractados en el segundo medio. Esto último no es más que una aplicación del *Principio de Huygens*, aplicado a las ondas elásticas (Ver Figura 4.3).

Se puede comprobar fácilmente, de una manera análoga a la que se ha empleado anteriormente, que el frente de Ondas Refractado en el Segundo Medio y la llamada *perturbación* que se propaga por la superficie de discontinuidad, están ambas en fase. Demostrando que el tiempo transcurrido para que el frente de ondas refractadas recorra la distancia  $\overline{A_2 B_2} (= y)$ , es el mismo que tarda la perturbación en recorrer el espacio  $\overline{A_2 B_1} (= h)$ , sobre la superficie de discontinuidad (ver Figura 4.2), con una velocidad aparente “ $c$ ” y, número de onda  $k$ , igual que en el caso anterior, para el Rayo Reflejado, pero que en función del ángulo de refracción  $i_2$ , éstos vienen dados por:

$$c = \frac{r}{\text{sen } i_2} \quad (\text{ec. 4.35.a})$$

y

$$k = k_2 \text{sen } i_2 \quad (\text{ec.4.35.b})$$

Esto permite considerar la propia perturbación que se propaga por la superficie de discontinuidad como la generadora de los frentes de ondas de los rayos refractados en el segundo medio.

Un ejemplo real, muy claro, ocurre con las fases  $P_n$  y  $S_n$  que se dan en la *discontinuidad de Mohorovic* entre la corteza y el Manto, donde la discontinuidad misma se convierte en un emisor de nuevos frentes de ondas. (Ver Figura 4.3).

### C) Estudio para una Fuente Puntual.

Más adelante (**Capítulo 6**), se estudiará en profundidad el problema de una fuente puntual emitiendo Ondas<sup>11</sup>, cuyos frentes de Onda ya no pueden considerarse planos. Primero lo haremos en un medio semi-infinito (donde la superficie libre es la superficie de discontinuidad), y posteriormente en un medio semi-infinito sobre una capa superpuesta. Como se verá, en estos casos más reales, los rayos reflejados según la Ley de Snell, son los de mayor amplitud, pero no son los únicos existentes que se obtienen al evaluar ciertas integrales que se derivan de una solución más completa del problema.

<sup>11</sup> Se supone que la estación de observación se encuentra lo suficientemente alejada.

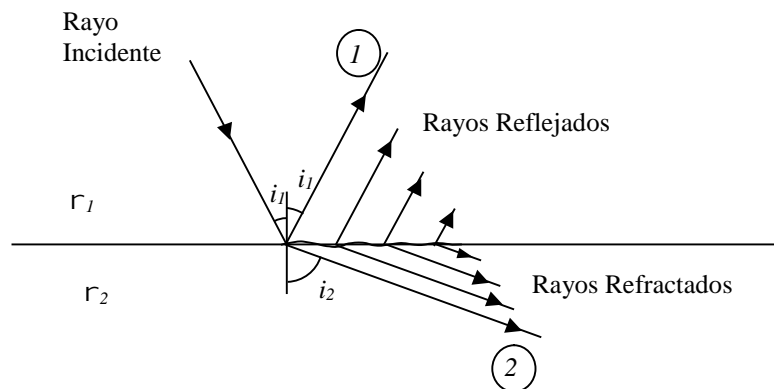


Figura 4.3 Esquema de como un Rayo Incidente en la superficie de separación de dos medios distintos, provoca una “perturbación”, que se propaga por la superficie de discontinuidad con velocidad “ $c$ ”, emitiendo los sucesivos Rayos Reflejados y Refractados.

## 4.4. Ondas Inhomogéneas como generadoras de Ondas Guiadas.

### A) Introducción.

En el modelo de capas sobre un medio semi-infinito, donde hay discontinuidades de velocidades entre los diferentes medios, se ha visto, hasta ahora que, para que haya ondas guiadas o superficiales, en este sencillo modelo, debe haber Frentes de Onda que incidan con ángulos de incidencia mayores que el crítico, en la superficie de discontinuidad de dos medios distintos (recuerde lo que se dijo en el **Capítulo 3**). Esto implica que no haya Ondas Internas ( $P$  ó  $S$ ), transmitidas al medio semi-infinito (suponiendo que este es el medio de mayor velocidad). Lo que es lo mismo, que no haya una fuga continua de energía, al

medio semi-infinito (fenómeno denominado de “leaky modes”, en la literatura inglesa).

En este escenario, aparecen unas ondas un poco especiales que se han venido a llamar Ondas Inhomogéneas o Evanescentes. Se sabe que en este tipo de Ondas, la amplitud decrece a medida que se alejan de la superficie de discontinuidad en el medio semi-infinito, y que se propagan paralelamente a la superficie de discontinuidad.

## B) Ondas Inhomogéneas y Ondas Superficiales.

Se puede observar, como la *velocidad de propagación* de las Ondas Inhomogéneas coincide con la definición de *velocidad aparente* (ec. 2.2), que a su vez servía para definir la *velocidad de fase* de las ecuaciones de dispersión de las Ondas Guiadas (ec. 2.7). Esto que nos lleva a identificar la velocidad de las Ondas Inhomogéneas con velocidad de fase de las Ondas Superficiales.

Si se considera nuevamente el modelo de una sola capa plana, paralela y de velocidad de ondas de cizalla  $S_1$ , sobre un medio semi-infinito de velocidad constante  $S_2$  (con  $S_1 < S_2$ ), se había visto que la velocidad de fase de las Ondas Love para este modelo, está comprendida entre  $S_1$  y  $S_2$  (Ver Figura 2.3). Son los límites de la velocidad de propagación de las Ondas Inhomogéneas. Así, para un frente de ondas que incide con el ángulo crítico  $i = i_c \rightarrow c = S_2$  y, para el frente de ondas que el caso límite, incide casi horizontalmente  $i = f/2 + v$  (con  $v \rightarrow 0$ ), sería la situación “hipotética”, en que todo el rayo está contenido en la capa de velocidad  $S_1$ .

También se puede comprobar, que los desplazamientos de las Ondas Inhomogéneas, que surgen entre dos medios líquidos distintos<sup>12</sup> 1 y 2 (con velocidades respectivas  $r_1 < r_2$ ), describen un movimiento de rotación *elíptico*, que recuerda a los desplazamientos que se obtienen para las Ondas Rayleigh.

Todo esto lleva a afirmar que las ondas que inciden con un ángulo mayor que el ángulo crítico, son las ondas generadoras de las Ondas Superficiales.

---

<sup>12</sup> Es el caso más simple.

### C) Otra forma de deducir la Ecuación de Dispersión.

Para concluir este apartado, corroboraremos lo que se ha dicho tratando de deducir la ecuación de dispersión, para las Ondas Love, desde una perspectiva diferente, en el modelo de una capa sobre un medio semi-infinito. Habíamos visto que esta ecuación (ec. 2.1) se obtenía, a partir de la condición de interferencia constructiva para frentes de Onda  $SH$  con ángulos de incidencia postcríticos (Ver Figura 2.2). Imponiendo que el Frente de Ondas Incidente debía tener la misma fase (o un múltiplo de  $2f$ ), que el frente de onda incidente que ya se había reflejado una vez en la superficie de separación entre la capa y el medio y en la superficie libre (ec. 2.3).

Esta misma ecuación de dispersión, se puede obtener suponiendo un rayo  $SH$  (y sólo un rayo), que incide con un ángulo de incidencia  $i_I$  (mayor que el crítico), en la superficie de discontinuidad, y produce ondas Inhomogéneas. Las cuales a su vez al propagarse paralelamente a la superficie de discontinuidad (con la velocidad aparente " $c$ "), producen también rayos de Ondas  $SH$  que surgen de la superficie de discontinuidad formando con la normal a la superficie ángulos  $i_I$ , y con un desfase respecto al rayo original " $w_I$ " (ver ec. 2.4), los cuales una vez reflejados en la superficie libre vuelven a ser nuevos frentes de onda Incidente, de forma que el proceso se iría repitiendo. Para que esto ocurra de una forma **constructiva**, el desfase total de la Onda  $SH$  Reflejada, al recorrer el camino  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  (incluido el desfase  $w_I$ ), debe ser el mismo (o múltiplo de  $2f$ ), que el desfase que se produce en la Onda Inhomogénea al recorrer el trayecto horizontal  $\overline{AC}$  (Ver Figura 4.4).

Lo que se acaba de decir, permite expresar la diferencia de fase, como:

$$\Sigma_{SH}(s, t) - \Sigma^*(s, t) = 2f n \quad (\text{ec. 4.36})$$

$$\text{Con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Donde:

$\Sigma_{SH}(s, t)$ ; Representa el cambio de Fase de la Onda  $SH$ , en función del espacio recorrido (" $s$ "), y del tiempo transcurrido (" $t$ ").

$\Sigma^*(s, t)$ ; Es el cambio de fase de la Onda Inhomogénea, bajo las mismas variables.

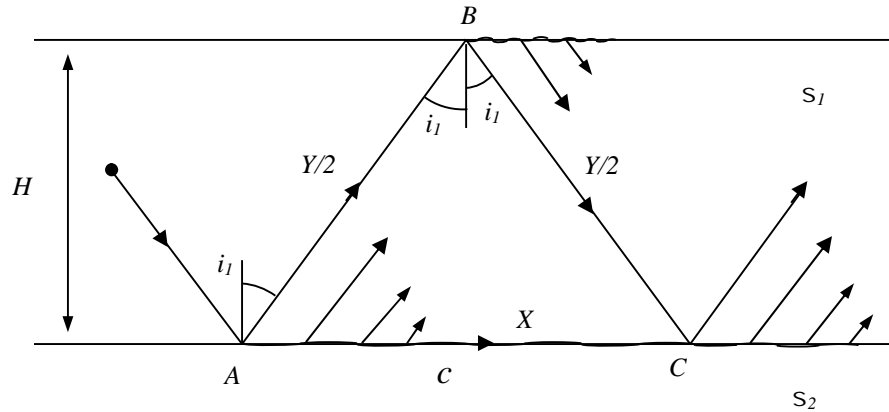


Figura 4.4. Modelo de una capa sobre un medio semi-infinito. Interferencia constructiva de la Onda  $SH$  reflejada y la “perturbación”, que viaja paralela a la superficie de discontinuidad, como se expuso en el apartado anterior. Con  $i_l > i_c$ ,  $i_c$ ; es el ángulo crítico.

Particularizando para el caso que nos atañe, se obtiene;

$$\Sigma_{SH} ( Y , t_l ) = k_l Y - \check{S}t_l + w_l \quad (\text{ec. 4.37})$$

Donde:

$k_l$  ; es el Número de Onda, de la Onda Incidente  $SH$ .

$Y = \overline{AB} + \overline{BC}$  ; es el camino total recorrido.

$t_l$  ; es el tiempo total transcurrido para recorrer dicho trayecto  $Y$ .

$w_l$  ; es el desfase que presenta la Onda Reflejada respecto de la Onda Incidente (ec. 2.4), para un ángulo de incidencia mayor que el crítico.

El ángulo de desfase “ $w_l$ ”, se obtiene de la resolución de la ecuación de Ondas, imponiendo condiciones de contorno (continuidad de los desplazamientos y de los esfuerzos). En este caso, se puede interpretar como el desfase con que la superficie de discontinuidad al vibrar (y por ello las Ondas Inhomogéneas), generan nuevas Ondas  $SH$  homogéneas, en el primer medio.

Por otra parte, se tiene que:

$$\Sigma^*(X, t_1) = kX - \check{S}t_1 \quad (\text{ec. 4.38})$$

Donde:

$k$  ; Es el Número de Onda, de la Onda Inhomogénea, que se había definido a partir de Número de Onda Horizontal, como:

$$k = k_1 \text{sen}i_1$$

$$X = \overline{AC}$$

Nótese, que calculamos la fase de la Onda Inhomogénea, en el instante  $t_1$ , que no es exactamente el tiempo en que la Onda Inhomogénea recorre el camino  $\overline{AC}$ .

Luego sustituyendo las ecuaciones 4.37 y 4.38, en la ecuación 4.36, se tiene:

$$2f n = k_1 Y - kX + w_1 \quad (\text{ec. 4.39})$$

A la vista de la Figura 4.4, y mediante sencillos cálculos geométricos, se obtiene:

$$2f n = k_1 H \text{sen}i_1 + w_1 \quad (\text{ec. 4.40})$$

Que junto con la expresión de  $w_1$ , en función de  $k$ , de  $c$  y del coseno de  $i_1$ ;

$$\cos i_1 = \sqrt{1 - \frac{S^2}{c^2}} \quad (\text{ec. 4.41})$$

Se puede obtener la ecuación de dispersión buscada, con un razonamiento distinto, al que se utilizó anteriormente, en el **Apartado 2.21** (ec. 2.7).



**Con esto último, se quiere poner en evidencia, la fuerte relación que existe entre ondas canalizadas, la superficie de discontinuidad y las Ondas que inciden en una superficie de discontinuidad con un ángulo de incidencia mayor que el ángulo crítico.**

En otro capítulo de este trabajo, utilizando un método menos gráfico, pero con un desarrollo matemático más riguroso, no considerando frentes de Ondas Planos, sino los producidos por una fuente puntual a distancias regionales. Se estudiará la propagación de Ondas a lo largo de la Superficie de Discontinuidad, para obtener unos resultados más amplios que los que resultan de la simple teoría de rayos.

## Capítulo 5.

# Importancia de la Onda $Lg$ en los Terremotos Regionales. Fase donde se mide la Magnitud.

### 5.1. Introducción.

La importancia de la Onda  $Lg$ , en la escala de Magnitudes es conocida. En este capítulo no se va a estudiar detalladamente las escalas de Magnitudes que existen. Tan sólo queremos indicar porqué la onda  $Lg$ , es la fase sobre la que se realizan las medidas correspondientes, en los sismogramas de los terremotos regionales, que luego se llevarán a las diferentes fórmulas de magnitudes. Tampoco se va a discutir aquí, los inconvenientes y ventajas de las diferentes escalas, pero casi todas ellas miden sus amplitudes sobre la Onda  $Lg$  para los terremotos regionales (considerando distancias epicentrales menores de unos 1000 km., aproximadamente).

### 5.2. Escalas de Magnitudes.

#### A ) Magnitud $m_{bLg}$ .

Mencionemos, la escala de magnitudes “ $m_{bLg}$ ” propuesta por O. Nuttli

(1973), para la componente Vertical, sobre la Onda Lg, de periodo aproximado 1 sg. Una variante de esta escala es la que se ha utilizado en el Instituto Geográfico Nacional, para el cálculo de los terremotos regionales y locales:

$$m_{bLg} = 3,90 + 1,05 \log D^{\circ} + \log(A/T) \quad \text{para } D^{\circ} < 3^{\circ} \quad (\text{ec. 5.1.a})$$

$$m_{bLg} = 3,30 + 1,66 \log D^{\circ} + \log(A/T) \quad \text{para } D^{\circ} > 3^{\circ} \quad (\text{ec. 5.1.b})$$

Donde:

$D^{\circ}$  ; Distancia Epicentral expresada en grados.

$A/T$ ; Cociente entre la amplitud máxima sostenida de la fase Lg, reducida al movimiento del suelo medida en micras, en la componente vertical, y su período correspondiente, que suele estar entre 2 s. y 0,25 s.

Como puede observarse, las fórmulas no coinciden cuando  $D = 3^{\circ}$ , hay un salto, lo que parece paradójico.

## B ) Magnitud de Richter.

También la escala de Magnitudes Local de Richter, dada en 1935, (utilizando datos de terremotos del Sur de California), se basa en la medida de la Amplitud sobre las Ondas Internas (pero para los sismos locales puede haber una contribución Lg);

$$M = \log A_w - \log A_0(D) \quad (\text{ec. 5.2})$$

Donde:  $A_w$  es la amplitud máxima registrada (medida en micrones,  $\sim m$ ), en una estación con un sismógrafo de torsión Wood-Anderson en la componente horizontal, con una magnificación estática de 2800, periodo libre 0,8 s y, la razón propia de amortiguamiento<sup>13</sup> 0,8.  $D$  es la distancia (en km.) entre el hipocentro y

<sup>13</sup> Parece que hay evidencias que en realidad la magnificación del equipo era 2080, y la razón de amortiguamiento 0,7. Uhrhamer & Collins (1990).

dicha estación. La amplitud de referencia  $A_0(D)$ , en  $\sim m$ , es función de la distancia, para tener en cuenta las Atenuaciones Geométrica y Anelástica<sup>14</sup>, y también de una serie de *Constantes*, que dependen de la zona geográfica donde se aplique la fórmula, e incluso es función del emplazamiento concreto donde se encuentra ubicada la estación (término llamado de Corrección por Estación). En realidad este término  $A_0$  representa la amplitud correspondiente (medida con el instrumento antes mencionado), que tendría un determinado terremoto, llamado *terremoto patrón*, a la distancia  $D$  del hipocentro, donde se encuentra la estación de registro donde se está calculando la magnitud. En concreto se le asignó  $M = 3$  al terremoto (*terremoto patrón*) que tenía una amplitud,  $A_w = 1 \text{ mm}$ , en el sismómetro Wood-Anderson, a  $100 \text{ km}$ . de distancia.

La fórmula de la Magnitud Local, consiste primeramente en una *reducción* de las amplitudes observadas a una distancia cualquiera  $D$ , a las que se observarían a la distancia de referencia de  $100 \text{ km}$ . En segundo lugar, de una *comparación* de las amplitudes así reducidas con las amplitudes del *terremoto patrón* (definido empíricamente). Dicha escala se basa en la suposición de que la razón de amplitudes máximas a dos distancias diferentes para un terremoto, es la misma para todos los terremotos de una misma zona (independientemente del tamaño, y del azimut fuente-estación). Como luego veremos, esto no es del todo cierto.

Hay muchísimo escrito sobre este particular, mencionemos tan sólo como ejemplo, dado su interés, a Alsaker *et al.* (1991).

Las diferentes escalas de magnitudes a nivel regional, comentadas hasta ahora, así como la que se verá en el apartado siguiente, tienen en común el hecho que las medidas de la amplitud se llevan a cabo sobre la Onda Lg. Se comprende ahora la importancia que tiene para una red sísmica que tiene el control de la sismicidad de una determinada zona, o incluso de un país entero, la necesidad de medir correctamente las amplitudes de la Fase Lg, y entender lo mejor posible la naturaleza de esta fase. (Sirva como ejemplo la Red Sísmica Nacional del I.G.N.).

## C ) Magnitud Momento.

También para la llamada *Magnitud Momento* ( $M_w$ ), propuesta por Kanamori (1977), según la expresión:

---

<sup>14</sup> La Atenuación Geométrica suele ser función de la Distancia elevada a una cierta **potencia**, mientras que a la Atenuación Anelástica y de *Scattering*, generalmente se le supone a ambas una dependencia **exponencial** con la Distancia, siendo difícil distinguir entre estas dos últimas.

$$M_w = 2/3 \log M_0 - 10.7 \quad (\text{ec. 5.3})$$

para terremotos locales, de magnitud aproximadamente mayor de 4, las medidas utilizando la amplitud espectral, se deben hacer sobre la Onda Lg, que como se justificará más adelante, está menos afectada por el factor del *patrón de radiación*.

El *Momento Sísmico* a partir de la Onda Lg, viene dado para distancias mayores de 100 km. [Randall (1973), Street *et al.* (1975), Bolt & Herraiz (1983), Hasegawa (1983), Nadeau & Johnson (1998)]:

$$M_0 = 4f \dots S^3 r_0 (r/r_0)^{1/2} \frac{1}{\bar{R}_{,w}} \Omega_0 \quad (\text{ec.5.4})$$

Donde:

... ; es la densidad del medio.

S ; es la velocidad de las Ondas de Cizalla.

$r_0$  ; es una distancia de referencia, para la mayoría de los autores es una distancia fijada previamente.

$r$  ; Distancia Hipocentral.

$\bar{R}_{,w}$ ; Es el factor que intenta corregir por el efecto del patrón de radiación, se supone un valor medio (constante), normalmente 0,4.

$\Omega_0$ ; parte plana del espectro de desplazamientos a bajas frecuencias, medido a partir de la Onda Lg. Más adelante se insistirá sobre este particular.

Se observa como en la expresión de la ec. 5.4, se supone una atenuación con la distancia de las Ondas superficiales o Canalizadas como  $1/r^{1/2}$ .

La Magnitud Momento tiene la virtud de no saturarse con los grandes terremotos. Unos ejemplos muy ilustrativos se pueden encontrar en Lay & Wallace (1995).

Más adelante se demostrará como la Onda Lg, es la fase más representativa del contenido energético de un terremoto local.

## 5.3. Distribución Espectral de la Energía emitida por la Fuente Sísmica.

### 5.3.1. Forma General del Espectro de las Ondas Internas en el Campo Lejano.

En este apartado, se va a exponer como se distribuye la energía de la fuente sísmica en el espectro de amplitudes, a partir de las Ondas Sísmicas en el *Campo Lejano*. Se considera que una estación de registro se encuentra en el Campo Lejano, *far-field* en la literatura inglesa, cuando la distancia fuente-receptor, permite que los términos de atenuación geométrica de las Ondas de Volumen y de Cizalla, que se atenúan como  $r^{-1}$ , tengan mayor importancia que los términos cuya dependencia es del orden de  $r^{-2}$ , con  $r \geq 2$ . Estos últimos corresponden al Campo cercano, *near-field*, según Aki & Richards, 1980, Vol. I pp. 73-74.

El objeto de este capítulo es comprender la relación existente entre *Energía, Magnitud y Medidas de la Amplitud de la Fase Lg*, independientemente de la fuente sísmica.

Se sabe que de forma general, el Espectro de Amplitudes de los Desplazamientos de las Ondas Sísmicas en el Campo Lejano, está caracterizado por:

- a) Una parte “plana” a Bajas Frecuencias que, cuando  $\tilde{S} \rightarrow 0$  es proporcional al Momento Sísmico Escalar<sup>15</sup> “ $M_0$ ”. Hay que decir que para que las medidas de  $M_0$ , sean estables, la señal debe poseer componentes armónicas, con longitudes de onda mayores que las dimensiones de la fuente sísmica.
- b) A medida que aumenta la frecuencia, la **envolvente** de las amplitudes espectrales decrece como  $1/\tilde{S}^2$ , tal como fue establecido por Aki (1967). Esta es una propiedad muy general, común a la mayoría de los Modelos de Fractura.

Una fórmula simple que incluye los efectos de a) y b) es:

---

<sup>15</sup> Nota: Se Supone que el mencionado espectro se representa utilizando ejes logarítmicos, es decir,  $\log \tilde{S}$  vs  $\log U(\tilde{S})$ . Para saber sobre las ventajas e inconvenientes de este tipo de coordenadas, consultar el libro de Bath (1982), en pag. 219 y ss.

$$\Omega(\tilde{S}) = \frac{\Omega(0)}{1 + (\tilde{S}/\tilde{S}_0)^2} \quad (\text{ec. 5.5})$$

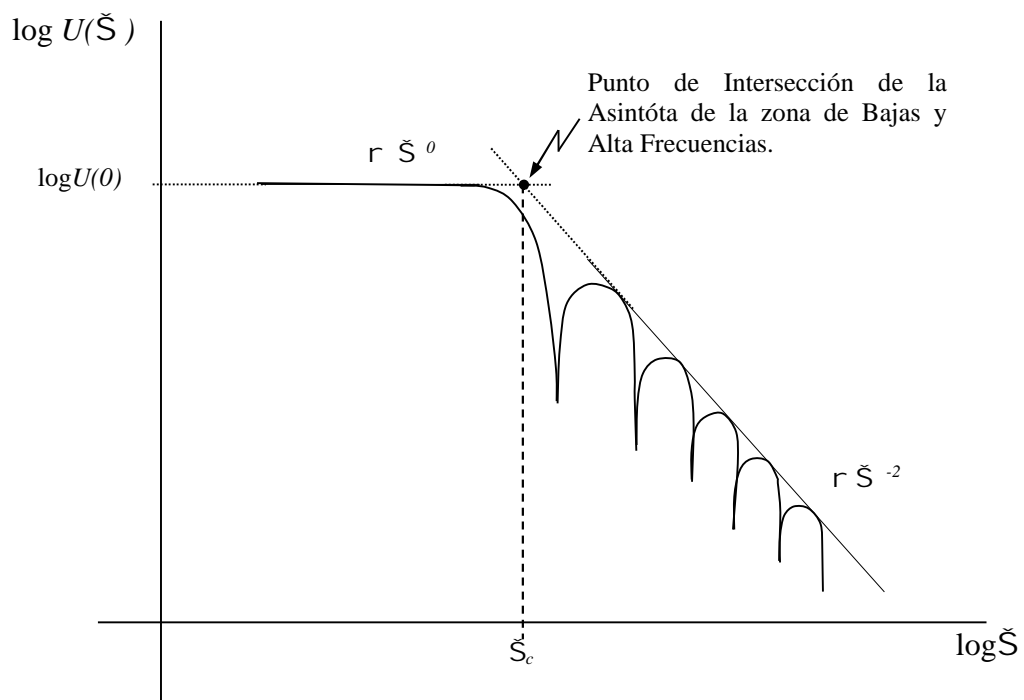
Este tipo de dependencia considera un foco sísmico con unas dimensiones espaciales determinadas (y no como un modelo puntual), y una función temporal de la fuente que incluye un cierto tiempo de crecimiento de la **dislocación** (lo que en la literatura inglesa se le conoce como *slip*). En general, el espectro que se observa es la *convolución de la historia temporal de la dislocación, y de la historia temporal del crecimiento de la zona de Ruptura* (que se supone con dimensiones finitas, y no infinitesimales).

En el Volumen II del libro de Aki & Richards (1980), pag. 824, fig. 14.15, se puede ver claramente, como va cambiando la forma del espectro, a medida que aumenta la magnitud del terremoto, para el modelo  $\tilde{S}$  - *cuadrado*.

- c) La **frecuencia esquina** se define como la frecuencia de intersección de las dos asíntotas del espectro a bajas y altas frecuencias (Brune (1970), Ver Figura 5.1).

A partir de la frecuencia esquina se pueden obtener las dimensiones del plano de falla, según el modelo utilizado. **En general se puede decir, que la frecuencia esquina es inversamente proporcional a las dimensiones del foco sísmico.**

Los dos modelos más comúnmente utilizados son el de **Brune** (1970), que supone una **fractura circular** de radio “ $r$ ”, y el de **Haskell** (1964), que utiliza una **falla rectangular** de longitud  $L$  y anchura  $D$ , (con  $L > D$ ), con una **dislocación** que se propaga con velocidad constante en la dirección de  $L$ .



**Figura 5.1.**  
**Forma**  
**General del**  
**Espectro de**

Las expresiones que se obtienen, para uno y otro modelo son:

1. Para el Modelo de Brune:

$$r = \frac{2,34s}{\check{S}_{cS}} \quad (\text{ec. 5.6})$$

2. Para el Modelo de Haskell, Savage (1972), dio la siguiente relación:

$$\sqrt{LD} = \frac{1,7r}{\check{S}_{cP}} = \frac{3,83s}{\check{S}_{cS}} \quad (\text{ec. 5.7})$$



Siendo:  $v_p$  y  $v_s$ ; las velocidades de la Ondas  $P$  y  $S$ , y  $\tilde{f}_{cP}$  y  $\tilde{f}_{cS}$ ; las respectivas frecuencias esquinas para la Ondas  $P$  y  $S$ . Se puede observar como la frecuencia esquina de la Onda  $P$  es mayor que la respectiva de la Onda  $S$ . [Ver también Hanks & Wyss (1972)].

Este tipo de relaciones son válidas siempre y cuando la señal sísmica que se esté analizando contenga intacta las longitudes de onda que son mayores o comparables a las dimensiones de la fuente.

Normalmente el modelo de Brune es usado para terremotos de tamaño pequeño a moderado ( $M < 6$ ), donde se puede aproximar  $L \approx D$ . Sin embargo, para grandes terremotos, donde el ancho de la falla ( $D$ ), necesariamente queda constreñido aproximadamente al espesor de la corteza se tiene  $L \gg D$ , y el Modelo de Haskell parece ser más apropiado (Udías, 2000).

Por otra parte, si  $L \gg D$ , en el espectro de desplazamientos se pueden distinguir tres partes (ver Figura 5.2): Una parte Plana para las Bajas Frecuencias (entre 0 y  $\tilde{f}_1$ ), una parte que decae como  $\tilde{f}^{-1}$  para frecuencias intermedias (entre  $\tilde{f}_1$  y  $\tilde{f}_2$ ), y por último la zona de las altas frecuencias ( $\tilde{f} > \tilde{f}_2$ ), con decaimiento como  $\tilde{f}^{-2}$ , según Savage, 1972.

### 5.3.2 Energía Total y Densidad de Energía Espectral de las Ondas Elásticas.

Una alternativa para medir el tamaño de un terremoto sería conocer la energía relajada en forma de ondas elásticas. Sabemos que existen fórmulas empíricas que relacionan la Energía con la magnitud de los terremotos, como la dada por Gutenberg & Richter, en 1956:

$$\log E = 11,8 + 1,5M_s \quad (\text{ec. 5.8})$$

Donde la energía “ $E$ ”, se mide en ergios y,  $M_s$  es la magnitud calculada usando amplitudes medidas en las Ondas Superficiales (se utiliza una expresión del tipo de la ecuación 5.1.b). Se puede comprobar que un terremoto de magnitud 7,2 posee unas 32 veces más energía que uno de magnitud 6,2. Sin embargo, el primero produce tan solo una amplitud del desplazamiento del suelo 10 veces mayor que el segundo.

Por otra parte, desde un punto de vista más teórico, la energía se podría calcular considerando el movimiento de una partícula del medio continuo, como respuesta a una señal sísmica transitoria. Cuando una onda que se propaga, pasa por un punto, este adquiere una cierta velocidad, y de este modo una cierta **energía cinética**, y el desplazamiento contribuye a la **energía potencial**.

La Energía Cinética Total por unidad de volumen para una estación, cuando pasa la señal sísmica se puede calcular a partir de la expresión:

$$E_c = \frac{1}{2} \dots \int_0^{\ddagger} |V(t)|^2 dt \quad (\text{ec. 5.9})$$

Donde:

$V(t)$  ; es la velocidad instantánea de la partícula del suelo.

$\dots$  ; es la densidad del material.

Se considera, que el terremoto comienza, en  $t = 0$ , y se da por concluido en el instante “ $\ddagger$ ”.

Si se supone que la Energía Cinética Media y la Energía Potencial Media, son aproximadamente iguales. Luego la **Energía Total Media**, es decir, cinética más potencial, viene dado por:

$$E_T = 2E_C \quad (\text{ec. 5.10})$$

Si además se extiende los límites de integración, suponiendo que fuera de la señal sísmica no hay otras señales que aporten energía apreciablemente. Se puede aproximar la energía total (ec. 5.10), como sigue:

$$E_T = \dots \int_0^{\ddagger} |V(t)|^2 dt \cong \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt$$

Utilizando el *Teorema de Parseval* o *Teorema de Rayleigh*, se puede pasar al dominio de las frecuencias, y se supone que toda la *energía* o casi toda la energía de nuestra señal sísmica está concentrada en una cierta banda de frecuencias muy localizada; sean  $\check{S}_1$  y  $\check{S}_2$  (con  $\check{S}_2 > \check{S}_1 > 0$ ), los límites de esta banda de frecuencias.

$$E_T \cong \frac{\dots}{f} \int_{S_1}^{S_2} |V(\check{S})|^2 d\check{S} \quad (\text{ec. 5.11})$$

Si se integra sobre una esfera, sobre todo el frente de ondas, para corregir por *atenuación geométrica*, y corrigiendo además por *atenuación anelástica*, se obtiene la energía en la misma fuente ( $E_T^0$ ), como:

$$E_T^0 \cong F(r, \dots, c, Q_c) \int_{S_1}^{S_2} |V(\check{S})|^2 d\check{S} \quad (\text{ec. 5.12})$$

Donde:  $r$  es la distancia entre la fuente y el punto de observación,  $c$  es la velocidad para el tipo de onda considerado, y  $Q_c$  es el Factor de Calidad que tiene en cuenta la *atenuación anelástica* (y *scattering*) del medio<sup>16</sup>.

A  $|V(\check{S})|^2$ , se le relaciona con la *Densidad Espectral de Energía*. Es decir, es la energía por unidad de frecuencia. Obsérvese en este tratamiento, como se considera que el Espectro de Fase no lleva información energética.

En la ecuación 5.12, se asocia la integral, a la energía relajada por la fuente y la Función  $F(r, \dots, c, Q_c)$ , a la influencia del medio.

Todo este razonamiento, tiene sentido, si la energía de una Onda Elástica, producida por un terremoto, se puede limitar con un par de frecuencias, es decir que la señal sea de *banda limitada*.

Veamos ahora, la forma de la *Densidad Espectral de Energía*. Consideremos el Espectro de Desplazamiento,  $U(\check{S})$ , que de una forma general y asintótica, en el campo lejano, se ha representado en la Figura 5.2.

Si se calcula el Espectro de Velocidad, que está más directamente relacionado con la energía, este se relaciona con el de desplazamientos por la expresión:

$$|V(\check{S})| = \check{S}/U(\check{S}) \quad (\text{ec. 5.13})$$

Elevando al cuadrado;

---

<sup>16</sup> Hemos considerado por simplicidad el supuesto, no siempre válido, que la atenuación permanece prácticamente constante entre las frecuencias  $\check{S}_1$  y  $\check{S}_2$ , esto será verdad siempre y cuando no sean frecuencia muy altas y, nuestros límites de integración no sean muy diferentes.

$$|V(\check{S})|^2 = \check{S}^2 |U(\check{S})|^2 \quad (\text{ec. 5.14})$$

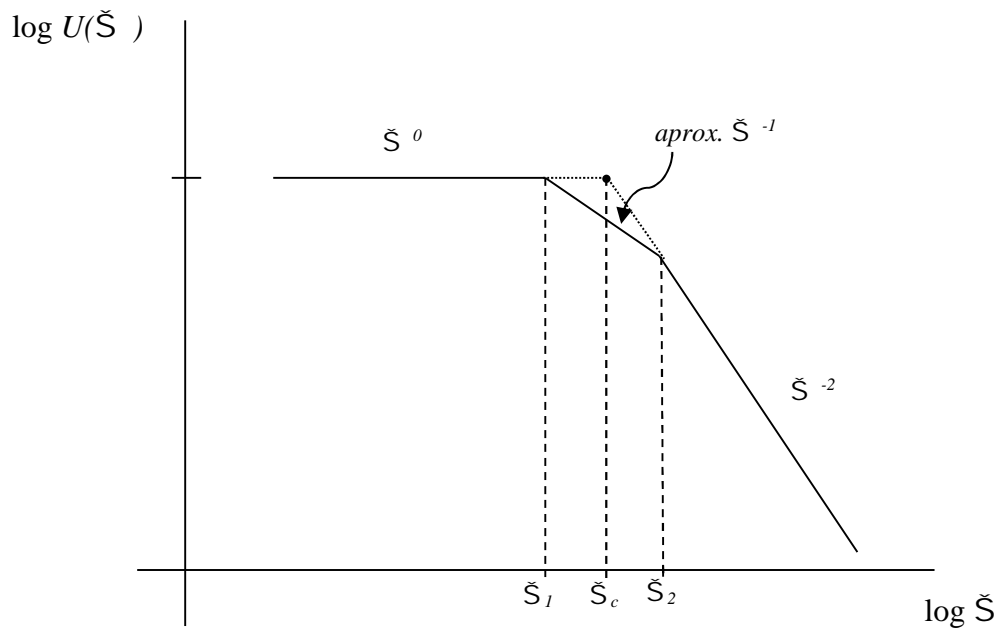


Figura 5.2. Forma Asintótica del Espectro de Desplazamientos de Ondas Internas en el Campo Lejano generadas por un terremoto. Obsérvese la definición de las frecuencias  $\check{S}_1$  y  $\check{S}_2$ .

Se puede obtener una aproximación a la energía,  $E(\check{S})$ :

$$E(\check{S}) \cong \check{S}^2 |U(\check{S})|^2 \quad (\text{ec. 5.15})$$

Luego, de acuerdo con la dependencia de  $U(\check{S})$ , con la frecuencia (Ver Figura 5.2) se tiene:

$$U(\check{S}) \propto \begin{cases} \check{S}^0 & \text{si } \check{S} < \check{S}_1 \\ \check{S}^{-1} & \text{si } \check{S}_1 < \check{S} < \check{S}_2 \\ \check{S}^{-2} & \text{si } \check{S} > \check{S}_2 \end{cases} \rightarrow E(\check{S}) \propto \begin{cases} \check{S}^{+2} & \text{si } \check{S} < \check{S}_1 \\ \check{S}^0 & \text{si } \check{S}_1 < \check{S} < \check{S}_2 \\ \check{S}^{-2} & \text{si } \check{S} > \check{S}_2 \end{cases}$$

Para el rango de frecuencias  $\check{S}_1 < \check{S} < \check{S}_2$ , de una forma general se puede considerar una dependencia del tipo  $\check{S}^{-r}$ , con  $0 < r < 2$ , pero aquí hemos elegido un valor medio de  $r = 1$ .

Luego, la Densidad Espectral de la Energía, se puede representar de una manera asintótica en la siguiente Figura (se supone que los efectos del camino de propagación han sido corregidos), ver Figura 5.3:

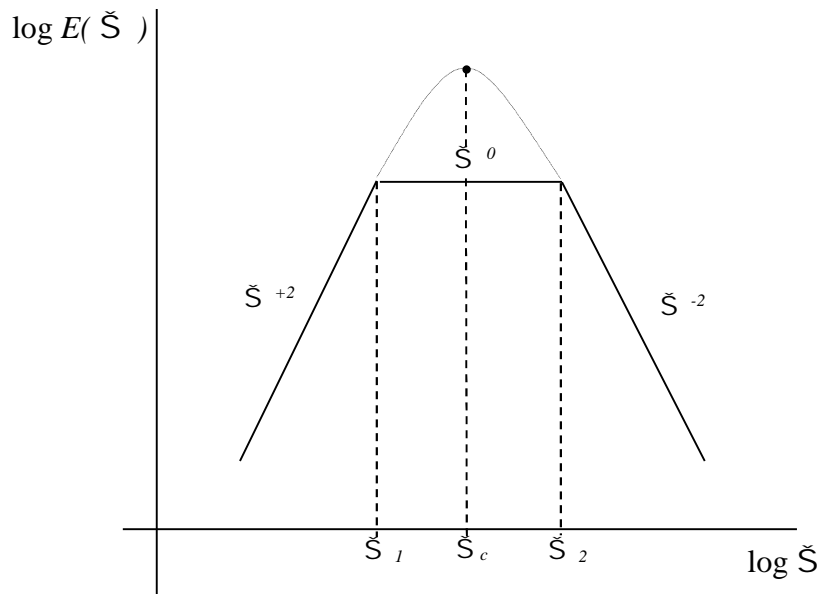


Figura 5.3. Forma Asintótica de la Densidad Espectral de la Energía de las Ondas Internas en el Campo Lejano, obsérvese como gran parte de la Energía de la Onda, se encuentra confinada entre  $\check{S}_1$  y  $\check{S}_2$  (con  $\check{S}_1 < \check{S}_c < \check{S}_2$ ).

La idea importante aquí, es que el registro de Ondas Elásticas en el campo lejano, es una señal de *banda limitada*, donde el contenido energético se encuentra sobre todo en un entorno de la Frecuencia Esquina (según fue definida anteriormente). Fuera de este entorno la energía decae con el cuadrado de la frecuencia.

### 5.3.3. Relación entre la Densidad Espectral de Energía de las Ondas Internas y de las Ondas Canalizadas.

En los capítulos anteriores hemos fijado nuestra atención en la influencia del medio, pero nada habíamos dicho, respecto a la orientación espacial de la fuente respecto de nuestras estaciones de registro. Supondremos un *modelo de doble par de fuerzas*, o lo que es lo mismo una *fractura de cizalla sobre un plano*, que es la representación más sencilla de una *falla geológica*.

Tomaremos en cuenta ahora el *Patrón de Radiación*, que ya se mencionó al principio de este capítulo,  $R(i, w)$ , función del *ángulo de salida* de cada rayo ( $i$ ), con respecto a la vertical, y del *azimut del rayo* ( $w$ ), medido desde la traza de la falla. Si consideramos el *Patrón de Radiación*, normalizado a 1, entonces, la función  $R(i, w)$ , puede tomar valores entre 0 y 1. La influencia de este término, es crítica respecto de las amplitudes de las Ondas Internas, y sobre la Densidad Espectral de Energía.

La corrección por este término no siempre es posible, pues como se sabe, es un término muy sensible a la orientación de la falla, y conocer esto último de una forma fiable, incluso hoy día, no es una cuestión sencilla. Aunque han mejorado mucho los programas por ajuste de las señales reales con sismogramas sintéticos.

Con el fin de reducir la influencia del patrón de radiación, en muchas ocasiones se considera un valor medio teórico, pero lo mejor es disponer siempre de una distribución de estaciones lo más homogénea y extensa posible alrededor de la fuente. Desafortunadamente, en escasas ocasiones, se dispone de una cobertura ideal de estaciones de registro. Cada rayo de una Onda Interna (p.j. Onda P), que posee un determinado contenido Energético en función de la frecuencia, como el representado en la Figura 5.3, está afectado por el medio en el cual se propaga y por la disposición espacial de la fuente respecto al receptor. Esto último queda reflejado a través del *patrón de radiación*  $R(i, w)$ .

En un principio la Onda Lg, podría representar los mismos inconvenientes que la Onda S directa, a la hora de medir la amplitud sobre ella, para calcular magnitudes. Veremos que esto no es así.

Consideremos nuevamente la representación de las curvas de dispersión (frecuencia – velocidad de fase, p.j. Figura 2.2). Téngase en cuenta que para un cierto rango de frecuencias ( $\tilde{S}_1 < < \tilde{S}_2$ , ver Figura 5.3), donde se encuentra gran parte del contenido energético de la fuente, existe un cierto número de modos, (mayor cuanto mayor es el rango de frecuencias en estudio, Ver Figura 5.4).

También se ha mencionado que **para una misma frecuencia, cada modo está asociado a un rayo con un ángulo de incidencia diferente, que permite interferencia constructiva. Luego, cada modo representa un rayo con un ángulo de salida del foco sísmico ( $i_\theta$ ) distinto.** Esto hace que la Onda  $Lg$  sea menos dependiente de la orientación espacial de la falla, si pensamos, que dicha onda está constituida, por un conjunto de rayos, y no por un único rayo. (Ver Figura 5.5).

Esta hipótesis es válida, siempre y cuando, la *frecuencia esquina* del terremoto sea lo suficientemente alta, como para considerar la existencia de un gran número de modos dentro de la banda de frecuencias  $\check{S}_1$  y  $\check{S}_2$ .

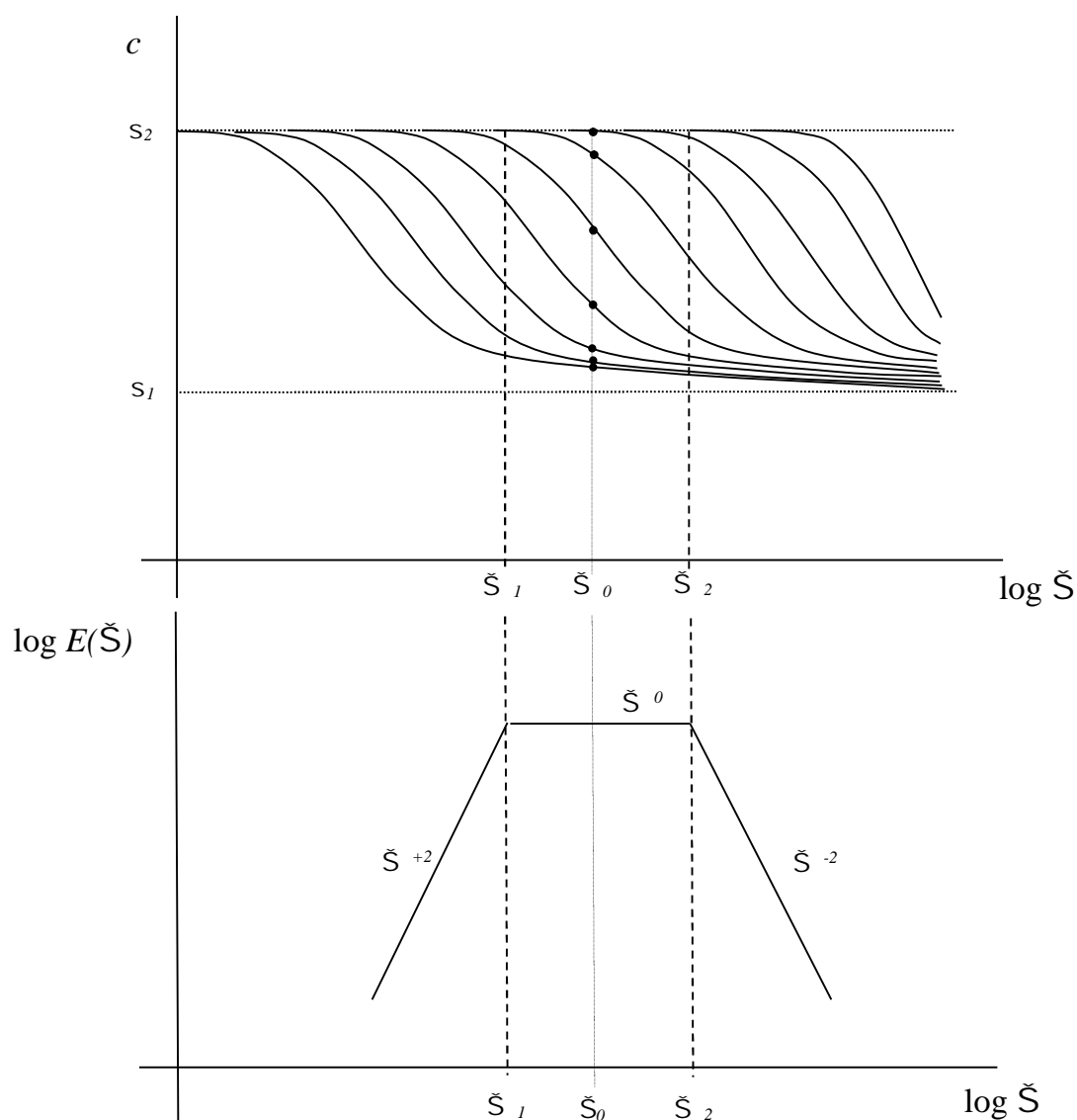


Figura 5.4. Se ha intentado combinar en esta figura la representación gráfica de las Curvas de Dispersión y la Densidad Espectral de Energía. Para la Onda Lg pueden corresponder muchos rayos en la Banda de Frecuencias entre  $\check{S}_1$  y  $\check{S}_2$ , donde está contenida gran parte de la Energía de la Fuente.

Como ya se ha mencionado, cuanto mayor es la magnitud del terremoto, mayor es el tamaño de la fuente, y por tanto más baja será la frecuencia esquina (ecuaciones 5.6 y 5.7). Como el máximo de energía, está en un entorno próximo de la frecuencia esquina, al desplazarnos en el diagrama de la densidad espectral



de energía hacia las bajas frecuencias, menor será el número de modos que coexistirán, y por tanto la Onda *Lg* estará formada por un número menor de rayos. Luego los efectos del patrón de radiación, quedan menos promediados, y su efecto será más acusado.

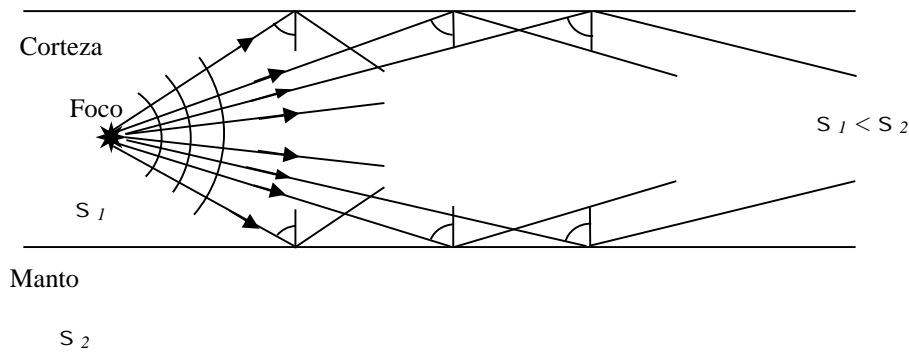


Figura 5.5. Consideramos la Onda *Lg* formada por un conjunto de rayos, con diferentes ángulos de salida del Foco.

De lo dicho hasta ahora, se puede observar que la Onda *Lg*, posee:

### A) Una Propiedad.

Promedia el patrón de radiación mejor que un único rayo directo, para terremotos pequeños y medianos ( $M_L < 4$ ). Esto supone una importante característica de esta fase a la hora de calcular las magnitudes de los terremotos regionales. En las fórmulas de las magnitudes, que se expusieron al principio de este capítulo, excepto para la magnitud momento, no hay un factor que haga referencia al patrón de radiación. Por esta razón, a pesar de que la cobertura de estaciones no es la ideal, este problema se soslaya en parte, al utilizar la fase *Lg*. En todo caso, el cálculo de magnitudes será tanto mejor cuanto mayor sea la cobertura acimutal y en distancias de estaciones de registro.

Si no fuera por esta característica de la Onda *Lg*, sería absolutamente necesario conocer el patrón de radiación para efectuar el cálculo de magnitudes.

## B) Un Inconveniente.

Pero al ser la Fase Lg, una fase compuesta por la suma de muchos rayos, que se propagan “canalizados”, por cada una de las diferentes capas que componen la corteza, parece claro que esta fase sea muy sensible a los modelos de corteza utilizados, ya sea por el tipo de corteza (continental u oceánica), por el factor de atenuación, por el espesor de los sedimentos, o por la existencia o no de heterogeneidades laterales, Ver Figura 5.6.

De ahí, que las fórmulas de magnitud a la que hemos hecho alusión más arriba, y que se basan en la medida de la Onda Lg, dependan mucho de la zona, región o país, donde se deseen aplicar.

Sin embargo, esta teórica desventaja, puede soslayarse en la práctica, con un estudio exhaustivo de la fórmula de la magnitud que se está utilizando: con unas constantes muy particularizadas para cada zona donde se aplica, incluyendo factores de corrección por estación, que en principio, no dependen de la fuente.

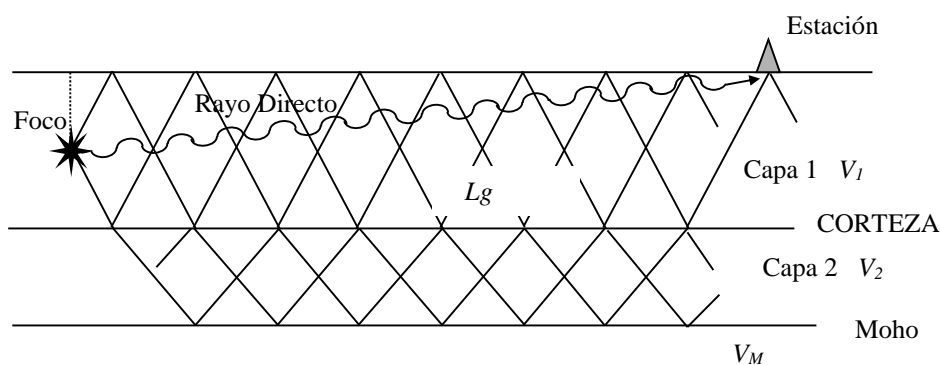


Figura 5.6. Si se supone un modelo de corteza de dos capas, como el que se representa en la figura, con  $V_1 < V_2 < V_M$ , y el terremoto ocurre en la capa 1. Se observa, que el Rayo Directo no estaría influido en ninguna parte de su trayectoria por la presencia de la Capa 2, (aunque sí por el Patrón de Radiación: es decir, por el acimut y el ángulo de salida del rayo en el foco). Sin embargo la Onda Lg, que se ha representado de una forma gráfica por todo un entramado de rayos (ver texto), sí está influida por las Capas 1 y 2. La idea importante es que, la Onda Lg, barre toda la Corteza, e influye mucho en su propagación.

## **5.4. Un caso límite: Ondas de Rayleigh y Love.**

Para terremotos muy grandes, el “máximo de energía” en el campo lejano, esta desplazado hacia las bajas frecuencias. Crece la energía de las ondas superficiales a bajas frecuencias y llega a ser dominante, en particular para el modo fundamental (Ver Figura 5.4). Entonces dominan las Ondas Superficiales Telesísmicas, Rayleigh y Love, que si dependen fuertemente del patrón de radiación [Ver en concreto el libro de Lay, T. & Wallace, T.C. (1995), en pp. 351 y ss.; también Aki, k. (1960); Haskell (1963) y Haskell (1964)].

## Capítulo 6.

# Estudio General de los Frentes de Ondas Esféricos en Medios Estratificados.

### 6.1. Introducción.

Hasta ahora se han considerado ondas planas, con una dependencia armónica con el tiempo, no *causales*, es decir, sin un instante de comienzo ni un final en el tiempo. Estas premisas han permitido, demostrar ciertas características de las ondas canalizadas de una manera sencilla y relativamente intuitiva. Así, se ha visto, la relación entre modos y rayos, el motivo de porqué las Ondas *P* no producen específicamente ondas canalizadas, etc. Para demostrar todo esto, se han considerado ángulos y velocidades, suponiendo que siempre se cumple la Ley de Snell.

Pero no se ha hablado hasta ahora del cálculo exacto de la Amplitud de la Onda, algo que es fundamental, si se pretende generar sismogramas sintéticos para la Onda *Lg*, y compararlos con terremotos reales.

El hecho de haber admitido un frente de Ondas Plano, supone que la fuente está infinitamente alejada del punto de observación, lo que no siempre es así, sobre todo cuando se están estudiando ondas canalizadas a distancias regionales, como la Onda *Lg*. Considerar el origen del terremoto (Hipótesis del Foco puntual), a una distancia finita de la estación de registro, trae como consecuencia tener que considerar frentes de Ondas Esféricos para las ondas de

volumen (o frente de ondas cilíndricos para las ondas superficiales). En este caso, la interacción con una superficie de discontinuidad, es mucho más complicada, pues la teoría de rayos supone una aproximación (Cap. 4.3).

El tratamiento de este problema, que de manera general se conoce con el nombre de *problema de Lamb*<sup>17</sup>, es bastante complicado. En este caso es necesario usar coordenadas cilíndricas o esféricas, y Funciones de Bessel o Legendre, en el plano complejo. Dichas funciones son muy utilizadas en diversos campos de la sismología. No vamos a resolver de una forma totalmente detallada este problema. Sin embargo, plantaremos el problema físico con sus condiciones de contorno, y daremos un razonamiento intuitivo para su resolución. Sobre todo, se extraerán conclusiones importantes de las soluciones obtenidas, haciendo hincapié en las ideas básicas.

## 6.2. Frente de Ondas Esféricas. La integral de Sommerfeld.

Las relaciones que se van a ver permiten relacionar Ondas Esféricas, con Ondas Planas y Cilíndricas.

### 6.2.1. Integral de Sommerfeld.

La Ecuación de Ondas Inhomogénea con una fuente puntual (con simetría esférica) en el origen de coordenadas y una dependencia armónica del tiempo [es decir, del tipo  $\exp(-i\tilde{S}t)$ ], en función del potencial escalar, “W” es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r^2 \nabla^2 w = 4f r^2 A u(\mathbf{x}) \exp(-i\tilde{S}t) \quad (\text{ec.6.1})$$

Donde:

$$r = \sqrt{\frac{\dots + 2\sim}{\dots}} \quad ; \quad (\text{ec. 6.2})$$

Es la velocidad de propagación de la Onda en cuestión en el medio elástico.

---

<sup>17</sup> Autor a quien se le atribuye el primer sismograma sintético, el cual estudio, las vibraciones transitorias para una fuerza vertical puntual espacio-temporal, aplicada en la superficie de un semiespecio (Lay & Wallace, 1995).

Donde: } y ~ ; son las llamadas *constantes de Lamé*, la primera relacionada con el *coeficiente volumétrico* o *de compresibilidad*, y la segunda es el módulo de cizalla o *rigidez*, que relaciona esfuerzos y deformaciones cortantes de cizalla.

... ; es la densidad del medio.

A ; es una constante, que representa la amplitud.

Y por último,  $u(\mathbf{x})$ ; es la Función Delta de Dirac, en el origen. El argumento  $\mathbf{x}$ , incluye las tres coordenadas espaciales  $x, y, z$ .

Si se transforma esta ecuación en coordenadas esféricas, toma la forma:

$$6.3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial R} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 4f r^{-2} A u(R) \exp(-i\check{S}t) \quad (\text{ec. 6.3})$$

$$\text{Siendo } R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Donde se ha supuesto que el medio es homogéneo.

Sea  $w(R, t)$ , una solución particular, para este problema, que viene dada por;

$$w(R, t) = \frac{A}{R} \exp \pm i(k_r R - \check{S}t) \quad (\text{ec. 6.4})$$

Donde:

$$k_r = \check{S}/r$$

En la práctica, esta solución representa el efecto de una fuente explosiva en un medio<sup>18</sup>, suponiendo que las longitudes de onda son grandes, comparadas con el diámetro de la fuente. Pero pequeñas comparadas con la distancia al límite del medio más cercano.

La Integral de Sommerfeld, viene dada por una suma de ondas cilíndricas:

$$\frac{e^{-ik_r R}}{R} = \int_0^{+\infty} J_0(kr) e^{-k_z |z|} \frac{k dk}{k_z} \quad (\text{ec. 6.5})$$

<sup>18</sup> Suponiendo que el Potencial Vector de las Ondas S, “ E “ es igual a cero.

Donde:

$J_0(x)$  ; es la Función de Bessel de orden cero. En el **Apéndice G**, se introducen algunas propiedades de estas funciones de una manera sencilla e intuitiva. Junto con la exponencial de  $z$ , forman los vectores bases en coordenadas cilíndricas.

$$\left. \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \end{array} \right\} \text{ Son las típicas Coordenadas Cilíndricas.}$$

$$Y \quad k_z^2 = k^2 - k_r^2$$

$k$  ; Es el Número de Onda Horizontal.

Una demostración detallada de esta relación podemos encontrarla en Bath (1968), en su Apartado 7.3.

La Relación de Sommerfeld nos permite expresar ondas esféricas, como una superposición de Ondas Cilíndricas. En los problemas de Ondas Elásticas en un medio estratificado, se supone que el problema tiene simetría axial, respecto al eje vertical  $Z$ , lo que implica que sea conveniente utilizar coordenadas cilíndricas.

## 6.2.2. Integral de Weyl.

Si en lugar de utilizar coordenadas cilíndricas, se quiere expresar el factor que depende de la distancia en la ecuación 6.4, como una superposición de Ondas Planas, recurriremos a la Relación de Weyl.

$$\frac{e^{-ik_r R}}{R} = \frac{-i}{2f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k_x x + k_y y + \bar{k}_z |z|)} \frac{dk_x dk_y}{\bar{k}_z} \quad (\text{ec. 6.6})$$

Donde  $\bar{k}_z = \sqrt{k_r^2 - k^2}$

El integrando del miembro derecho de esta igualdad, representa “ondas planas”, que se propagan en la dirección del Vector Número de Onda  $\mathbf{K}$ , cuyas componentes son  $\mathbf{K} = (k_x, k_y, k_z)$ , sabiendo que  $|\mathbf{K}| = \tilde{S}/r$ .

Si se tiene en cuenta que (ver Figura 6.1):

$$\frac{dk_x dk_y}{k_z} = \frac{(k_r^2 \text{sen}(u) du d\mathbb{E}) \cos u}{k_r \cos u} \quad (\text{ec. 6.7.a})$$

Y

$$\frac{(k_r^2 \text{sen}(u) du d\mathbb{E}) \cos u}{k_r \cos u} = k_r \text{sen}(u) du d\mathbb{E} \quad (\text{ec. 6.7.b})$$

6.7.b)

Donde  $u$  y  $\mathbb{E}$ , son los ángulos polares definidos, según se puede ver en la Figura 6.1.

En la ecuación 6.7.b podemos distinguir que:

$$\text{sen} u du d\mathbb{E} = d\Sigma \quad (\text{ec. 6.8})$$

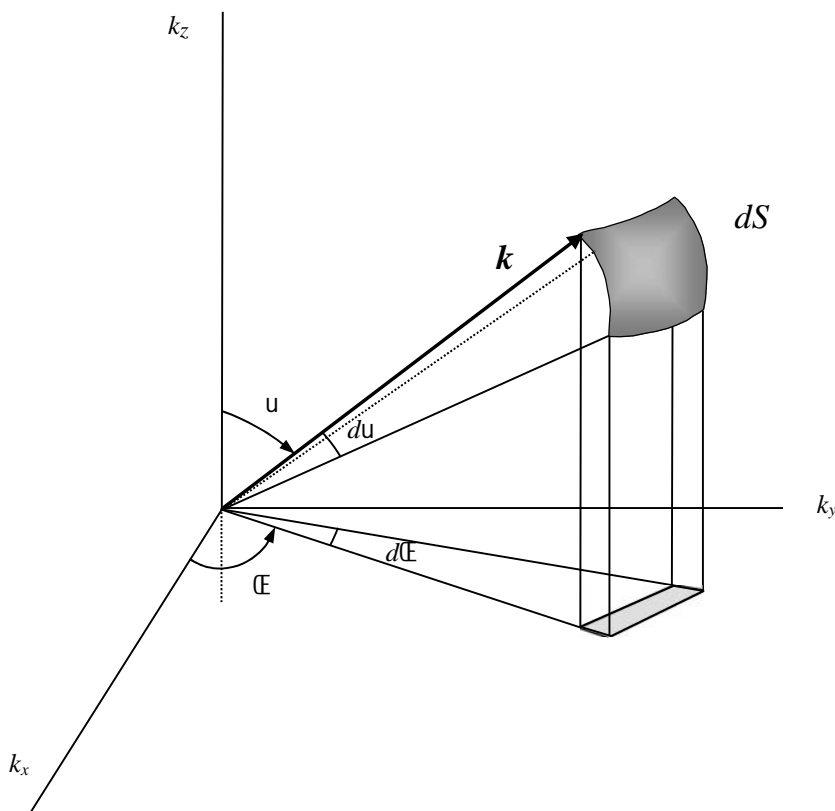


Figura 6.1. Representación de los Angulos  $u$  y  $\mathbb{E}$ , y del elemento de superficie  $dS (= |k|^2 d\Sigma$ , ver texto), en el espacio del Número de Onda.



Donde  $d\Sigma$  ; es un elemento de superficie en la esfera de radio unidad<sup>19</sup>, en el espacio del numero de onda, de tal forma que sustituyendo en la ecuación 6.6, tenemos:

$$\frac{e^{-ik_r R}}{R} = \frac{-ik_r}{2f} \int e^{-ik_r (\epsilon_1 x + \epsilon_2 y + \epsilon_3 |z|)} d\Sigma \quad (\text{ec. 6.9})$$

Donde la integral, es una integral de superficie extendida a la mitad de la esfera (por la condición  $\epsilon_3 > 0$ ), donde  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  , son los *cosenos directores*, que vienen dados, en función de los ángulos  $u$  y  $\mathcal{E}$  , por:

$$\epsilon_1 = \text{senu} \cos\mathcal{E} \quad , \quad \epsilon_2 = \text{senu} \sin\mathcal{E} \quad \text{y} \quad \epsilon_3 = \text{cosu}$$

De donde:  $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = 1$  . Además:  $0 \leq \mathcal{E} \leq 2\pi$  y  $u$  puede variar en principio entre  $0$  y  $\pi/2$ . Pero cuando se trata de considerar Ondas Inhomogéneas,  $u$  puede tomar valores complejos, en concreto  $u = \pi/2 + ia$  con  $a \in \mathbb{R}$ , lo que físicamente significaría que estas ondas se propagan paralelamente al plano  $XY$  (es decir, el plano correspondiente a  $u = \pi/2$ ). La parte imaginaria implica que las ondas se atenúan exponencialmente en la dirección  $Z$ . Recordemos que en nuestro modelo para un medio estratificado, las discontinuidades entre los medios, corresponden a los Planos Horizontales.

Una generalización de la Integral de Weyl, viene dada por:

$$\frac{F(\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} - R)}{R} = -\frac{1}{2f} \int F'[\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} - (\epsilon_1 x + \epsilon_2 y + \epsilon_3 z)] d\Sigma \quad (\text{ec.6.10})$$

donde  $F'$  es la derivada respecto del tiempo. Si tomamos la transformada de Fourier temporal de (6.10) se encuentra (6.9).

---

<sup>19</sup> Obsérvese como este elemento de superficie,  $d\Sigma$  en la esfera unidad, coincide con la definición de *ángulo sólido* (medido en estereoradianes). Para una esfera de radio cualquiera  $R$ , el elemento de ángulo sólido ( $d\Omega$ ), se puede consultar en Alonso & Finn (1970), y viene dado por:

$$d\Omega = d\Sigma / R^2 .$$

## 6.3. Interacción de un Frente de Ondas Esféricas con la Superficie Libre.

### 6.3.1. Solución General.

#### A) Planteamiento del Problema.

Se trata aquí de considerar un modelo más realístico para distancias regionales, como es el modelo de una fuente puntual.

El potencial de Ondas  $P$ , que denotamos con  $w$ , y el potencial de Ondas  $SV$ ,  $\xi$ , satisfacen las correspondientes Ecuaciones de Ondas, en un medio isótropo (Teorema de Lamé):

$$\ddot{w} = \frac{\Phi}{\rho} + r^2 \nabla^2 w \quad (\text{ec. 6.11.a})$$

$$\ddot{\xi} = \frac{\Psi}{s^2} + s^2 \nabla^2 \xi \quad (\text{ec. 6.11.b})$$

Donde:  $\rho$  es la densidad y,  $r$  y  $s$  las velocidades de las Ondas de Dilatación y Cizalla respectivamente.

Los términos  $\Phi$  y  $\Psi$ ; son los potenciales que nos permiten obtener las fuerzas por *unidad de volumen*<sup>20</sup>. El vector que representa dichas fuerzas,  $\mathbf{f}$ , viene dado por:

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi + \nabla \wedge \nabla \wedge (0,0,\Psi) \quad (\text{ec. 6.12})$$

Los desplazamientos en función de los potenciales vienen dados por:

$$\mathbf{u} = \nabla w + \nabla \wedge \nabla \wedge (0,0,\xi) \quad (\text{ec. 6.13})$$

---

<sup>20</sup> Nota: En la literatura Inglesa, este tipo de fuerzas son denominadas como “*body forces*”, (Aki & Ricrads, 1980), en oposición a las llamadas *fuerzas de contacto* (fuerzas por unidad de área), estas últimas son fuerzas internas que mutuamente actúan entre partículas adyacentes, dentro de un medio continuo, como son las Presiones y Tensiones.

Y se verifica que:

$$\frac{\mathbf{f}}{\dots} = \ddot{\mathbf{u}} - r^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - s^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad (\text{ec. 6.14})$$

Si se considera una fuente puntual que emite únicamente ondas  $P$ , con una dependencia armónica del tiempo, de frecuencia  $\tilde{S}$ , que supondremos así, para quitar complejidad al problema, cuyo potencial viene dado por:

$$\Phi = 4fA_0 \dots r^2 u(x)u(y)u(z-h)e^{i\tilde{S}t} \quad (\text{ec. 6.15.a})$$

$$\psi = 0 \quad (\text{ec. 6.15.b})$$

Se considera que la fuente se encuentra a una profundidad “ $h$ ”, de la superficie libre  $z = 0$ , la función  $u(x)$ , es la Delta de Dirac, y  $A$  es una constante. Se toma el criterio de  $z < 0$ , hacia el interior de la Tierra.

Según la ecuación 6.11.a, esta fuente genera ondas esféricas del tipo;

$$W_{inc}(R, t) = \frac{A_0}{R} e^{-i(k_r R - \tilde{S}t)} \quad (\text{ec. 6.16})$$

Con :

$R$  la Distancia Radial.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2} \quad (\text{ec. 6.17})$$

$A_0$  Constante.

Como sabemos por la teoría de Ondas Planas, una Onda  $P$  incidente en la superficie libre da lugar a una Onda  $P$  reflejada ( $W_{refl}$ ), y a una Onda  $SV$  Reflejada ( $\mathbb{E}_{refl}$ ). De una forma general, podemos escribir;

$$W_{total}(R, t) = W_{inc}(R, t) + W_{refl}(R, t) \quad (\text{ec. 6.18})$$

Donde, utilizando la Integral de Sommerfeld:

$$W_{inc}(R,t) = \frac{A_0}{R} e^{-i(k_r R - \check{S}t)} = A_0 e^{i\check{S}t} \int_0^\infty J_0(kr) \frac{k}{k_z^\Gamma} e^{-k_z^\Gamma |z-h|} dk \quad (\text{ec.6.19.a})$$

$$W_{refl}(r, z, t) = e^{i\check{S}t} \int_0^\infty A_1(k) \frac{k}{k_z^\Gamma} J_0(kr) e^{k_z^\Gamma (z+h)} dk \quad (\text{ec. 6.19.b})$$

$$\mathbb{E}_{refl}(r, z, t) = e^{i\check{S}t} \int_0^\infty B_1(k) \frac{k}{k_z^\Gamma} J_0(kr) e^{(k_z^\Gamma h + k_z^S z)} dk \quad (\text{ec. 6.19.c})$$

Donde:

$$k_z^\Gamma = \sqrt{k^2 - k_r^2} \quad (\text{ec. 6.20.a})$$

$$k_z^S = \sqrt{k^2 - k_s^2} \quad (\text{ec. 6.20.b})$$

Sabiendo que  $k_r = \check{S} / r$  y  $k_s = \check{S} / s$ ,  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $y$   $z$ ; son las coordenadas cilíndricas usuales.

$k_z^\Gamma$  y  $k_z^S$  pueden tomar valores reales y también complejos.  
 $k = \check{S} / c$ , donde  $c$  es la Velocidad Aparente.

Para *Ondas Homogéneas* se verifica que  $k_z^\Gamma$ ,  $k_z^S$  son *imaginarios puros*, es decir  $c > r, s$ .

Sin embargo para las *Ondas Inhomogéneas* o también llamadas *evanescentes*, que se atenúan exponencialmente con la profundidad,  $k_z^\Gamma$ ,  $k_z^S$  son *reales*, lo que hace que  $c < r, s$ . Como se sabe este tipo de ondas se propagan paralelamente a la superficie de discontinuidad. En general, las ondas elásticas inhomogéneas se propagan con una velocidad horizontal menor que la de las ondas internas.

Aplicando condiciones de contorno en la superficie libre, es decir, esfuerzos nulos, para las correspondientes componentes del tensor de esfuerzos,  $\dagger_{xz}$  y  $\dagger_{zz}$ , en  $z=0$ .

Con la ecuación 6.13, convertimos los desplazamientos en coordenadas cilíndricas, a partir de los respectivos potenciales:

$$u_r = \frac{\partial W_{total}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{refl}}{\partial r \partial z} \quad (\text{ec. 6.21.a})$$

$$u_z = \frac{\partial W_{total}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{E}_{refl}}{\partial r} \right) \quad (\text{ec. 6.21.b})$$

Y teniendo en cuenta la relación entre desplazamientos, deformaciones ( $e_{ij}$ ) y esfuerzos;

$$\dagger_{zr} = 2\sim e_{zr} = \sim \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{ec. 6.21.c})$$

$$\dagger_{zz} = \} \nabla \mathbf{u} + 2\sim \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\} k_r^2 W_{total} + 2\sim \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{ec. 6.21.d})$$

En esta última ecuación se ha hecho uso de las ec. 6.11.a y ec.6.13.

Así pues, sustituyendo los potenciales e igualando los esfuerzos a cero en  $z = 0$ , se obtiene la ecuación de los coeficientes, y por otra parte considerando que  $\} = \sim$  se cumple en forma aproximada en la corteza, se tiene:

$$2k k_z^r (A_0 - A_1) + \left[ \left( \bar{k}_z^s \right)^2 - k^2 \right] B_1 = 0 \quad (\text{ec. 6.22.a})$$

$$\left[ 3 \left( \bar{k}_z^r \right)^2 + k^2 \right] (A_0 + A_1) + 2k \bar{k}_z^s B_1 = 0 \quad (\text{ec. 6.22.b})$$

Se puede observar como estas ecuaciones son análogas a las que se obtienen en los problemas de ondas planas.

Se ha nombrado, por conveniencia;

$$\bar{k}_z^r = \sqrt{k_r^2 - k^2} \quad (\text{ec. 6.23.a})$$

y,

$$\bar{k}_z^s = \sqrt{k_s^2 - k^2} \quad (\text{ec. 6.23.b})$$

Y los Coeficientes de Reflexión resultan:

$$V_{pp}(k) = \frac{A_1}{A_0} = \frac{4k^2 \bar{k}_z^r \bar{k}_z^s - (3k_r^2 - 2k^2)^2}{F(k)} \quad (\text{ec. 6.24.a})$$

$$V_{ps}(k) = \frac{B_1}{A_0} = \frac{-4k\bar{k}_z^r(3k_r^2 - 2k^2)}{F(k)} \quad (\text{ec. 6.24.b})$$

Donde  $F(k)$ , es el *Determinante de Rayleigh*:

$$F(k) = (3k_r^2 - 2k^2)^2 - 4k^2\sqrt{k^2 - k_s^2}\sqrt{k^2 - k_s^2} \quad (\text{ec. 6.25})$$

Si se sustituye los coeficientes  $A_I(k)$  y  $B_I(k)$ , en función de los Coeficientes de Reflexión,  $V_{pp}(k)$  y  $V_{ps}(k)$ , en las ecuaciones integrales, es decir, ec. 6.19.b y 6.19.c, se obtiene:

$$W_{refl}(r, z) = A_0 \int_0^\infty V_{pp}(k) J_0(kr) \frac{k}{k_z^r} e^{k_z^r(z+h)} dk \quad (\text{ec. 6.26.a})$$

$$\mathbb{E}_{refl}(r, z) = A_0 \int_0^\infty V_{ps}(k) J_0(kr) \frac{k}{k_z^r} e^{(k_z^r h + k_z^s z)} dk \quad (\text{ec. 6.26.b})$$

Donde se ha prescindido, sin pérdida de generalidad, de la parte armónica que representa la dependencia con el tiempo.

## B ) Resolución del Problema.

A la vista de las expresiones de  $V_{pp}(k)$  y  $V_{ps}(k)$ , en función de la variable “ $k$ ”, la resolución de las integrales de arriba, no parece simple. La resolución por métodos numéricos, impediría llegar a conclusiones que pudiéramos interpretar de una forma clara. Para llegar a expresiones analíticas aproximadas se recurre al método de integrales de contorno en el campo complejo (consultar el **Apéndice F**, donde se dan unas ideas intuitivas sobre el método aludido). Así pues, se concentra la atención sobre la integral del Potencial “ $\mathbb{E}_{refl}$ ” (análogos resultados, se pueden obtener para la integral de “ $W_{refl}$ ”).

Si primeramente se extienden los límites de integración desde  $-\infty$  a  $+\infty$ , en la integral de la ecuación 6.26.b, haciendo uso de la *Función de Hankel de Orden Cero de segunda clase*, “ $H_0^{(2)}(x)$ ” (ver **Apéndice G**, apartado G.4. ), y teniendo en cuenta que:

$$V_{ps}(+k) = > V_{ps}(-k) \quad (\text{ec. 6.27})$$

Se puede escribir:

$$\mathbb{E}_{refl}(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(k, r, z) dk \quad (\text{ec. 6.28})$$

Llamando;

$$I(k, r, z) = \frac{A_0}{2} V_{ps}(k) H_0^{(2)}(kr) \frac{k}{k_z^r} e^{(k_z^r h + k_z^s z)} \quad (\text{ec. 6.29})$$

Para la resolución de la Integral del Potencial de  $w_{refl}$ , hay que extender los límites desde  $-\epsilon$  a  $+\epsilon$ . En este caso  $V_{ps}(k)$  es una función par, y se debe utilizar la *Función de Hankel de primera clase*,  $H_0^{(1)}(x)$ . Pero la demostración en esencia, es análoga.

Si pasamos a una variable compleja general, como se ha apuntado más arriba:

$$Z = y + i\epsilon \quad (\text{ec. 6.30})$$

Si  $Z \in \mathbb{C}$  entonces  $y$  es la parte real del número complejo  $Z$ , y  $\epsilon$  es la parte imaginaria.

Consideremos Integrales de Contorno en el plano complejo. Aplicando el Teorema de Cauchy a un contorno cerrado  $C$ , donde el integrando se supone que es una *función analítica* (Apéndice F, ec. F1), se puede escribir:

$$\oint_C I(Z) dZ = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(Z_j) \quad (\text{ec. 6.31})$$

Donde  $\text{Res}(Z_j)$ , es el llamado residuo del integrando en el polo " $Z_j$ ", dentro del contorno cerrado  $C$ . Esto es válido, si el integrando dentro del contorno no posee otro tipo de singularidades que no sean *polos*. En el **Apéndice F**, se exponen las bases del Teorema de Cauchy.

Se ha eliminado de la notación en el integrando las variables  $r$  y  $z$ , pero sólo de la notación, recordando que están implícitas en el integrando.

Conviene no confundir en la notación utilizada, la variable compleja  $Z$ , con la coordenada cartesiana vertical  $z$ , en las demostraciones siguientes.

### 6.3.2. Solución en Ondas Guiadas: Polo de Rayleigh.

Este tipo de Ondas, son las que dominan a largas distancias, y se obtienen a partir de los residuos de la ecuación 6.31, que a su vez se calculan con los polos que el integrando posee.

$$I(k) = A_0 \frac{-2k\bar{k}_z(3k_r^2 - 2k^2)}{F(k)} H_0^{(2)}(kr) \frac{k}{k_z^\Gamma} e^{(k_z^\Gamma h + k_z^S z)}$$

Y los polos vienen determinados, donde el integrando tenga una determinada singularidad, según se expone en el **Apéndice F**, y esto ocurre cuando el *determinante de Rayleigh*  $F(k)$ , que se encuentra en el denominador, sea igual a cero:

$$F(k) = (3k_r^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - k_s^2} \sqrt{k^2 - k_s^2} = 0 \quad (\text{ec. 6.32})$$

Se obtiene así la llamada *Ecuación de los polos*.

Esta ecuación, muy conocida dentro del estudio de las Ondas Superficiales, tiene un par de soluciones reales,  $k_R$ , que son compatibles con la condición:  $k_R > k_s > k_r > 0$ , para que haya ondas guiadas en la superficie. En rigor  $k_R$  sería complejo, pero de momento se considera la parte imaginaria de  $k_R$  muy pequeña.

$$k_R = y_R + i\epsilon_R, \quad \text{con} \quad \epsilon_R < 0$$

$$\text{Pero } k_R \in \mathbb{U}, \quad \text{si} \quad \epsilon_R \rightarrow 0$$

Este tema se tratará en el estudio de “*Leaky modes*” o modos a pérdida, en las ondas canalizadas.

Los residuos del integrando (ec. 6.31) vienen dados por (Ver Apartados F.3 y F.5 **Apéndice F**):

$$\text{Res}(k_R) = 2A_0 i \Pi(k_R) H_0^{(2)}(k_R r) e^{(\sqrt{k_R^2 - k_r^2} h + \sqrt{k_R^2 - k_s^2} z)} \quad (\text{ec. 6.33})$$

Donde:

$$\Pi(k_R) = \frac{k_R^2(3k_r^2 - 2k_R^2)}{F'(k_R)}$$



$$F'(k_R) = \left. \frac{dF(k)}{dk} \right|_{k=k_R}$$

Luego, la solución a la integral inicial y por tanto al problema (ec. 6.31), se obtendría; por una parte, conociendo el Residuo, que representa a las Ondas Guiadas de Rayleigh y por otra, calculando las integrales a lo largo de los llamados “cortes de ramificación” (Ver Apéndice F).

Como se mencionó al principio, análogas conclusiones, podemos obtener, para el Potencial “ $W_{refl}(r, z)$ ”, procediendo de igual manera, y teniendo en cuenta las ecuaciones 6.21.a y 6.21.b. Conocidos los potenciales, se pueden obtener los respectivos desplazamientos.

Aquí sólo se van hacer unos breves comentarios, a la vista de la ecuación 6.33.

- a) Como  $k_R > k_S > k_T$  (y  $z < 0$  hacia el interior de la Tierra), la amplitud de este tipo de Ondas, decae exponencialmente con la profundidad. Son Ondas que se desplazan guiadas, paralelas a la superficie libre.
- b) Pero, para grandes distancias, utilizando la expresión asintótica para la función de Hankel  $H_0^{(2)}(kr)$  (ver **Apéndice G**), se tiene:

$$\mathfrak{E}_{refl}^{Rayleigh}(r, z, t; k_R) = 4fA_0\Pi(k_R)\sqrt{\frac{2}{fk_R r}} \cos(k_R r - \tilde{S}t - f/4)e^{(\sqrt{k_R^2 - k_T^2}h + \sqrt{k_R^2 - k_S^2}z)} \quad (\text{ec. 6.34})$$

Donde ahora, se ha incluido, la dependencia armónica del tiempo, (ec. 6.19.c), por lo que aparece la frecuencia,  $\tilde{S}$ . Se ha tomado la parte real de toda la expresión del potencial. Obsérvese como dicha expresión está particularizada, para el valor del residuo  $k_R$ .

Como se ve este tipo de ondas se atenúa con la distancia con  $r^{-1/2}$ , lo cual hace que esta Onda tenga mayores amplitudes a grandes distancias comparadas con las P y S cuya atenuación geométrica es  $r^{-1}$ .

- c) La velocidad de este tipo de Ondas Guiadas viene dado por:

$$c_R = \tilde{S}/k_R \quad (\text{ec. 6.35})$$

Y como  $k_R > k_S > k_T$ , se verifica que:  $c_R < S < T$ .

Inecuación que ya es conocida, que muestra como las Ondas de Rayleigh se propagan a una velocidad menor que las Ondas de cizalla del medio.

- d) Obsérvese también, que para cada par de valores  $k_r$  y  $k_s$  se obtiene un valor diferente de  $k_R$  (ec. 6.32), para las Ondas de Rayleigh. A su vez los valores de  $k_r$  y  $k_s$ , dependen de las velocidades  $v$  y  $S$ , de las características intrínsecas del medio, y por otra parte, de las frecuencias de las ondas que emite la fuente sísmica. Luego si la Onda Incidente inicial tiene un espectro de frecuencias continuo, como ocurre para un Terremoto real, las ondas guiadas, deben tener, en principio un espectro de energía muy similar.

En realidad, en la expresión 6.34, la longitud de onda de Rayleigh, no es una variable independiente, dados unos valores de  $v$  y  $S$ , y una frecuencia  $\tilde{S}$ , el valor de  $k_R$ , está fijado por la *ecuación de Rayleigh*, como se acaba de decir.

## 6.4. Ondas Guiadas en una Capa debida a una Fuente Puntual que emite Ondas Esféricas.

### A ) Introducción.

Vamos a estudiar el problema de Ondas Love, de una manera más realista, suponiendo que trabajamos a distancias de la fuente donde los frentes de ondas deben considerarse aún esféricos.

### B ) Planteamiento de Problema.

Sea una fuente puntual *ideal*, que sólo emite Ondas  $SH$ , dicha fuente se encuentra dentro de una capa plana y paralela, sobre un medio semi-infinito, modelo de Corteza-Manto, la velocidad de las ondas de cizalla de la capa es  $S_1$ , y la densidad  $\rho_1$ , y el medio semi-infinito posee velocidad  $S_2$ , y densidad  $\rho_2$ , con la condición de que  $S_1 < S_2$ . Ambos medios se suponen isótropos y homogéneos.  $H$  es el espesor de la capa. La fuente se encuentra a una profundidad  $h_1$ , bajo la superficie de la Tierra (ver Figura 6.2)

Sea  $u_{1\theta}^T$ ; el Campo Total de Desplazamientos Horizontales<sup>21</sup>, en la capa, que en coordenadas cilíndricas, vendrá dado por:

<sup>21</sup> Dichos desplazamientos son transversales a la dirección de propagación, de aquí que se haya denotado con el símbolo del ángulo polar  $\theta$ .

$$u^T_{1_n}(r, z, t) = u_{0_n}(r, z, t) + u_{1_n}(r, z, t) + u_{1'_n}(r, z, t) \quad (\text{ec. 6.36})$$

Donde:

- $u_{0_n}$  Es el campo de desplazamientos inicial emitido por la fuente puntual, supone la Onda Directa.
- $u_{1_n}$  representa los desplazamientos de las Ondas *SH* Reflejadas en la superficie libre y
- $u_{1'_n}$  representa reflexiones en la superficie de discontinuidad entre la capa y el medio semi-infinito<sup>22</sup>.

Si suponemos una dependencia armónica del tiempo, ver **Apéndice I.**, ec. I.10, en coordenadas esféricas, tenemos:

$$u_{0_n}(R, t) = \frac{B_0}{R} e^{-i(k_{S_1}R - \tilde{S}t)} \quad (\text{ec. 6.37})$$

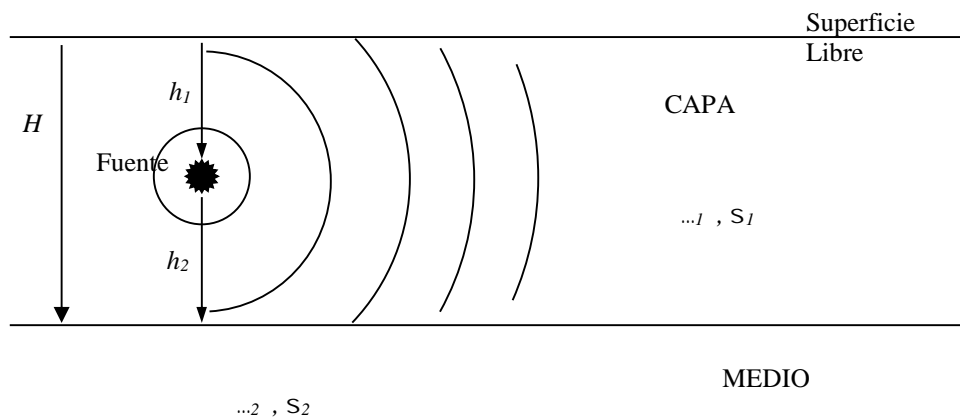


Figura 6.2. Modelo de una Capa plana y paralela, sobre un Medio semi-infinito, y la Fuente emite Frente de Ondas Esféricas.

La explicación de cada factor se puede encontrar en el mencionado **Apéndice I.** Digamos aquí que  $B_0$ , es simplemente una constante. Esta expresión es solución de la ecuación de Ondas (ec I.7), para una Fuente Puntual.

<sup>22</sup> Como sabemos por la Teoría Elemental de Ondas Elásticas; en presencia de una superficie de discontinuidad entre dos medios, una Onda Incidente *SH*, da lugar a Ondas *SH* Reflejadas y Refractadas, únicamente.

Si se utiliza nuevamente la Integral de Sommerfeld (ec. 6.5), puede escribirse:

$$u_{0_z}(r, z, t) = B_0 e^{i\tilde{S}t} \int_0^{+\infty} J_0(kr) \frac{k}{k_z^{s_1}} e^{-k_z^{s_1}|z-h_1|} dk \quad (\text{ec. 6.38})$$

Donde:  $h_1$  ; es la profundidad de la Fuente (ver Figura 6.2), y

$$k_z^{s_1} = \sqrt{k^2 - k_{s_1}^2} \quad , \quad \text{con} \quad k_{s_1} = \frac{\tilde{S}}{S_1} \quad .$$

La explicación de cada factor se puede encontrar en el Apartado 6.3.1.

Utilizando de nuevo coordenadas cilíndricas, se puede expresar:

$$u_{1_z}(r, z, t) = e^{i\tilde{S}t} \int_0^{+\infty} B_1(k) J_0(kr) \frac{k}{k_z^{s_1}} e^{-k_z^{s_1}(z+h_1)} dk \quad (\text{ec. 6.39.a})$$

$$u_{1'_z}(r, z, t) = e^{i\tilde{S}t} \int_0^{+\infty} B_1'(k) J_0(kr) \frac{k}{k_z^{s_1}} e^{k_z^{s_1}(z+h_2)} dk \quad (\text{ec. 6.39.b})$$

Se ha considerado  $z < 0$ , hacia el interior de la Tierra.

Y  $h_2 = H - h_1$  ; es la diferencia de profundidades entre el Moho y la fuente (ver Figura 6.2).

Para los desplazamientos transversales de las ondas *SH*, refractadas en el medio semi-infinito, se tiene también en coordenadas cilíndricas:

$$u_{2_z}(r, z, t) = e^{i\tilde{S}t} \int_0^{+\infty} C(k) J_0(kr) \frac{k}{k_z^{s_2}} e^{k_z^{s_2}z + k_z^{s_1}h_2} dk \quad (\text{ec. 6.39.c})$$

$$\text{Donde:} \quad k_z^{s_2} = \sqrt{k^2 - k_{s_2}^2} \quad , \quad \text{con} \quad k_{s_2} = \frac{\tilde{S}}{S_2} \quad .$$

Al igual que en el Apartado anterior, se imponen condiciones de contorno en la Ecuación de Ondas, para los desplazamientos totales en la capa  $u_{1_z}^T(r, z, t)$ , y los desplazamientos en el medio semi-infinito  $u_{2_z}^T(r, z, t)$ .

Así, suponiendo **esfuerzos verticales, nulos en la superficie libre**  $z = 0$ .

$$\dagger_{z_s}^1 = \sim_1 \left( \frac{\partial u_{1_s}^T}{\partial z} + \frac{\partial u_{1_z}^T}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{ec. 6.40.a})$$

Aunque debido a la simetría axial del problema;

$$\frac{\partial u_{1_s}^T}{\partial r} \equiv 0 \quad (\text{ec. 6.40.b})$$

Y  $\sim_1 = S_1^2 \mu_{...1}$ ; *Módulo de Cizalla o Rigidez*, de la capa.

Suponiendo **continuidad de desplazamientos y esfuerzos verticales**, en la superficie de discontinuidad entre la capa y el medio semi-infinito;  $z = H$ , se obtiene:

$$u_{1_s}^T = u_{2_s} \quad (\text{ec. 6.40.c})$$

$$\dagger_{z_s}^1 = \sim_1 \frac{\partial u_{1_s}^T}{\partial z} = \sim_2 \frac{\partial u_{2_s}}{\partial z} = \dagger_{z_s}^2 \quad (\text{ec. 6.40.d})$$

$\sim_2 = S_2^2 \mu_{...2}$ ; *Módulo de Cizalla o Rigidez*, del medio semi-infinito.

Donde se ha hecho uso de la identidad de la ecuación 6.40.b, para los desplazamientos, tanto en la capa como en el medio semi-infinito.

Luego sustituyendo la expresión general de los desplazamientos (ec. 6.38, ec. 6.39.a, b y c), en las ecuaciones para las condiciones de contorno (ec. 6.40.a, c y d), se obtienen las siguientes ecuaciones lineales, para los coeficientes  $B_I(k)$ ,  $B_{I'}(k)$  y  $C(k)$ , en función del Coeficiente de la Onda Incidente  $B_0$ .

$$-e^{-s_1} e^{-ik_z h_1} B_1 + e^{s_1} e^{ik_z h_2} B_{1'} = e^{-s_1} e^{-ik_z h_1} B_0 \quad (\text{ec. 6.41.a})$$

$$e^{-s_1} e^{-ik_z (H+h_1)} B_1 + e^{-s_1} e^{ik_z (H+h_2)} B_{1'} - e^{-s_2} e^{i(k_z H + k_z h_2)} C = e^{-s_1} e^{-ik_z (H-h_1)} B_0 \quad (\text{ec. 6.41.b})$$

$$\begin{aligned} -\sim_1 k_z e^{-s_1} e^{-ik_z (H+h_1)} B_1 + \sim_1 k_z e^{-s_1} e^{ik_z (H+h_2)} B_{1'} - \sim_2 k_z e^{-s_2} e^{i(k_z H + k_z h_2)} C = \\ = \sim_1 k_z e^{-s_1} e^{-ik_z (H-h_1)} B_0 \end{aligned} \quad (\text{ec. 6.41.c})$$

Donde:  $\bar{k}_z^{s_1} = \sqrt{k_{s_1}^2 - k^2} \quad (\text{ec. 6.42.a})$

$$y, \quad \bar{k}_z^{s_2} = \sqrt{k_{s_2}^2 - k^2} \quad (\text{ec.6.42.b})$$

Estas ecuaciones permiten obtener, el valor de los coeficientes en función del número de Ondas Aparente, “ $k$ ”, como;

$$B_1(k) = -B_0 e^{ik_z h_2} \left[ \frac{\sim_2 \bar{k}_z^{s_2} \cos[\bar{k}_z^{s_2} (H - h_1)] - i \sim_1 \bar{k}_z^{s_1} \text{sen}[\bar{k}_z^{s_2} (H - h_1)]}{\Delta(k)} \right] \quad (\text{ec. 6.43.a})$$

$$B_1(k) = -iB_0 e^{-ik_z (H+h_2)} \left[ \frac{(\sim_2 \bar{k}_z^{s_2} + \sim_1 \bar{k}_z^{s_1}) \text{sen} \bar{k}_z^{s_1} h_1}{\Delta(k)} \right] \quad (\text{ec. 6.43.b})$$

$$C(k) = -2iB_0 e^{-i(k_z H + k_z h_2)} \left( \frac{\sim_1 \bar{k}_z^{s_1} \text{sen} \bar{k}_z^{s_1} h_1}{\Delta(k)} \right) \quad (\text{ec. 6.43.c})$$

Donde:

$$\Delta(k) = \sim_2 \bar{k}_z^{s_2} \cos \bar{k}_z^{s_1} H - i \sim_1 \bar{k}_z^{s_1} \text{sen} \bar{k}_z^{s_1} H \quad (\text{ec. 6.44})$$

Esta función es muy importante, ya que a partir de ella, se obtiene la *ecuación de dispersión*.

Si se tienen en cuenta, estas expresiones para los coeficientes y se calcula, el desplazamiento total, en la capa (ec. 6.36), como:

$$u_{1r}^T(r, z) = u_{0r}(r, z) + u_{1r}(r, z) + u_{1r'}(r, z) \quad (\text{ec. 6.45})$$

Se ha prescindido de la componente del tiempo (armónica). Sustituyendo las ecuaciones 6.43.a , b y c, en las ecuaciones 6.39.a , b y c, respectivamente, y sumando (ec. 6.45), se obtiene:

$$u_{1r}^T(r, z) = \int_0^{+\infty} \left( B_0 e^{-ik_z^{s_1} |z-h_1|} + B_1(k) e^{-ik_z^{s_1} (z+h_1)} + B_1'(k) e^{ik_z^{s_1} (z+h_2)} \right) \cdot J_0(kr) \frac{k}{k_z^{s_1}} dk \quad (\text{ec. 6.46})$$

Y el resultado es el siguiente:

$$u_{1_r}^T(r, z) = \int_0^{+\infty} \frac{P(k)}{\Delta(k)} J_0(kr) \frac{k}{k_z^{s_1}} dk \quad (\text{ec. 6.47})$$

Donde el término  $\Delta(k)$ , viene dado por la ecuación 6.44, y;

$$P(k) = -2 \left[ \cos \bar{k}_z^{s_1} (z - H) + i \operatorname{sen} \bar{k}_z^{s_1} (z - H) \right] \operatorname{sen} \bar{k}_z^{s_1} \quad (\text{ec. 6.48})$$

En Ewing *et al.* (1957), se puede ver como la integral de la ecuación 6.47, se puede expresar de una forma aproximada, por un desarrollo en serie, y como los términos de dicho desarrollo, pueden ser identificados, además de con el rayo directo, con rayos reflejados un cierto número de veces en el fondo de la capa.

Si se intenta resolver el problema siguiendo los pasos del Método del Apartado anterior, transformando la integral de la ecuación 6.47, en una integral de contorno en el campo complejo, y aplicando el Teorema de Cauchy, (ver **Apéndice F**). Dicha integral será igual a la suma de los residuos, más las integrales a lo largo de las líneas de ramificación.

Si se consideran las distancias horizontales grandes, la solución aportada por el residuo, es la solución predominante, como se discutió en su momento.

Se sabe que también los residuos de la integral de la ecuación 6.47, se calculan en los polos del integrando, (ec. F.7), que a su vez tienen lugar en las raíces del denominador, es decir, donde  $\Delta(k_0) = 0$ , lo que permite escribir, según la ecuación 6.44:

$$\Delta(k_0) = \sim_2 \bar{k}_z^{s_2} \cos \bar{k}_z^{s_1} H - i \sim_1 \bar{k}_z^{s_1} \operatorname{sen} \bar{k}_z^{s_1} H = 0 \quad (\text{ec. 6.49})$$

Y haciendo uso de las expresiones de  $\bar{k}_z^{s_1}$  y  $\bar{k}_z^{s_2}$ .

$$\frac{\sim_2 \sqrt{k_{s_2}^2 - k_0^2}}{\sim_1 \sqrt{k_{s_1}^2 - k_0^2}} = i \tan \left( H \sqrt{k_{s_1}^2 - k_0^2} \right) \quad (\text{ec. 6.50})$$

Y para que esta ecuación tenga soluciones reales, es decir, polos sobre el eje real, debe verificarse que  $k_{s_1} > k_0 > k_{s_2}$ , tal que la ecuación de arriba se puede volver a escribir, como:

$$\frac{\sim_2 \sqrt{k_0^2 - k_{s_2}^2}}{\sim_1 \sqrt{k_{s_1}^2 - k_0^2}} = \tan \left( H \sqrt{k_{s_1}^2 - k_0^2} \right) \quad (\text{ec.6.51})$$

Dicha ecuación, es la *Ecuación de Dispersión del Medio*, conocida también en la literatura inglesa, como “*Period Equation*”.

## C ) Conclusiones.

**C.1.** La Ecuación de dispersión (ec. 6.51), es idéntica a la obtenida suponiendo frente de Ondas Planos (ec. 2.7). Aunque la ecuación obtenida aquí usa criterios más realistas, suponiendo frente de Ondas Esféricas.

**C.2.** Esta ecuación es independiente de la profundidad de la fuente, a pesar, de haberla tenido en cuenta, al comienzo del problema.

**C.3.** Dicha ecuación como sabemos tiene infinita soluciones o raíces (también llamadas “*eigenvalores*”), dada la periodicidad de la función tangente [ $\tan(x)=\tan(x+2fn)$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots N$  ]. Que como se ha demostrado son los polos del integrando de la ecuación 6.39.a, b y c. Esto implica una infinidad de modos. Una expresión para los desplazamientos en la capa se puede obtener a partir de los residuos del integrando (Apéndice F.3), que siguiendo un procedimiento muy parecido al descrito en el Apartado 6.4.2, para las Ondas Rayleigh, en un medio semi-infinito, y utilizando la aproximación asintótica de la Función de Bessel de Orden cero [ $J_0(x)$ ], para distancias grandes, se puede deducir que los desplazamientos se atenúan con la distancia como  $r^{-1/2}$  , dicha propiedad, no puede deducirse con Frente de Ondas Planos.

**C.5.** Recordar simplemente que la condición para las soluciones de la Ecuación de Dispersión  $k_{s_1} > k_n > k_{s_2}$  , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  Hace que  $k_z^{s_2} = \sqrt{k_n^2 - k_{s_2}^2}$  , sea real, lo que implica que los desplazamientos, en el medio semi-infinito (ver ec. 6.39.c), se atenúen exponencialmente con la profundidad (recordar que elegimos  $z < 0$  , hacia el interior de la Tierra).

Una descripción detallada del Método, se puede encontrar en Ewing *et al.* (1950).

**C.6.** Cada residuo del Integrand, en la ecuación 6.47, es un *modo* diferente, para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$  Ya hemos dicho que a grandes distancias se puede aproximar la integral, por la suma de los residuos (ec. F.1), despreciando la parte de la solución correspondiente a los Cortes de Ramificación. De ahí, el nombre de Método de Sumación Modal, para obtener sismogramas sintéticos.



## 6.5 Modelo de una Capa sobre un Medio Semi-infinito, cuando la Fuente se encuentra en el Medio Semi-infinito.

### A ) Introducción.

De todos es conocido, que los terremotos que ocurren a gran profundidad, en particular fuera de la Corteza Terrestre, no “generan” ondas superficiales, o éstas son muy débiles. Así pues a distancias regionales no se puede hablar de onda guiada en la corteza, y no tiene sentido la denominación de onda  $Lg$ , para la onda  $S$ , cuando la fuente del terremoto está por debajo de la discontinuidad de Moho. El problema conceptualmente es sencillo, desde el punto de vista de la Teoría de Rayos, sabiendo que no puede haber Ondas supercríticas, que son las verdaderas generadoras de las Ondas Guiadas (Recordar el Apartado 4.5). Aquí, en este apartado, se expone el problema desde la Teoría de ondas, imponiendo condiciones de contorno, y suponiendo como en el caso anterior, frente de ondas esféricos. En este apartado, se plantea el problema, limitándonos a comentar los resultados, que nos servirán para introducir el fenómeno de “*leaky modes*”, que ya se mencionó en capítulos anteriores.

### B ) Planteamiento del Problema.

Suponer como en el apartado anterior, una capa plana, homogénea e isótropa, sobre un medio semi-infinito, homogéneo e isótropo también, la capa es paralela al medio semi-infinito. Sea  $S_1$  y  $\dots_1$ , la velocidad de la Onda de Cizalla y densidad en la capa, respectivamente, y sea  $S_2$  y  $\dots_2$ , las constantes respectivas para el medio semi-infinito (ver en la Figura 6.3, una representación del problema). Suponemos que  $S_2 > S_1$ , al igual que en el caso anterior, se supone una fuente puntual e ideal, que emite ondas  $SH$ , pero ahora la fuente se encuentra por debajo de la capa, es decir  $|h_1| > |H|$ . Siendo  $H$  el espesor de la capa, y  $h_2 = h_1 - H$ , la profundidad de la fuente, medida desde la superficie de discontinuidad, entre ambos medios.

Si como en casos anteriores, se supone una dependencia armónica del tiempo, los desplazamientos en coordenadas esféricas, para esta fuente puntual (Ver **Apéndice I**), vienen dados por:

$$u_{0_s}(R,t) = \frac{B_0}{R} e^{-i(k_{S_2} R - \tilde{S}t)} \quad (\text{ec. 6.52})$$

Donde

$$R = \sqrt{x^2 + (z - h_1)^2}$$

$B_0$  es Constante.

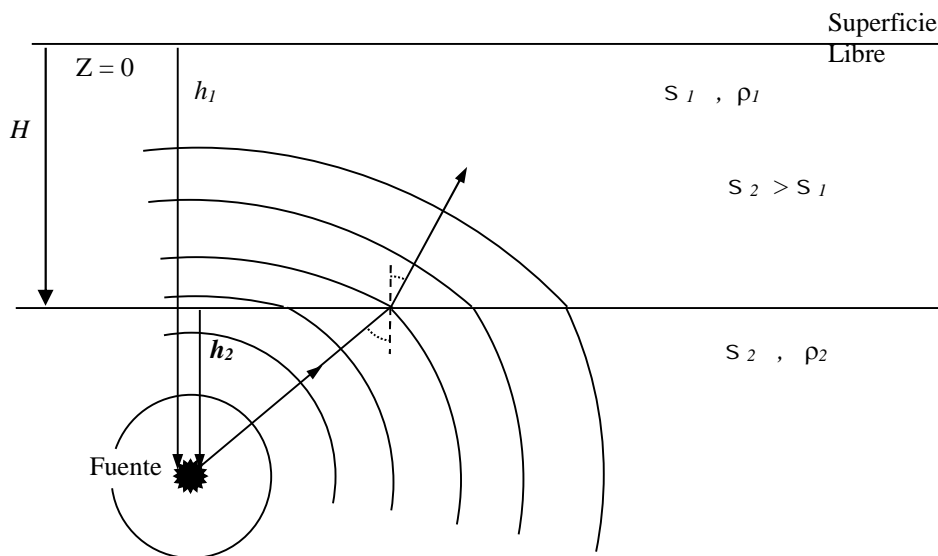
Utilizando la Integral de Sommerfeld, como en los casos anteriores (ec. 6.38), pero ahora teniendo en cuenta que la fuente se encuentra en el medio semi-infinito, podemos escribir;

$$u_{0_z}(r, z, t) = B_0 e^{i\check{S}t} \int_0^{+\infty} J_0(kr) \frac{k}{k_z^{S_2}} e^{-k_z^{S_2}|z-h_1|} dk \quad (\text{ec. 6.53})$$

Donde:  $k_z^{S_2} = \sqrt{k^2 - k_{S_2}^2}$  y  $k_{S_2} = \frac{\check{S}}{S_2}$ .

Con  $z$  negativo hacia el interior de la Tierra, como en los casos anteriores.

En el medio semi-infinito; además de la propia Onda Directa, existirá la Onda SH Reflejada, en la superficie de discontinuidad, cuyo desplazamiento es  $u_{2_z}$ . Y en la capa se tienen las Ondas SH Transmitidas a traves de la superficie de discontinuidad, sea  $u_{1_z}$  y, las SH Reflejadas en la superficie libre, sea  $u_{1'_z}$ .



**Figura 6.3. Modelo de una capa plana y paralela sobre un medio semi-infinito, en el que la Fuente se encuentra en el medio semi-infinito y no**

Así pues, se puede escribir de manera general, utilizando coordenadas cilíndricas;

$$u_{2_s}(r, z, t) = e^{i\tilde{S}t} \int_0^{+\infty} B_2(k) J_0(kr) \frac{k}{k_z^{S_2}} e^{k_z^{S_2}(z+h_2)} dk \quad (\text{ec. 6.54.a})$$

$$u_{1_s}(r, z, t) = e^{i\tilde{S}t} \int_0^{+\infty} C_1(k) J_0(kr) \frac{k}{k_z^{S_2}} e^{-k_z^{S_1}z - k_z^{S_2}h_2} dk \quad (\text{ec. 6.54.b})$$

Y,

$$u_{1_s}(r, z, t) = e^{i\tilde{S}t} \int_0^{+\infty} C_1'(k) J_0(kr) \frac{k}{k_z^{S_2}} e^{k_z^{S_1}z + k_z^{S_2}h_2} dk \quad (\text{ec. 6.54.c})$$

Donde;  $k_z^{S_2} = \sqrt{k^2 - k_{S_2}^2}$

En el Medio Semi-infinito, los Desplazamientos Totales, vienen dados por:

$$u_{2_s}^T(r, z, t) = u_{0_s}(r, z, t) + u_{2_s}(r, z, t) \quad (\text{ec. 6.55.a})$$

Y en la capa, el Desplazamiento Total,  $u_{1_s}^T$ , viene dado por la suma:

$$u_{1_s}^T(r, z, t) = u_{1_s}(r, z, t) + u_{1_s}'(r, z, t) \quad (\text{ec. 6.55.b})$$

Como en los casos anteriores imponiendo condiciones de contorno:

- Igualdad de los desplazamientos y esfuerzos a través de la superficie de discontinuidad entre la Capa y el Medio Semi-infinito ( $z = H$ ).
- Esfuerzos nulos en la Superficie Libre.

Con estas condiciones se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas que son los coeficientes  $B_1(k)$ ,  $C_1(k)$  y  $C_1'(k)$ , que podemos poner en función de la amplitud de la Onda Incidente u Onda Directa,  $B_0$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$B_2(k) = B_0 e^{2i\{\text{arctag}G(k) - k_z^{-S_2}[H - (h_1 - h_2)]\}} \quad (\text{ec. 6.56.a})$$

$$C_1(k) = -\frac{\tilde{~}_2 k_z^{-S_2} B_0}{N(k)} e^{i\{\text{arctag}G(k) - k_z^{-S_2}[H - (h_1 + h_2)]\}} \quad (\text{ec. 6.56.b})$$

Y, por último:

$$C_1'(k) = -\frac{\sim_2 \bar{k}_z^{\sim_2 S_2} B_0}{N(k)} e^{i\{\arctag G(k) - \bar{k}_z^{\sim_2 S_2} [H - (h_1 - h_2)]\}} \quad (\text{ec. 6.56.c})$$

Donde:

$$G(k) = \frac{\sim_1 \bar{k}_z^{\sim_1 S_1}}{\sim_2 \bar{k}_z^{\sim_2 S_2}} \text{tag} \left( \bar{k}_z^{\sim_1 S_1} H \right) \quad (\text{ec. 6.57})$$

Y

$$N(k) = \sqrt{\left( \sim_2 \bar{k}_z^{\sim_2 S_2} \right)^2 \cos^2 \left( \bar{k}_z^{\sim_1 S_1} H \right) + \left( \sim_1 \bar{k}_z^{\sim_1 S_1} \right)^2 \text{sen}^2 \left( \bar{k}_z^{\sim_1 S_1} H \right)} \quad (\text{ec. 6.58})$$

Donde, como en otras ocasiones;

$$\bar{k}_z^{\sim_1 S_1} = \sqrt{k_{S_1}^2 - k^2} \quad \text{y} \quad \bar{k}_z^{\sim_2 S_2} = \sqrt{k_{S_2}^2 - k^2}$$

Y  $\sim_1$  y  $\sim_2$  son los módulos de cizalla o rigidez, de la capa y del medio semi-infinito respectivamente.

Si sustituimos estas ecuaciones (ec. 6.56.a, b y c) en las ecuaciones 6.54.a, b y c, se obtienen las respectivas expresiones analíticas de los desplazamientos en el medio semi-infinito y en la capa.

## C ) Conclusiones.

**C.1.** El coeficiente  $B_2(k)$  de la Onda SH Reflejada en el semiespacio, tiene el mismo valor en módulo que el de la Onda Directa, es decir,

$$| B_2(k) | = | B_0 |. \quad (\text{ec. 6.59})$$

Lo cual quiere decir que todas las ondas que penetran al interior de la capa, terminan “saliendo” otra vez, hacia el semiespacio. No queda *energía* atrapada en la capa, o que en la literatura inglesa se conoce como Efecto de “*Leaky modes*”. Claro está, que se ha considerado un modelo de Corteza ideal, sin atenuación anelástica o de *scattering*, etc...

**C.2.** Con los mismos razonamientos que en los apartados anteriores, las Ondas Guiadas o Canalizadas en la capa, se obtienen a partir de los polos del integrando de las ecuaciones 6.54.b y c. Estos polos, a su vez, son las raíces del denominador en las expresiones de los coeficientes  $C_I(k)$  y  $C_{II}(k)$  (ec. 6.56.b y c respectivamente). Pero en este caso,  $\bar{k}_z^{-s_2}$ , debe ser real, para que haya una fuga de energía hacia el semiespacio. Una inspección un poco detallada del denominador, es decir, de la función  $N(k)$ , ec. 6.58, permite comprobar que no es posible encontrar soluciones reales para ecuación  $N(k_0)=0$  en la primera hoja de Riemann, con la condición  $k < k_{s_2}$ , de tal forma que ahora las soluciones se encuentran en las hojas de Riemann que no son accesibles debido a los cortes.

## 6.6 “Leaky Modes”.

Este término anglosajón, ha aparecido en ocasiones a lo largo de este trabajo, y fue mencionado en el apartado anterior (Apartado 6.5). Aquí, se darán unas ideas fundamentales sobre este concepto para su mejor comprensión, ya que este término es muy importante en el estudio de las Ondas que se propagan en medios estratificados. El tratamiento matemático de este problema es aún más complejo, que en los casos anteriores [Oliver & Major (1960), Rosenbaum (1960), Phinney (1961a y b) y Watson (1972),...].

Este término que en castellano viene a significar *Modos a pérdida*, en contraposición a los llamados *Modos Normales o Bloqueados* (“*Locked Modes*” o “*Trapped Modes*”).

Como se ha visto, los llamados Modos Normales, que se obtenían de las raíces reales de la Ecuación de Rayleigh (ec. 6.32 y 6.49), es decir, los polos del integrando sobre el eje real, en la hoja superior de Riemann (ver apartado F.6 del **Apéndice F**). Sin embargo, también se pueden considerar las raíces complejas de la Ecuación de Rayleigh. El hecho de considerar estas soluciones complejas es una manera de transformar las integrales, a las que dan lugar, los llamados cortes de ramificación, en una suma de los polos complejos en las hojas inferiores de Riemann (ver Apéndice F). Alsop, 1970 y Aki & Richards, 1980.

Se puede demostrar que las soluciones de los desplazamientos, obtenidos de estas raíces complejas de la Ecuación de Rayleigh, se atenúan rápidamente. Normalmente exponencialmente con el tiempo, y representan una fuga de energía de la capa, hacia el espacio semi-infinito (Modelo de una Capa sobre un Medio Semi-infinito), de ahí el nombre de “*Leaky Mode*”.

Desde el punto de vista de las *curvas de dispersión*, ver Figura 2.6, esta fuga de energía, tiene lugar para todas las frecuencias de la fuente, las que para

un determinado modo, se encuentran por debajo de la *frecuencia de corte* (ec. 2.8). Una deducción de esto último se puede encontrar en Molischewsky (1987).

Se puede comprobar que a medida que aumentamos la velocidad del semiespacio, o que se consideren modelos en el que fuesen aumentando el número de capas con la profundidad, cada vez con mayor velocidad, las curvas de dispersión presentan frecuencias de corte cada vez más baja. Desde el punto de vista matemático, esto supone la aparición de nuevos polos en la primera hoja de Riemann, y que los polos complejos de las hojas inferiores de Riemann migrarían hacia el eje real de la hoja superior de Riemann (Harvey, 1981), lo que físicamente implicaría la aparición de nuevos modos normales sin pérdidas.

Así en el problema del apartado anterior, Apartado 6.5, donde se considera un modelo de Tierra de una capa sobre un espacio semi-infinito, la fuente se encontraba por debajo del Moho, y la velocidad de la capa era inferior a la del semiespacio. En este caso, todas las reflexiones son subcríticas, y una solución a las ecuaciones integrales de este problema (ecuaciones 6.54.a, b y c con el valor de los coeficientes que vienen dado por las ecuaciones 6.56.a, b y c), puede obtenerse como suma de los residuos del integrando, calculado en los polos complejos. En su momento se dijo que la ec. 6.58, no podía tener raíces reales con la condición  $\bar{k}_z^{s_2} \in \ddot{U}$ , condición que da lugar a ondas homogéneas que se propagan indefinidamente hacia el interior del semiespacio, y representan una fuga de energía desde el interior de la capa.

En Aki & Richards, 1980, se estudia en el capítulo 7.6., el fenómeno de los “*Leaky modes*” para el medio estratificado más sencillo, una capa líquida sobre un semiespacio líquido, suponiendo una fuente puntual en la capa que emite frente de Ondas esféricas de presión, con una dependencia exponencial del tiempo, no oscilatoria, del tipo:

$$P_i^{inc}(t, R) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < R / r \\ \frac{A}{R} e^{-t(R/r - t)} & \text{para } t > R / r \end{cases}$$

Estos autores obtienen el campo de Ondas completo, como una suma de *Modos Normales* y “*Leaky modes*”.

## Apéndice A:

### Sentido Físico del Retraso del Frente de Señal.

Este concepto que se introdujo con la ecuación 2.14, aunque no es un concepto muy utilizado, tiene su sentido para señales que abarcan un espectro de frecuencias muy grande (“Broadband”), donde los Conceptos de Retraso de Grupo y Fase, no tendrían una aplicación tan clara. (Por ejemplo, un pulso temporal muy corto, es un ejemplo muy claro de señal con un contenido espectral de frecuencias muy grande). El concepto de Retraso del frente de Ondas, tiene una importante aplicación en el campo de la instrumentación sismológica.

El **Retraso del Frente de Señal**, se definía como:

$$t_{fr} = \lim_{\check{S} \rightarrow \infty} \frac{n(\check{S})}{\check{S}}$$

Para un Sistema Lineal, cuya función de transferencia viene dado por:

$$H(\check{S}) = A(\check{S})e^{-i_n(\check{S})}$$

Suponiendo que el valor asintótico de la función  $n(\check{S})$ , para  $\check{S} \rightarrow \infty$ , permite que el límite anterior exista y sea finito.

Entonces, se puede demostrar, que siendo  $h(t)$ , la respuesta temporal del Sistema Lineal, se verifica que:

$$h(t) = 0 \quad \text{para } t < t_{fr}$$

Siendo

$$t_{fr} = \lim_{\check{S} \rightarrow \infty} \frac{n(\check{S})}{\check{S}} .$$

La prueba de esto, se puede encontrar en Papoulis, A. (1962), pág. 187.

Aquí sólo vamos a ver el sentido físico y las implicaciones prácticas que esto tiene.

De la propiedad de  $h(t)$ , enunciada, podemos ver que si una señal que comienza en el instante  $t = 0$ , que matemáticamente se expresa como;

$$f(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0$$

La Respuesta  $g(t)$ , que se obtiene por el Sistema, comenzará en  $t = t_{fr}$  (Ver Figura A-1).

$$g(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < t_{fr}$$

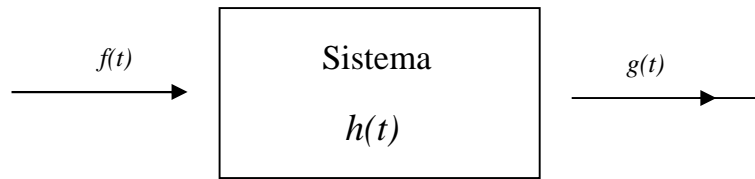


Figura A.1. Representación esquemática de un sistema lineal. Donde  $h(t)$ , representa la función de dicho sistema,  $f(t)$ ; la señal de entrada y  $g(t)$ ; la señal de salida.

De esta forma, el Retraso del frente de Señal es el retraso del comienzo de la señal o del “frente de ondas”, cuando es registrado por un sistema que consideramos lineal. Ver Figura A-2, sería lo que el sistema tarda en responder.

Aunque esto pueda parecer extraño, en la aplicación de filtros con señales temporales, se sabe que las frecuencias muy altas, influyen muchísimo en el comienzo de una señal.



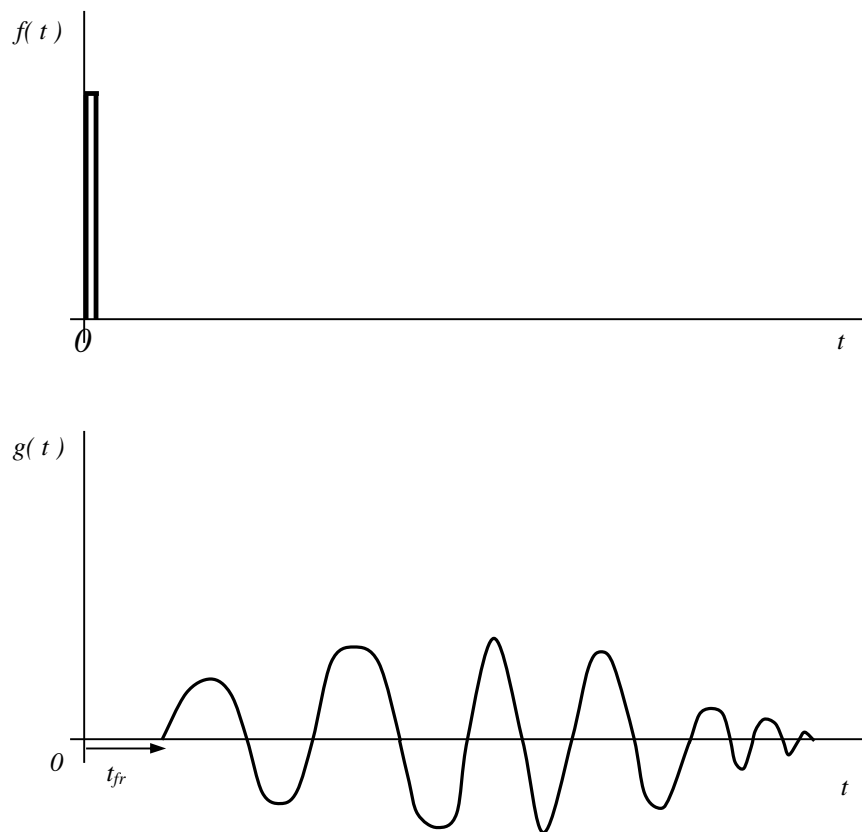


Figura A.2. Representación gráfica del término  $t_{fr}$ ; retraso del frente de señal.

## Apéndice B.

### Angulo Crítico en un Modelo de una Capa Elástica sobre un Medio Rígido.

El Angulo de Incidencia, del rayo crítico en el caso de una Capa Elástica sobre un Medio Rígido vendrá dado por la Ley de Snell;

$$\frac{\text{sen } i_c}{r} = 0 \quad \rightarrow \quad i_c = 0^\circ$$

Donde  $r$  ; es la velocidad de las ondas elásticas en la capa.

Se ha considerado el medio rígido, como aquel medio que no se deforma, donde una “perturbación” se transmitiría de una forma instantánea, en virtud de su rigidez (*ideal*), lo cual la velocidad de propagación sería infinita, lo que nos lleva a que el ángulo crítico, es el rayo normal a la superficie de separación. Así pues, para el modelo de capa elástica sobre un medio rígido, todos los rayos que inciden en el medio rígido (es decir, con ángulos entre  $0^\circ$  y  $f/2$ ), son rayos supercríticos, en los que ninguna energía de tipo elástico, escapa hacia el medio semiinfinito.

## Apéndice C

### Aplicación de la Ecuación Eikonal.

Se va a mostrar aquí, a modo de ejemplo, la utilidad de la *ecuación eikonal* de la Teoría de Rayos, con la deducción de los Frentes de Ondas, para un medio en el que la velocidad aumenta con la profundidad, caso que es muy normal en el interior de la Tierra.

Se supone que la velocidad  $v(z)$  aumenta si aumenta la profundidad,  $z$ ;

$$v(z) \uparrow \text{ si } z \uparrow$$

Si partimos de la *Ecuación Eikonal* (ec. 4.11), como se ha dicho, particularizada para dos dimensiones, tenemos:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(z)} \quad (\text{ec. C.1})$$

Hemos supuesto por simplicidad que  $v_0 = 1$

Si calculamos el ángulo que forma el rayo (normal a los frentes de ondas, o bien paralelo a  $\nabla S$ ), con la dirección Horizontal, eje  $x$ , sea el ángulo  $\Gamma_1$ , haciendo uso de la definición de los *cosenos directores* (ec. 4.18);

$$\cos \Gamma_1 = \frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}} \quad (\text{ec. C.2})$$

A la vista de la ecuación C.1, como la velocidad sólo depende de la profundidad, la derivada parcial de los frentes de onda (denotados por  $S$ ), con respecto a  $x$ , debe ser una constante, así pues;

$$\frac{\partial S}{\partial x} = C \quad , \quad \text{con } C; \text{ constante}$$

entonces,  $\cos \Gamma_1 = C/v(z)$  (ec. C.3)

Lo cual indica que si se aumenta la profundidad, la velocidad aumenta, y el coseno aumenta, entonces el ángulo  $\Gamma_1$  debe disminuir, con lo que los frentes de onda, se curvarían hacia arriba, ver Figura C.1. El razonamiento sería el contrario, si disminuimos la velocidad.

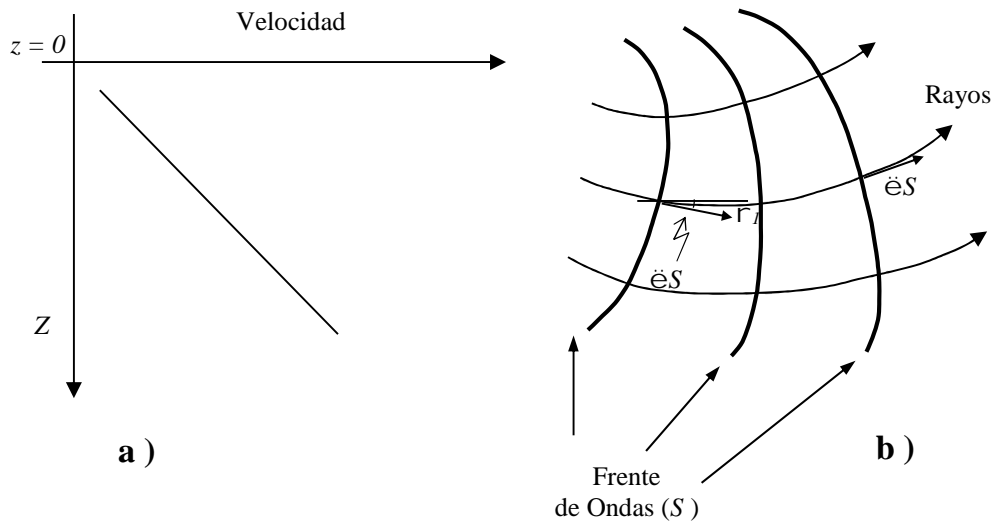


Figura C.1. a) Modelo de velocidad en el que ésta aumenta con la profundidad (z). b) Para este modelo los Rayos se curvan hacia la superficie de la Tierra (z=0). De Lay & Wallace, 1995.

Esto mismo se podría haber deducido de la Ley de Snell, ya que la ley de Snell, y la Ecuación Eikonal, están estrechamente relacionadas entre sí. (ver Lay & Wallace, 1995).

## Apéndice D.

### Sistemas Lineales. *Funciones propias*. Conservación de las Frecuencias.

En todo momento, se están considerando *Sistemas Lineales de Parámetros Constantes*, o lo que es lo mismo, los parámetros que definen el Sistema Lineal, son invariantes en el tiempo, o por lo menos se suponen que permanecen prácticamente constantes en el periodo de estudio.

La importancia de la Integral de Fourier, en el Análisis de Sistemas Lineales, es debida a que las funciones armónicas,  $e^{i\omega t}$ , se comportan como “*funciones propias*” (o *eigenfunciones*) para el Sistema Lineal. Definidas estas *funciones propias*, como aquellas funciones cuya salida son proporcionales a su entrada. Siendo el factor de proporcionalidad el llamado “*valor propio*” (o *eigenvalor*), correspondiente a esa eigenfuncion. Definiendo “ $L$ ”, el **Operador Lineal** que transforma una Función de Entrada  $f(t)$ , en otra Función de Salida,  $g(t)$ .

Matemáticamente podemos expresarlo como;

$$L\{f(t)\} = g(t) \quad (\text{ec. D.1})$$

En el libro de Papoulis A (1962), pag. 82 y ss, se enuncian las condiciones necesarias para que el Operador  $L$ , se pueda considerar lineal.

Si  $f(t)$ , es una *función propia* para el operador  $L$ , se verifica que:

$$L\{f(t)\} = Kf(t) \quad (\text{ec. D.2})$$

Siendo “ $K$ ”, el *valor propio* correspondiente a la *función propia*  $f(t)$ , para ese sistema. Recordamos que  $K$ , puede ser un número real o complejo.

Si como se ha dicho las funciones exponenciales del tipo  $e^{i\check{S}t}$ , se comportan como *funciones propias*; para una frecuencia determinada  $\check{S} = \check{S}_0$  ( $e^{i\check{S}_0t}$ ), tendríamos un determinado valor “ $K_0$ ”. Así pues, si se considera, la función armónica:

$$f(t) = A(\check{S}_0)e^{i\check{S}_0t} \quad (\text{ec. D.3})$$

Haciendo uso de la ecuación D.3, obtenemos;

$$L\{A(\check{S}_0)e^{i\check{S}_0t}\} = K_0A(\check{S}_0)e^{i\check{S}_0t} \quad (\text{ec. D.4})$$

Donde  $K_0$ , puede ser de forma general un número complejo, tal que se puede expresar como:

$$K_0 = K(\check{S}_0)e^{iw(\check{S}_0)} \quad (\text{ec. D.5})$$

Donde  $K(\check{S}_0)$  y  $w(\check{S}_0)$ , son respectivamente la Amplitud y la Fase de  $K_0$ , en la frecuencia  $\check{S} = \check{S}_0$ .

En la ecuación D.4, al extraer el factor  $A(\check{S}_0)$ , fuera del operador, hemos hecho uso de la propiedad de proporcionalidad, que definen a todos los Sistemas Lineales.

Luego la función de salida viene dada por las ecuaciones D.4 y D.5;

$$g(t) = \bar{A}(\check{S}_0)e^{i[\check{S}_0t+w(\check{S}_0)]} \quad (\text{ec. D.6})$$

Sabiendo que:

$$\bar{A}(\check{S}_0) = K(\check{S}_0)A(\check{S}_0)$$

**Luego el resultado es también una función armónica del tiempo, con la misma frecuencia que la función de entrada  $\check{S} = \check{S}_0$ , pero en la que se ha modificado la Amplitud [ en el factor  $K(\check{S}_0)$  ], y se ha introducido un desfase [ $w(\check{S}_0)$ ].**

Como se sabe, toda función  $f(t)$ , bajo ciertas condiciones, no muy restrictivas (llamadas *condiciones de Dirichlet*, ver Bath, 1982), puede expresarse por la conocida *Integral de Fourier*, es decir, como una suma infinita de términos función de  $e^{i\check{S}t}$ ;

$$f(t) = \frac{1}{2f} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\check{S})e^{i\check{S}t} d\check{S}$$

Se comprende ahora, la importancia del Análisis de Fourier, para el estudio de sistemas considerados lineales.

Para terminar se puede decir, que si el resultado de la ecuación D.4, lo podemos obtener para cualquier frecuencia,  $\check{S}$ , tal que se obtiene un par de funciones  $K(\check{S})$  y un  $w(\check{S})$ , genéricas, estas serían los espectros de Amplitud y Fase que definen al Sistema Lineal.

La importancia del resultado obtenido, reside en que en la mayoría de los problemas geofísicos se consideran en principio, sistemas lineales (de parámetros constantes), así el comportamiento de la propia estructura de la Tierra o del instrumento de medida, sismómetro, suelen atribuirse a un sistema lineal.

## Apéndice E

### Integrales de Contorno en el Campo Complejo. Teorema de Cauchy.

Se va a exponer en este apéndice el resultado de un teorema matemático, muy conocido, que tiene que ver sobre la resolución de las integrales de línea en el campo complejo, y que es mencionado, en ciertas partes de este trabajo, dado que es fundamental en la teoría de Ondas Guiadas, como método para resolver las integrales que aparecen en dichos problemas. Aquí sólo se enunciará, ya que la demostración del *Teorema de Cauchy* se puede encontrar en cualquier libro de Análisis Matemático, dada su importancia (p.j. De Castro, 1972).

#### E.1. Teorema de Cauchy: Enunciado.

Sea  $f(z)$ , una función compleja, definida en el campo de los números complejos, si dicha función es una función analítica en todos los puntos de un contorno cerrado  $C$ , y dentro de dicho contorno  $f(z)$ , no posee singularidades esenciales, aunque si pueden existir polos. Se puede considerar la siguiente igualdad:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(z_j) \quad (\text{ec. E.1})$$

Donde:

$\sum_{j=1}^N \text{Res}(z_j)$ ; Es la suma de los residuos del integrando,  $f(z)$ , en los

polos ( $z_j$  con  $j=1,2,\dots,N$ ), dentro del contorno cerrado  $C$ . La integral está tomada en sentido positivo alrededor de  $C$  (más adelante se insistirá en este punto). Lógicamente  $C$ , es una curva en el plano complejo.



Conviene no confundir la coordenada vertical “ $z$ ”, con el número complejo, “ $Z$ ”, que en la mayoría de los libros matemáticos, aparece con esta notación.

Aunque no se va a demostrar este Teorema, se van a discutir varias cuestiones de este enunciado.

## E.2. Función Analítica.

Una función  $f(Z)$ , se dice **analítica**, **holomorfa** o también llamada **regular**, dentro de una región  $S$  del plano complejo, si se verifica que: la función sea *diferenciable*, o sea su derivada es única, o lo que es lo mismo, el límite;

$$f'(z) = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{f(Z + \Delta Z) - f(z)}{\Delta Z}$$

Tiene un valor único independientemente del camino elegido, en el plano  $Z$ . Dicho límite tiene valor único si se cumple las *Relaciones de Cauchy-Riemann*. (De Castro, 1972). Para las funciones definidas en el plano complejo, si existe la primera derivada, existen todas las de orden superior, lo que hace que las funciones llamadas analíticas, en el plano complejo son funciones muy regulares y suaves. Y siempre se pueden desarrollar en serie de Taylor.

Si se identifica la parte real e imaginaria de  $Z$ , como:

$$Z = x + iy \quad (\text{ec. E.2})$$

y,  $f(Z)$ , a partir de las funciones reales  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ :

$$f(Z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{ec.E.3})$$

Las *Relaciones de Cauchy-Riemann*, son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{ec. E.4.a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{ec. E.4.b})$$

## E.4. Polos y Residuos.

Una función compleja  $f(z)$ , definida en el campo complejo, se dice que tiene un *polo* (o también llamada *singularidad accidental*), de orden  $n$ , en un punto  $z = a$ , si existe un número entero positivo “ $n$ ”, tal que el siguiente límite;

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z)$$

tiene valor finito, único y distinto de cero. Que llamaremos **residuo de la función  $f(z)$ , en el polo de orden  $n$   $z = a$ .**

Para una mejor comprensión de lo que acabamos de decir, pongamos el siguiente ejemplo, sea la función

$$f(z) = 1/(z - r),$$

se puede comprobar que tiene un *polo de orden unidad* o “*polo simple*”, en  $z = r$ .

Sin embargo, en caso contrario, se dice que  $f(z)$ , tiene una *singularidad esencial*, es decir, cuando no existe un número  $n$  (número entero positivo), tal que se pueda obtener el límite anterior con las propiedades enunciadas

Por ejemplo, la función

$$f(z) = e^{1/z},$$

tiene una singularidad de tipo esencial en  $z = 0$ .

Hacemos aquí una particularización, al aplicar la fórmula E.1 a las integrales de los problemas con ondas guiadas; encontraremos en el integrando funciones del tipo:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (\text{ec. E.5})$$

Suponiendo que dicha función posee un *polo simple* en “a”, de tal forma que se verifica, que  $f(a) \rightarrow \infty$ , entonces  $Q(z) = 0$ . Y si llamamos  $Res(a)$ , al Residuo de la función  $f(z)$ , en ese polo, por el Teorema de Cauchy, se puede escribir que:

$$\int_c \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i Res(a) \quad (\text{ec. E.6})$$

Y el Residuo en el polo  $a$ , para  $n = 1$ , viene dado por:

$$Res(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{P(z)}{Q(z)}$$

O lo que es lo mismo:

$$Res(a) = \frac{P(a)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{Q(z)}{(z - a)}}$$

y, sabiendo que:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{Q(z)}{(z - a)} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{Q(a + \Delta z) - Q(a)}{\Delta z}$$

Donde se ha hecho uso de  $z = a + \Delta z$  y, que  $Q(a) = 0$ .

Sabiendo que el límite del cociente incremental, de la ecuación de arriba, es la derivada, de tal forma que se obtiene:

$$Res(a) = \frac{P(a)}{Q'(a)} \quad (\text{ec. E.7})$$

Siendo  $Q'(a)$ , la derivada:

$$Q'(a) = \left. \frac{dQ(z)}{dz} \right|_{z=a}$$

## E.4. Sentido de la Integración.

En el enunciado del Teorema de Cauchy, se ha dicho que la integral debe tomarse en *sentido positivo*, esto tiene importancia para hacer la integral, e influye en el signo del resultado. Como norma general, la integral es tomada en sentido positivo, en el contorno  $C$ , cuando se toma el sentido de giro según se muestra en la Figura C.1.

En dicha figura, se ha supuesto que la línea de integración, está bordeando el punto "r" (que bien podría ser una singularidad esencial,...). El plano complejo se ha definido como Plano  $XY$ , siendo  $z = x + iy$ .

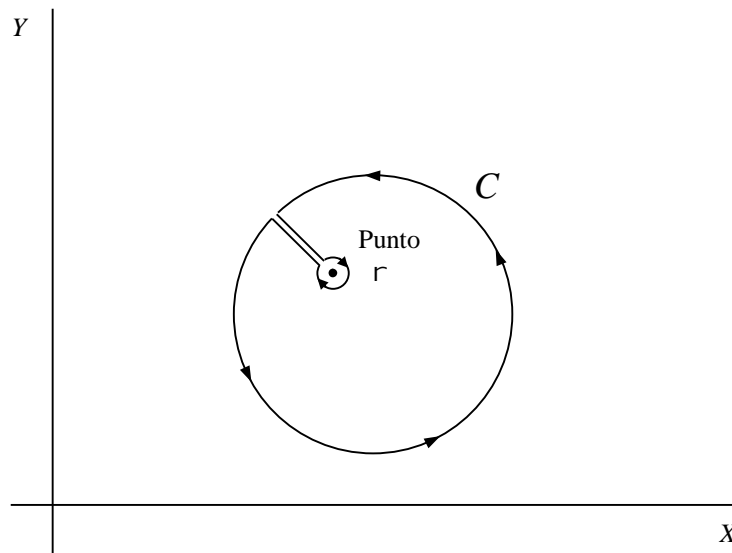


Figura E.1. Elección del sentido positivo, en el camino de integración para el contorno cerrado  $C$ , definido en el campo complejo.

## E.5. Sentido Físico de los Polos de la Función Compleja.

En los problemas que se estudian en sismología, y en concreto en este trabajo, se tiene que los polos son las soluciones de la Ecuación de Dispersión o también Ecuación de Rayleigh, para medios estratificados, a distancias más o

menos grandes. Dicha ecuación aparece en el denominador del integrando de las integrales de línea. Es pues, la existencia de los polos (en el eje real del plano complejo del número de onda, para la hoja de Riemann físicamente posible<sup>23</sup>), los responsables de las ondas canalizadas o guiadas o superficiales (en la literatura inglesa “*Standing Waves*”), como se trata en el **Capítulo 6**.

## E.6 Cortes de Ramificación. Superficies de Riemann: Sentido Físico.

Una de las condiciones impuestas para que una función  $f(z)$ , sea *analítica* u *holomorfa*, y que tiene importantes consecuencias, es aquella en que la función debe ser *univaluada*, es decir, para cada valor de  $z$  ( $\in C$ ), se tenga un único valor de la función,  $f_0$ . Y el caso contrario, es que a un mismo punto del plano  $z$ , le corresponden dos o más valores distintos de la función  $f(z)$ , por ejemplo, sean  $f_1$  y  $f_2$ , con  $f_1 \neq f_2$ .

Se introduce el concepto de *Corte de Ramificación* (en la literatura inglesa podemos encontrarlo con el nombre de “*branch cut*”), y a partir de éste, se definen las *Líneas de Ramificación* (“*branch line*”), y los *Puntos de Ramificación* (“*branch point*”), que junto con las llamadas *Superficies de Riemann*, nos permitirá convertir una función no univaluada, en una función que sí es univaluada. Vamos a ver que significa cada concepto.

Se va a explicar con un ejemplo sencillo, lo que se acaba de decir, como es la función radical, y su extrapolación a funciones más complicadas, es más o menos directa, pero el método es análogo (En Bath, 1968, pg. 30 y ss. se puede encontrar varios ejemplos de funciones multivaluadas).

Se sabe que un número complejo,  $z$ , se puede escribir en su forma polar, utilizando la expresión de Euler, como;

$$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + isen\theta \quad (\text{ec. E.8})$$

Donde la distancia radial “ $r$ ”, está comprendida entre  $0$  y  $+\infty$ , y el ángulo polar “ $\theta$ ”, está definido en el plano  $z$ , para valores comprendidos entre  $0$  y  $2\pi$ .

La función radical es una función que aparecerá en muchos de los problemas con frentes de ondas esféricos, con el inconveniente de que dicha función no es una función univaluada, sea:

<sup>23</sup> Más adelante se explicarán el concepto de Hoja de Riemann.

$$f(z) = \sqrt{z} \quad ; \quad f(z) \in C \quad \text{(ec. E.9)}$$

Y esta ecuación en forma polar queda como sigue:

$$f(R, r) = Re^{ir} \quad \text{(ec. E.10)}$$

Donde cualquier valor de  $f(z)$ , queda comprendido para la distancia radial en el plano entre 0 y  $+ \infty$ , y para el ángulo polar  $r$ , entre 0 y  $2f$ .

Luego la función, nos permite transformar un punto del plano  $z$ , a otro punto del plano  $f(z)$ . Que matemáticamente podemos expresar de una forma simplificada:

$$f: (r, \theta) \longmapsto (R, r)$$

Y en función de las coordenadas polares de  $z$ , la función de la ecuación E.9;

$$f(z) = r^{1/2}e^{i\theta/2} = r^{1/2}(\cos \theta / 2 + i \text{sen} \theta / 2) \quad \text{(ec. E.11)}$$

Se puede comprobar que cada vez que aumenta el ángulo polar  $\theta$ , en  $2f$ , se tiene el mismo valor, en el plano  $z$ . Así pues, para  $\theta = \theta_0$  y  $\theta = \theta_0 + 2f$ , tenemos el mismo punto:

$$z = r_0 e^{i\theta_0} = r_0 e^{i(\theta_0 + 2f)} \quad \text{(ec. E.12)}$$

Sin embargo, con estos dos valores que son iguales en  $z$ , para la función radical se obtienen (ecuación E.9), dos valores diferentes de  $f(z)$ , sean dichos valores  $f_1$  y  $f_2$ , que vienen dados más explícitamente, por:

$$f_1 = r_0^{1/2}(\cos \theta_0 / 2 + i \text{sen} \theta_0 / 2) \quad \text{(ec. E.13.a)}$$

$$\text{para } \theta = \theta_0$$

Y,

$$f_2 = r_0^{1/2} \cos(\theta_0 / 2 + f) + i \text{sen}(\theta_0 / 2 + f) \quad \text{(ec. E.13.b)}$$

$$\text{para } \theta = \theta_0 + 2f$$

Que como se ha dicho antes  $f_1 \neq f_2$ .

Como se puede ver, mientras que los valores  $z$ , se repiten cada vez que el ángulo polar aumenta en  $2f$ , los valores de la función  $f(z)$  se repiten cada  $f$ , lo que no da lugar a que un punto en el plano origen tenga un único punto en el

plano final. De una forma gráfica, se puede decir que la falta de unicidad está en el hecho de que dos giros completos en el plano  $Z$  alrededor del punto origen, le corresponden un único giro en el plano  $f(Z)$ .

Por tanto, la función radical deja de ser univaluada, cada vez que  $\theta$ , cambia en  $2f$ , en el plano de origen  $Z$ .

Siguiendo con el problema que estamos abordando; para la aplicación del Teorema de Cauchy (ec. E.1), la falta de unicidad, puede ser soslayada, si se evita que la curva cerrada  $C$ , que se definió como el camino de integración, encierre el punto origen, en el plano  $Z$ . De esta forma habremos convertido la función en **univaluada**, dentro de la región de aplicación del Teorema. Para hacer esto, se toma lo que llamamos un Corte de Ramificación (*branch cut*), desde el punto origen al infinito y que la curva  $C$ , no lo cruce nunca (ver Figura E.2). Al punto origen  $Z = 0$ , en este caso, se le llama punto de ramificación (*branch point*), y a las zonas de la curva  $C$  (camino de integración), que bordean, el corte de ramificación, se llaman líneas de ramificación (*branch line*), véase la Figura E.2, para más aclaración. Los cortes de ramificación se pueden definir en cualquier dirección, aunque en el ejemplo que abordamos, se ha definido sobre el eje real positivo (eje  $X$  positivo).

Con el corte de ramificación definido de la forma de arriba, entonces el Plano- $Z$ , queda dividido en dos regiones: una para ángulos polares  $\theta$  (ver ec. E.8), entre  $0$  y  $2f$ , y que para nuestro caso concreto, le corresponden los valores que se obtendrían en la parte superior del plano complejo de  $f(Z)$ , o lo que es lo mismo, para ángulos polares ( $\tau$ ), de la función  $f(Z)$  (ec. E.10), entre  $0$  y  $f$ , es decir, números complejos con la parte imaginaria positiva. Y otra región definida para ángulos polares  $\theta$ , entre  $2f$  y  $4f$ , que le corresponden la parte inferior del plano de  $f(Z)$ , con ángulos  $\tau$ , comprendidos entre  $f$  y  $2f$ , es decir, valores de  $f(Z)$ , con la parte imaginaria negativa.

Cuando el plano  $Z$ , está definido de esta forma, se dice que se ha dividido en “*Hojas de Riemann*” para la función  $f(Z)$ , en este caso dos hojas. Y se llaman:

- a ) Hoja de *Riemann Superior*, en el plano  $Z$ , a la que comprende ángulos polares para números complejos  $Z$ , comprendidos entre;  $0 \leq \theta < 2f$ .
- b ) Hoja de *Riemann Inferior*, en el plano  $Z$ , a la que le corresponde números complejos  $Z$ , con ángulos polares entre ;  $2f < \theta \leq 4f$ , en este caso.

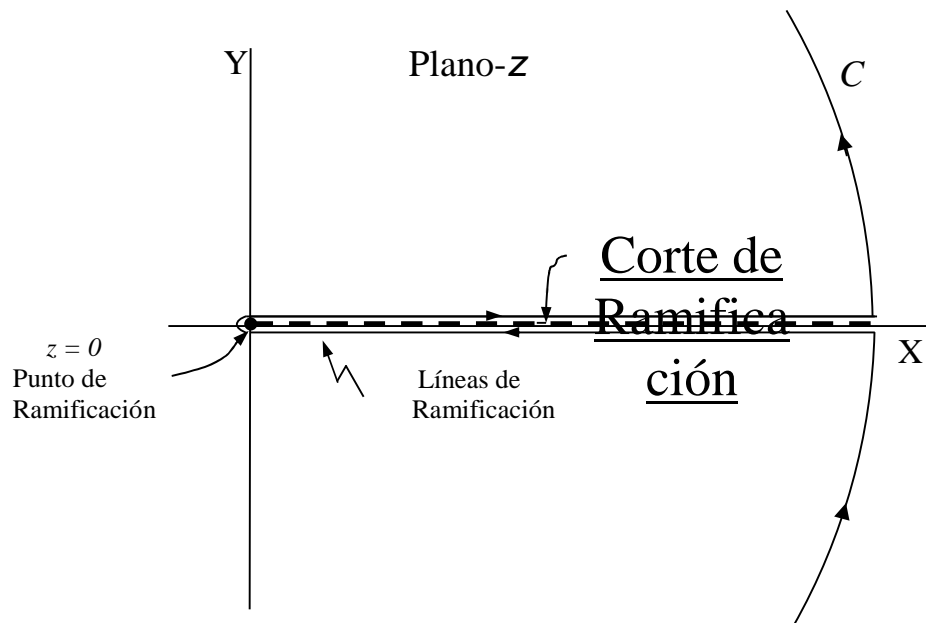


Figura E.2. Representación en el Plano Complejo  $z$ , del camino de integración  $C$ , que no debe cruzar los llamados cortes de ramificación, en este ejemplo, el corte de ramificación está definido sobre el eje  $X$ , para que la función pueda ser considerada univaluada en la región encerrada por dicha curva.

Se comprende que las dos hojas de Riemann están unidas entre sí, por el corte de ramificación (de aquí su nombre), y que permite pasar de la hoja superior a la inferior, y viceversa, que en nuestro caso es el propio eje real positivo, Figura E.2. Ambas hojas juntas constituyen lo que se llama *Superficie de Riemann*.

Dejando de lado, la función radical que ha servido de ejemplo (ec. E.9), en general, una superficie de Riemann puede estar formada o “ramificada” por varias hojas (Hojas de Riemann), las cuales siempre se encuentran unidas por los cortes de ramificación (que pueden ser varios), y son los que nos permiten pasar a través de las diferentes hojas.

Todo cuanto se ha dicho aquí, tiene como finalidad, hacer el integrando de la expresión E.1, una **función analítica** (y por ello univaluada), en el contorno de la curva cerrada  $C$ .

Diremos, que si en el integrando aparece un factor del tipo  $(z - a)^{m/n}$ , donde  $m/n$  no es número entero, entonces se puede considerar  $z = a$ , como un



punto de ramificación y, la Superficie de Riemann está formada por  $n$  hojas de Riemann. Siguiendo el mismo razonamiento que se ha seguido anteriormente, se puede demostrar lo que se acaba de decir.

Lo mismo que se había dicho para los polos, que son los responsables del origen de las ondas superficiales, la integración a lo largo de las líneas de ramificación. Que en los problemas sismológicos que abordamos, dan lugar a ondas sísmicas, que no todas ellas son las que predice por la Teoría de Rayos (Ver **Capítulo 6**).

## Apéndice F

### Funciones de Bessel y Hankel. Expresiones Asintóticas.

#### F.1. Introducción.

En este apartado se va a dar una pequeña introducción sobre las Funciones de Bessel y Hankel, no se va aquí a hacer un desarrollo extenso sobre dichas funciones, que se puede encontrar en cualquier texto de análisis matemático, un poco avanzado. De forma general, se puede decir, que son funciones un poco complicadas, que se pueden presentar de una gran variedad de formas; expresiones integrales, sumatorios, como una sucesión recursiva, etc. Las hay de varios ordenes, y presentan muchas propiedades interesantes. Normalmente las Funciones de Hankel se expresan en función de las de Bessel.

Este tipo de ecuaciones surgen al resolver ciertas ecuaciones diferenciales, en coordenadas esféricas y cilíndricas; ecuaciones de ondas, del potencial gravitatorio, del calor, etc. Fueron introducidas por Bessel en 1824, en problemas de Astronomía Dinámica (Bath, 1968. p. 113).

La representación gráfica de estas funciones, es en general de tipo oscilatorio, cuya amplitud decrece a medida que aumenta su argumento (Press *et al.*, 1992).

Se hace aquí hincapié, sobre las formas asintóticas de las Funciones de Bessel y Hankel, que en los problemas que aquí se abordan son muy útiles, y que podemos usar, siempre y cuando se consideren distancias de observación relativamente grandes.

#### F.2. Definición General de Funciones de Bessel.

La Función de Bessel de orden “ $n$ ”,  $J_n(x)$ , se puede expresar por la siguiente integral<sup>24</sup>:

---

<sup>24</sup> Como se ha dicho antes, la Función de Bessel se puede encontrar de una gran variedad de formas.

$$J(x) = \frac{1}{f} \int_0^{+f} \cos(n_n - x \operatorname{sen} n_n) d_n \quad (\text{ec. F.1})$$

### F.3. Expresión Asintótica de la Función de Bessel.

Si se consideran valores grandes de  $x$  (que matemáticamente se puede expresar por  $x \rightarrow \infty$ ), en la ecuación de arriba, la integral<sup>25</sup> se puede aproximar, como;

$$J_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{f|x|}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}f\right) \quad (\text{ec. F.2})$$

En nuestro caso, si  $x = kr$ , es decir, el producto del número de onda por la distancia horizontal (considerando el problema en coordenadas cilíndricas), dicha aproximación es válida, siempre que la distancia entre el punto de observación, y la fuente sea mucho mayor que la longitud de onda de la perturbación, en cuestión.

$$\text{Sea } x = kr = 2\pi r/\lambda \quad (\text{ec. F.3})$$

Si se considera  $r \gg \lambda$ , se puede suponer que  $x \rightarrow \infty$ .

Así pues, considerando  $x = kr$ , en la ecuación F.2, vemos que es una función oscilatoria con la distancia, pero que se atenúa como  $r^{-1/2}$ , que se asocia con el Factor de Atenuación Geométrica de las Ondas Superficiales.

### F.4. Función de Hankel.

También llamadas Funciones de Bessel de Tercera Clase. Nos vemos obligados a introducirlas, dada la importancia que éstas tienen en este trabajo, pero no vamos a poner complicadas ecuaciones integrales, que se puede consultar en cualquier libro de análisis matemático, como ya se ha dicho en la introducción de este Apéndice.

Al igual que las Funciones de Bessel, existen de varios ordenes, aunque trabajaremos con las de orden cero, solamente. También se expondrán solo, sus

---

<sup>25</sup> Esta aproximación se puede obtener por aplicación del Principio de Fase Estacionaria, que se vio en el **Capítulo 2**, de este trabajo.

expresiones generales, su expresión en función de las Funciones de Bessel, algunas propiedades interesantes y por último, su expresión asintótica que es muy utilizada.

Las funciones de Henkel para las ondas cilíndricas juegan el mismo papel que la función armónica  $e^{ikx}$ , para las ondas planas.

Sea  $H_0^{(1)}(x)$  y  $H_0^{(2)}(x)$ ; la Función de Hankel de Primera y Segunda Clase respectivamente de Orden Cero.

Las expresiones generales, vienen dadas por:

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{f} \int_1^\infty \frac{e^{ixy}}{\sqrt{y^2-1}} dy \quad (\text{ec. F.4.a})$$

$$H_0^{(2)}(x) = \frac{2i}{f} \int_1^\infty \frac{e^{-ixy}}{\sqrt{y^2-1}} dy \quad (\text{ec. F.4.b})$$

Se verifica que:

$$J_0(x) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x)] \quad (\text{ec. F.5})$$

Y que:

$$H_0^{(1)}(x) = H_0^{(2)}(x) \quad (\text{ec. F.6})$$

Diremos que estas propiedades son muy importantes, ya que permiten poner la Función de Bessel en función de la Hankel, y viceversa, para poder cambiar ciertos límites de integración.

De las expresiones generales de la Función de Hankel (ec. F.4.a y b), y de las propiedades de arriba (ec. F.5 y F.6), se pueden obtener la siguiente expresión para la Función de Bessel:

$$J_0(x) = \text{Real } H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{f} \int_1^\infty \frac{\text{sen}(xy)}{\sqrt{y^2-1}} dy \quad (\text{ec. F.7})$$

Donde por “*Real*”, entendemos la parte real de la expresión compleja.

Muy importantes son las expresiones asintóticas, para grandes valores de “ $x$ ”, y siguiendo los mismos razonamientos que para la Función de Bessel, se obtiene:

$$H_n^{(1)}(x) \cong \left( \frac{2}{f|x|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(x - \frac{f}{4} - n\frac{f}{2})} \quad (\text{ec. F.8.a})$$

$$H_n^{(2)}(x) \cong \left( \frac{2}{f|x|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(x - \frac{f}{4} - n\frac{f}{2})} \quad (\text{ec. F.8.b})$$

Donde “ $n$ ”, es el orden de la Función de Hankel. Estas expresiones aproximadas son validas para grandes valores de “ $x$ ”.

# Apéndice G

## Método del Punto de Silla.

### G.1. Introducción.

Este método debido a *Debye*, supone un Método<sup>26</sup> para evaluar de forma aproximada las integrales, en el campo complejo. Este método está íntimamente relacionado con el *Método de Fase Estacionaria*, como luego se verá.

La aproximación que resulta de este método, son las ondas que obtendríamos por la Teoría de la Óptica Geométrica.

No se va hacer aquí, una tediosa demostración, si no que tan solo se enunciará el Teorema y se darán algunos interesantes comentarios, para su mejor comprensión, extrayendo consecuencias físicas y, en concreto aplicándolas a los problemas que se tratan en este trabajo.

### G.2. Enunciado.

Consideremos la siguiente aproximación, para la siguiente integral:

$$\int_C g(z) e^{tf(z)} dz \cong e^{tf(z_0)} g(z_0) \sqrt{\frac{-2f}{tf''(z_0)}} \quad (\text{ec. G.1})$$

$$z \in C$$

Para grandes valores de “*t*”, reales y positivos. La función  $f(z)$  debe ser analítica, también debe existir, la segunda derivada de tal función,  $f''(z_0)$ , que sea real y negativa en el punto  $z_0$ . El punto del plano complejo “ $z_0$ ”, es llamado

---

<sup>26</sup> Conocido también como *Método de Paso*. Y en la literatura inglesa, se puede encontrar con diferentes nombres, tales como; “*Saddle Point Method*” o “*Method of Steepest Descent*”.

*Punto de Silla.* Y por  $C$ , se ha denotado, el camino de integración en el campo complejo, que no tiene porque ser una curva cerrada.

### G.3. Comentarios.

Se debe decir, que como  $z$  y  $f(z)$ , están definidos en el campo complejo, se puede escribir, separando la parte real de la imaginaria;

$$z = x + iy \quad (\text{ec. G.2.a})$$

$$Y, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{ec. G.2.b})$$

El integrando de la ecuación G.1, se puede poner como:

$$g(z)e^{f(z)} = g(z)e^{u}e^{iv} \quad (\text{ec. G.3})$$

Se quiere estudiar en que zonas del campo complejo influyen con más fuerza en el integrando, que permitan tomar como válida, la aproximación de la ecuación G.1. Así pues, se pretende que el integrando tome valores grandes, que en principio, será cuando  $u$ , también tome valores grandes, o dicho de otro modo, se ha de elegir, siempre que sea posible, un camino de integración, donde se de el hecho de que  $u$  concentre los valores más altos, en el segmento más corto posible. Es decir, el **camino de máxima pendiente**, de la curva de integración  $C$ , que es como también es conocido este Método, (como ya se dijo al principio, *Método de Máxima Pendiente*), de tal forma que el resto del camino pueda ser despreciado, a la hora de una evaluación aproximada de la integral.

Si se considera la función  $u$ , como una superficie tridimensional que se eleva sobre el plano  $z$ , función de las coordenadas  $x$  e  $y$ . Ver Figura G.1. El camino de integración, debe evitar las *colinas*, tal que el **camino de máxima pendiente** permita pasar de una zona de *valle*, a otra zona de *valle*, cruzando la zona de *cresta* en su punto más bajo, que es el llamado *punto de silla*, sea  $z_0$ , evitando las *colinas*, como se puede ver en la Figura G.1. En el punto de silla alternan cuatro sectores dos valles y dos de colinas.

Para aplicar este método se debe tener en cuenta:

#### A) Elección del Punto de Silla.

Siendo el punto de silla,  $z_0$ , un punto estacionario (ver Figura G.1), para la función  $u(x, y)$ , condición que se expresa matemáticamente, porque el diferencial de la función  $u$  es igual a cero, en el punto de silla, y de una forma más explícita, se puede poner como:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{ec. G.5})$$

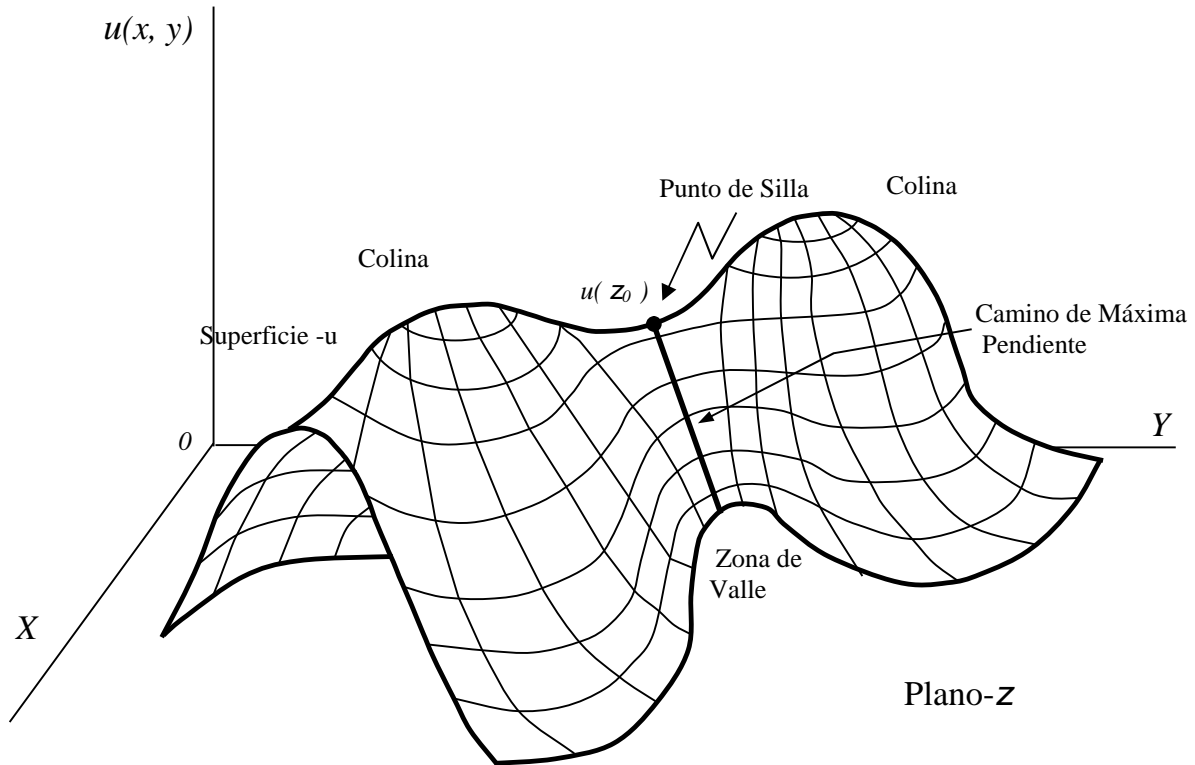


Figura G.1. Representación Gráfica de la Superficie- $u$  , el Plano- $z$  (cuyas coordenadas son  $x$  e  $y$ ), sería el plano horizontal de este espacio tridimensional. Se ha querido de una forma aproximada, representar cual sería la posición del Punto de Silla y el Camino de Máxima Pendiente. Como se puede observar, la forma de dicha superficie recuerda un Silla de Montar, de hay su nombre.

O lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{ec. G.6.a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{ec. G.6.b})$$

En el punto  $z_0$  , para cualquier valor de los elementos  $dx$  y  $dy$  .



Como se ha impuesto que  $f(z)$ , sea analítica, entonces las funciones  $u$  y  $v$  (ec. G.2.b), cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, que ya se introdujeron en el Apéndice E:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{ec. G.7.a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{ec. G.7.b})$$

que hace que también se verifique que  $dv = 0$ , o lo que es lo mismo: que  $df = 0$ , es decir:

$$f'(z_0) = 0$$

Es decir, **los puntos de silla son ceros de la función  $f'(z)$** , condición que sirve para encontrar dichos puntos.

Matemáticamente se puede demostrar que en el *punto de silla*, el camino de máxima pendiente y, otro que fuese perpendicular a éste, tienen curvaturas iguales y de signo opuesto, en la Figura G.1, se puede ver el cambio de signo de una forma gráfica. Esto que se acaba de decir, es muy importante, a la hora de definir el *punto de silla*.

## B ) Elección del camino de máxima pendiente.

Se sabe, que el **gradiente** de una función  $u(x, y)$ , daría la *dirección de máximo aumento*, y que corta perpendicularmente a curvas que unen puntos de igual valor de dicha función, es decir,  $u = \text{const}$ . La expresión del vector gradiente se escribe en función de las derivadas parciales de la función  $u$ , como:

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{ec. G.8})$$

Considérese ahora, un elemento de camino  $ds = (dx, dy)$ , en la dirección del gradiente, entonces se que verifica que:

$$\frac{dx}{\partial u / \partial x} = \frac{dy}{\partial u / \partial y} \quad (\text{ec. G.9})$$

Esta última ecuación no es más que una condición de geometría elemental, de paralelismo entre vectores.

Haciendo nuevamente uso de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann (ec. G.7.a y b), se puede escribir la ecuación G.9, como una función de  $v$ , de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{\partial v / \partial y} = -\frac{dy}{\partial v / \partial x} \quad (\text{ec. G.10})$$

Que operando permite obtener;

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{ec. G.11})$$

El primer miembro de esta ecuación que se acaba de poner, se identifica con el diferencial de  $v$ , que lleva de una forma directa, a que:

$$dv = 0$$

Permite concluir, que para el **camino de máxima pendiente**, se verifica que la parte imaginaria,  $v$ , de la función  $f(z)$ , permanece constante,  $v(x,y) = \text{const.}$

En el transcurso de esta demostración, se puede ver, que para una **función analítica**, las curvas  $v = \text{const.}$  y  $u = \text{const.}$ , son ortogonales entre sí.

También en cuanto al camino de integración, diremos que para aplicar este método, se supone que el contorno de integración, en la ecuación G.1, se puede modificar hasta llevarlo al camino de máxima pendiente, sin alterar notablemente el valor de la integral. En la mayoría de las ecuaciones el contorno de integración original, suele ser el eje real, que tiene que ser deformado al camino de máxima pendiente, por arcos de curvas que apenas contribuyan, y las mayores contribuciones estén en el punto de silla.

En ocasiones se ha de modificar la línea de máxima pendiente, para evitar cortes de ramificación, polos, etc. En Aki & Richards, 1980, en su Capítulo 6, se puede encontrar interesantes ejemplos de esto que se ha dicho.

Continuando con las ideas generales sobre este método, que aquí nos estamos limitando a dar, diremos que esencialmente se basa en desarrollar en serie el factor exponencial del integrando de la ecuación G.1, en un entorno del punto de silla,  $z = z_0$ . Es decir, en el máximo valor en la dirección del camino de máxima pendiente (ver Figura G.1), de aquí se deduce, que la segunda derivada sea negativa como se dijo en el enunciado del Teorema [ $f''(z_0) < 0$ ], reteniendo sólo los términos cuyo mayor orden sea cuadráticos y haciendo uso de la

ecuación G.4, considerando siempre que sólo una pequeña porción del camino de integración, contribuye significativamente al valor de la integral.

Para concluir, decir que desde una interpretación física del problema, la función  $v$  (ec. G.1), debe permanecer constante a lo largo del camino de integración, para poder llevar a cabo la aproximación de la ecuación G.1, lo que supone que la fase del integrando debe permanecer estacionaria (como se había demostrado). Esto nos recuerda que el Método de Fase Estacionaria (Apartado 2.5.5), que aunque fue descubierto primero, no es más que una modificación del Método de Máxima Pendiente, Bath (1968). Para el Método de Fase Estacionaria, el camino de integración posee una dirección diferente, la línea de integración pasa a  $45^\circ$  de la de máxima pendiente, verificándose en esta ocasión que  $u = \text{const.}$ , pero que también pasa por un punto de silla (como en el Método de Máxima Pendiente). Donde  $f'(z_0) = 0$ , o lo que es lo mismo tanto las funciones  $u$  y  $v$ , son estacionarias (en un entorno de dicho punto, al menos hasta primer orden), como se ha comentado más arriba, con cierto detalle.

En los problemas sismológicos que se abordan, el punto de silla, es donde la perturbación elástica presenta mayor Energía o Amplitud. (Apartado 6.4.4).

## G.4 Método de Laplace.

Es una variante del Método anterior, o dicho de otra forma, una particularización, suponiendo que la integración puede llevarse a cabo enteramente en el eje real. Definiendo la integral de la ec. G.1, para los números reales. Suponiendo que  $f'(x)$  existe, y que  $f(x)$ , tiene un único máximo en el eje real, sea  $x = a$ . La aproximación queda de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{tf(x)} dx \cong g(a) e^{tf(a)} \sqrt{\frac{-2f}{tf''(a)}} \quad (\text{ec. G.12})$$

De tal forma que:

$$f'(a) = 0 \quad \text{y} \quad f''(a) < 0$$

Y que  $g(x)$ , es continua, por lo menos en un entorno del punto "a".

## Apéndice H.

### Ecuación de Ondas para los Desplazamientos Transversales.

Sea  $\mathbb{E}(x, z, t)$ ; el Potencial Vector<sup>27</sup>, que permite obtener la componente horizontal de los Desplazamientos de las Ondas de Cizalla, u Ondas S, así se puede escribir;

$$\mathbb{E}(x, z, t) = (\mathbb{E}_1(x,z,t), 0, \mathbb{E}_3(x,z,t)) \quad (\text{ec. H.1})$$

De tal forma que:

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \hat{\mathbf{e}}_1 \mathbb{E} \quad (\text{ec. H.2})$$

De esta forma el vector  $\mathbf{u}$ , sólo tendrá componente horizontal:

$$\mathbf{u}(x, z, t) = (0, u_H(x,z,t), 0) \quad (\text{ec. H.3})$$

Por este motivo, se puede considerar el resultado del rotacional de la ecuación H.2, “como” si fuese un escalar.

Considérese la siguiente función vector:

$$\mathbb{E}_0(x, z, t) = (\mathbb{E}_{01}(x,z,t), 0, \mathbb{E}_{03}(x,z,t))$$

como **el potencial vector que representa una determina fuente de ondas elásticas de cizalla.** De tal forma que:

$$\mathbf{f}_{0H}(x, z, t) = \hat{\mathbf{e}}_1 \mathbb{E}_0 \quad (\text{ec. H.4})$$

Por el mismo razonamiento que antes, se puede considerar el resultado del rotacional de la ecuación H.4, “como” un escalar.

Como sabemos, dicho potencial vector ( $\mathbb{E}$ ), verifica la ecuación de ondas (Teorema de Helmholtz):

---

<sup>27</sup> En función de la coordenada horizontal  $x$ , de la vertical  $z$ , y de la coordenada temporal  $t$ .

$$\nabla^2 \mathbb{E} = \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} + \frac{\mathbb{E}_0}{\dots} \quad (\text{ec. H.5})$$

Donde  $S$  y  $\dots$ ; son la velocidad de las Ondas  $S$  y, la densidad del medio donde se transmiten dichas ondas, respectivamente.

Si en la última ecuación se aplica a ambos lados, el operador rotacional, y operando, se obtiene:

$$\nabla^2 (\nabla \times \mathbb{E}) = \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 (\nabla \times \mathbb{E})}{\partial t^2} + \frac{\nabla \times \mathbb{E}_0}{\dots} \quad (\text{ec. H.6})$$

Que haciendo uso de las expresiones H.2 , H.3 e H.4, se obtiene:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_H = \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_H}{\partial t^2} + \mathbf{f}_{0H} \quad (\text{ec. H.7})$$

En el Apartado 6.5, se considera una fuente puntual e *ideal* de Ondas  $SH$ , con una dependencia armónica del tiempo.

$$\mathbf{f}_0 = ( 0, f_{0H}, 0 ) \quad (\text{ec. H.8})$$

Donde  $f_{0H}$ , es función de las coordenadas espaciales  $x$  e  $z$  y el tiempo  $t$ , viene dada por:

$$f_{0H}(x,t) = B_0 4f \dots S^2 u(x) u(z-h) e^{-i\tilde{S}t} \quad (\text{ec. H.9})$$

Se ha supuesto que la fuente se encuentra a una profundidad  $h$ .  $B_0$ ; no es más que una mera constante. Y  $u(x)$ ; es la conocida Función Delta de Dirac.

Luego la solución para la Ecuación de Ondas (ec. H.7), con el modelo de fuente expuesta en la ecuación H.9, viene dado por:

$$u_H(R,t) = \frac{1}{R} e^{-i(k_S R - \tilde{S}t)} \quad (\text{ec. H.10})$$

Donde:

$R$ ; Es la distancia radial, que viene dada por  $R = \sqrt{x^2 + (z-h)^2}$  .

$\tilde{S}$  y  $k_S$ ; son la frecuencia angular y el número de ondas, como sabemos relacionados por:

$$k_S = \tilde{S} / S \quad .$$



## Bibliografía.

Abo-Zena, A. (1979). "Dispersion Function Computations for Un-limited Frequency Values". *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **58**, 91-105.

Aki, K. (1960). "The Use of Love Waves for the Study of Earthquake Mechanisms". *Journal Geophysical Research*, **65**, 323-331.

Aki, K. (1967). "Scaling Law of Seismic Spectrum". *Journal of Geophysical Research*, **72**, 1217-139.

Aki, K. & Richards, P. G. (1980). "Quantitative Seismology". *Freeman and Company*. New York. U. S. A.

Akinci, A; Ibáñez, J.M.; Del Pezzo E. and Morales, J. (1995) "Geometrical Spreading and Attenuation of  $L_g$  Waves: A comparison between Anatolia (Turkey) and Southern Spain". *Tectonophysics*, **250**, 47-60.

Alonso, M. & Finn, E. J. (1970). "FISCA. Volumen I: Mecánica". *Fondo Educativo Interamericano, S. A.* Tlcopac San Angel, México 20, D. F.

Alsaker, A. , Kvamme, B. , Hansen, R. A. , Dahle, A. and Bungum, H. (1991). "The  $M_L$  Scale in Norway". *Bull. Seism. Soc. Am.* , **81**, 379-398.

Alsop, L. E. (1970). "The Leaky-Mode Period Equation - A Plane-Wave Approach". *Bull. Seism. Soc. Am.* , **60**, 1989-1998.

Aster, R.C.; Shearer P.M. & Berger, J. (1990) "Quantitative Measurements of Shear Wave Polarizations at the Anza Seismic Network, Southern California: Implications for Shear Wave Splitting and Earthquake Prediction". *Journal of Geophysical Research*, **95**, 12449-12473.

Banda, E. (1988). "Crustal Parameters in the Iberian Peninsula". *Phys. Earth Planet. Inter.*, **51**, 222-225.

Banda, E.; Gallart, J.; Garcia-Dueñas, J.; Dañobeitia, J. J. and Makris, J. (1993). "Lateral Variation of Crustal in the Iberian Peninsula: New Evidence from the Betic Cordillera". *Tectonophysics*, **221**, 53-66.

Bath, M. (1968). "Mathematical Aspect of Seismology". *Developments in Solid Earth Geophysics. Elsevier*. U.S.A.

- Bath, M. (1982). "Spectral Analysis in Geophysics". *Developments in Solid Earth Geophysics*, n<sup>o</sup> 7. Third Impression. Science Publishing Company, Inc. Elsevier. New York. U. S. A.
- Bath, M. & Crampin, J. (1965). "Higher Modes of Seismic Surface Waves relations to Channel Waves". *Gephys. J. R. Astr. Soc.* , **9**, 309-321.
- Baumgardt, D. R. (1990). " Investigation of Teleseismic *Lg* Blockage and Scattering using Regional Arrays". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **80**, 2261-2281.
- Ben-Menahem, A. , Rosenman, M. and Harkrider, D. G. (1970). "Fast-Evaluation of Source Parameters from Isolated Surface-Wave Signals". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **60**, 1337-1387.
- Blázquez, R. (1982). "Instrumentación Sísmica de Obras Civiles". Monografía. *Laboratorio de Carreteras y Geotécnica. MOPU*. Madrid.
- Bollinger, G. A. (1979). "Attenuation of the *Lg* Phase and the Determination of  $m_b$  in the Southeastern United States". *Bull. Seism. Soc. Am.* , **69**, 45-63.
- Bolt, B. A. & Herraiz, M. (1983). "Simplified Estimation of Seismic Moment from Seismograms". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 735-748.
- Bostock, M.G. & Kennett, B.L.N. (1990). "The Effect of 3-D Structure on *Lg* Propagation Patterns". *Geophys. J. Int.* ,**101**, 355-365.
- Bouchon, M. (1979). "Discrete Wave-Number Representation of Elastic Wave Fields in Three-Space Dimensions". *Journal Geophysical Research*, **84**, 3604-3614.
- Bouchon, M. (1980). "Calculation of Complete Seismograms for an Explosive Source in a Layered Medium". *Geophysic.*, **45**, 197-203.
- Bouchon, M. (1981). "A Simple Method to Calculate Green's Functions for Elastic Layered Media". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **71**, 959-971.
- Bouchon, M. (1982). "The Complete Synthesis of Seismic Crustal Phases at Regional Distances". *Journal Geophysical Research*, **87**, 1735-1741.
- Bouchon, M. & Aki, K. (1977). "Discrete Wavenumber Representation of Seismic Source Wave Fields". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **67**, 259-277.
- Bouchon, M. & Coulant (1994). " Calculations of Synthetic Seismogram in a Laterally Varying Medium by the Boundary Element-Discrete Wave-number Method". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 1869-1881.



Brune, J. N. (1970). "Tectonic Stress and The Spectra of Seismic Shear Waves from Earthquake". *Journal of Geophysical Research*, **75**, 4997-5009.

Bullen, K. E. & Bolt, B. A. (1993). "An Introduction to the Theory of Seismology". *Fourth Edition. Cambridge University Press*. U. K.

Calvert, A.; Sandval, E.; Seber, D.; Barazangi, M.; Vidal, F.; Alguacil, G. and Jabour, N. (2000a). "Propagation of Regional Seismic Phases (*Lg* and *Sn*) Structure along the Africa-Iberia Plate, Boundary Zone: Tectonic Implications". *Geophys. J. Int.*, **142**, 384-408.

Calvert, A.; Sandval, E.; Seber, D.; Barazangi, M.; Roecker, S.; Mourabit, T.; Vidal, F.; Alguacil, G. and Jabour, N. (2000b). " Geodynamic Evolution of Lithosphere and Upper Mantle beneath the Alboran Region of Western Mediterranean: Constraints from Travel Time Tomography". *J. Geophys. Res.*, **105**, 10871-10898.

Campillo, M. , Bouchon, M. and Massinon, B. (1984). " Theoretical Study of the Excitation Spectral Characteristics and Geometrical Attenuation of Regional Seismic Phases". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **74**, 79-90.

Campillo, M.; Feignier B.; Bouchon, M. & Béthoux, N. (1993). " Attenuation of crustal waves across the Alpine Range". *J. Geophys. Res.*, **98**, 1987-1996.

Cara, M. & Minister, J. B. (1981). "Multi-Mode Analysis of Rayleigh-Type *Lg*. Part 1. Theory and Applicability of the Method". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **71**, 973-984.

Cara, M. , Minister, J. B. and Le Brass, R. (1981). " Multi-Mode Analysis of Rayleigh-Type *Lg*. Part 2. Applications to Southern California and the Northwestern Sierra Nevada". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **71**, 985-1002.

Carreño, E. (1994). "Modelización de Fases Sísmicas Regionales". *Tesis Doctoral*. Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I. **Universidad Complutense de Madrid**.

Carreño, E.; López, C.; Bravo, B.; Expósito, P.; Gurría, E. y García, O. (2003). "Sismicidad de la Península Ibérica en la Epoca Instrumental". *Física de la Tierra*. Vol. **15**. Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I. **Universidad Complutense de Madrid**.

Cao, S. & K.J. Muirhead (1993). Finite difference modeling of *Lg* Blockage. *Geophys. J. Int.* **116**, 85-96.

Chazalon, A. , Campillo, M. Gibson, R. and Carreño, E. (1993). "Crustal Wave Propagation Anomaly across the Pyrenean Range. Comparison between

observations and Numerical Simulations”. *Geophysical Journal Int.* , **115**, 829-838.

Cong, L. ; Xie, J. & Mitchell, B. J. (1996). “ Excitation and Propagation of *Lg* from Earthquakes in Central Asia with Implications for Explosion/Earthquake Discrimination “. *Journal Geophysical Research*, **101**, 27779-27789.

De Castro, A. (1972). “Complementos de Matemáticas”. *Editorial S. A. E. T. A.* Madrid.

Ewing, M. , Jardetzky, W. and Press, F. (1957). “Elastic Waves in Layered Media”. *McGraw-Hill Book Company, Inc.* New York. U. S. A.

Fan, G. & Lay, T. (1998a). “Statistical Analysis of Irregular Wave-Guide Influences on Regional Seismic Discriminates China”. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **88**, 74-88.

Fan, G. & Lay, T. (1998b). “Regionalized Versus Single-Station Wave-Guide Effects On Seismic Discriminates in Western China”. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **88**, 1260-1279.

Furumura, T. & Kennett, B.L.N. (1997) “On the Nature of Regional Seismic Phase-II. On the influence of Structural Barriers”. *Geophys. J. Int.*, **129**, 221-234.

Furumura, T. & Kennett, B.L.N. (1998) “On the Nature of Regional Seismic Phase-III the influence of Crustal Heterogeneity on the wavefield for Subduction earthquakes: the 1985 Michoacan and 1995 Copala, Gerrero, Mexico, Earthquakes”. *Geophys. J. Int.*, **135**, 1060-1084.

Futterman, W. I. (1962).”Dispersive Body Waves”. *Journal of Geophysical Research*, **67**, 5279-5291.

Gibson, R. L.; Campillo, Jr. & Campillo, M. (1994). “ Numerical Simulation of High- and Low-frequency *Lg*-wave Propagation”. *Geophys. J. Int.*, **118**, 47-56.

Goldstein, P.; Bhattacharyya, J.; Dodge, D.; Ichinose, G. ; Leach, R.; Larsen, S. & Rodgers, A. (2001). “ On the Sensitivity of Broadband Regional Seismic Phases to Multi-Dimensional Earth Structure: Implications for Phase Identification ”. 21<sup>st</sup> Seismic Research Symposium. U.S. Department of Energy.

Gregersen, S. (1984). “*Lg* Wave Propagation and Crustal Structure Differences near Denmark and North Sea”. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **79**, 217-234.

Gregersen, S. & Vaccari, F. (1993). “*Lg*-Wave Modelling for North Sea”. *Geophys. J. Int.*, **114**, 76-80.

Gurría, E. (1999). "Estructura de la Corteza y del Manto Litosférico en la Zona de Colisión entre la Placa Africana y la Península Ibérica". *Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza*.

Hanks, T. C. & Wyss, M. (1972). "The Use of Body-Wave Spectral in the Determination of Seismic-Source Parameters". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **62**, 561-589.

Hansen, R.A.; Ringdal, F. & Richards P.G. (1990). "The Stability of RMS of *Lg* Measurements and their Potential for Accurate Estimation of the Yields of Soviet Underground Nuclear Explosions". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **80**, 2106-2126.

Harkrider, D. G. (1976). "Potentials and Displacements for Two Theoretical Seismic Sources". *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **47**, 97-133.

Harvey, D. J. (1981). "Seismogram Synthesis Normal Mode Superposition: the Locked Mode Approximation". *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **66**, 37-69.

Hasegawa, H. S. (1983). "*Lg* Spectral of Local Earthquake Recorded by the Eastern Canada Telemetered Network and Spectral Scaling". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 1041-1061.

Haskell, N. A. (1963). "Radiation Pattern of Rayleigh Waves from a Fault of Arbitrary Dip and Direction of Motion in a Homogeneous Medium". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **53**, 619-642.

Haskell, N. A. (1964a). "Radiation Pattern of Surface Waves from Point Sources in a Multi-Layered Medium". *Bull. Seism Soc. Am.*, **54**, 377-393.

Haskell, N. A. (1964b). "Total Energy and Energy Spectral Density of Elastic Wave Radiation from Propagating Faults". *Bull. Seism. Am.*, **54**, 1811-1841.

Heaton, T. H. & Helmberger, D. V. (1977). "A Study of Strong Ground Motion of the Borrego Mt., California Earthquake". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **67**, 315-319.

Helmberger, D. V. & Malone, S. D. (1975). "Modeling Local Earthquake as Shear Dislocations in a Layered Half Space". *Journal Geophysical Research*, **80**, 4881-4888.

Herrin, E. & Richmond (1960). "On the Propagation of the *Lg* Phase". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **50**, 197-210.

Herrmann, R. B. & Kijko, A. (1983). "Modeling some Empirical Vertical Component *Lg* Relations". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 157-171.

Herrmann, R. B. & Wang, C. Y. (1985). "A Comparison of Synthetic Seismograms". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **75**, 41-56.

Herrmann, R. B. (1993). "Elastic Wave Green's Functions for Isotropic Layered Media". *Manual of Computer Programs in Seismology*. Saint Luis University. U. S. A.

Hltywayo, D.J. & Midzi, V. (1995). "Determination of *Lg*-wave attenuation using single-station seismograms: a case study for Zimbabwe". *Geophys. J. Int.*, **123**, 291-296.

IGN (1992). Boletín de Sismos Próximos. Instituto Geográfico Nacional. Madrid.

Kamel, A. & Felsen, L. B. (1981). "Hybrid Ray-Mode Formulation of *SH* Motion in a Two-Layer Half-Space". *Bull. Seism Soc. Am.*, **71**, 1763-1781.

Kanamori, H. (1977). "The Energy Release in Great Earthquake". *Journal Geophysical Research*, **82**, 2981-2987.

Keers, G., Nolet, G. & Dahlen, F.A. (1996) "Ray Theoretical Analysis of *Lg*". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86**, 726-736.

Kennett, B. L. N. (1983). "Seismic Wave Propagation in Stratified Media". *Cambridge University Press*. Cambridge. G.B.

Kennett, B. L. N. (1984). "Guided Wave Propagation in Laterally Varying Media-I. Theoretical Development". *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **79**, 235-255.

Kennett, B. L. N. (1985). "On Regional *S*". *Bull. Seism Soc. Am.*, **75**, 1077-1086.

Kennett, B. L. N. (1986). "*Lg* Waves and Structural Boundaries". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **76**, 1133-1141.

Kennett, B. L. N. (1989a). "On the Nature of Regional Seismic Phases –I. Phase Representations for *Pn*, *Pg*, *Sn* and *Lg*". *Geophysical Journal*, **98**, 447-456.

Kennett, B. L. N. (1989b). "*Lg*-Waves Propagation in Heterogeneous Media". *Bull Seism. Soc. Am.*, **79**, 860-872.

Kennett, B.L.N. (2002) "The Seismic Wavefield. Volumen I: Introduction and Theoretical Development". *Cambridge University Press*. United Kingdom.

Kennett, B. L. N. & Mykkeltveit, S. (1984). "Guided Wave Propagation in Laterally Varying Media-II. *Lg*-Waves in North Western Europe. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **79**, 257-267.

- Kennett, B. L. N. , Bostock, M. O. and Xie, J. K. (1990). "Guided-Wave Tracking in 3-D: A Tool for Interpreting Complex Regional Seismograms". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **80**, 633-642.
- Kennett, B. L. N. & Furumura, T. (2001). "Regional Phases in Continental and Oceanic Environments". *Geophys. J. Int.*, **146**, 562-568.
- Kim, W.-Y. (1987). "Modelling Short-Period Crustal Phases at Regional Distances for the Seismic Source Parameter Inversion". *Phys. Earth Planet. Inter.*, **47**, 159-178.
- Knopoff, L. , Aki, K. and Archaubeau, C. B. (1964). "Attenuation of Disperse Waves". *Journal Geophysical Research.*, **69**, 1655-1657.
- Knopoff, L. , Mitchael, R. G. , Kausel, E. G. and Schawab, F. (1979). "A Search for the Oceanic *Lg* Phase". *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **56**, 211-218.
- Kvamme, L.B.; Hansen, R.A. & Bungum (1995) "Seismic-Source and Wave-propagation Effects of *Lg* Waves in Scandinavia". *Geophys J. Int.*, **120**, 525-536.
- Lay, T. & Wallace, T.C. (1995). "Modern Global Seismology". *Academic Press, Inc.* San Diego. U. S. A.
- Malischewsky, P. (1987). "Surface Wave and Discontinuities". *Academie-Verlag.* Berlin.
- Maupin, V. (1989). "Numerical Modelling of *Lg*-Wave Propagation across the North Sea Central Graben". *Geophys. J. Int.*, **99**, 273-283.
- McNamara, D. E. & Walter, W.R. (2001). "Mapping Crustal Heterogeneity using *Lg* Propagation Efficiency throughout the Middle East, Mediterranean, Southern Europe and Northern Africa". Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA.
- Mellors, R.J., Camp, V. E.; Vernon; Al-Amri; A. N. S. and Ali-Ghalib (1999). "Regional Wave-Form Propagation in the Arabian Peninsula ". *Journal Geophysical Research*, **102**, 15259-15268.
- Mendi, C. D.; Ruud, B. D. & Husebye, E.S. (1997). "The North Sea *Lg*-Wave Blockage Puzzle". *Geophys J. Int.*, **130**, 669-680.
- Mezcua, J. (1995). "Fundamentos de la Red Sísmica Nacional de España". Publicación IGN, serie monográfica, 11. 63-86.

- Mezcua, J. & Rueda, J. (1997). "Seismological Evidence for a Delamination Process in the Lithosphere under Alboran Sea". *Geophys. J. Int.*, **129**, **Fast-Track Paper**, F1-F8.
- Mitchell, B.J.; Pan, Y.; Xie, J. and Cong, L. (1997) "Lg Coda Q variation across Eurasia and its relation Crustal Evaluation". *Journal Geophysical Research*, **102**, 22767-22780.
- Nadeau, R. M. & Johnson, L. R. (1998). "Seismological Studies at Parkfield VI: Moment Release Rates and Estimates of Sources Parameters for Small Repeating Earthquakes". *Bull. Seism Soc. Am.*, **88**, 790-814.
- Navarro, M.; Corchete, V.; Badal, J.; Canas, J.A.; Pujades and Vidal, F. (1997) "Inversion of Rg Waveforms Recorded in Southern Spain". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, pp. 847-865.
- Nuttli, O. W. (1973). "Seismic Wave Attenuation and Magnitude Relations for Eastern North America". *Journal of Geophysical Research*. **78**, 876-885.
- Oliver, J. & Ewing, M. (1958). "Normal Modes of Continental Surface Waves". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **83**, 33-49.
- Oliver, J. & Major, M. (1960). "Leaking Modes and The PL Phase". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **50**, 165-180.
- Olsen, L. W. , Braile, L. W. & Stewart, J. N. (1983). "Modeling Short-period Crustal Phases ( $\bar{P}$ , Lg) for Long-Range Refraction Profiles". *Phys. Earth Planet Interior*, **31**, 334-347.
- Oppenheim, A. V. & Schaffer, R. W. (2000). "Discrete Time: Signal Processing". *Editorial Prentice Hall*. U. S. A.
- Panza, G. F. & Calcagnile, G. (1975). "Lg, Li, and Rg from Rayleigh Modes". *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **40**, 475-487.
- Papoulis, A. (1962). "The Fourier Integral and Its Applications". *McGraw-Hill Book Company, Inc.* New York. U. S. A.
- Park, J. & Levin, V. (2001). "Receiver functions from Regional P-Waves". *Geophys. J. Int.*, **147**, 1-11.
- Payo, G. (1965). "Iberian Peninsula Crustal Structure from Surface Waves Dispersion". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **55**, 727-743.

- Payo, G. (1975). "Estructura, Sismicidad y Tectónica del Mar Mediterráneo". *Ministerio de Planificación del Desarrollo Instituto Geográfico y Catastral*. Madrid.
- Payo, G. y Ruiz de la Parte, E. (1974). "Dispersion of surface waves in the Iberian Peninsula and the adjacent Atlantic and Mediterranean Area". *Geofísica International*, **14**, 89-102.
- Pearson (2001). "The Manual *PGPLOT Graphics Subroutine Library*". *Institute of Technology*. California. U.S.A.
- Pérez, J. A.; Payo, G. y Ruiz de la Parte, E. (1978). "Estructura de la Corteza de la Península Ibérica y zonas Adyacentes por medio de la Dispersión de Ondas Superficiales producidas por Terremotos Próximos". *Rev. de Geofísica XXXVII*, **2**, 132-144.
- Phinney, R. A. (1961a). "Leaking Modes in the Crustal Waveguide, Part. I: Oceanic PL Wave". *Journal Geophysical Research*, **66**, 1445-1470.
- Phinney, R. A. (1961b). "Propagation of Leaking Interface Waves". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **51**, 527-555.
- Press, F. & Ewing, M. (1952). "Two slow surface wave across North America". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **42**, 219-228.
- Press, W. H. , Teukolsky, S. A. , Vetterling, W. T. & Flannery, B. P. (1992). "Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing". *Second Edition*. Cambridge University Press. New York. U.S.A.
- Randall, M. J. (1973). "The Spectral Theory of Seismic Sources". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **63**, 1133-1144.
- Regan, J. & Harkrider, D. G. (1989). "Numerical Modeling of SH Lg Waves and near Continental Margins". *Geophys. J. Int.* , **98**, 107-130.
- Rial, J. A. & Ritzwoller, M. H. (1997). "Propagation Efficiency of Long-period Lg Waves in the South American Continent". *Geophys. J. Int.*, **131**, 401-408.
- Rodgers, A. J.; Ni, J. F. & Hearn, T. M. (1997). "Propagation Characteristics of Short Period Sn and Lg in the Middle East". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 396-413.
- Rosenbaum, J. H. (1960). "The Long-Time Response of a Layered Elastic Medium to Explosive Sound". *Journal Geophysical Research*, **65**, 1577-1614.

- Rueda, J. (1995). "Análisis y Procesamiento de Datos en la Red Sísmica Nacional". *Publicación I.G.N. Serie Monográfica n.º 11*. Redes Sísmicas Regionales, 87-11. Madrid.
- Rubio, B. (1994). "Introducción a la Ingeniería de la Fibra Óptica". RAMA-Editorial. Madrid.
- Saika, C.K. (1994). "Modified frequency-wavenumber algorithm for regional seismograms using Filon's quadrature: modelling of Lg waves in Eastern North America". *Geophys. J. Int.*, **118**, 142-158.
- Savage, J. C. (1972). "Relation of Corner Frequency to Fault Dimensions". *Journal of Geophysical Research*, **77**, 3788-3795.
- Shapiro, N.; Béthoux, N.; Campillo, N. & Paul, A. (1996). "Regional Phases across the Ligurian Sea: Lg Blockage and Oceanic Propagation". *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **93**, 257-268.
- Stephens, C. & Isacks, B. L. (1977). "Towards an understanding of Sn normal modes of Love waves in an Oceanic Structure". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **67**, 69-78.
- Street, R. L., Herrmann R. B. and Nuttli, O. (1975). "Spectral Characteristics of the Lg Wave Generated by Central United States Earthquake". *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **41**, 51-63.
- Suriñach, E. & Vegas, R. (1988). "Lateral Inhomogeneity of Hercynian Crust in Central Spain". *Phys. Earth Planet. Inter.*, **51**, 226-234.
- Swanger, H. J. & Boore, D. M. (1978). "Simulation of Strong-Motion Displacements Using Surface-Wave Modal Superposition". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **68**, 907-922.
- Taylor, S. R. (1996) "Analysis of High-Frequency Pg/Lg Ratios from NTS Explosions and Western U.S. Earthquakes". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86**, 1042-1053.
- Tejedor, J. M. & García, O. (1983). "Funciones de Transferencia de las Estaciones de la Red Sísmica Nacional". Dirección General del Instituto Geográfico Nacional. MADRID.
- Udías, A. (1999). "Principles of Seismology". *Cambridge University Press*. **Cambridge**. United Kingdom.
- Udías, A. & Mézcua, J. (1997). "Fundamentos de Geofísica". *Alianza Editorial*. *Universidad Textos*. Madrid. España.



- Uhrhammer, R. A. & Collins, E. R. (1990). "Synthesis of Wood-Anderson Seismograms from Broadband Digital Records". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **80**, 702-716.
- Vaccari, F. & Gregersen, S. (1998). "Physical description of *Lg* Waves inhomogeneous Continental Crust". *Geophys J. Int.*, **135**, 711-720.
- Vila, J. (1996). "Informe de funcionament de l'estació sísmica de banda ampla del Túnel del Cadi (CAD-BB)". Període: De l'1 de gener de 1995 al 31 de desembre de 1995. Informe any 95: Report nº 96-6. Institut d'Estudis Catalans.
- Vogfjörd (1997) "Effects of Explosion Depth and Earth Structure on the Excitation of *Lg* Waves: *S\** Revisited". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 1100-1114.
- Wang, C. Y. & Herrmann, R. B. (1980). "A Numerical Study of *P*-, *SV*- and *SH*- Wave Generation in a Plane Layered Medium". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **70**, 1015-1036.
- Watson, T. (1972). "A Real Frequency Complex Wave-Number Analysis of Leaking Modes". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **62**, 369-384.
- Working Group for Deep Seismic Sounding in the Alboran Sea, 1974-1975, 1978. Crustal Seismic Profiles in the Alboran Sea: Preliminary Results, *Pageoph*, **116**: 167-179.
- Wu, R.-S; Jin, S. & Xie, X.-B. (2000). "Energy Partition and Attenuation *Lg* Waves by Numerical Simulations using Screen Propagators". *Physics of Earth and Planetary Interiors*, **120**, 227-244.
- Xian-Yun & Ru-Shan Wu (2001). "*Lg*-Wave simulation in heterogeneous crusts with Surface topography using screen propagators". *Geophys. J. Int.*, **146**, 670-678.
- Xie, X. & Lay, T. (1994). "The Excitation of *Lg* Waves by Explosions: A Finite-Difference Investigation". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 324-342.
- Zhang, L. & Lay, T. (1994a). "Analysis of Short-period regional phase path effects associated with topography in Eurasia". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 119-132.
- Zhang, T. & Lay, T. (1994b). "Effects of Crustal Structure under the Barents and Kara Sea Short-Period Regional Wave Propagation for Noraya Zemlya Explosions: Empirical Relations". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 1132-1147.

Zhang, T.-R. & Lay T. (1995). "Why the *Lg* Phase Does Not Traverse Oceanic Crust". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 1665-1678.

Zill, D.G. (1990). "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones". *Segunda Edición*. Grupo Editorial Iberoamericano. México.



