

# *La medida de la Tierra entre 1816 y 1855*

*Mario Ruiz Morales*



*El Arco Geodésico de Struve,  
Patrimonio de la Humanidad*





# La medida de la Tierra entre 1816 y 1855

A través del Arco Geodésico  
de Struve

Declarado por la UNESCO  
Patrimonio de la Humanidad

MARIO RUIZ MORALES



Edici3n digital

**La medida de la Tierra entre 1816 y 1855**

Editado en julio de 2015

*Cat3logo de publicaciones de la Administraci3n General del Estado*

<http://publicacionesoficiales.boe.es>

**Edita**

È Centro Nacional de Informaci3n Geogr3fica (CNIG)

**Autor**

Mario Ruiz Morales

È Mario Ru3z Morales 2017

È de esta edici3n: Centro Nacional de Informaci3n Geogr3fica 2017

**Dise1o y maquetaci3n**

Servicio de Edici3n y Trazado (IGN)

(Subdirecci3n General de Geodesia y Cartograf3a)

NIPO: 162-15-017-0

DOI: 10.7419/162.02.2015

## ÍNDICE

Preface .....	9
1. Introducción .....	15
2. Apunte biográfico de Friedrich Georg Wilhelm von Struve .....	25
3. Crónica de las campañas de campo .....	37
4. Observaciones astronómicas: latitudes y acimutes .....	77
5. Señalización .....	133
6. Medida de las bases .....	143
7. El proyecto de la triangulación .....	185
8. Observación de los ángulos .....	213
9. Cálculo y compensación .....	245
10. El primer patrimonio científico de la humanidad .....	293
11. Empleo del elipsoide de Struve en España .....	303
12. Anexo con el discurso de Wilhelm von Struve en la Academia de Ciencias de París ...	315
13. Gráficos de la triangulación a lo largo del meridiano .....	325
14. Epílogo: Orígenes y primeras actividades geodésicas en el observatorio de Púlkovo ...	333



Friedrich Georg Wilhelm von Struve.

A través de esta publicación, Mario Ruiz Morales, Perito Topógrafo, Ingeniero en Geodesia y Cartografía, doctor en Ciencias Matemáticas e Ingeniero Geógrafo, rinde un sentido tributo a la figura de Friedrich George Wilhelm von Struve y más concretamente a los trabajos que desarrolló como responsable y coordinador de las mediciones del arco geodésico que lleva su nombre, también conocido como el gran arco ruso-escandinavo. La relevancia de la labor científica desarrollada por F. G. W. Struve y por sus colaboradores Carl Friedrich Tenner, Christopher Hansteen y Nils Haqvin Selander quedó patente cuando en el año 2005 la UNESCO declaró como Patrimonio de la Humanidad el Arco Geodésico de Struve, materializado por medio de 34 de los vértices originales empleados en las triangulaciones. La propia figura de Struve fue reconocida a nivel internacional llegando a pertenecer a más de cuarenta instituciones científicas, entre ellas la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España, de la que fue el primer extranjero en formar parte. Fruto de aquellos trabajos fue la definición de un nuevo modelo elipsoidal que fue elegido por el General Ibáñez de Ibero cuando en 1870 se fundó el Instituto Geográfico Nacional y se decidió el inicio de los trabajos geodésicos, imprescindibles para la formación del Mapa Topográfico Nacional. Tanto Struve como Ibáñez de Ibero tendrán en 2016 sus respectivas conmemoraciones, ya que se cumplirán 200 años del inicio de las medidas del arco geodésico y 125 años de la desaparición del general fundador del Instituto Geográfico Nacional.

Con esta obra el autor continúa con dos de sus grandes devociones, a las que ha dedicado gran parte de su vida profesional, la geografía matemática y la divulgación de la misma. Se trata de un minucioso estudio de las tareas que son propias de la medida del arco de meridiano, desde el diseño y señalización, hasta el cálculo y compensación, pasando por las campañas de campo en que se efectuaron todas las observaciones y medidas angulares.

En la Asociación de Ingenieros Geógrafos nos sentimos honrados al comprobar, una vez más, que Mario Ruiz Morales muestra con orgullo su pertenencia al Cuerpo de Ingenieros Geógrafos. Su labor a través de esta obra, y de otros muchos títulos, es un claro ejemplo de uno de los cometidos fundamentales del Cuerpo, contribuir a la proyección social de los trabajos y proyectos desarrollados en el ámbito de las Ciencias Geográficas, los cuales son de gran utilidad en las necesidades cotidianas de los ciudadanos.

JOSE ANTONIO MERINO MARTÍN  
*Presidente de la Asociación de Ingenieros Geógrafos*



## PREFACE

For more than 2000 years mariners, astronomers and surveyors have had deep interest in determining the size and shape of the Earth. Whilst it is simple to measure the dimensions of a rugby football it is a very different story when trying to measure a similar shaped Earth of vast dimensions. From the thoughts of Aristotle circa 330BC and the possible measures of Eratosthenes circa 230BC there have been numerous attempts over the intervening 2300 years to improve and refine the methods possible and the results obtained.

Is the Earth flat, is it circular, is it spherical, is it an ellipsoid or even a geoid? Is it stationary or does it rotate, does any rotational motion distort its shape and if so into what figure? The refinements have taken centuries to develop even though the basic principle as used by Eratosthenes remained the same until the advent of electronics and satellite technology.

The early activity in the Mediterranean and Middle Eastern countries introduced the idea of measuring just a small fraction of the circumference and then multiplying that length by the inverse of the fraction to get the whole circumference. So Eratosthenes had a fraction of  $1/50$  and a distance of 5000 stades to give  $50 \times 5000 = 250000$  stades for the Earth's circumference. How were the 5000 stades measured? The suggestions range from a function of the distance that a camel travelled in a day to counting the paces taken by the surveyors of the time (Harpedonantes) between the two terminals. But then other questions arise, such as how long was the stade, and how was the fraction determined? There would be an interval of around 1000 years before the next major step was taken when Al Mamun (820AD) made a measure in the desert near Baghdad. This gave a result for  $1^\circ$  of  $56 \frac{2}{3}$  Arab miles or 20400 Arab miles for the circumference. Again there were doubts as to how the distances were measured and of the length of the Arab mile. The values for the stade and Arab mile were lost over the centuries.

Then a blank for a further 700 years when Fernel in France did something similar to the Arabs but definitely the measure was in terms of the number of rotations of a carriage wheel (17024) over an astronomically determined  $1^\circ$ . The result was given in Italian miles and turned, by many commentators, into terms of the French toise. Fernel was followed 100 years later by Norwood in England using a chain for the distance but by then the technique of physically measuring a very long distance ( $1^\circ$  is approximately 110km) had been overtaken by the introduction of triangulation.

The intersection method was first published in 1533 by Gemma Phrysius [6]. Then each of Gemma Phrysius (Frisius), Tycho Brahe and Willibrord Snellius were variously credited with the invention of triangulation but it was the last named who observed the first realistic triangulation

network circa 1615 in Holland [10]. His results were in terms of the Rhineland rood or perch. The first triangulation specifically with the size of the Earth in mind was by Picard in France in 1668 [7]. He chose as his site the area between Malvoisin, South of Paris, and Amiens. The scheme involved 17 triangles and two baselines measured with rods each 4 toise long. (1 toise = 1.949 m). The baselines were of 5662 and 3902 toise respectively (= 11035 and 7605 metres). He measured the angles with a quadrant of 38 inches radius mounted on an iron stand. His astronomy was with a 10 ft radius zenith sector which had an arc of  $18^\circ$ . He was able to record the quadrant angles to  $5''$  of arc and the sector values to single seconds. This resulted in the value for  $1^\circ$  of 57060 toises.

The pace now quickened somewhat with the Cassini family observing various triangulations in France from 1683 onwards starting with an extension to the work of Picard. However a complication was now appearing in the form of disagreements on the actual shape of the Earth. Starting from the realisation that the Earth was not simply a sphere but a distortion of that shape, extensive arguments arose in two camps – those who declared the Earth to be flattened at the Equator and those who were certain that if there was flattening then it was at the Poles. This really started in 1691 with the errors in calculations by Eisenschmidt and his publication [2] and did not cease until 1736. In effect it became a fight between the followers of the Cassinis and those of Newton. However there was an added problem in that the instrumentation of the day was not accurate enough to differentiate between what was actually due to deformation and what were the inadequacies of the instruments. The differences between the lengths of  $1^\circ$  at the Equator and one at the Poles was only about 1300m in modern terminology i.e. about 15 metres per degree of arc. The combination of inaccuracies in the instrumentation at that time amounted to at least the equivalent of this value.

These problems were beginning to be overcome by the time of the two renowned expeditions of 1735 and 1736 to Peru and Lapland. The outcome of these expeditions under Godin, Bouguer and La Condamine in Peru and Maupertuis in Lapland solved the flattening problem in favour of Newton and against the Cassinis i.e. an oblate spheroid or flattening at the Poles. The Peru expedition took 10 years between leaving and returning to Paris. At that time, a monumental project that required untold devotion to the task across the Andean peaks reaching 2340 *t* (= 4556 m = 14950 *ft*) in elevation. This expedition in particular is an epic story [3], [7]. About the same time a second Southern Hemisphere arc was being observed. This time by La Caille in South Africa in 1752[4].

In the late 1700s the French wished to define the metre in some reproducible manner and chose 1/10M of the Earth quadrant from the Equator to the Pole. For this the numbers to be used were to be based on a triangulation through France that built on and extended the work of the Cassinis. Delambre and Mechain were charged with this task. By the end of the 18<sup>th</sup> century there was a result from an arc of  $9^\circ 40'$  that, in combination with the results from the Peru arc of  $3^\circ 7'$ , were such that the metre was defined as 443.296 Paris lignes as taken from the Toise de Perou (= standard of length used in the Peru and Lapland projects). All might have seemed fine but the original choice of such a relationship for the metre was a poor one. Within a matter of just a few years (1841) further arc measures gave results indicating that the Earth quadrant was 10000856m, and other different results followed [8].

By this date however two major figures emerged in the geodetic world, George Everest [9] and Friedrich George Wilhelm von Struve [1]. Chronologically their works overlap so let us look

at Everest first. He arrived in India in 1806, aged just 16, with the East India Company. He developed an interest in surveying and in 1818 he entered the world of geodesy by joining William Lambton on the Great Trigonometrical Survey of India. When Lambton died in 1823 Everest was put in charge. Between then and his retirement in 1843 he masterminded a network of triangulation across India. The spine of this triangulation ran up the centre of the sub-continent from Cape Comorin at  $8^\circ$  to the foothills of the Himalayas at  $30^\circ$  N. It was ideal for use in computing new values for the parameters of the figure of the Earth. Some 23 baselines were measured in India between 1800 and 1869.

Between Cape Comorin and the Dehra Dun baseline were about 160 triangles. The results were used in at least 5 computations of the Figure of the Earth between 1818 and 1860. Lambton produced one set of values for the Figure and Everest two. For those who are interested, yes, the mountain is named after him, but he neither named it himself nor did he ever see it.

During the same time period in Central Europe F.G.W. Struve was working on an arc that would initially straddle c.  $25^\circ 20'$  of latitude amounting to 2821km between Hammerfest (Fugle-naes) in Northern Norway to Staro-Nekrassowka in the Ukraine near the Black Sea. This took 258 triangles and 10 baselines. Over the difference of latitude of  $25^\circ 20'$  the length of  $1^\circ$  varied from 111.217 to 111.589 km or an average of c.15m change per degree [5].

Whilst the Arc takes the name of Struve, a second name should not be forgotten, that of Karl Ivanovitsch Tenner. Essentially Tenner was in charge of much of the southern section of the arc while Struve covered the northern section. Initially they were effectively working separately but when it became obvious that the two sections could be usefully connected so they worked in partnership.

This book is about the life and work of F.G.W. Struve which very nicely follows on from the background given above so I will not fully elaborate here. Instead I will simply discuss the fact that his work was thought by modern geodesists to be so important that the Arc is now designated as a World Heritage Monument. An achievement that required much hard work by many surveyors in the 10 countries through which it goes today, together with the help of experts from outside those countries. This outside help was particularly through the International Federation of Surveyors (FIG) and its research group The International Institution for the History of Surveying and Measurement (IIHSM), under the direction of Prof. Jan De Graeve and with the support of the International Association for Geodesy (IAG). See Chapter 10 of this volume for details.

In addition to detailing the Struve Geodetic Arc this volume covers the whole life of the illustrious astronomer/surveyor and has numerous fascinating illustrations of historical importance enhancing the text. The annexes of the presentation by Struve in the Paris meeting and the application of the characteristics of the arc to Spanish cartography, the information on the Pulkova Observatory to put it in a Russian perspective, together with details about de Lisles' attempt to start a Russian measurement in the 18<sup>th</sup> Century should be of interest to a wider readership than just geodesists. Dr. Ruiz Morales has produced an interesting insight into the life and work of F.G.W. Struve that should find a prime place among the other works on the Struve Arc that have appeared in recent years.

Interestingly Struve's son Otto was well versed in the work of his father and discussed its possible enhancement through Southern Europe and Eastern Africa to South Africa. In fact he

arranged for reconnaissance as far as the coast of the Mediterranean Sea but the actual measurement was thwarted by political and military problems in Turkey at that time. Later he discussed the possibility with David Gill in South Africa as to whether triangulation was feasible up the 30<sup>th</sup> meridian to the vicinity of Cairo and hence a join of some form to what he was hoping to do in Southern Europe.

Gill took this idea to heart and was instrumental in organising triangulation for much of the way to East Africa. His successors and others from the British Colonial Survey Service (later D.O.S.) and the United States Coast & Geodetic Survey (U.S.C.&G.S.) closed the final gap in the triangulation and a crossing of the Mediterranean Sea from Crete to the Northern coast Egypt and Libya in 1954 so that today there is triangulation from Fuglenaes near Hammerfest (70° 40' N) at the North end of the Struve arc to Buffelsfontein (33° 59'S) near Port Elizabeth in South Africa and possibly even further to Cape Agulhas (34° 50'S) which is the southernmost point of Africa. Such has fulfilled the dream of both Otto Struve and Gill for an arc of 105° extent. There now remains just the small task of getting the extra part, which extends through some 20 countries, accepted by the Survey Departments of all those countries, pertinent research carried out in each and thence through the respective Government Departments, the production of a submission to UNESCO for acceptance.

As a result of the UNESCO acceptance of the Struve Arc so two years of labour was spent by Jan de Graeve and Jim Smith in translating Struve's two-volume Report [11] of over 1000 pages, from French into English and this was completed several years ago albeit at considerable personal cost. Copies of the English version are still available from Prof. De Graeve.

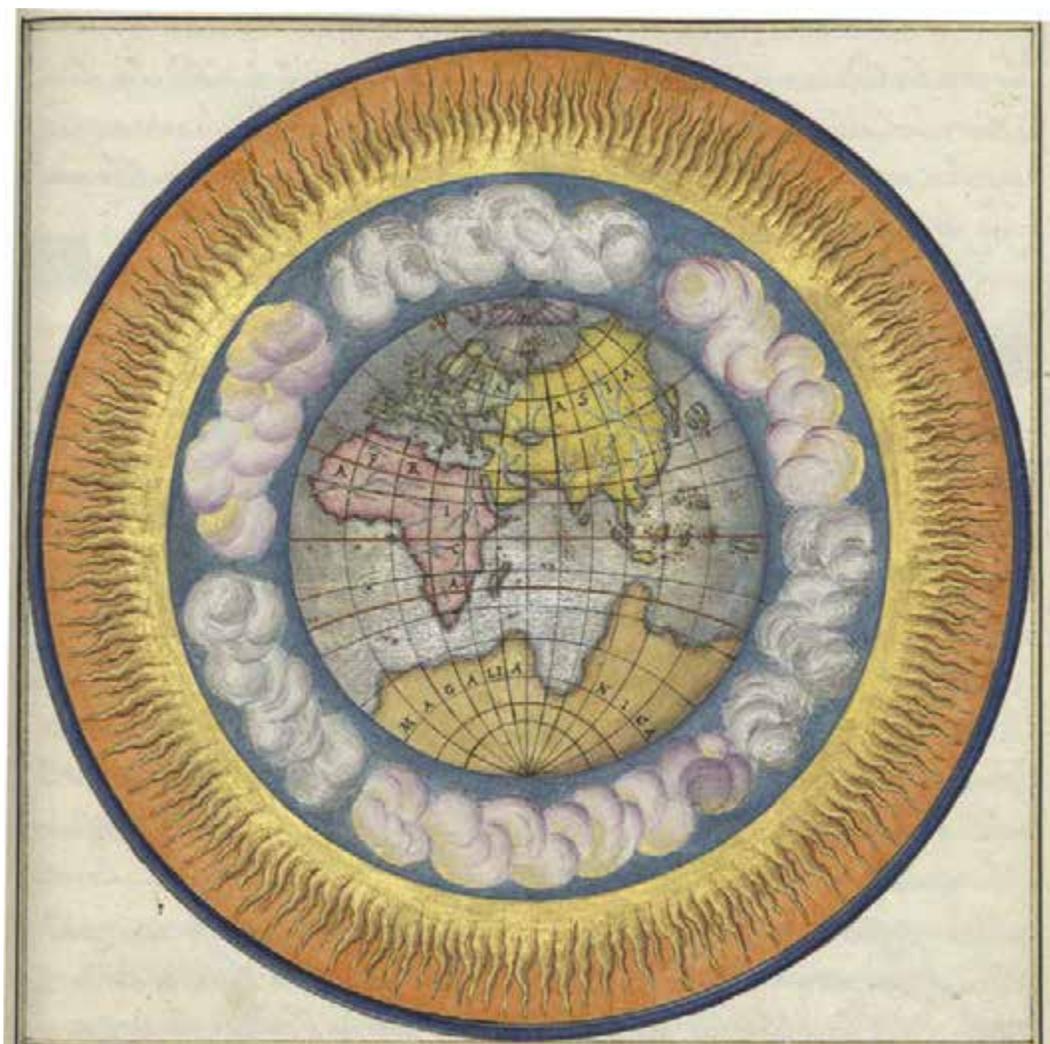
J. R. SMITH  
IHSM January 2015

## **Bibliografía**

1. Batten A. H., 1987. *The lives of Wilhelm and Otto Struve*. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
2. Eisenschmidt J. C., 1691. *Diatribes de figura telluris elliptic-sphaeroide, ubi una exhibetur ejus magnitudo per singulas dimensiones consensus omnium observationum comprobata*.
3. Ferreiro L. D., 2011. *Measure of the Earth. The Enlightenment Expedition that reshaped the World*. Basic Books, New York.
4. Glass I. S., 2013. *Nicolas-Louis De La Caille, Astronomer and Geodesist*. Oxford University Press. UK.
5. Mkrtychan V., 2013. *The Struve Geodetic Arc: Pathway to global recognition*. Minsk.
6. Phrysius, Gemma. 1533. *De locorum describendorum ratione...* Bonte, Antwerp.
7. Smith J. R., 1986. *From Plane to Spheroid. Determining the Figure of the Earth from 3000 BC to the 18<sup>th</sup> Century Lapland and Peruvian Survey Expeditions*. Landmark Enterprises, California.
8. Smith J. R., 1988. *Basic Geodesy*. Landmark Enterprises, California.
9. Smith J. R., 1999. *Everest. The Man and the Mountain*. Whittles Publishing, Scotland.
10. Snellius W. 1617. *Eratosthenes Batavus*. Leyden.
11. Struve F. G. W., 1857, 1860. *Arc du Méridien de 25° 20' entre le Danube et la Mer Glaciale mesure depuis 1816 jusqu'en 1855*. St. Petersburg.

*Des mesures très multipliées des degrés du méridien et des perpendiculaires à la méridienne donneraient la loi des rayons osculateurs de la surface de la Terre et, par conséquent, la nature de cette surface; mais ce moyen est impraticable par la multiplicité des mesures qu'il exige: d'ailleurs, on n'aurait ainsi que les rayons osculateurs des continents et des îles, dont la surface n'est qu'une petite partie de celle du globe terrestre. Les observations seules ne peuvent donc pas nous conduire à la vraie figure de la Terre, et, pour y parvenir, il est nécessaire de les combiner avec le principe de la pesanteur universelle.*

PIERRE SIMON MARQUÉS DE LA PLACE  
*Mémoire sur la Figure de la Terre*



# 1

## INTRODUCCIÓN

Concluidas las expediciones geodésicas de Laponia y del virreinato de Perú, respectivamente propuestas por P. Maupertuis y L. Godin, quedó demostrada la validez de las hipótesis previas que habían formulado C. Huygens e I. Newton. Ambos preconizaron el modelo elipsoidal de la Tierra, con aplastamiento polar, poniendo fin a la pervivencia del modelo esférico que se venía manteniendo desde la antigüedad más remota. Sin pretender restar protagonismo a tan ilustres personajes, es obligado recordar que para ellos fue crucial su conocimiento de los experimentos gravimétricos que ya había efectuado J. Richer en la isla de Cayena (Guayana francesa). Gracias a ellos se comprobó que la intensidad de la gravedad variaba con la latitud geográfica, siendo en aquella colonia menor que en su metrópoli parisina. Una vez resuelta la cuestión de la forma de la Tierra, resultó obvia la necesidad de concretar los parámetros geométricos del nuevo modelo matemático, al mismo tiempo que se evaluaba su tamaño. Se inició entonces una serie numerosa de iniciativas científicas que pretendían solventar tales cuestiones, las cuales se apoyaban, mayoritariamente, en la medida de arcos terrestres (más de meridiano que de paralelo), combinadas con observaciones astronómicas para determinar las coordenadas geodésicas de puntos singulares y la orientación de ciertas direcciones.

Esa tónica continuó a lo largo de todo el siglo XIX, destacando sobremanera las operaciones practicadas al amparo del primer proyecto científico que vio la luz en el Noroeste de Europa. Durante los casi cuarenta años que se invirtieron en su ejecución, se configuró un red geodésica que discurrió sensiblemente a lo largo del antiguo meridiano de Dorpat (Estonia), coincidente con el del Observatorio localizado en esa ciudad, también conocida como Tartu. No debe sorprender semejante duración, puesto que la amplitud latitudinal de la cadena geodésica fue de aproximadamente  $25^{\circ}20'$ , justo la diferencia entre las latitudes de sus dos vértices extremos: Fuglenaes<sup>1</sup> ( $70^{\circ}40'12''$ ) y Staro-Nekrassowka ( $45^{\circ}19'54''$ ); es decir los más de 2800 km que separan el mar de Noruega del mar Negro. Se entiende así que en la literatura geodésica se refiriese la cadena con el nombre del gran arco ruso-escandinavo, por ser Rusia y Noruega los dos países principalmente afectados, aunque en la actualidad discurriera la cadena triangular por las siguientes naciones: Noruega, Suecia, Finlandia, Rusia, Estonia, Letonia, Lituania, Bielorrusia, Ucrania y Moldavia. Sin embargo, está mucho más extendida la denominación de Arco Geodésico de Struve, atendiendo evidentemente al nombre de su mayor responsable. En un principio se trató solamente de un arco ruso medido por C. F. Tenner en 1816, a la vez que realizaba la triangulación de la provincia de Vilnius (Lituania), con vistas a la confección del mapa correspon-

---

<sup>1</sup> Situado en la ciudad noruega de Hammerfest, la más septentrional de Europa.

diente. Tres años después el zar Alejandro I decidió financiar la continuación de una operación similar prevista por W. von Struve, a la sazón profesor de astronomía en la universidad de Dorpat (Tartu), en Estonia y Letonia. A pesar de los numerosos obstáculos que hubieron de vencer, al final ultimaron los trabajos de campo y los cálculos necesarios para fijar espacialmente los vértices del llamado gran arco ruso: desde el delta del Danubio al Norte de Tornio, en el golfo de Botnia. Un arco que se prolongaría después hasta llegar al mar Ártico, contando para ello con la ayuda de sus colegas noruegos y suecos.

El mérito innegable del insigne astrónomo y geodesta ruso-alemán Friedrich Georg Wilhelm von Struve (1793-1864), que ejerció de coordinador responsable, fue compartido después con el de los otros tres codirectores del proyecto, a saber: Carl Friedrich Tenner (1783-1859), Christopher Hansteen (1784-1873) y Nils Haqvin Selander (1804-1870). Las instituciones involucradas directamente en tan importante operación fueron el Estado Mayor e Imperial de Rusia, el Departamento Geográfico Real de Noruega, el Observatorio Real de Estocolmo y el Observatorio Central «Nicolás de Rusia», más adelante rebautizado con el celebrado nombre de Púlkovo. De la envergadura del proyecto da idea el hecho de que se formasen varias centenas de triángulos, con lados comprendidos entre los 20 y los 40 km, materializándose cada uno de sus vértices, observándose todos sus ángulos y efectuando naturalmente los cálculos correspondientes. Mención aparte merecen sus trece puntos de Laplace, estaciones astronómicas de control repartidos por la cadena, para analizar el desarrollo y orientación de la misma. Los trabajos se concluyeron en agosto de 1855, finalizando los cálculos al año siguiente.

Los pormenores de todo el proceso se conservan en los archivos de la Academia de Ciencias de San Petersburgo<sup>2</sup>, dentro de la memoria redactada al efecto, figurando Wilhelm von Struve como editor científico de la misma. La obra se estructuró en tres tomos, dos de texto y otro para las planchas: gráficos de la triangulación, redes de ampliación de bases, secciones con las señales tipo y un dibujo de la regla geodésica de Struve. El título de su versión francesa fue: *Arc du Meridien de 25 o 20' entre le Danube et la mer Glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855, sous la direction de C. de Tenner, Chr. Hansteen, N. H. Selander, F. G. W. Struve. Ouvrage composé sur les différents matériaux et rédigé par F. G. W. Struve*. La obra fue publicada por dicha Academia en el año 1857 (segundo y tercer tomo) y en 1860 (primer tomo). Struve también dio cuenta de tales trabajos en la Academia de Ciencias de París (1857).

---

<sup>2</sup> La Academia de Ciencias de San Petersburgo fue creada por el zar Pedro I el Grande, mediante un Real Decreto firmado el 22 de enero de 1724, atendiendo, al parecer, las sugerencias de Gottfried Leibniz.. Sus comienzos no pudieron ser más prometedores, pues a ella fueron llamados matemáticos tan ilustres como los hermanos Bernouilli o el mismo L. Euler. También se requirieron los servicios del astrónomo y geodesta J. N. Delisle, pues se pretendía fundar en ella una Escuela de Astronomía. Aprovechando su estancia en la nueva ciudad, en el año 1737, propuso medir un gran arco de meridiano dentro del imperio ruso, con una amplitud de 22°, para comprobar así la curvatura del mismo; conviene recordar que por aquel entonces se estaban efectuando medidas análogas, tanto en Laponia como en el virreinato de Perú. Con el beneplácito y soporte económico de la emperatriz Ana de Rusia, Delisle llegó a medir una base, de unos 14 km, entre los castillos de Peterhof y Döbni, que logró enlazar a varios vértices previamente materializados y observados; no se sabe a ciencia cierta a qué se debió la suspensión de su proyecto, aunque Struve apuntaba a un viaje a Siberia. Se da la circunstancia de que este trabajo inédito del científico francés fue descubierto en los archivos del Observatorio de París por Otto von Struve, el cual sucedió a su padre Wilhelm en la dirección del Observatorio de Pulkovo. Ese fue por lo tanto el más directo antecedente de las operaciones geodésicas emprendidas muchos años después por el Estado Mayor ruso, bajo la responsabilidad del entonces coronel C. F. Tenner. Sabiendo este que W. von Struve estaba realizando operaciones parecidas con relación al meridiano del Observatorio de Tartu, se puso en contacto con él para iniciar la colaboración geodésica que hizo posible el proyecto científico más ambicioso concebido hasta entonces.

# ARC DU MÉRIDIDIEN

DE 25° 20'

ENTRE

## LE DANUBE ET LA MER GLACIALE,

MESURE,

DEPUIS 1816 JUSQU'EN 1855,

SOUS LA DIRECTION

DE

**C. DE TENNER,**

GÉNÉRAL D'ÉTAT-MAJOR IMPÉRIAL  
DE RUSSIE,

**CHR. HANSTEEN,**

DIRECTEUR DU DÉPARTEMENT GÉOGRAPHIQUE ROYAL  
DE NORVÈGE,

**N. H. SELANDER,**

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE ROYAL  
DE STOCKHOLM,

**F. G. W. STRUVE,**

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE-CENTRAL-NICOLAS  
DE RUSSIE.

OUVRAGE COMPOSÉ SUR LES DIFFÉRENTS MATÉRIAUX ET RÉDIGÉ

PAR

**F. G. W. STRUVE.**

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE ST. PÉTERSBOURG.

TOME PREMIER,

OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES ENTRE LE DANUBE ET LE GOLFE DE FINLANDE



St. PÉTERSBOURG, 1860.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Petersbourg

MM. Eggers et C<sup>ie</sup>,

à Riga

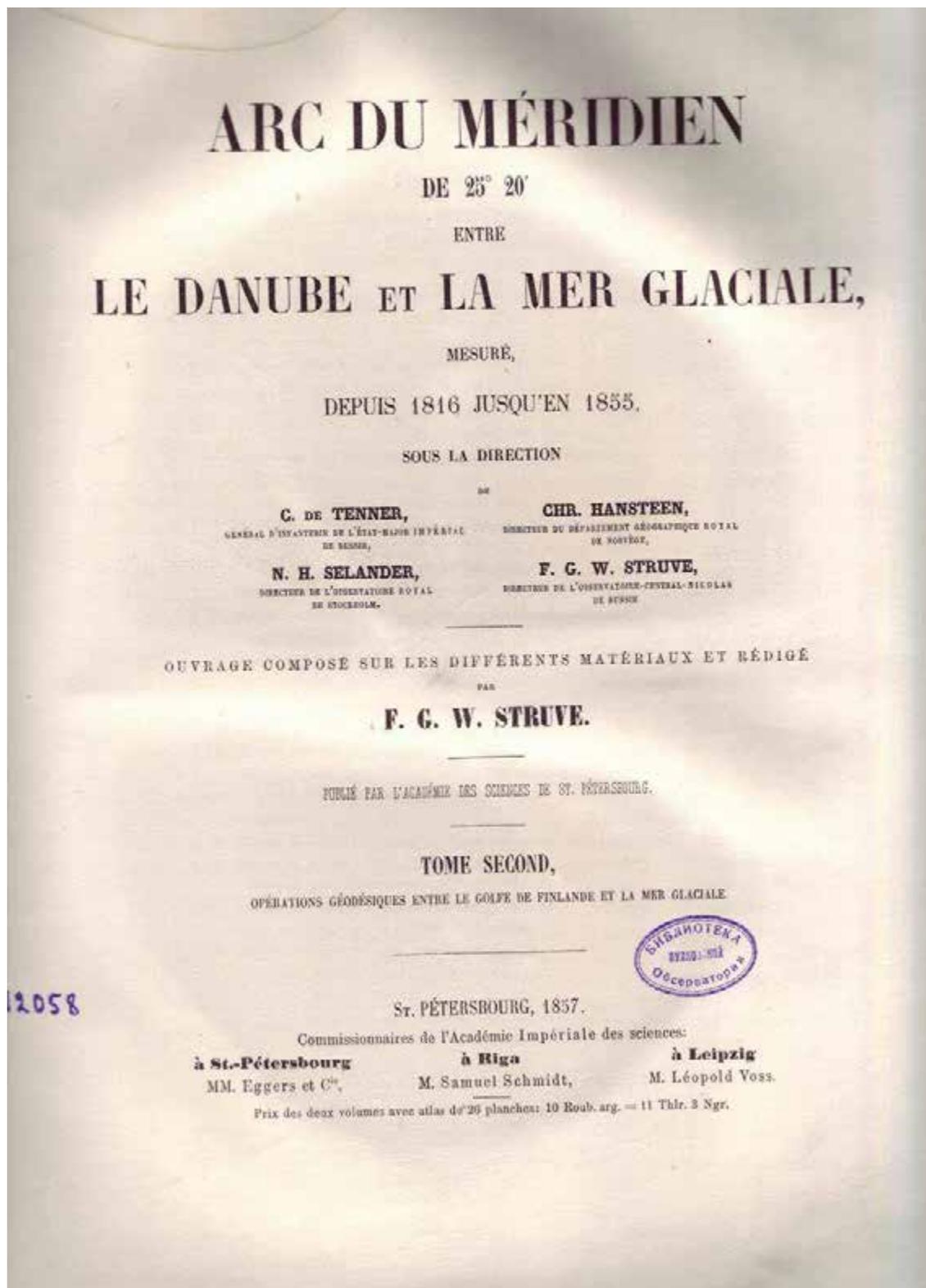
M. Samuel Schmidt,

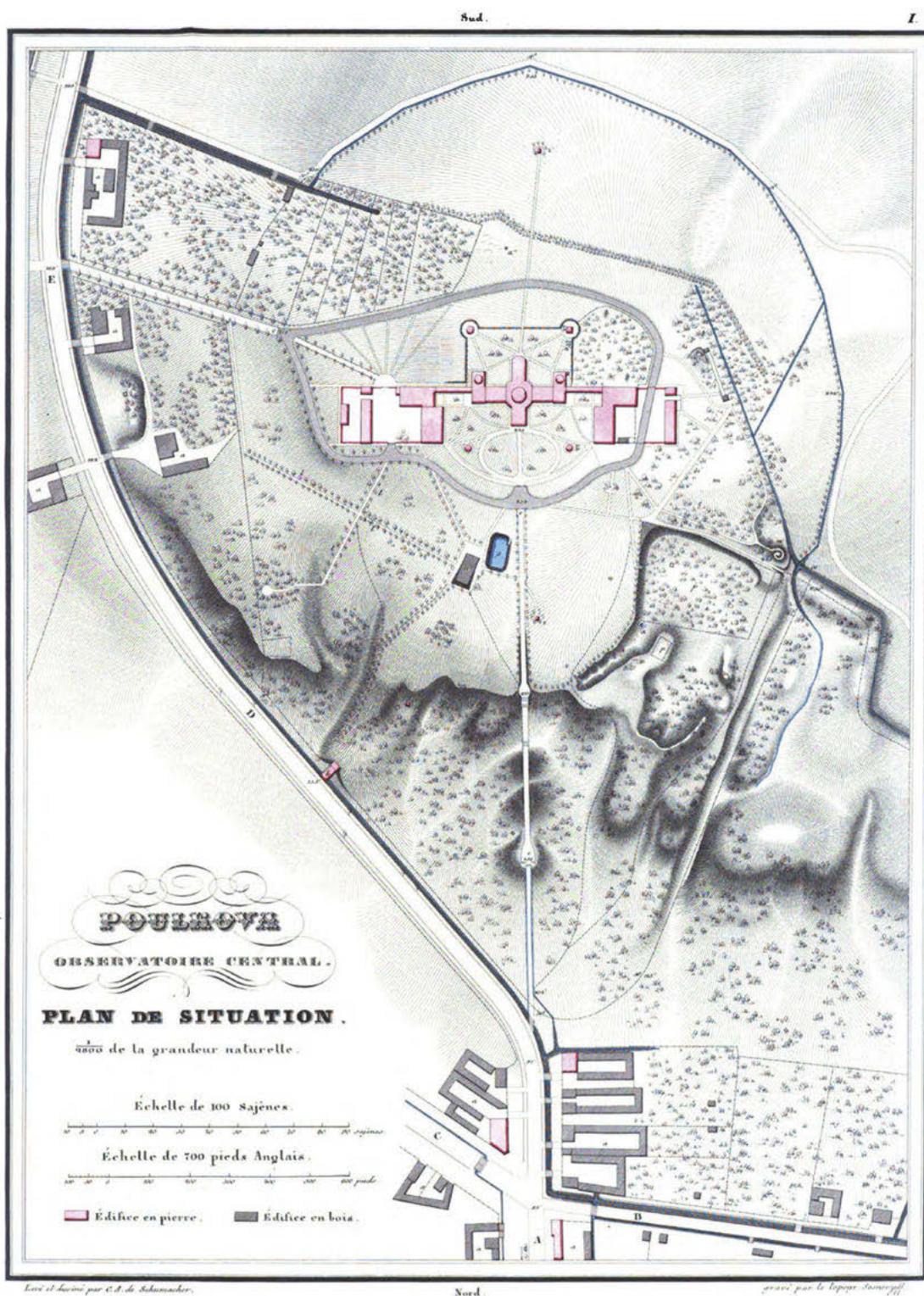
à Leipzig

M. Léopold Voss.

Prix des deux volumes avec atlas de 20 planches: 10 Roub. arg. — 11 Thlr. 5 Ngr.

57





Plano de situación del Observatorio de Púlkovo. El levantamiento y el dibujo, a escala de 1/2800, fueron realizados por C.A. de Schumacher. La lámina es una de las planchas que ilustraba el texto redactado por Struve en 1845 (*Description de l'observatoire de Poulkova*).

Es probable que el principal inconveniente que ofrecieran los primeros resultados obtenidos fuese una cierta heterogeneidad, derivada del empleo de instrumentos diferentes al medir las bases establecidas a lo largo de la cadena de triángulos. En la parte septentrional se usó una regla diseñada por el propio Struve, con la que se lograron errores relativos del orden de una parte por millón, mientras que en la más meridional, donde se utilizó el instrumento ruso que había manejado el general Tenner, se alcanzaron otros próximos a 1/300000. En cualquier caso no se puede asegurar taxativamente que las discrepancias obtenidas obedecieran a errores residuales de los levantamientos efectuados durante casi cuarenta años. Tampoco parecen ser debidos a desplazamientos naturales de los vértices, a lo largo de los años transcurridos desde que se iniciaron las observaciones hasta la fecha en que se efectuaron los primeros controles de calidad. No obstante, puede asegurarse con rotundidad, tras todos los análisis, que el gran arco de Struve presenta una envidiable uniformidad, fiel reflejo del rigor con que se llevaron a cabo los trabajos de campo, entre 1816 y 1855, y del adecuado procesamiento de los observables que se determinaron. Su calidad es tal que aún sigue siendo de utilidad para el estudio de las ciencias de la Tierra, en general, y para la práctica de la topografía en particular. Últimamente se ha estudiado en diferentes ocasiones la fiabilidad geométrica del arco de Struve: evaluando tanto la incertidumbre en la posición de sus trece estaciones astronómicas como en la orientación de la cadena triangular a la que pertenecían. La primera contrastación se efectuó en el año 1994 con la metodología GPS, obteniendo unos resultados que fueron acordes con los obtenidos tras el nuevo examen realizado en el año 2007. La tabla adjunta muestra una discrepancia extrema de 11.4 m y otra de 12.9 segundos de arco.

*Puntos de Laplace en el gran arco geodésico ruso-escandinavo*

Nombres de los Vértices	Latitudes		Longitudes
	Struve	GRS 80	GRS 80
Fuglenaes	70° 40' 11".3	70° 40' 11".998	23° 39' 48".243
Stuor-Olvi	68° 40' 58".4	68° 40' 56".849	23° 44' 45".409
Tornio	65° 49' 44".7	65° 49' 47".529	24° 09' 25".525
Kilpi-mäki	62° 38' 05".0	62° 38' 02".501	26° 46' 04".169
Mäki-Päällys	60° 04' 29".4	60° 04' 27"...	26° 58' 11"...
Dorpat	58° 22' 47".6	58° 22' 43".880	26° 43' 12".342
Jacobstadt	56° 30' 04".8	56° 30' 04".853	25° 51' 23".596
Nemesch	54° 39' 05".9	54° 39' 01".19	25° 19' 00".44
Belin	52° 02' 42".2	52° 02' 39".07	25° 13' 03".16
Kremenetz	50° 05' 50".0	50° 05' 45"	25° 41' 47"
Ssuprunkowzi	48° 45' 03".1	48° 45' 03"	26° 47' 52"
Wodolui	47° 01' 25".2	47° 01' 22"	29° 04' 16"
Staro-Nekrassowka	45° 20' 02".8	45° 19' 57".13	28° 55' 40".27

GRS 80 (Geodetic Reference System 1980):  $a \approx 6378.137$  km,  $1/\alpha \approx 298.257$

Todavía se puede asegurar que el gran arco geodésico de Struve fue la obra maestra de su tiempo. En ella se basaron después científicos tan sobresalientes como sus compatriotas F. W. Bessel y C. F. Gauss. El mismo Struve aprovechó su trabajo para contribuir decisivamente al estudio de la forma y dimensiones de la Tierra. En efecto, comparando el desarrollo de su arco de meridiano con los de otras latitudes<sup>3</sup> dedujo su modelo de elipsoide de revolución, caracterizado por estos dos parámetros: semieje mayor, o ecuatorial, de  $6378445 \pm 169$  m y aplastamiento polar de  $1/298.6 \pm 11.5$ . Su contribución al desarrollo de la cartografía en la zona fue igualmente relevante, al servir de armazón y control de las triangulaciones correspondientes. Quizás fuese esa una de las razones fundamentales que informaron el proyecto, pues el zar Alejandro I estaba particularmente interesado en contar con una representación fiable de los territorios de su imperio. Struve dio traslado de su modelo terrestre al *Ordnance Survey* del Reino Unido, siendo tenido en cuenta por Alexander Ross Clarke en sus estudios sobre la forma y dimensiones de la Tierra.

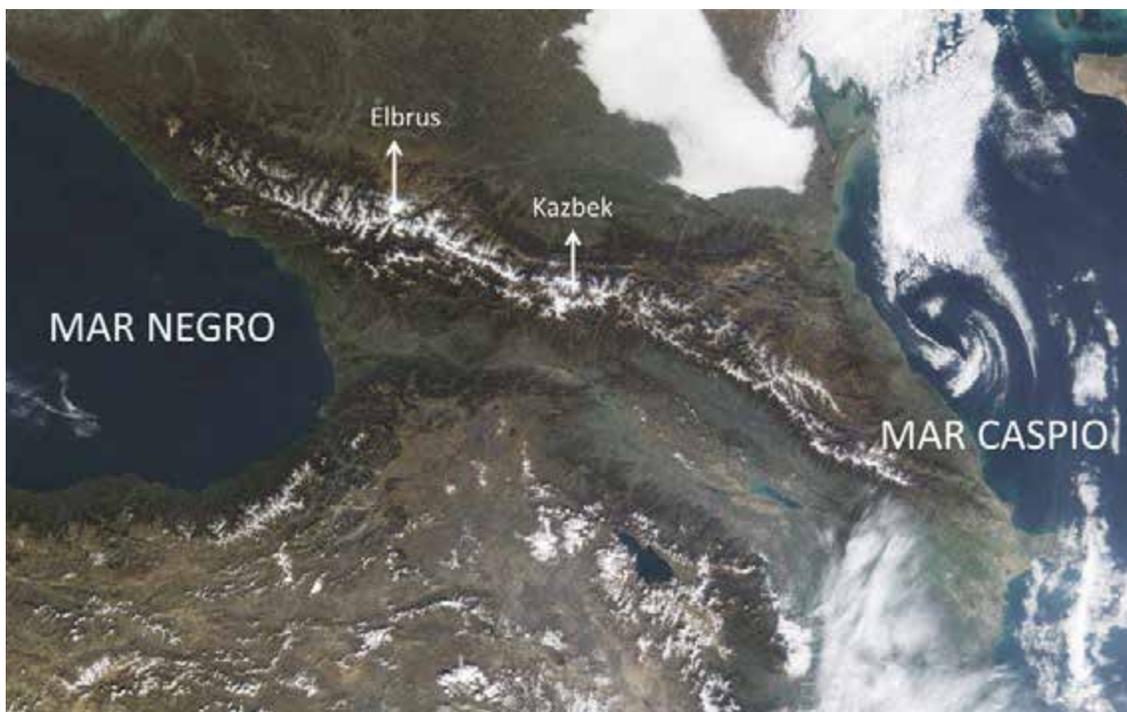


Homenaje postal de Estonia a Struve, al arco ruso-escandinavo, a los instrumentos empleados en su medición y al Observatorio de Tartu (Dorpat). Los sellos fueron emitidos en el año 2011.

Aunque la coordinación de Struve en la edición del arco ruso-escandinavo fuese su obra geodésica más conocida, hubo otras también relevantes que merecen ser recordadas. En el año 1837 participó en la determinación del desnivel entre el mar Negro y el mar Caspio, organizando la expedición científica correspondiente que recorrería cerca de 800 km, logrando no sólo el resultado de  $26.04 \text{ m} \pm 0.25 \text{ m}$ , sino que proporcionó además datos valiosos para el estudio de la refracción, al tiempo que calculó trigonométricamente la altitud de varias cumbres: Elbrus, Kazbek, Besh-Tau y Bezmyannaya. A Struve se deben también mejoras sustanciales que racionalizaron la determinación de la latitud, la medida del tiempo y el cálculo del acimut, eliminando muchos errores sistemáticos. Son igualmente destacables sus participaciones en varias campañas cronométricas relacionadas con la obtención de la longitud geográfica. Quizás fuese la primera aquella en la que colaboró para perfeccionar el mapa del mar Báltico (1833), responsabilizándose de las observaciones astronómicas. En 1842 organizó la expedición que partió de Púlkovo para observar en Lipetsk un eclipse solar, con la intención de corregir las longitudes que habían sido calculadas cronométricamente y recorriendo grandes distancias sobre el terreno. En los años 1843 y 1844 dirigió otras dos, una entre Púlkovo y Altona y otra entre Altona y Greenwich, fijando así la posición del observatorio ruso con relación a su homólogo inglés.

Antes incluso de que se hubiesen concluido sus trabajos geodésicos, ya gozaba de reconocido prestigio en Europa; baste decir que llegó a ser miembro de más de cuarenta instituciones científicas: academias, sociedades y universidades. Durante más de cuarenta años perteneció a la

<sup>3</sup> Entre los modelos que consultó destacó el que había definido Bessel en 1841 ( $a = 6377.397$  km y  $\alpha = 1/299.153$ ).



La mayor altitud de la zona corresponde al pico Elbrus ( $\approx 5642$  m), cubierto por un glaciar. Al Este se ha identificado también el volcán Kazbek. Imagen captada, el 9 de noviembre de 2008, por el satélite de la NASA Terra-MODIS (*Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer*).

Academia de Ciencias de San Petersburgo, fue también miembro fundador de la Sociedad Geográfica de Rusia y presidente de su Departamento de Geografía Matemática. En la ciencia española se honró igualmente su figura, prueba de ello es que la flamante Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, creada por R. D. de 25.2.1847, lo eligió en 1848 como primer miembro extranjero de la corporación. Cuando en el año 1870 se creó el Instituto Geográfico, se eligió su elipsoide para calcular sobre él la red geodésica en la que se apoyaría el futuro Mapa Topográfico Nacional. Las dimensiones de las hojas de la representación se calcularían precisamente en función de los parámetros ya mencionados, básicos para conocer los desarrollos de los arcos de meridiano y de paralelo.

La herencia científica de tan monumental aportación geodésica cobró de nuevo actualidad en el año 2005, al haber sido declarada por la UNESCO patrimonio de la humanidad. De esa forma se cumplieron los deseos de los asistentes a la conferencia celebrada en Tartu (1993), centrada en las contribuciones científicas de Struve, director que fue de su Observatorio astronómico. Tan singular decisión fue favorecida por la perseverancia y encomiable gestión del Secretario Honorífico de la *International Institution for the History of Surveying and Measurement*, el erudito inglés James R. Smith, con quien tiene contraída una deuda de gratitud la comunidad geodésica y topográfica mundial. Un débito que se acentúa más en mi caso, puesto que he de sumarle el agradecimiento por haber prologado el libro que acabo de presentar.



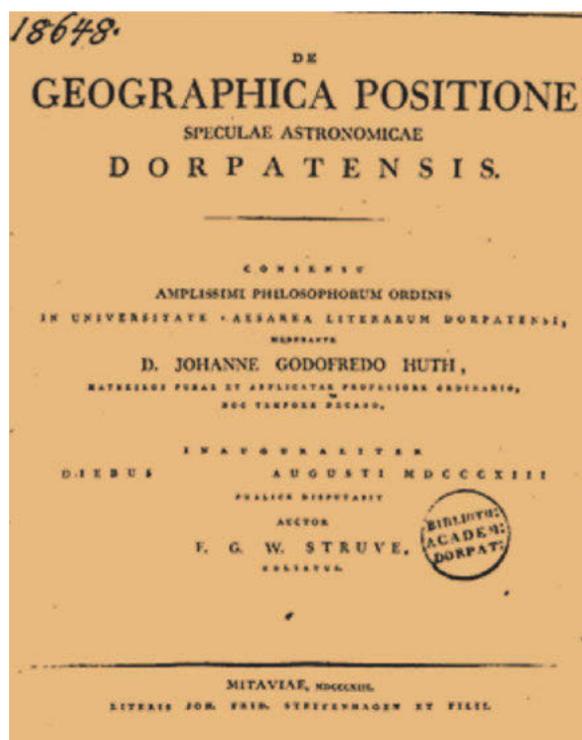
Sedes de la Academia de las Ciencias en San Petersburgo. La de la torre fue la primera, instalándose en ella el observatorio astronómico que sería sustituido por el de Púlkovo. Las dos se encuentran en la orilla derecha del río Deva.



## 2

## APUNTE BIOGRÁFICO DE FRIEDRICH GEORG WILHELM VON STRUVE

Poco ha trascendido de la infancia del protagonista, salvo que nació en la ciudad de Altona<sup>4</sup>, en el mes de abril de 1793. Sus padres fueron Jacob Struve y Maria Ementia, ejerciendo el primero de profesor de filología y de matemáticas en el *Christianeum*<sup>5</sup> de la ciudad. En el mismo cursó sus primeros estudios su hijo Wilhelm, quien los finalizó, con mucho aprovechamiento, a los 15 años de edad. Justo entonces, en 1808, emigró a Tartu, huyendo del reclutamiento obligado que practicaba el ejército napoleónico. Allí contó con la ayuda de su hermano mayor Karl, a la sazón ayudante del profesor H. C. Schumaker, el cual era amigo de su padre. Siguiendo los consejos de la familia emprendió los estudios universitarios de filología. Dos años más tarde escribió *De studiis criticis et grammaticis opud Alexandrinos*, con el que ganó una medalla de oro como premio al interesante análisis que había realizado de los autores afincados en la capital egipcia.



Tesis doctoral de Friedrich Georg Wilhelm von Struve.

Poco después, Struve se licenció en aquella universidad, consiguiendo la máxima calificación. Sin embargo, ya venía mostrando un acentuado interés por las ciencias exactas, dedicando todo su tiempo libre a la física y a la astronomía; de hecho rechazó un puesto de profesor que le ofrecieron en el instituto de aquella ciudad. Gracias a una beca, pudo comenzar formalmente sus estudios de astronomía geodésica en la universidad de Dorpat. En octubre de 1823 defendió con éxito su tesis doctoral sobre la determinación de las coordenadas geográficas del referido observatorio, su título fue el siguiente: *De geographicae positione speculae Dorpatensis*. Con tan sólo veinte años ya era Struve astrónomo observador del observatorio y profesor extraordinario de

<sup>4</sup> Entonces perteneciente a Dinamarca, aunque en la actualidad coincide con el núcleo central de Hamburgo.

<sup>5</sup> Antigua escuela de latín, luego transformada en un celebrado *Gymnasium*.



Los padres de Wilhelm von Struve: Jacob Struve y su mujer Maria Emerentia (daguerrotipo de 1840 en Altona).

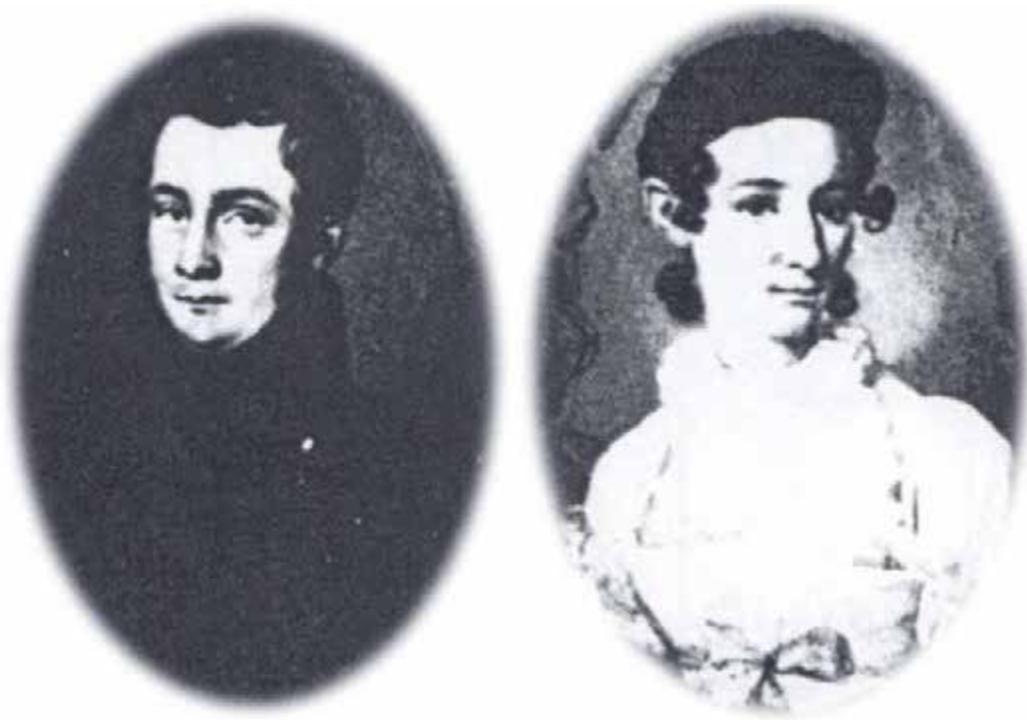
matemáticas y astronomía. Su status cambió sustancialmente en el año 1820, cuando alcanzó el nivel de profesor ordinario de astronomía, el cual llevaba aparejada la dirección del repetido observatorio. Poco tiempo después de ser nombrado profesor extraordinario volvió a Altona para visitar a sus padres, a los que no veía desde hacía seis años. Fue durante esa visita cuando conoció a Emilie Wall, con la que contraería matrimonio en junio de 1815. En octubre de ese mismo año fijaron su residencia en Dorpat. Fruto de su matrimonio nacieron doce hijos, aunque cuatro de ellos perecieron siendo aún niños.

Los trabajos en el observatorio los simultaneó con sus clases de geometría práctica, topografía, geografía matemática, trigonometría y astronomía; nunca interrumpidas a pesar de las numerosas observaciones que continuamente realizaba en él y de los múltiples trabajos geodésicos de campo en que participó. Esa fue la tónica que siguió durante los veinticinco años de docencia en la universidad de Dorpat (Tartu), formando con ello a toda una generación de profesionales que ocuparían luego puestos de relevancia en la astronomía rusa. Parece obligado subrayar, que su preocupación por las materias anteriores se veía acentuada durante los viajes previos que hizo a Alemania, durante los veranos de 1815 y 1816, puesto que coincidió allí con personajes de la talla de los matemáticos y astrónomos H. W. M. Olbers, C. F. Gauss<sup>6</sup> y F. W. Bessel, junto a los prestigiosos instrumentistas J. G. Repsold y J. Fraunhofer. Su estancia en Alemania la aprovechó para encargar a los talleres de G. F. von Reichenbach y T. L. Ertel el círculo meridiano destinado al observatorio de Dorpat. Struve logró, en definitiva, transformar su observatorio en uno de los mejores de Europa; allí creó la revista *Observationes Astronomicae Institutae in Specula Universitatis Caesariae Dorpatensis*, él mismo publicó ocho volúmenes de la misma: el primero en 1817 (periodo 1814-1815) y el último en 1838 (periodo 1831-1838).

Cuando Struve comenzó su mandato como director, se encontraban las instalaciones en un estado lamentable, si bien transcurridos veinte años se convirtió el centro en un observatorio de referencia, hasta el punto de servir de modelo al de Púlkovo, que se estaba construyendo en la misma época. Dos de los primeros instrumentos con que se dotó al observatorio, en 1814, fue un

---

<sup>6</sup> A Gauss le regaló su tesis doctoral, con la siguiente dedicatoria: *Dem Herrn Professor Gauß, hochachtungsvoll, der Verfasser.*



Miniaturas de Wilhem von Struve y de su prometida Emilie en 1814.

anteojo de pasos, del inglés J. Dollond<sup>7</sup>, y otro acromático de Troztop. Struve los instaló con sus propios medios y comenzó así las investigaciones sobre las estrellas dobles, con las que pasaría a la posteridad. Gracias a ellos descubrió el movimiento orbital de las dos componentes de varias estrellas binarias, calculando el periodo de dos de ellas. Los resultados de estos primeros trabajos fueron apareciendo en los anales del observatorio, los cuales empezaron a publicarse precisamente en ese mismo año de 1814. Aunque ya era sabida la existencia de estrellas dobles y múltiples, aún no se habían fijado sin ambigüedad las coordenadas relativas de sus componentes, el brillo y otras de sus características. A partir de 1818 inició sus medidas de las paralajes estelares con el instrumento de pasos, llegando a la conclusión de que sus variaciones eran generalmente menores que las incertidumbres propias de los aparatos empleados para su observación. Con semejante conclusión dejó en evidencia a los astrónomos contemporáneos que aseguraban haber descubierto cambios paralácticos apoyándose en la obtención de las coordenadas absolutas de las estrellas involucradas.

Estaba pensando en otros proyectos, como la observación de las estrellas circumpolares, cuando recibió de las autoridades letonas<sup>8</sup> el encargo de formar un nuevo mapa de Letonia que mejorara ostensiblemente el anterior. Una vez aceptado, lo basó en las correspondientes observaciones astronómicas, acompañadas de los levantamientos trigonométricos necesarios. Animado por el éxito del trabajo, realizado entre 1816 y 1819, decidió aprovechar la experiencia adquirida para aventurarse en una nueva aventura científica: contribuir a mejorar el conocimiento de la

---

<sup>7</sup> Con él determinó Struve las coordenadas geográficas del observatorio.

<sup>8</sup> Se trató en realidad de una Sociedad Económica de interés público.



Fraunhofer mostrando las excelencias de su espectroscopio a Reichenbach en 1815.

forma y dimensiones de la Tierra. Su iniciativa geodésica fue muy concreta, la medida del arco de meridiano, con una amplitud de  $3^{\circ}35'$ , comprendido entre la isla de Hogland, en el golfo de Finlandia, y la ciudad de Jacobstadt, en la región de Curlandia. Su proyecto fue aceptado de inmediato por el zar Alejandro I, el cual libró los fondos necesarios para comprar todos los instrumentos con los que efectuar las medidas pertinentes.

Con tal objeto viajó de nuevo a Alemania, en el verano de 1820, visitando sus mejores observatorios, destacando el regentado por Bessel<sup>9</sup> en la ciudad de Königsberg, hoy Kaliningrado. Allí coincidió con el joven astrónomo Friedrich Wilhelm August Argelander<sup>10</sup>, con el que colaboraría durante casi cincuenta años. Tras recopilar toda la información que pretendía, regresó al observatorio de Dorpat durante ese invierno, comenzando de inmediato los preparativos para la medición del arco de meridiano, sin olvidar por supuesto el protocolo observa-

---

<sup>9</sup> Struve siempre consideró a Bessel como el profesor que le había marcado las líneas maestras que debería seguir tanto en la metodología observacional como en sus investigaciones geodésicas.

<sup>10</sup> Argelander llegaría a ser el primer director del Observatorio de Bonn, ciudad a la que se trasladó en el año 1836. Durante sus primeros años trabajó en la que sería una de sus obras más brillantes: *Uranometria nova* (1843). En este trabajo no efectuó medición alguna, pues no se trató de determinar la posición de las estrellas, sino de registrar todas las que eran visibles a simple vista y acotar el espacio limitado por las constelaciones correspondientes. En la actualidad perdura su nombre en un prestigioso centro de investigación: *Argelander-Institut für Astronomie*, en el que se integraron (2006) los tres institutos astronómicos de la Universidad de Bonn.

cional ya establecido. Una de las novedades más señaladas fue la recepción e instalación del nuevo círculo meridiano de Reichenbach, con el que determinó Struve la declinación de numerosas estrellas, a la vez que comprobaba el funcionamiento del instrumento. En el año 1827 ya había finalizado la medición del referido arco, aunque sus resultados no se publicasen hasta el año 1831. Entretanto, había sido elegido miembro correspondiente de la Academia de San Petersburgo (1822) y académico honorífico (1826). Dos años antes se recibió en el observatorio el telescopio refractor de Fraunhofer<sup>11</sup>, con el que Struve realizó su mayor contribución a la astronomía, el descubrimiento sistemático y la observación de las estrellas binarias<sup>12</sup>.



El astrónomo alemán F. W. A. Argelander, primer director del antiguo Observatorio de Bonn; un bello edificio de ladrillo proyectado por el arquitecto Carl Friedrich Schinkel y construido entre 1840 y 1845.

<sup>11</sup> El instrumento llegó a Dorpat, procedente de Munich, el 10 de noviembre de 1824. Para el día 15 ya lo había montado Struve, pudiendo comenzar desde entonces sus primeras observaciones. Tan impresionado debió quedar el astrónomo, que escribió en la revista *Astronomische Nachrichten*: «hechizado me coloqué delante de esta maravillosa obra de arte, sin saber decidir que me parece más sorprendente, si la belleza de su forma o la perfección de todos los detalles de su equilibrada estructura y su más que ingenioso mecanismo, amén de su incomparable luminosidad y nitidez de sus imágenes».

<sup>12</sup> Durante doce años de observación y cálculo, estudió la posición relativa de más de 2.710 estrellas dobles. En efecto, los micrómetros de que disponía el instrumento le permitieron obtener la información suficiente como para publicar, en 1827, el *Catalogus Novus Stellarum Duplicium et Multiplicium* y medir, por vez primera en la historia, distancias estelares entre los años 1835 y 1836, tal como figuraron en su trabajo *Stellarum duplicium et multiplicium mensurae micrometricae per magnum Fraunhoferi tubum annis a 1824 ad 1837 in specula Dorpatensi institutae*.

Wilhelm von Struve se transformó pronto en un geodesta distinguido, logrando que la universidad de Dorpat se convirtiese en el centro al que acudían todos aquellos que pretendían destacar en los campos de la astronomía y la geodesia. Entre los alumnos que asistían con regularidad a sus clases universitarias, figuraban los futuros profesores de enseñanza media, así como los oficiales navales y de Estado Mayor. Otra de las actividades en que sobresalió Struve fue en la consolidación y desarrollo posterior del observatorio astronómico que había decidido construir la Academia de Ciencias de San Petersburgo, en el año 1827. Para facilitar su tarea fue comisionado, en 1830, a fin de visitar los mejores observatorios europeos de su tiempo. El informe de sus viajes se lo presentó al Zar Nicolás I, recomendando en él, sin circunloquios, la construcción del nuevo observatorio. Desde el primer momento, Struve formó parte del equipo creado al respecto, aunque no abandonase su investigación en la universidad anterior. Premio a su interés por el nuevo observatorio fue su incorporación, como miembro de pleno derecho, a la Academia de Ciencias de San Petersburgo en el año 1832, aunque influyesen también sus continuadas observaciones astronómicas, por las que ya era de sobra conocido en Europa. Por ellas le fue concedida la medalla de oro de la *Royal Astronomical Society* de Londres, un galardón que causó sensación en Rusia, hasta el punto de que el zar Nicolás I le regaló un anillo de diamantes.

Wilhelm von Struve vivía, con su numerosa familia<sup>13</sup>, en una pequeña casa construida en terrenos del observatorio de Dorpat. El año 1834 fue trágico, puesto que murió su hijo mayor y se quedó viudo. Al año siguiente contrajo nuevas nupcias con Johanna Bartels, hija del eminente matemático Johann Christian Martin Bartels<sup>14</sup>, que fue tutor de Gauss y tuvo también como



El Observatorio de Dorpat en el año 1821.

---

<sup>13</sup> Mujer, ocho hijos y cuatro sobrinos.

<sup>14</sup> En el año 1821 se trasladó a la universidad de Dorpat, creando allí el Centro de Geometría Diferencial. También fue miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

alumno al excelente geómetra ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky. Otros seis hijos le nacieron en este segundo matrimonio, ocupándose su esposa de la solución de todos los problemas domésticos. El buen aprovechamiento de sus hijos en los estudios fue manifiesto, como prueba el hecho de que su hijo mayor, Otto<sup>15</sup>, se convirtiera pronto en su sustituto y más tarde en su sucesor al frente de la dirección del observatorio de Púlkovo.

Aunque Struve no fuese realmente el fundador de dicho observatorio, es obvio que sus consejos, y su amplia experiencia al frente del de Dorpat, resultaron decisivos en su configuración final, basada en el patrón ya establecido en el observatorio de Greenwich. El papel tan relevante asignado por él al nuevo centro, en la historia de la astronomía observacional y en el de la geodesia rusa, quedó sucintamente reflejado en su obra de 1845: *Description de l'observatoire astronomique central de Poulkova*; a Struve le cupo pues el honor de haber sido director de los dos observatorios más importantes de Rusia. Por decisión expresa del zar, los astrónomos destinados en él deberían corregir las tablas de efemérides, haciendo hincapié en la posición de las estrellas fijas, con el claro objetivo de calcular con la menor incertidumbre la longitud geográfica en el mar, de tanta repercusión para la navegación. El edificio principal fue proyectado por el arquitecto A. Brullov, en estrecha colaboración con W. von Struve. La ceremonia fundacional tuvo lugar el 21 de junio de 1835. Mientras tanto fueron llegando al observatorio los primeros instru-



Medalla conmemorativa de la inauguración del Observatorio Astronómico Central de Púlkovo. En el anverso figuraba un busto del zar Nicolás I y en el reverso una vista de su parte principal, adornada con una orla en la que se distinguen los signos del zodiaco.

<sup>15</sup> Wilhelm von Struve fundó una dinastía de astrónomos ligados, en un principio, al observatorio de Púlkovo, al igual que hizo antes G. D. Cassini con relación al observatorio de París. Su hijo Otto Wilhelm (1819-1905) le sucedió como director. Dos de los hijos de este Karl Hermann (1854-1920) y Gustav Ludwig (1858-1920) también fueron astrónomos. El hijo del primero Georg Otto Hermann (1886-1933) fue igualmente astrónomo, en el observatorio de Berlín, al igual que Otto Struve (1892-1963), su primo e hijo de Gustav Ludwig, el cual llegó a ser un destacado astrónomo en los Estados Unidos. El hijo de Georg Otto Hermann, Wilfried Struve (1914-1992), miembro ya de la quinta generación, se dedicó igualmente a la astronomía, aunque al final se especializase en la acústica.

mentos, procedentes de Munich, Hamburgo, Berlin y Londres, en cuya construcción colaboró igualmente el mismo Struve; ya como director, por deseo expreso del propio zar Nicolás I.

La inauguración del observatorio se efectuó el siete de agosto de 1839, en presencia de todos los miembros de la Academia de Ciencias, embajadores y representantes de las principales ciudades del imperio. Tras el discurso pronunciado por Struve, se entregaron medallas conmemorativas, que habían sido acuñadas para la ocasión, a todos los asistentes y se visitaron las amplias dependencias de tan singular institución científica. El zar giró una visita especial el 26 de septiembre y atendió las explicaciones que le dio el director del observatorio durante dos horas: deteniéndose en la organización del centro, en el diseño y excelente calidad de todos sus instrumentos, amén de en el importante papel que estaba llamado a desempeñar en el futuro próximo. Nicolás I quedó muy gratamente impresionado y dispuso el ingreso de Struve en la orden de San Estanislao, con derecho a todas las prerrogativas que ello suponía. En honor a la verdad ha de subrayarse que en la formación científica de aquellos astrónomos rusos primaban las enseñanzas de la escuela alemana, creada por profesores tan relevantes como W. Herschel, Gauss y Bessel.

El impacto causado en la comunidad astronómica internacional fue extraordinario, como prueban los testimonios del director del Observatorio de Greenwich y del representante del *Bureau des Poids et Mesures*. En efecto, cuando George Bidell Airy regresó de San Petersburgo, no pudo ser más elocuente, a pesar de tratarse de una persona poco dada a las alabanzas: «...ningún astrónomo puede considerar que domina la astronomía moderna en su forma más acabada, si no ha conocido el Observatorio de Púlkovo, con todas sus peculiaridades». Jean Baptiste Biot<sup>16</sup>, astrónomo del BIPM, se pronunció en parecidos términos en el año 1848: «ninguna institución astronómica jamás fue tan ampliamente proyectada, tan perfectamente organizada, provista de tanta riqueza como el Observatorio de Púlkovo... Ahora tiene Rusia un monumento científico sin parangón en el mundo». En el transcurso de la segunda guerra mundial, el observatorio fue un bastión inexpugnable durante el sitio de San Petersburgo (Leningrado), aunque quedase reducido a escombros. Posteriormente fue reconstruido de acuerdo con los proyectos originales.

Los primeros frutos de las investigaciones practicadas en el Observatorio surgieron de modo natural. Entre ellos deben citarse los catálogos estelares de gran exactitud<sup>17</sup>, que superaban con claridad a los entonces vigentes. En el año 1847 se publicaron los estudios de astronomía estelar que revolucionaron la disciplina. Struve fue el primer astrónomo en comprobar la existencia de materia, en el espacio interestelar, capaz de absorber la luz. Analizando su listado de estrellas demostró también que la intensidad de la luz decrecía con el cuadrado de las distancias, una evidencia de la pérdida de potencia cuando esta viajaba a través del mismo<sup>18</sup>. Struve compaginó sus actividades en el observatorio con una astronomía más utilitaria, aunque imprescindible para los levantamientos geodésicos en que se deberían apoyar los mapas topográficos que necesitaba perentoriamente Rusia. Así ha de entenderse su expedición a la región de Tambov para observar un eclipse de Sol (1840) y calcular la posición geográfica de algunos lugares de interés. Hasta tal punto fue determinante esa segunda faceta, que el observatorio se convirtió en sus primeros veinte años de existencia en la referencia fundamental para todos los levantamientos astrogeodésicos habidos en aquel país.

---

<sup>16</sup> Llegó a considerarlo el Dorado de la astronomía.

<sup>17</sup> Uno de los más señalados fue el catálogo de 3112 estrellas dobles del hemisferio boreal que publicó Struve.

<sup>18</sup> Su descubrimiento permaneció sin ser matizado hasta que en 1930, R. J. Trumpler probó de nuevo el fenómeno de la absorción de la luz.



El Observatorio central de Púlkovo. Vista del lado Norte por Ev. Bernardsky en 1855. La fotografía de la derecha fue tomada en el año 1876.

Sin embargo, no descuidó en absoluto su responsabilidad al frente de las medidas del arco de meridiano, extendiéndolas desde el río Danubio, al Sur, hasta el Norte de los países escandinavos. Y es que el observatorio de Púlkovo se convirtió en una verdadera escuela de geodesia, en la que se formaron alumnos rusos y otros del extranjero. Poco a poco se fue creando en él una excelente biblioteca, comparable con las mejores de Europa, la cual contaba en 1865 con más de 9.000 volúmenes y otras tantas tesis doctorales. Struve estaba orgulloso de ella y especialmente de algunos de los manuscritos de Kepler allí depositados<sup>19</sup>. El último libro escrito por Wilhelm von Struve fue precisamente el resumen de los trabajos astronómicos y geodésicos, realizados entre 1816 y 1855 para la medida del gran arco de meridiano que lleva su nombre.

El año 1857 marcó un hito importante en la vida científica y profesional de Struve, pues presentó ante la Academia de Ciencias de París los trabajos que había dirigido, en el periodo 1816-1855, para medir la Tierra entre el delta del Danubio y Cabo Norte. La sesión formal tuvo lugar el 12 de octubre, presidiéndola el zoólogo



Monumento a Friedrich Georg Wilhelm von Struve levantado, en 1969, junto al viejo Observatorio de Tartu. Su altura es de 8 m, simbolizando su parte inferior un reloj de sol cilíndrico y la superior otro de arena. El escultor fue O. Mämi y el arquitecto U. Ivask. Su posición geográfica está definida por las coordenadas siguientes: latitud  $58^{\circ} 22' 45''$  y longitud  $26^{\circ} 43' 13''$  E. G.

<sup>19</sup> Tales manuscritos habían sido comprados por Catalina la Grande, siguiendo los consejos de L. Euler.

francés Isidore Geoffroy Saint-Hilaire. El título de la intervención, incluida en el apartado de la geodesia, fue *Note sur l'ouvrage relatif à l'arc du méridien de 25°20' entre la Mer Glaciale et el Danube, publié par l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*<sup>20</sup>. El inicio de su intervención fue de reconocimiento al importante papel jugado por Francia en esa ciencia a lo largo del siglo XVIII, culminado con la medición del arco de 12° 22' comprendido entre Dunkerque y Formentera. Se refirió después a la obra emprendida por su admirado compatriota Bessel, que pretendía efectuar un nuevo cálculo de las dimensiones del elipsoide terrestre. A ese respecto recordaba Struve que los arcos de meridiano de gran desarrollo contribuirían a mejorar el conocimiento de tales dimensiones, sin olvidar que en esos grandes segmentos iba disminuyendo la influencia de las desviaciones locales de la vertical.

Esa fue precisamente la justificación que dio paso al resumen de las mediciones que se habían efectuado hasta configurar un gran arco de 25°20', que bautizó como ruso-escandinavo. Struve reconoció también la inestimable colaboración de sus ilustres compañeros: Tenner, Hansteen y Selander, a la vez que anunció la publicación de los dos volúmenes sufragados por la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Fue a partir de entonces cuando comenzó la verdadera síntesis de la medición del meridiano, mencionando sus detalles más característicos. Merece una reseña especial otro de sus anuncios, la intención de escribir un tercer volumen que contendría el análisis del cálculo de las latitudes, sustentado por la observación de nuevas estrellas, teniendo en cuenta las constantes de aberración y nutación obtenidas en el Observatorio de Púlkovo. En él se incluiría además un nuevo modelo elipsoidal, cuyos parámetros los deduciría a partir de todos los arcos de meridiano «dignos de confianza y que hubiesen sido medidos hasta el presente». El volumen terminaría con un listado de las posiciones geográficas y altitudes de todos los vértices de los triángulos involucrados en la triangulación extendida a todo lo largo del meridiano, partiendo de la longitud de Dorpat, que se había obtenido a partir de la de Púlkovo en 1855, y calculadas sobre el elipsoide precedente<sup>21</sup>.

La comunicación de Struve fue contestada por el prestigioso astrónomo J. B. Biot y por el mariscal Jean Baptiste Vaillant. El primero, haciendo gala de su proverbial egolatría y displicencia, se limitó a citar la relevancia de las tareas que había realizado junto a su compañero Arago, concluyendo su intervención con estas palabras:

*«les réflexions que l'importante communication de M. Struve m'a suggérées, m'ont par une pouvoir être rédigées avec utilité et convenance qu'après qu'elle aura été insérée au Compte rendu».*

Más diplomática y extensa resultó la contestación del mariscal, debiendo destacar este comentario:

---

<sup>20</sup> La Academia de San Petersburgo cambió de nombre a lo largo de la historia: Academia de las Ciencias y de las Artes Aplicadas (1724), Academia Imperial de las Ciencias y Artes Aplicadas de San Petersburgo (1747), Academia Imperial de las Ciencias (1803), Academia Imperial de las Ciencias de San Petersburgo (1836), Academia de las Ciencias de la URSS (1917), Academia de Ciencias de Rusia (1991). También tuvo varias sedes, del edificio original (actual Museo de Antropología y Etnografía), se trasladó a otro de estilo renacentista, construido por el arquitecto italiano Giacomo Quarenghi en 1789, junto al anterior. En el año 1934 se trasladó a Moscú su sede central, aunque permanecieron en San Petersburgo sus archivos y biblioteca.

<sup>21</sup> Más adelante se comentará que la aparición de este tercer volumen se vio frustrada por la enfermedad que contrajo Struve en los últimos años de su vida.

*le grand arc de méridien, mesuré dans l'Empire russe, sous la direction de M. Struve, constitue une magnifique et gigantesque opération qui contribuera de la manière la plus puissante et la plus décisive à la connaissance de la figure de notre planète, surtout en se combinant avec l'exécution d'un travail dont M. de Struve n'a point parlé dans son intéressante Notice, bien que la proposition de ce travail soit le principal objet de son voyage en France*<sup>22</sup>.

Struve agradeció las palabras del militar y aclaró que no había comentado nada al respecto por estar negociándose en esos momentos el acuerdo con el gobierno de Francia y que, por respeto institucional, habría preferido hacérselo saber antes al Ministro de la Guerra. El discurso de Struve, con las respuestas anteriores, figuró en las memorias publicadas por la Academia de Ciencias (*Comptes rendus*. Tomo 45.1857. Julio-diciembre, pp: 509-515); tal como aparece reproducido en el anexo que acompaña al presente trabajo.

Cuando en ese mismo año volvió a Rusia, empeoró su salud y se vio obligado a suspender la mayor parte de su actividad científica, delegando la dirección del Observatorio en su hijo Otto, quien a partir de entonces ejerció como tal<sup>23</sup>. Dos años después se tuvo que trasladar a San Petersburgo, aunque pasara los meses de verano en el observatorio. Struve tuvo la satisfacción de asistir, en agosto de 1864, al 25 aniversario de la inauguración del mismo. Cuatro meses después falleció y fue enterrado en el cementerio del observatorio de Púlkovo; su biógrafa E. F. Lifvinova<sup>24</sup> afirmaba con razón que la herencia científica de Struve fue grandiosa.

La competencia astronómica de la dinastía formada por F. G. W. von Struve fue premiada al dar su apellido a un cráter lunar de impacto, con un diámetro de 170 km y en el extremo occidental del *Oceanus Procellarum*, muy cerca del limbo; además de recordar para siempre la figura del geodesta, se recompensaba también la ingente labor de Otto Wilhem von Struve y de Karl Hermann Struve. También se reconoció la labor de tales astrónomos, al bautizar con su apellido a un asteroide descubierto el 4 de octubre de 1913, en Crimea, por el astrónomo G. N. Neujmin: 768 *Struveana*<sup>25</sup>. El reconocimiento a F. G. W. von Struve alcanzó también a la geografía, pues son varias las montañas que llevan su nombre. Además de las existentes en Rusia con la denominación de Gora Struve, hay dos en las islas de Spitzbergen y una tercera en la Antártida, concretamente en la tierra de la reina Maud<sup>26</sup>.

---

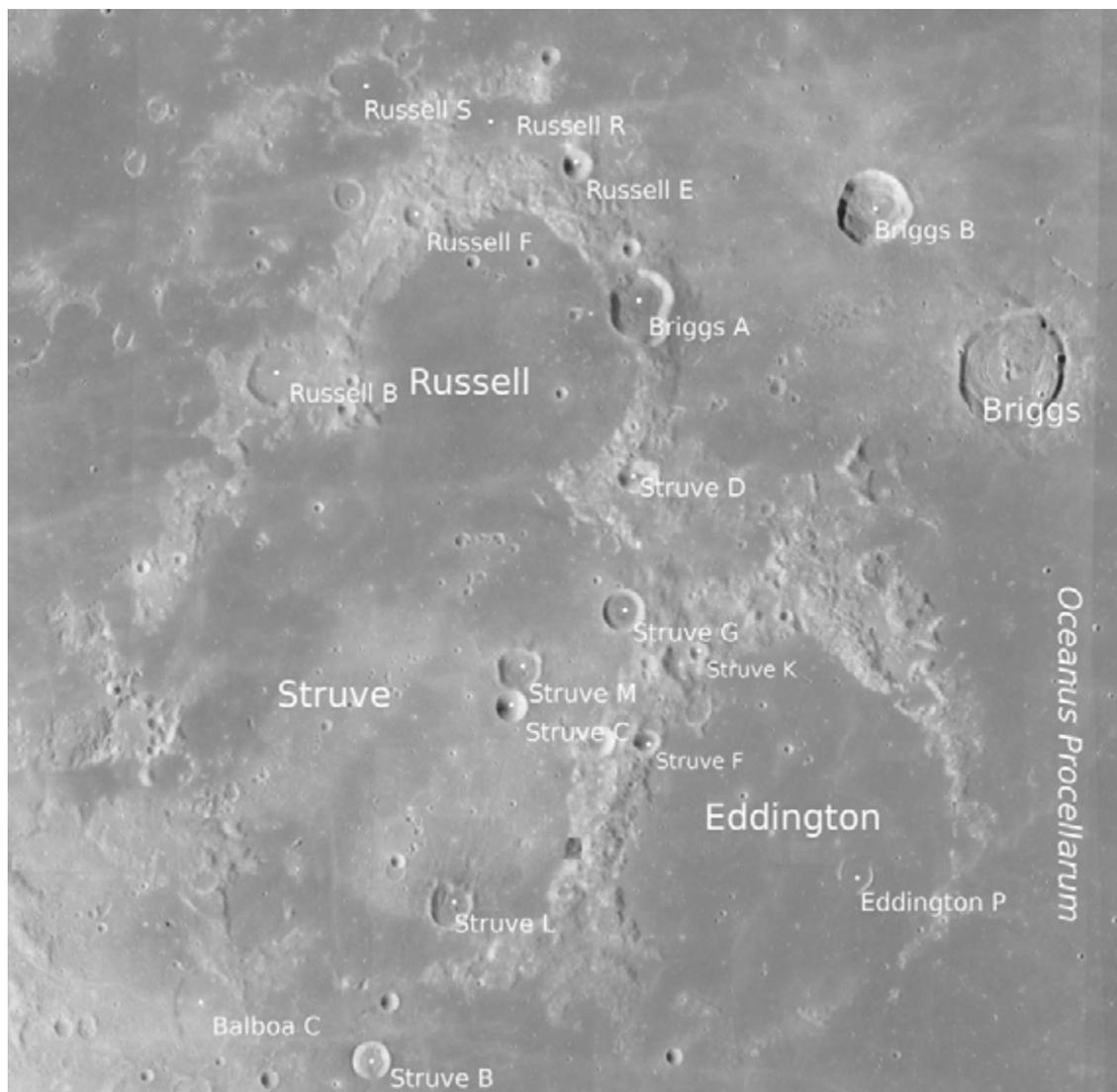
<sup>22</sup> Se refería Vaillant a la triangulación que se extendería a lo largo de un paralelo entre el Océano Atlántico y el Mar Caspio, con una longitud de 55°, la cual atravesaría Francia, Bélgica, Prusia y Rusia. La relevancia de ese proyecto estribaba a su juicio en que al comparar las longitudes geodésicas de las diferentes partes del arco con sus amplitudes astronómicas se podría constatar si la Tierra era verdaderamente un sólido de revolución o si por el contrario se apartaba del modelo elipsoidal que se le atribuía.

<sup>23</sup> Formalmente fue nombrado director del observatorio de Púlkovo en 1861.

<sup>24</sup> En la versión inglesa del mismo, realizada por I. Varonina, y en otras informaciones publicadas por el observatorio de Tartu, se basan la mayoría de los comentarios que aparecen bajo este epígrafe.

<sup>25</sup> Algunos de los parámetros orbitales del mismo son los siguientes: periodo de 5.602 años, afelio 3.795 U.A., perihelio 2.513 U.A. y excentricidad de 0.203.

<sup>26</sup> El nombre se lo dio Roald Engelbregt Gravning Amundsen.



El topónimo Struve en una imagen fotográfica de la Luna (12.XII.2011), representada mediante la proyección cilíndrica y directa de Mercator. Detalle extraído del mosaico lunar de la NASA: *LRO-WAC (Lunar Reconnaissance Orbiter Camera- Wide Angle Camera)*.

Ya se ha comentado que la Academia de Ciencias de San Petersburgo publicó el trabajo en el que Wilhelm von Struve explicó, con todo lujo de detalles, la mayor aventura geodésica del siglo XIX. También es notorio que la publicación se presentó en dos volúmenes, con 334 páginas el primero y 483 el segundo. La operación se estructuró en dos partes perfectamente diferenciadas, pero complementarias: por un lado el arco meridional, comprendido entre el río Danubio y el golfo de Finlandia, y por otro el segmento septentrional, limitado por dicho golfo y el mar glacial, por usar el mismo adjetivo referido por Struve. En ambos casos se asiste a un relato ameno hecho en primera persona por el máximo responsable de la medición, lo cual le confiere a esta obra un valor excepcional para todos aquellos estudiosos y amantes de la astronomía de posición, de la geodesia y de sus inmediatas aplicaciones cartográficas y topográficas.

Las primeras palabras de Struve fueron para congratularse de haber podido presentar al mundo científico los detalles de una operación astronómica y geodésica de semejante envergadura, en la que se habían invertido tantos esfuerzos durante un periodo de tiempo tan prolongado. También expresó su intención de publicar un tercer volumen dedicado a la determinación astronómica de latitudes y acimutes, las observaciones astronómicas, incluyendo los controles metrológicos de las diferentes reglas con que se midieron las bases de la triangulación. Sin embargo tuvo que renunciar a ello por la grave enfermedad que contrajo en 1858, optando por completar los que finalmente aparecieron con anexos, en los que figurarían los datos principales de aquellas tareas. Para la redacción de su obra se basó en la documentación conservada en el observatorio central de Púlkovo, compuesta principalmente por los diarios originales de todas las observaciones, por las copias de los mismos y por los extractos correspondientes.

Aunque la amplitud angular del arco del meridiano involucrado en la operación ya era de por sí considerable, Struve apuntó la posibilidad de ampliarlo  $12^\circ$  más al Sur, por medio de otra cadena triangular que finalizaría en la isla de Creta<sup>27</sup>, atravesando Turquía y las otras islas del archipiélago. Se conformaría así un arco con unos  $37^\circ$ , que indudablemente sería el de mayor amplitud que se podría medir en Europa, y que se aproximaría sobremedida al meridiano medio de su zona continental; prácticamente coincidente, por otra parte, con el materializado por el observatorio de Dorpat. No obstante se midió finalmente, como ya es sabido, el comprendido entre Fuglenaes ( $\varphi \approx 70^\circ 40'$ ) y Staro-Nekrassowka ( $\varphi \approx 45^\circ 20'$ ), es decir un arco con una amplitud angular de  $25^\circ 20'$ .

---

<sup>27</sup> Struve se refirió a ella con el antiguo nombre de Candía, derivado del latín *candidus* (blanco deslumbrante), su denominación durante la Edad Media.

La cadena geodésica resultante constó de 258 triángulos, que podrían considerarse principales, sin contarse entre ellos los de las redes de enlace con las bases, medidas para dar escala a la misma. El desarrollo del arco fue por lo tanto próximo a los 2.880 km, 388 millas geográficas, o 2.700 verstas<sup>28</sup>. La situación de Dorpat era estratégica, pues se encontraba sensiblemente en la mitad del arco: 13°3'al Sur y 12°17'al Norte. En ese sentido, y tal como pensaba Struve, el meridiano de su observatorio debería ser elegido como fundamental para todo el arco; máxime cuando su longitud geográfica fue la única que se determinó con exactitud<sup>29</sup>, en todas las estaciones astronómicas establecidas a lo largo de la triangulación, de manera que el punto de Laplace fijado en él también convenía considerarlo como el punto más relevante del arco.



Isla de Hogland: Placa identificativa de la estación astronómica (i) y monumento conmemorativo del vértice geodésico (d): Mäki-Päälys. Obsérvese que la primera va coronada por una antena GPS.

<sup>28</sup> Antigua medida lineal empleada en Rusia, equivalente a unos 1066.8 m. Siete de ellas formaban la milla rusa, con alrededor de 7.5 km.

<sup>29</sup> En el año 1854 se efectuó el enlace cronométrico entre el observatorio de Dorpat y el de Púlkovo. El responsable del mismo fue Otto von Struve. La longitud del segundo ya había sido obtenida entre 1843 y 1844, gracias a las expediciones científicas que se llevaron a cabo entre los observatorios de Altona y Greenwich. La longitud de Dorpat requirió el transporte de 31 cronómetros, con un total de cinco viajes entre uno y otro observatorio. Los desplazamientos tuvieron lugar entre el 26 de junio y el 19 de julio, contando siempre con el apoyo de dos instrumentos de pasos con igual número de aumentos. El resultado obtenido fue una diferencia de  $14^m 25^s.138 \pm 0^s.034$ , localizando Dorpat al Oeste de Púlkovo. Dado que la longitud del observatorio central se había fijado (1844) en  $2^h 1^m 18^s.674 \pm 0^s.057$ , se dedujo que la longitud del observatorio de Dorpat, con relación a Greenwich, sería de  $1^h 46^m 53^s.536 \pm 0^s.066$ . Los resultados obtenidos fueron calculados por el finlandés Leonard Lorentz Lindelöf, luego profesor de matemáticas en la universidad de Helsinki.

A pesar de que la posición de Dorpat pudiera suponer la división implícita del gran arco de meridiano, a la postre se impuso la configuración del terreno cuando se estableció el plan para los trabajos de campo. Fueron surgiendo así dos segmentos del arco, uno septentrional y otro meridional, con un punto común en la isla de Hogland, a sólo 35 km de las costas finlandesas y a unos 180 km al Oeste de San Petersburgo, la ciudad de la que depende administrativamente. De hecho los conjuntos de triángulos de los dos segmentos son bien diferentes, sólo enlazados en el referido punto<sup>30</sup>, el vértice Mäki-Päällys. Ambos se corresponden por lo tanto con la división siguiente: el arco meridional, entre los vértices Staro-Nekrassowka y el punto anterior, con una amplitud de 14°45', entre las latitudes 45°20' y 60°5'; el arco septentrional, comprendido entre el mismo punto Mäki-Päällys y Fuglenaes, con una amplitud de 10°35', justo la diferencia entre las latitudes respectivas de 60°5' y 70°40'. En el primer segmento se observaron 155 triángulos, sin contar los de las redes de enlace relativas a las seis bases medidas. El segmento septentrional fue cubierto por un total de 103 triángulos, sin tener en cuenta tampoco los de enlace con las cuatro bases medidas. Tanto estas como las anteriores figuran en el cuadro adjunto.

*Bases geodésicas en el gran arco de Wilhelm von Struve*

Segmento meridional				Segmento septentrional			
Nombre	Latitud	Altitud	Año	Nombre	Latitud	Altitud	Año
Taschbunar	45°35'	27 t	1852	Elimä	60°50'	11 t	1844
Romankautzi	48°30'	149 t	1848	Uleaborg	65°0'	1 t	1845
Staro-Konstantinow	49°42'	9 t	1838	Öfver-Tornio	66°22'	25 t	1851
Ossownitza	52°15'	14 t	1827	Alten	69°55'	2 t	1850
Ponedeli	55°58'	10 t	1820				
Simonis	59°2'	55 t	1827				

Las altitudes, sobre el nivel del mar, se expresaron en toesas (≈1.95 m)

No obstante, en la memoria presentada por Struve se contempló una división ligeramente diferente, perfectamente reflejada en los dos tomos de que consta la misma. Por un lado se distinguía el llamado arco ruso de 20°30', localizado entre las latitudes 45°20' y 65°50', esto es desde la desembocadura del Danubio, el vértice más al Sur de la triangulación geodésica, hasta Tornio. Un arco en el que se midieron 8 bases y que constó de 224 triángulos principales, a los que habría que añadir uno más que sirvió de enlace con el denominado arco escandinavo. La amplitud de ese segmento septentrional fue de tan sólo 4°50' que se correspondían con la diferencia entre las latitudes de Tornio y de Fuglenaes, respectivamente iguales a 65°50' y 70°40'. En ese segundo arco se midieron dos bases y se observaron un total de 33 triángulos principales.

El gran arco ruso sólo fue posible gracias a la colaboración permanente del Estado Mayor Imperial y de los observatorios, ya conocidos, situados en Dorpat y en Púlkovo. Para el arco escandinavo se precisó el acuerdo de científicos y oficiales suecos y noruegos; siempre asistidos por los astrónomos e instrumental del observatorio astronómico central de Rusia. Struve indi-

<sup>30</sup> Struve lo aclaraba perfectamente «sin que exista una unión completa entre el último triángulo del arco meridional con el primer triángulo del arco septentrional».

caba, a continuación, los segmentos meridianos asignados a cada uno de los máximos responsables. Al general de infantería Tenner, el más meridional, comprendido entre las latitudes  $45^{\circ}20'$  y  $56^{\circ}30'$ ; en esa cadena se midieron cinco bases y la configuraron 125 triángulos principales. El propio Struve se encargó de un segmento de  $9^{\circ}38'$ , definido por el río Duna y el vértice Kaama-Vaara, al Norte de Tornio; una amplitud que se correspondía con las latitudes respectivas de  $56^{\circ}30'$  y  $66^{\circ}8'$ ; en este caso se contó con tres bases y 100 triángulos. A Selander, miembro de la Academia de Ciencias de Estocolmo y director del observatorio real de Suecia, otro de  $3^{\circ}13'$ , diferencia de las latitudes  $65^{\circ}50'$  y  $69^{\circ}3'$ , correspondientes a Tornio y a la estación noruega de Bäljatz-Vaara (Baelljasvarri). En él se observaron 21 triángulos y se midió una base. Finalmente, se responsabilizó a Hansteen, director del Departamento Geográfico de Noruega y del observatorio de Oslo<sup>31</sup>, del arco que unía Atjik ( $\varphi \approx 68^{\circ}54'$ )<sup>32</sup> y Fuglenaes ( $\varphi \approx 70^{\circ}40'$ ), es decir con la amplitud más pequeña ( $1^{\circ}46'$ ); a sus doce triángulos principales se añadió una sola base geodésica.

El orden cronológico de las operaciones de campo: reconocimiento del terreno (anteproyecto), construcción y colocación de las señales en los vértices de la cadena triangular, medida de las bases, observación de los ángulos y la determinación de acimutes<sup>33</sup>, queda reflejado en el cuadro siguiente:

*Cronología de las operaciones geodésicas*

Arco	Latitudes	Director	Periodo
Besarabia	$45^{\circ}20'$ & $48^{\circ}45'$	Tenner	1844-1852
Podolia & Volinia	$48^{\circ}45'$ & $52^{\circ}3'$	Tenner	1835-1840
Lituania	$52^{\circ}3'$ & $56^{\circ}30'$	Tenner	1816-1828
Provincias Bálticas	$56^{\circ}30'$ & $60^{\circ}5'$	Struve	1816-1831
Finlandia	$60^{\circ}5'$ & $65^{\circ}50'$	Struve	1830-1851
Laponia	$65^{\circ}50'$ & $68^{\circ}54'$	Selander	1845-1852
Finmarken	$68^{\circ}54'$ & $70^{\circ}40'$	Hansteen	1845-1850

Struve incluyó otra posible subdivisión del arco geodésico, un tanto forzada, derivada de la ubicación de las 13 estaciones astronómicas, considerando que la amplitud de cada porción fuese idéntica a la diferencia entre las latitudes de dos consecutivas; el nombre de cada uno de ellos coincidió con el de la estación tomada como origen, las amplitudes extremas que resultaron fueron de  $1^{\circ}22'$  (Ssuprunkowzi & Kremenetz) y de  $2^{\circ}54'$  (Kilpi-Mäki & Tornio).

Aborda luego Struve el capítulo de la señalización, dedicándole una atención especial por fijar con ella el centro de cada una de las estaciones trigonométricas, los vértices de la triangulación, los extremos de las bases geodésicas y la materialización de todos los puntos de Laplace.

<sup>31</sup> Entre los años 1624 y 1878 fue conocida esa ciudad con el nombre de Christiania, y así la citaba W. von Struve en su Memoria.

<sup>32</sup> Localizado en la isla Kval-oe, del mar Báltico.

<sup>33</sup> Las observaciones astronómicas para la determinación de la latitud quedaron excluidas de esta relación por deseo expreso de Struve, ya que se repitieron en fechas posteriores.

Por supuesto que se tuvo en cuenta la necesidad de hacerla de modo que resultase asegurada la permanencia de la señal y su replanteo, cuando fuese necesario. En la descripción de las señales usadas por Tenner, en sus tres arcos, es común una especie de pirámide de piedras culminada por un bloque vertical, siendo el centro de la estación la intersección de las diagonales en su cara superior. Ello no evitó que en numerosas ocasiones se recurriera a la construcción de plataformas envolventes para poder realizar la observación, cuya altura llegó a ser de 40 m. En cambio, en los vértices del arco báltico se construyeron señales con una solidez que aseguró su permanencia durante todo el tiempo que necesitaban las observaciones de campo. En Finlandia se materializaron con pernos metálicos encastrados en la roca nativa. Los vértices noruegos se marcaron sobre las rocas, generalmente inaccesibles, con lo que también se garantizaba su conservación.

Mención aparte merecían, en el relato de Struve, los extremos de las bases geodésicas, puesto que su posible recuperación en el futuro próximo debería quedar completamente asegurada. Por lo que se refiere a las estaciones astronómicas, se decidió que los dos extremos del arco tendrían que tener una especial importancia, de ahí que se elevasen en los mismos columnas monumentales en recuerdo de tan relevante operación científica. La más meridional, erigida en Staro-Nekrassowka, a orillas del Danubio, fue una pirámide truncada de hierro fundido elevada sobre un cubo con poco más de 2 m de lado. En dos de las caras de la pirámide se grabaron dos inscripciones con un mismo texto, en latín y ruso, destacando la amplitud total del arco, los nombres de los soberanos que patrocinaron su medida y la latitud del lugar ( $45^{\circ}20'2''{.}8$ ). La estación astronómica más septentrional, levantada en Fuglenaes, fue costeada por el gobierno noruego. Se trata de una grandiosa y elegante columna, sensiblemente cilíndrica, de granito rojo, coronada por un capitel de bronce y un gran globo terráqueo de cobre. La columna tiene también dos leyendas análogas a las anteriores, una en latín y otra en noruego, modificando obviamente el valor de la latitud ( $70^{\circ}40'11''{.}3$ ).

La crónica de las campañas, propiamente dicha, la encabezó W. von Struve con una interesante digresión histórica que no ha sido muy divulgada entre los historiadores de la geografía astronómica. Coincidiendo con la controversia científica sobre la forma de la Tierra, que marcó el siglo XVIII, siempre presente en la Academia de París, el primer astrónomo de la Academia de San Petersburgo, J. N. Delisle, propuso medir un gran arco del meridiano definido por dicha capital<sup>34</sup>, cuya amplitud podría ser mayor de  $22^{\circ}$ . Contando con el beneplácito de la emperatriz midió el año 1737 una base de 14.4 km con perchas de madera. Dos años después la enlazó con algunos vértices de su entorno, pero eso fue todo lo que hizo. Su proyecto cayó en el olvido y nunca se volvió a mencionar ni la medida de la base ni la de los ángulos observados, hasta que fue descubierto el manuscrito, ya referido en los archivos del Observatorio de París, curiosamente por el hijo mayor de W. von Struve. Como el descubrimiento se produjo en el año 1844, es evidente que semejante proyecto nada pudo influir sobre el que se inició en los primeros años de ese mismo siglo.

Struve trajo también a colación otro intento de medir un arco de meridiano en Rusia, protagonizado por August Bernard von Lindenau<sup>35</sup>, director del observatorio alemán de Seeberg (Gotha).

---

<sup>34</sup> En la propia Academia leyó, el 21 de enero del año 1737, el discurso *Projet de la mesure de la Terre en Russie*.

<sup>35</sup> Fueron muy conocidos sus cálculos de las efemérides de Mercurio, Venus y Marte, así como los valores que publicó de las constantes de aberración y nutación. También contribuyó a fomentar el estudio de la historia de la astronomía.

Terminus australis  
Arcus meridiani 25° 20'  
quem  
inde a fluvio Danubio  
ad Oceanum Arcticum usque  
per  
Rossiam, Sveciam et Norvegiam  
jussu et auspiciis  
Imperatorum Augustissimorum  
ALEXANDRI I  
et  
NICOLAI I  
atque  
Regis Augustissimi  
OSCARIS I  
annis MDCCCXVI ad MDCCCLII  
continuo labore  
emensi sunt  
Trium gentium geometrae.  
Latitudo: 45° 20' 2"8.

Южный предѣлъ  
дуги меридіана 25° 20'  
отъ рѣки Дуная  
до  
Океана Ледовитаго  
черезъ  
Россію, Швецію и Норвегію.  
По повелѣнію  
Августѣйшихъ Монарховъ  
Императоровъ  
АЛЕКСАНДРА I-го  
НИКОЛАЯ I-го  
и  
Короля  
ОСКАРА I-го  
постоянно трудась  
съ MDCCCXVI-го по MDCCCLII-й годъ  
измѣрили  
Геометры трехъ народовъ.  
Широта: 45° 20' 2"8.

Leyendas latina y rusa en el vértice Staro-Nekrassowka, el más meridional del arco de meridiano comprendido entre el Danubio y el mar Glacial.



Monumento levantado en Staro-Nekrassowka.



Columna meridiana levantada en Fuglenaes, el extremo más septentrional del gran arco geodésico de Wilhelm von Struve.

Terminus septentrionalis  
Arcus meridiani 25° 20'  
quem  
inde ab Oceano Arctico  
ad fluvium Danubium usque  
per  
Norvegiam, Sueciam et Rossiam  
jussu et auspiciis  
Regis Augustissimi  
OSCARIS I  
et Imperatorum Augustissimorum  
ALEXANDRI I  
atque  
NICOLAI I  
annis MDCCCXVI ad MDCCCLII  
continuo labore  
emeasi sunt  
Trium gentium geometrae.  
Latitudo : 70° 40' 41",3.

Det nordlige Endepunct  
af en Meridianbue paa 25° 20'  
fra det nordlige Ocean til Donau-Floden  
igjennem  
Norge, Sverige og Rusland  
efter Foranstaltning af  
Hans Majestaet Kong  
OSKAR I  
og Keiserne  
ALEXANDER I  
og  
NICOLAI I  
ved uufbrodt Arbeide  
fra MDCCCXVI til MDCCCLII  
udmaalt af  
de tre Nationers Geometrer.  
Brede : 70° 40' 41",3.

Leyendas latina y noruega en el vértice Fuglenaes.

Este nuevo proyecto tampoco llegó a materializarse, aunque su propuesta al príncipe Wolkonsky, Jefe del Estado Mayor Imperial, fuera aceptada en un principio. Con su medida de un arco muy septentrional, en las orillas del mar Blanco<sup>36</sup>, pretendía aclarar definitivamente las dudas surgidas por los resultados tan dispares obtenidos en el arco de Laponia, primero por P. Maupertuis (1736) y luego por Jön Svanberg (1805). Lindenau pretendía participar y dirigir todas las operaciones sobre el terreno. Todo parecía propicio, cuando surgió un inconveniente que resultó insoslayable; el príncipe pretendía que se empleasen instrumentos construidos en San Petersburgo y el astrónomo sólo estaba dispuesto a usar los que había fabricado Reichenbach. Al no lograr ponerse de acuerdo, se abandonó el proyecto sin que llegase a hacerse público. El mismo Struve confesaba que fue Lindenau quien le comentó lo sucedido, en 1820, cuando pasaba por Gotha, camino de Munich, para encargar a Reichenbach el círculo meridiano y los instrumentos portátiles destinados a la medida del arco en las provincias bálticas.

Para facilitar el relato de todas las operaciones, Struve lo estructuró en cuatro periodos bien establecidos. El primero abarcó los trabajos preliminares y las mediciones dirigidas por él y Tenner, con una amplitud de 8°2', sobre los arcos de meridiano en Lituania y en las provincias bálticas; requiriéndose el tiempo transcurrido entre el año 1816 y el año 1831. El segundo se referiría a la continuación de las tareas anteriores, entre 1830 y 1844, prolongando septentrionalmente el arco hasta los 65°50' de Tornio e iniciando los preparativos para hacer lo propio hacia el Sur, para alcanzar el río Dniéster. En el tercero, centrado en el intervalo comprendido entre 1844 y el final de 1851, se comentaron los trabajos que fueron necesarios para llegar al Danubio, por el extremo meridional, y al mar de Noruega por el Norte. En el último tramo se expusieron las campañas posteriores a 1851, cuyo objetivo fundamental fue tratar de homogeneizar y perfeccio-



August Bernard von Lindenau (izquierda) y Georg Friedrich von Reichenbach (derecha).

---

<sup>36</sup> Extenso golfo del mar de Barents, en el Océano Glacial Ártico.

nar los resultados esperados, para contribuir con mayor peso a la determinación de la figura de la Tierra. Struve aseguraba en su Memoria que, en realidad, ese último periodo aún no se debería dar por concluido, pues convenía esperar a recibir los datos proporcionados por la Academia de Estocolmo, referentes a las operaciones suecas, en las que, aparte de cooperar en la triangulación geodésica del meridiano, se efectuó una relevante nivelación trigonométrica entre el golfo de Botnia y el mar de Noruega.

### La medida del arco de meridiano en Livonia<sup>37</sup> y Lituania (1816-1831)

Struve confesaba que cuando Lindenau formuló su propuesta en 1814, ya había en Rusia esa inquietud científica. Tanto él como Tenner presentaron independientemente sus proyectos de medida en Lituania y en Livonia, los cuales se iniciaron sin que ninguno de los dos estuviese al tanto de las intenciones del otro. Struve explicó pormenorizadamente como en 1812, siendo aún estudiante en la Universidad de Dorpat, le llamó la atención el hecho de que entre el Danubio y Laponia existiera un territorio inmenso, con una amplitud de 20°, a lo largo del meridiano de esa ciudad, sin elevaciones considerables sobre el nivel del mar. De esa forma las posibles desviaciones de la vertical inducidas por las montañas se reducirían al mínimo, con lo que se podría proyectar la correspondiente cadena de triángulos bien conformados a lo largo del referido meridiano.

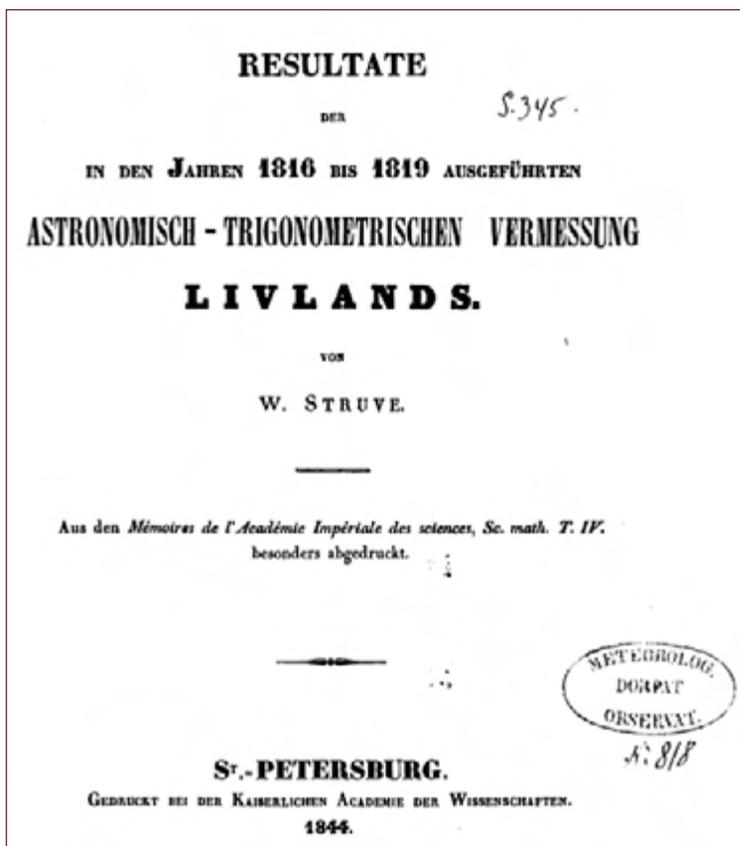
Como por otro lado era sabida la urgencia de un mapa fiable del país, que obligatoriamente tendría que apoyarse en una triangulación previa, Struve decidió realizar por su cuenta un estudio previo sobre el terreno, en el mes de junio de ese mismo año 1812. En su transcurso midió una pequeña base con perchas de madera e incluso los ángulos de unos cuantos triángulos que proyectó sobre la marcha, eligiendo como vértices algunos campanarios, cerros o árboles aislados; el instrumento empleado fue un sextante fabricado por Edward Troughton. Aunque los resultados de aquellas observaciones expeditas carecieran de rigor geométrico, si le valieron para asegurar la viabilidad de un proyecto de mayor envergadura. Su trabajo trascendió a la opinión pública, como refleja el encargo que recibió en 1813, siendo ya profesor extraordinario de la Universidad de Dorpat, de parte de la Sociedad Económica y de Utilidad Pública de Livonia.

El fin último que se pretendía era contar con un soporte cartográfico adecuado para el desarrollo de sus principales actividades políticas y económicas, siendo ese por tanto el origen de la primera triangulación geodésica con que se cubrieron todos aquellos territorios, consiguiendo finalmente la publicación del Mapa General de Livonia<sup>38</sup>. Los trabajos de campo se realizaron en el periodo 1816-1818, comprendiendo la triangulación, la medida de bases y las observaciones astronómicas (acimutes y latitudes) para calcular la posición de 18 puntos situados al borde del mar; gracias a ellos se pudieron localizar además 325 vértices y obtener 280 altitudes sobre el nivel del mar Báltico<sup>39</sup>. Struve era consciente de la poca fiabilidad del sextante cuando se usaba

<sup>37</sup> Livonia perteneció al antiguo imperio ruso desde el año 1721 hasta el final de la primera guerra mundial en 1918, siendo después dividida en dos estados independientes: Estonia y Letonia.

<sup>38</sup> El mapa se publicó en el año 1839 con el título *Spezialkarte von Livland in 6 Blättern ... Nach Struve's astr-trig. Vermessung und den vollständigen Specialmessungezeichnet von C. G. Rücker*, 1839.

<sup>39</sup> Muchos años después, en 1844, Struve presentó la memoria correspondiente en la Academia de San Petersburgo, titulándola *Resultate der in den Jahren 1816 bis 1819 ausgeführten Astronomisch-Trigonometrischen Vermessung Livlands*.



Portada del libro sobre la triangulación de Livonia, efectuada por Struve entre 1816 y 1819.

para medir ángulos horizontales, a pesar de haber analizado con atención los errores en la división de su limbo. Análoga limitación presentaba el sector que mandó construir en Dorpat para la medida de los ángulos verticales, con incertidumbres del orden de los  $10^\circ$ . No obstante insistía en que su trabajo se podría comparar con los que se realizaron en Laponia y Perú, poniendo a disposición de los estudiosos un arco de  $2^\circ 30'$ , comprendido entre la iglesia de Santa María Magdalena en Estonia, con una latitud de  $58^\circ 58'$ , y la torre del castillo de Krentzburg en Lituania, a  $56^\circ 28'$  de latitud.

Aún no había finalizado sus trabajos cuando propuso a la misma Sociedad rehacer las observaciones angulares para lograr mejores resultados, aunque optara luego por suspender la nueva operación. Esa primera incursión de Struve en el campo de la geodesia no resultó baldía, aunque no aportase nada nuevo al conocimiento del tamaño y figura de la Tierra, pues permitió aprovechar muchos de sus vértices para campañas posteriores. Por otro lado, los resultados alcanzados no fueron en absoluto disparatados, a tenor de las propias palabras del responsable de los mismos: «la exactitud de la triangulación de 1816 a 1819 fue avalada después de forma inesperada». La distancia entre los dos extremos fue de 140160.6 toesas, cuando con la nueva medida del arco de meridiano resultaron 140162.6 toesas. Asimismo, con la primera operación se había obtenido para el Observatorio de Dorpat una altitud de 34.76 toesas sobre el nivel medio del mar Báltico, resultando 34.98 con la segunda.

En el año 1819, concluidos los levantamientos topográficos para poder formar el mapa de Livonia, recomendó a la Universidad aprovechar los vértices próximos al meridiano del observa-

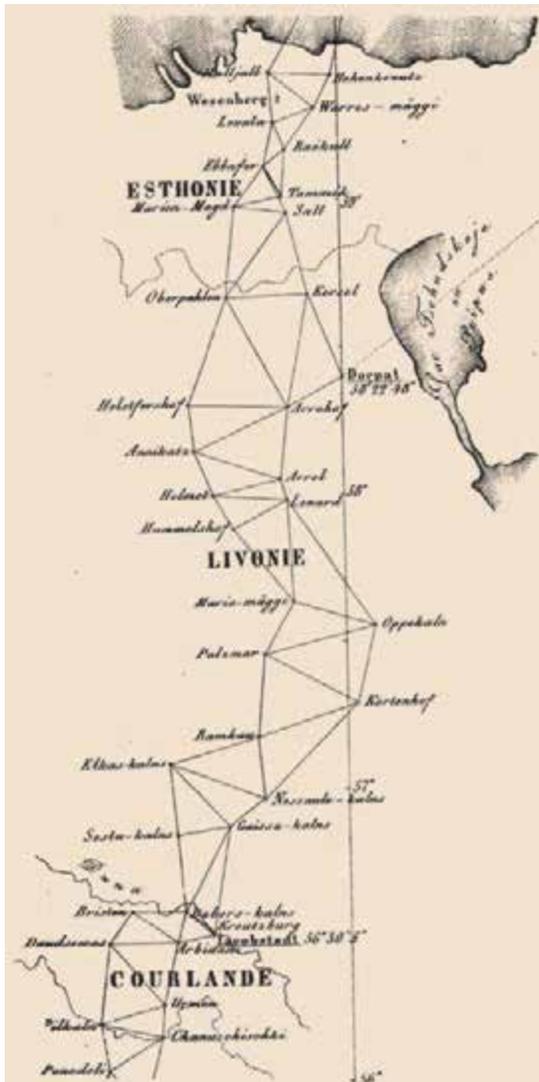
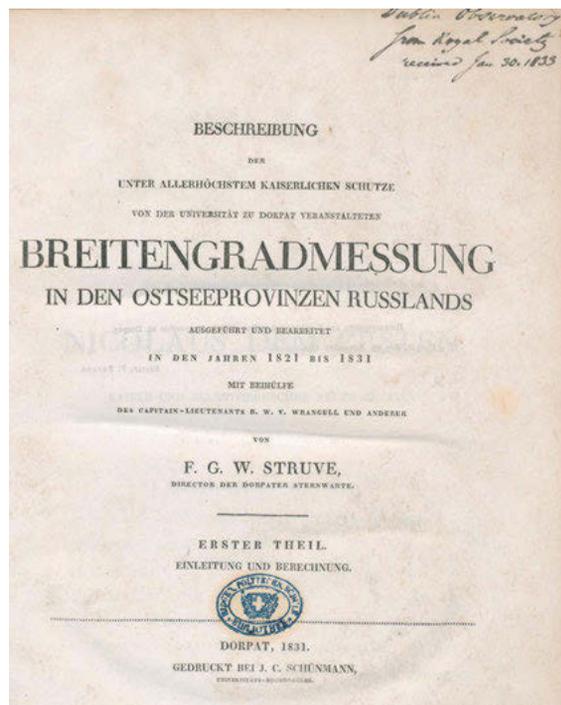
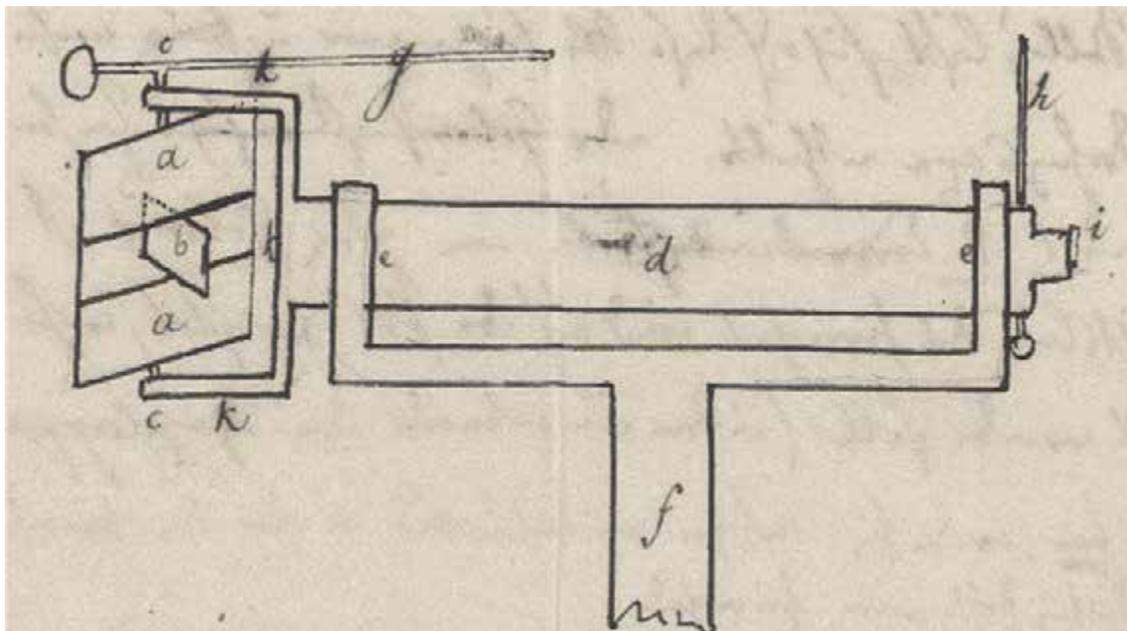


Gráfico de la triangulación efectuada por Struve. El dibujo se realizó de acuerdo con sus propias indicaciones. Obsérvese el papel central jugado por el meridiano del Observatorio Astronómico de Dorpat. La línea discontinua unía este observatorio con el de Púlkovo.

Descripción de la medición de latitudes de las provincias bálticas de Rusia.





Esquema del heliometro de Gauss, enviado por este a Wilhelm von Struve en una carta fechada el 21 de diciembre de 1821. Fuente: *SUB Göttingen, Gauss-Nachlass*. La imagen ilustra el artículo de Karin Reich y Elena Rousanova, titulado *Gauss' Correspondents in the Baltics* (*Baltic Journal of European Studies*. Vol. 1, núm. 1-9).

torio de Dorpat, con objeto de medir un arco de  $3^{\circ}35'$  cuyos extremos se situarían en la isla de Hogland y en la ciudad finlandesa de Jakobstad. Una vez aceptada la sugerencia de Struve, la Universidad pidió la aprobación de su protector, el príncipe K. A. Lieven. Su intervención ante el emperador Alejandro I logró que este sufragase la compra, en Munich, de los instrumentos científicos que requería la operación, corriendo la universidad con los otros gastos derivados del proyecto. Los trabajos de campo finalizaron en el año 1831, gracias a la participación del Barón W. de Wrangel, colaborador activo de Struve, el cual sería años después director de los faros del Báltico. En ese mismo año, Struve publicó en Dorpat una memoria detallada de toda la campaña, en dos tomos: *Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands*<sup>40</sup>, *ausgeführt und bearbeitet von F. G. W. Struve*.

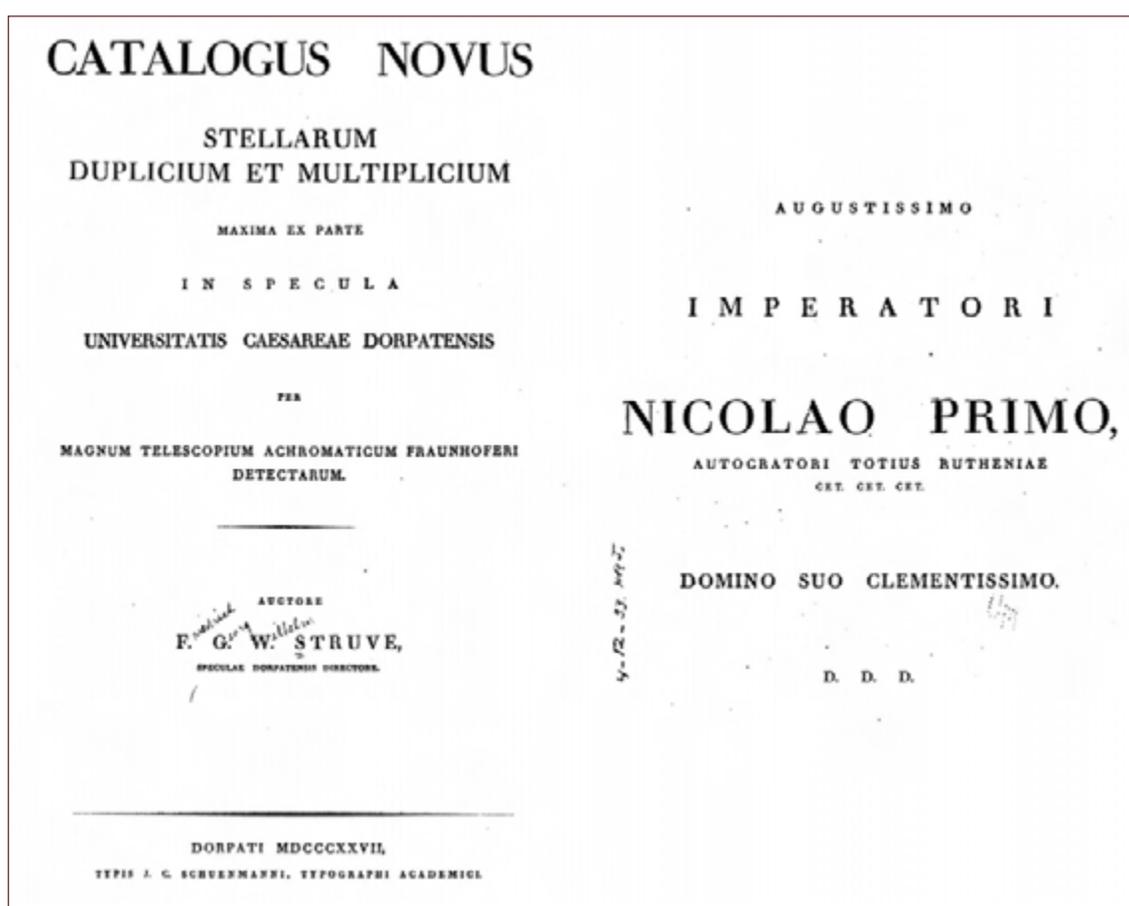
El primer volumen describe los estudios y actuaciones preliminares del proyecto. Su interés histórico es manifiesto y nada mejor que transcribir íntegramente el párrafo que le dedicó Struve:

*«los preparativos me ocuparon durante los años 1820 y 1821. En el año 1820 emprendí un viaje al extranjero. Tuve ocasión de asistir, con Gauss<sup>41</sup> y otros sabios,*

<sup>40</sup> Descripción de la medición de latitudes de las provincias bálticas de Rusia.

<sup>41</sup> Struve mantuvo con Gauss un fructífero intercambio científico, conservándose 22 de las cartas escritas por ambos entre 1815 y 1847. De entre todas ellas me he permitido rescatar una del 21 de diciembre de 1821, en la que Gauss le explicaba a Struve el fundamento de su heliometro (croquis incluido), un instrumento especialmente útil para materializar visuales de varias decenas de kilómetros y para poder calcular la distancia correspondiente, dos posibilidades impensables con la metodología tradicional. En la respuesta de Struve, en septiembre de 1822, le mostraba su fascinación por el invento y su intención de usarlo inmediatamente en sus próximos levantamientos. Gracias a la intervención de Gauss, Struve fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias de Göttingen.

a la medida de la base que Schumacher<sup>42</sup> hizo cerca de Braack con su nuevo aparato construido por Repsold padre; base que sirvió después como línea de partida para las medidas de grado, realizadas en los reinos danés y de Hannover. En Munich, adquirí el aparato principal para nuestras operaciones geodésicas: el instrumento universal de Reichenbach y encargué un círculo vertical de 18 pulgadas, destinado a la determinación de latitudes, además de un teodolito astronómico. El instrumento universal de Reichenbach nos llegó en junio de 1821. Sin embargo no pudieron comenzarse las medidas angulares, pues todavía no se habían construido señales sólidas y de forma precisa con las que identificar los vértices de Livonia; faltaban también por concretar las propias de la cadena triangular entre los puntos más septentrionales de esa región y la isla de Hogland, para completar de ese modo una amplitud latitudinal de 3°35'. Los trabajos en el observatorio impidieron que me alejara de Dorpat antes del mes de



Portada y dedicatoria del Catálogo estelar confeccionado por Wilhelm von Struve (1827).

<sup>42</sup> La medida de la base fue una operación muy costosa que financió el rey de Dinamarca Frederik VI. Heinrich Christian Schumacher fue un astrónomo germano danés que colaboró con Gauss en otras ocasiones, destacando la intersección inversa que realizaron ambos en la ciudad de Copenhague. Remito al lector interesado a la obra Investigaciones sobre *Temas de Geodesia Superior y Método de los Mínimos Cuadrados* (Instituto Geográfico Nacional, 2002), pues entre sus páginas 225 y 236 se detallan los cálculos efectuados por Gauss (*Aplicación del Cálculo de Probabilidades a un problema de Geometría Práctica*).

agosto, aunque decidiera unirme de inmediato al reconocimiento de las estaciones, hasta llegar a una señal de referencia en Hogland, y al estudio para poder salvar el golfo de Finlandia con la triangulación; a la vez que se analizaba la posibilidad de prolongar septentrionalmente el arco de meridiano a través de su territorio, una continuación que contemplaba como un objetivo especialmente interesante. En fin, en 1822, inicié los trabajos de campo que finalicé en 1827.»

Struve justificaba la excesiva duración de sus trabajos por la imperiosa necesidad de cumplir el protocolo del Observatorio de Dorpat<sup>43</sup>, con sus tareas docentes en la Universidad y con el curso de geodesia ineludible, dado entre 1826 y 1827, a los Oficiales de Estado Mayor y de la Marina Imperial. En 1826 se efectuaron las observaciones astronómicas en los puntos extremos del arco: Jacobstadt y Hogland<sup>44</sup>. En el año 1827 se concluyeron las observaciones angulares de los triángulos principales, se midió la base y Struve efectuó la correspondiente red de enlace. Como trabajo suplementario, se completaron las observaciones astronómicas en Dorpat, usando los mismos instrumentos de los que se habían valido en tales extremos. La ampliación de la base, hasta llegar a la cadena triangular, fue una verdadera odisea, a tenor de lo referido por Struve, el cual la calificó de verdadera campaña de invierno, con un frío extraordinario<sup>45</sup> (por debajo de los  $-16\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) y con abundantes nevadas, que sorprendieron a los operadores en la primera quincena del mes de octubre. No obstante, se terminaron las medidas el 10 de noviembre. Desde los alrededores de la Simonis (actual Simona) regresaron a Dorpat, invirtiendo cuatro días en el trayecto a bordo de trineos; transportando a la vez los instrumentos de observación y el aparato para medir la base<sup>46</sup>.

Se inicia después el comentario acerca de las campañas emprendidas por Tenner, quien a partir del año 1816 fue nombrado responsable del levantamiento trigonométrico (geodésico) y topográfico de varias provincias Vilna (1816), Curlandia (1822), Grodno y Minsk (1825). El entonces coronel decidió usar los triángulos situados en la prolongación del meridiano del observatorio de Vilna (Vilnius) para medir uno de sus arcos. Contando con la aprobación del príncipe Wolkonsky, Jefe del Estado Mayor, acometió su proyecto, observando una serie de triángulos y midiendo dos bases, entre Bristen (Curlandia) y Belin (Grodno). Los instrumentos empleados fueron círculos repetidores de Troughton y de Baumann. La amplitud angular del arco la evaluó, aplicando el método de Bessel, y observando los pasos por el primer vertical de una serie de

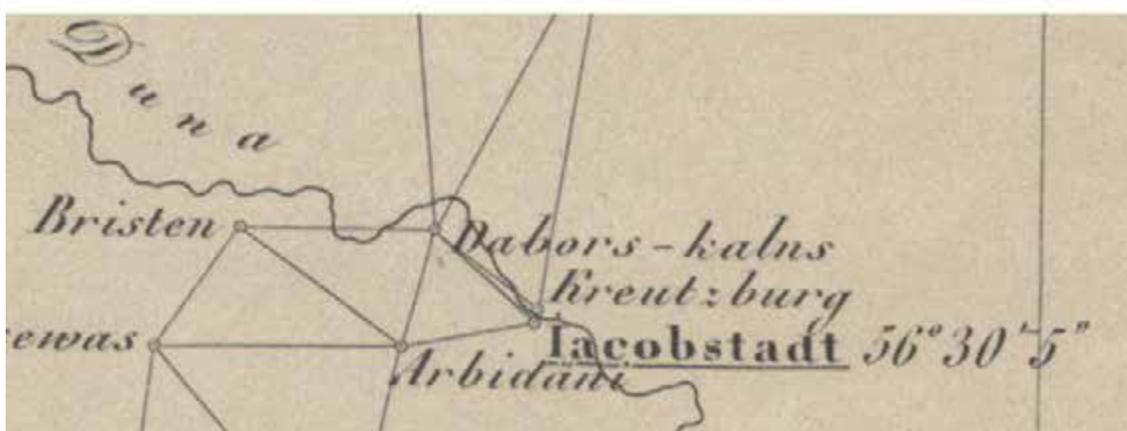
---

<sup>43</sup> Así se expresaba Struve: «En 1822 llegó a Dorpat el círculo meridiano de Reichenbach, en 1824 el gran antejo paraláctico de Fraunhofer, encargado cuatro años atrás. Como el uso de los instrumentos era para mí prioritario, solo podía dedicar a las tareas geodésicas las pocas semanas libres que dejaba el Observatorio, sin perjudicar su programa de observaciones. Me parece obligado señalar aquí que, durante el periodo de 1821 a 1827, que duraron los trabajos de campo en el arco del Báltico, he realizado, sin ayuda alguna, las observaciones meridianas calculadas y publicadas, de 1822 a 1828, en los volúmenes III, IV, V y VI de los Anales del Observatorio de Dorpat, y que he logrado al mismo tiempo la revisión del cielo que se recogió en el *Catalogus novus stellarum duplicium*, publicado en 1827»

<sup>44</sup> En estas colaboró el astrónomo ruso Magnus Georg von Paucker, profesor en Jelgava, con un círculo vertical de Ertel, también de 18 pulgadas de radio, que se acababa de recibir en su observatorio y con el que hicieron las observaciones necesarias para calcular las latitudes en las referidas estaciones astronómicas.

<sup>45</sup> Struve citaba la temperatura de  $-13\text{ }^{\circ}\text{R}$ . Estaba utilizando por tanto la antigua escala térmica que propuso en 1731 el francés René A. Ferchault de Réaumur. En ella se congelaba el agua a los  $0\text{ }^{\circ}\text{R}$  y alcanzaba su punto de ebullición a los  $80\text{ }^{\circ}\text{R}$ , es decir que su relación con la propuesta por el sueco Anders Celsius, en 1742, era  $1\text{ }^{\circ}\text{C} = 1.25\text{ }^{\circ}\text{R}$

<sup>46</sup> En los dos años siguientes, 1828 y 1830, Struve permaneció en el observatorio, continuando con sus observaciones astronómicas y dando por terminada la contrastación metrológica del referido aparato.



El lado formado por los vértices Dabors-kalns y Kreuzburg, extremo meridional del arco medido por W. von Struve. Kreuzburg es el nombre alemán de la ciudad polaca de Kluczbork. En la imagen aparece su famosa cisterna (Torre del agua).



Observatorio universitario de Vilnius. Detalle de sus cúpulas y del friso con los signos del zodiaco.

estrellas, alcanzando un valor de  $4^{\circ}32'$ . Sus trabajos finalizaron en 1827, es decir el mismo año en que los terminó Struve en las provincias bálticas.

Dado que el extremo más septentrional del arco de Lituania (Bristen) no estaba demasiado alejado del más meridional en el arco báltico, a tan sólo  $4'47''$ , parecía natural el enlace geodésico entre ambos; en enero de 1828 se celebró en Dorpat una reunión, entre Struve y Tenner, a tal efecto. El acuerdo fue inmediato:

- a) Se compararían en primer lugar las reglas con que se habían medido las bases.
- b) Se enlazarían las dos triangulaciones.
- c) Se efectuarían las observaciones astronómicas pertinentes para confirmar la amplitud total del arco de meridiano.

Tenner controló metrológicamente el aparato, con el que había medido sus bases, con una escala metálica provista de doble graduación: una de siete pies ingleses y otra de una toesa, permitiendo así hallar, con probada exactitud, la relación entre las dos unidades. Posteriormente, en 1829, Struve comparó en Dorpat la toesa anterior con la de Fortin<sup>47</sup>, que él había empleado para contrastar la bondad de la regla con las que había medido las suyas.

---

<sup>47</sup> Jean Nicolas Fortin fue un reconocido fabricante de instrumentos científicos. Aunque pasara a la posteridad por su celebrado barómetro, construyó otros tan singulares como una balanza de precisión para Lavoisier o la propia toesa usada por Struve, que ya se había comparado en 1821 con la de Perú (referencia de longitud en Francia desde 1776).

Para calcular la amplitud astronómica del arco, observó Tenner en Belin (1827), con un instrumento Repsold de 5.5 pies, el paso por el primer vertical<sup>48</sup> de numerosas estrellas. Como 41 de ellas fueron observadas en Dorpat (1828) con un instrumento Dollond, también a su paso por idéntico plano, pudo hallarse la diferencia de latitudes entre ambas estaciones. Tener se ocupó además del enlace geodésico entre las dos cadenas triangulares, si bien lo encargó a su colaborador Joseph Chodzko<sup>49</sup>, el cual midió, con un teodolito Reichenbach, los ángulos en los 10 vértices situados al Norte de la base de Ponedeli, de los que cuatro pertenecían simultáneamente al tramo más meridional del arco báltico. Tal como aclaraba Struve, se trataba de comprobar la identidad de los triángulos comunes, tanto en los valores de sus ángulos como en las longitudes de los cinco lados que pertenecían simultáneamente a las dos cadenas. Para el cálculo de tales elementos geométricos, se partió de dos bases: Ponedeli y Simonis, estando la primera al Sur y la segunda al Norte de los triángulos de enlace.



El general polaco Joseph Chodzko.

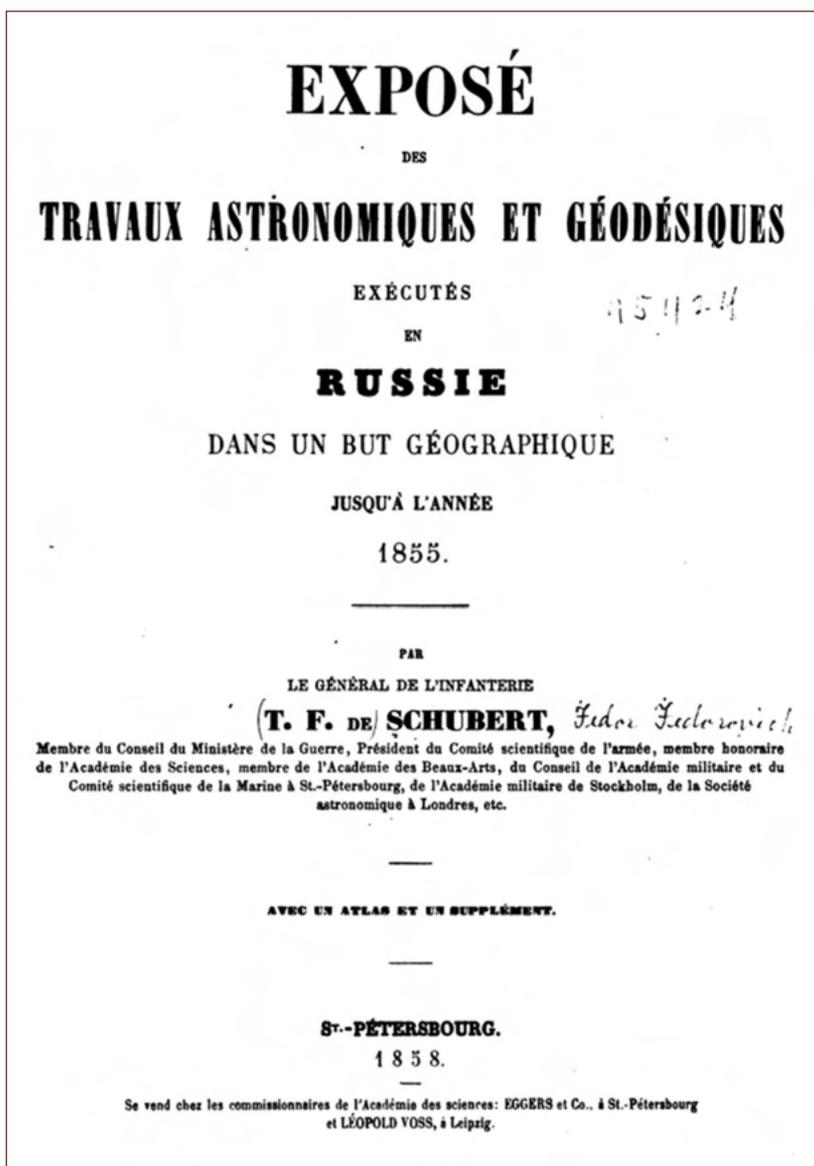
En la memoria de Struve se incluye una referencia científica de primer orden, que conviene recordar. Para efectuar el enlace entre las dos triangulaciones con el mayor rigor, se nombraron dos comisarios: por una parte el general ruso Fedor Fedorovich Schubert, Director del Depósito Topográfico, y por otra Bessel, el gran astrónomo de Königsberg (hoy Kaliningrado). Para que el examen fuese más imparcial se procuró que las conclusiones de ambos fuesen completamente independientes «sin que ninguno tuviese el menor conocimiento del dictamen de su colega». Struve les remitió sus resultados a finales de 1829 y Tenner lo hizo dos años después. Ambos comisarios dedujeron, por separado, un acuerdo total en todos sus detalles: ángulos, lados y altitudes sobre el nivel del mar Báltico; recibiendo los responsables las felicitaciones de los dos comisarios. Struve aportó otra información igualmente relevante, a saber: en 1835 tuvo lugar otro enlace entre la triangulación de la provincia de Curlandia, dirigida por Tenner, con la cadena geodésica establecida a lo largo del arco de meridiano de  $1^{\circ}30'$ , comprendido entre las ciudades prusianas de Memel y Trunz. Este arco fue medido precisamente por Bessel, aunque contase con la ayuda del entonces coronel Baeyer, luego general y responsable de los trabajos trigonométricos de las provincias renanas. El acuerdo entre ambas operaciones geodésicas fue también satisfactorio.

Otras uniones similares y rigurosas se produjeron entre la triangulación dirigida por el general Schubert en los gobiernos de San Petersburgo, Pskov y a lo largo del Golfo de Finlandia,

<sup>48</sup> En ese instante el triángulo de posición es rectángulo en el cenit, con lo que la relación entre la latitud, la declinación y la distancia cenital se facilita:  $\sin \varphi = \text{sen} \delta / \cos \zeta$ . Evidentemente se corregirían los resultados obtenidos por los efectos de la refracción sobre la última coordenada.

<sup>49</sup> Este topógrafo, geógrafo y general polaco fue el responsable de la triangulación general de Transcaucasia (Cáucaso Sur), fundamental para el mapa topográfico de aquella región.

con la extendida sobre el arco de meridiano que discurría por las provincias bálticas; algo análogo sucedió con los enlaces entre los diferentes ramales de los levantamientos trigonométricos del Estado Mayor Imperial. Los últimos comentarios tan complacientes de Struve, se refirieron a los grandes trabajos geodésicos de Tenner en el reino de Polonia, los cuales posibilitaron un enlace fiable entre las operaciones rusas y las de Europa occidental. Uno de ellos, realizado en los alrededores de Cracovia, a 53°3' de latitud, las unió con los triángulos austriacos; otros dos, cercanos a Tarnowskie Góry (Polonia), a 50°34' de latitud, y a Toruń, con 53°1' de latitud, enlazaron con los triángulos prusianos<sup>50</sup>. El trabajo con la unión de estos dos arcos, de Struve y Tenner, fue publicado por la Academia de Ciencias de San Petersburgo (1832) y en los Anales del Depósito Topográfico, adonde fueron enviados por el general. Con ella se concluyeron las tareas de



Memoria presentada por el general Schubert a la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

<sup>50</sup> En realidad Struve se refería a esas dos últimas ciudades con los nombres alemanes: Tarnowitz, la primera, y Thorn, la segunda.

este primer periodo, durante el que se midió un segmento de  $8^{\circ}2'.5$  del arco de meridiano ruso, núcleo en torno al cual se acoplaron los que se fueron triangulando en las campañas posteriores. En ello pusieron todo su empeño esos dos grandes geodestas, para los que la importancia de prolongarlo, al triple de su amplitud original, focalizó gran parte de su actividad profesional.

### Las campañas entre los años 1830 y 1844

Estando tan interesado en ampliar el arco de meridiano que habían triangulado, es normal que procedieran a ello con cierta urgencia. Dos fueron además las razones que contribuyeron a la pronta intervención de Struve y a su propuesta para llegar rápidamente con la cadena geodésica hasta Tornio, teniendo que atravesar Finlandia. La primera era más de índole teórica que práctica, en tanto que los arcos boreales no habían intervenido apenas en los estudios realizados por Bessel para cuantificar los parámetros geométricos del elipsoide terrestre, cuando su aportación podía ser decisiva para fijar mejor el aplastamiento polar. La segunda en cambio fue eminentemente práctica, pues las medidas que se habían realizado en Laponia diferían sustancialmente en el valor asignado al desarrollo de un grado de meridiano<sup>51</sup>. Como no se determinaron las latitudes astronómicas en los extremos del arco, Struve explicó la situación asociándola a importantes desviaciones locales de la vertical o a errores importantes en las magnitudes asignadas a las cuatro latitudes que se habían determinado, los cuales consideraba indefectiblemente ligados a las limitaciones propias de los instrumentos empleados en aquella ocasión.

Struve revela que fue en el año 1830 cuando le propuso al Ministro de Instrucción Pública el proyecto de prolongación, el cual fue inmediatamente aprobado por el zar Nicolás I, con el compromiso de contribuir durante diez años consecutivos con una suma anual de 3.000 rublos de plata para sufragar los gastos relacionados con la ejecución de tales trabajos. También concretó Struve los nombres de sus tres primeros colaboradores: Rosenius<sup>52</sup>, Oberg y Melan, tres finlandeses, Oficiales de Estado Mayor, que habían hecho un curso completo de astronomía práctica en el observatorio de Dorpat. Los primeros reconocimientos del terreno comenzaron en el mismo verano de 1830, construyéndose a la vez las señales de todos los vértices hasta Kaiam, con una latitud de  $64^{\circ}13'$ . Oberg y Melan empezaron a medir los ángulos de los triángulos en 1832, y así continuaron hasta que el Estado Mayor les asignó otros servicios en 1835. Struve recurrió entonces a un discípulo de Argelander, llamado F. Woldstedt, entonces astrónomo adjunto del observatorio de Helsinki y luego director del mismo.

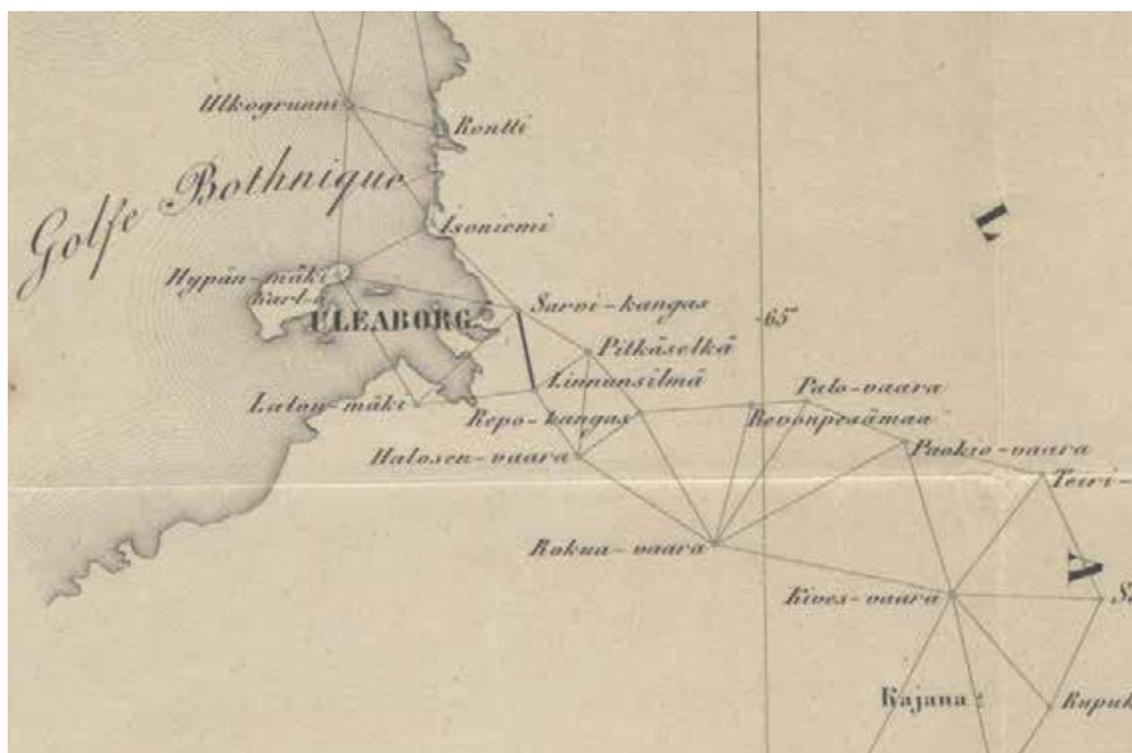
No obstante, Woldstedt fue asistido por varios topógrafos del país, logrando en 10 años la medición de todos los ángulos de la cadena geodésica, incluidos los verticales, y la realización de una serie considerable de observaciones astronómicas. La marcha de los trabajos de campo fue muy dificultosa, pues discurrieron sobre marismas cubiertas de bosques. Problemas todavía mayores surgirían en la prolongación del arco al Norte del golfo de Botnia, entre Oulu<sup>53</sup> y Tornio. Efectivamente, la ubicación de los vértices geodésicos sobre rocas que apenas sobresalían

---

<sup>51</sup> Recuérdese que Maupertuis, A. Clairaut y Celsius, principalmente, midieron aproximadamente un grado entre Tornio y Kittis (1735-1737). La otra medida fue patrocinada por la academia de Ciencias de Estocolmo, logrando prolongar el arco, en los dos sentidos, hasta una amplitud de  $1^{\circ}37'$ , siendo sus extremos los puntos Malörn y Pahtavara.

<sup>52</sup> Este capitán inició el reconocimiento con el teniente Oberg, pero falleció en ese mismo año.

<sup>53</sup> Struve citaba este emplazamiento con el nombre sueco de Uleaborg.



La cadena geodésica del arco de meridiano alcanza el golfo de Botnia. En la imagen se aprecia, con trazo más grueso, la segunda base medida por Woldstedt y Sabler, en las proximidades de Uleaborg (Oulu).

del agua, conllevaba fuertes refracciones verticales, las cuales padeció Maupertuis<sup>54</sup> en su momento. Sin embargo el encomiable tesón de Woldstedt consiguió que, en 1844, se concluyesen todos los triángulos. Incluso se midió la primera base en ese mismo año, cerca de la iglesia de Elimä, al Norte de Loviisa, contando el astrónomo con la imprescindible colaboración de George Sabler<sup>55</sup>. En el año 1845 se midió una segunda base, próxima al extremo Norte del arco, cerca de Oulu, a orillas del referido golfo. Finalizada la medición, ambos geodestas se trasladarían después a ese extremo, determinando nuevamente la latitud de Tornio y el acimut astronómico de los lados que partían del mismo.

Seis años antes, Struve ya se había instalado en el Observatorio Central de Púlkovo, centro desde el que dirigió todos los trabajos relacionados con la medida del meridiano que se practicaron en la actual Finlandia. También es subrayable su gestión ante la Academia de San Petersburgo para que esta considerase como algo propio esa operación geodésica, con todos los beneficios que acarrea una decisión semejante. Con el progreso y éxito de los trabajos anterior-

<sup>54</sup> Struve comentaba, por otro lado, las penalidades sufridas por este geómetra y que él mismo reflejó en su libro *Figure de la Terre* (1738). Allí confesó su desilusión al no haber podido realizar las medidas proyectadas sobre las costas del golfo de Botnia, ya que los múltiples islotes que aparecían representados en los mapas consultados resultaron ser meros promontorios imperceptibles y casi a nivel del agua. El fiasco fue tal que tras buscar infructuosamente islas adecuadas para sus planes, perdieron cualquier esperanza y optaron por el abandono.

<sup>55</sup> Este astrónomo, y geodesta, llegó a ser director del Observatorio Universitario de Vilnius entre 1854 y 1865.



La cadena triangular, observada por el general Tenner, llega al río Dniéster. En la imagen figura el rótulo Dniestr, transliteración de su denominación en ruso.

res no se olvidó la prolongación del arco hacia el Sur. Todo lo contrario, apuntaba Struve, el general Tenner había proseguido con sus observaciones en ese sentido, a través de los gobiernos de Volinia y de Podolia, hasta topar con el río Dniéster, la frontera septentrional de la provincia de Besarabia. Como en anteriores ocasiones, las observaciones de los ángulos de la triangulación y las de carácter astronómico fueron siempre rigurosas. Gracias a su incesante labor, se había logrado el incremento de  $3^{\circ}25'$  en la amplitud del arco, aunque fuese preciso proceder a ligeros ajustes.

### Prolongación del arco ruso y escandinavo (1844-1851)

En el año 1844, el conde Berg, Jefe del Estado Mayor Imperial, reclamó la presencia de Tenner en San Petersburgo, para abordar junto a Struve el problema que supondría prolongar el arco ruso hacia menores latitudes; basándose en los trabajos geodésicos previos de ese estamento militar y en el apoyo científico que prestaría en todo momento la Academia de Ciencias. Fruto de las sucesivas reuniones, fue la redacción del correspondiente proyecto, que presentó al emperador el conde Sergueï Semionovitch Uvarov, como Ministro de Instrucción Pública y Presidente de dicha Academia. Los acuerdos, con el refrendo real, se detallan a continuación:

1. La prolongación del arco llegaría al Danubio, a lo largo de la cadena triangular que se configuraría por la provincia de Besarabia, partiendo del río Dniéster, y supondría un incremento de  $3^{\circ}25'$  de latitud.
2. El general Tenner sería el director de la operación. El reconocimiento del terreno y la

construcción de los vértices se harían en 1845, comenzando las observaciones angulares a partir de 1846. Se tendrían que medir dos bases en los extremos del nuevo segmento de meridiano, valiéndose del mismo aparato empleado en Livonia y en Finlandia.

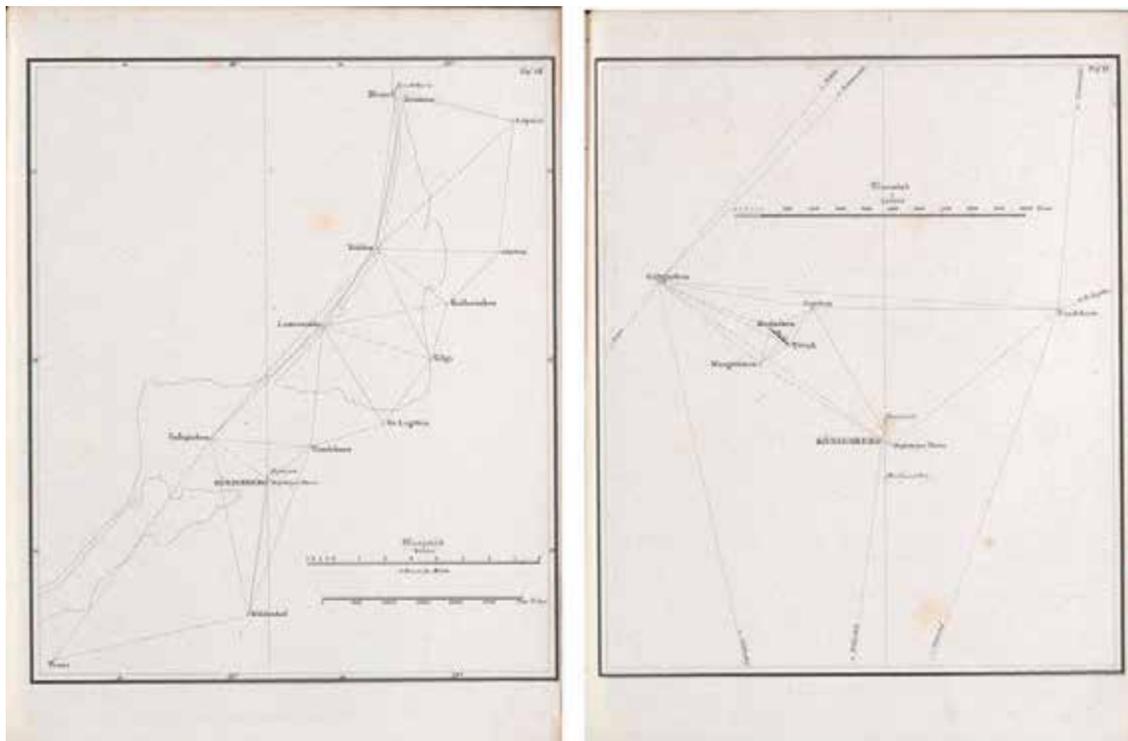
3. Tenner remitiría al Observatorio de Púlkovo copias y extractos de los diarios y cálculos de las operaciones anteriores, en tanto que resultaban imprescindibles para obtener el desarrollo del arco de meridiano.
4. El Observatorio contribuiría al proyecto con la determinación de las latitudes de ciertos vértices de la triangulación, usando el mejor instrumental de que disponía.
5. Struve sería el responsable de los cálculos, que mostrarían los resultados científicos de la medida global del arco de meridiano. También redactaría la obra en que se diera cuenta de la misma, la cual se sometería a la Academia de Ciencias de San Petersburgo para su examen y aprobación, en su caso.
6. La Academia se encargaría de la publicación que describiera los trabajos relativos al arco de meridiano medido en Rusia.



El conde Serguei Semionovitch Uvarov, político y diplomático que presidió La Academia Imperial de Ciencias de San Petersburgo, entre 1818 y 1855.

Atendiendo a lo estipulado, en el año 1844 recibió Struve un volumen manuscrito de Tenner, que había escrito, entre los años 1816 y 1840, en los gobiernos ya referidos. En él se incluyó asimismo un resumen con todas las operaciones relativas a la primera medida del arco de Lituania, junto a cuadros con los datos de los trabajos geodésicos y astronómicos más meridionales, ejecutados bajo su dirección; con la esperanza de que pudiesen servir en su día para la deseada prolongación del meridiano. También figuró en esa Memoria una detallada exposición del enlace geodésico entre los triángulos de Curlandia y de Prusia, logrando de esa manera la primera conexión de las redes geodésicas rusas con las alemanas, francesas e inglesas. Dos años después, Tenner presentó a la Academia otros dos volúmenes manuscritos, redactados en alemán e ilustrados con doce planchas, de los trabajos que había dirigido entre Bristen y Belin, así como la documentación que recogía el enlace con los homólogos llevados a cabo en las provincias bálticas. No obstante, la Academia decidió depositar tan valiosos manuscritos en el Observatorio de Púlkovo, para unirlos al resto de documentos sobre la medida de grados, cumpliendo así el expreso deseo de Tenner.

El segundo volumen incluyó al final una Memoria sobre la figura de la Tierra, que Bessel le había enviado. El trabajo era de 1834, es decir de tres años antes de que apareciese su primer obra sobre la figura de la Tierra (1837), en la revista *Astronomische Nachrichten*, núm. 333, y siete años antes de que procediese al cálculo definitivo que publicó en el núm. 438 de la misma, correspondiente al año 1841. Se comprende así que sólo figurasen 8 arcos en lugar de los 10 que



Triangulación al Este de Prusia y detalle con la medida de una base en las proximidades del Observatorio de Königsberg. Las dos ilustraciones figuran en la obra de Bessel y Baeyer titulada *Gradmessung in Ostpreußen un ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreiecksketten* (Levantamiento Topográfico al Este de Prusia y su Conexión con las Redes Prusianas y Rusa).

usaría después, los dos que faltaban fueron los medidos en Dinamarca y en Prusia. En la relación proporcionada por Tenner se demuestra que Bessel emprendió sus primeros cálculos atendiendo las sugerencias que le formuló este, el cual después de haber medido el arco de  $8^{\circ}42'$ , pretendía aplicar en sus cálculos geodésicos las investigaciones de Henrik Johan Walbeck y Schmidt. Un resumen de la primera Memoria de Bessel, traducida al ruso, se incorporó al noveno volumen de los Anales del Depósito Topográfico, aparecido en 1844. Los resultados, allí proporcionados, para la figura de la Tierra fueron: un desarrollo medio del grado de meridiano dado por 57011.4466 toesas, y una relación entre los dos ejes<sup>56</sup> de 302.5216/301.5126.

Struve alabó el trabajo que presentó Tenner en 1844, por figurar en él una información muy completa. Para todos los triángulos, desde el río Dvina<sup>57</sup> (a la altura de Jakobstad) hasta el Dniéster, daba no sólo los ángulos corregidos y empleados en sus cálculos, sino también los valores observados, las longitudes definitivas de todas las bases medidas, cuadros incluyendo latitudes y acimutes; estos últimos obtenidos en varios de los principales vértices de un arco de  $8^{\circ}42'$ , entre Bristen,  $56^{\circ}35'$ , y Balta,  $47^{\circ}53'$ . Al contar con todos los documentos proporcionados por Tenner, Struve emprendió un nuevo cálculo provisional de la cadena que unía Tornio con

<sup>56</sup> Teniendo en cuenta que el aplastamiento se define como el cociente entre la diferencia de los semiejes y el mayor de ellos, resultaría así un valor de  $1/302.5126$ .

<sup>57</sup> Struve lo llamó Duna.

Ssuprunkowzi, al Norte del río Dniéster; que propiciaría su compensación una vez que se hubieran representado exactamente las bases medidas. Con el fin de evitar cualquier accidente posterior, Struve presentó a la Academia, en 1847, la tabla con los resultados provisionales de la medida de un arco de meridiano de  $17^{\circ}5'33''$ , comprendido entre esos dos extremos: latitud al Norte de  $65^{\circ}50'34''$  y latitud al Sur de  $48^{\circ}45'1''$ . La tabla contenía las latitudes de nueve puntos y las distancias entre los paralelos respectivos, expresadas en toesas de Perú. Comparando tales valores con los proporcionados por Bessel en el año 1841, dedujo Struve un aplastamiento de  $1/299.15$ , ligeramente superior al fijado por aquel.

Efectivamente, las magnitudes proporcionadas por Struve no podían ser muy exactas, tal como él mismo reconocía:

*«he considerado que los resultados son provisionales porque así han de serlo todos los obtenidos a partir de los datos usados, pues aún hay otros a tener en cuenta. No obstante, las cifras ofrecidas para este arco de  $17^{\circ}$  ya se aproximan mucho a los valores definitivos, puesto que sólo quedan por medir nuevas bases en sus dos prolongaciones, las cuales podrían tener cierta influencia en el de la distancia existente entre los paralelos definidos por los extremos en cuestión. Por otra parte, la repetición de las observaciones astronómicas para el cálculo de la latitud en varios vértices principales, con instrumentos todavía mejores que los empleados hasta ahora, también podrían modificar ligeramente las amplitudes obtenidas.»*

Mientras tanto se ultimó la prolongación más meridional del arco. Struve resumió así las etapas principales: la medida de los triángulos de Besarabaia se terminó en 1848, se midieron dos bases con el mismo aparato que se empleó en Finlandia y en Livonia. La primera de ellas, Romankautzi, se situó al Norte de Besarabia, a poco más de 5 km del río Dniéster, dirigiendo su medida el astrónomo Sabler, destinado entonces en el observatorio de Púlkovo. La segunda, Taschbunar, fue medida en 1849 por el capitán de topógrafos Napernikov, que también había asistido a la anterior; se localizó a 26.7 km al Norte del río Danubio. En 1848, de nuevo se responsabilizó a Sabler de las observaciones astronómicas propias de la latitud y del acimut en el vértice Wodolui-Wody, junto a Kischiuew, punto medio del arco de Besarabia. El profesor de la universidad de Kharkow, Andrei Schidlovsky, hizo lo mismo en el punto más al Sur, esto es en el vértice Staro-Nekrassowka.

Antes de referirse a los trabajos en el arco escandinavo, Struve hizo un apretado e interesante resumen de la nivelación trigonométrica con que se complementó la triangulación geodésica, midiéndose para ello los ángulos verticales en todos y cada uno sus vértices, con el fin de calcular los desniveles respectivos. En el tramo medido por Tenner, se inició la nivelación en el mar Báltico, cerca de Palanga (en la frontera con Prusia) y se concluyó en la desembocadura del Danubio en el mar Negro. La nivelación unió por tanto esos dos mares y demostró que su nivel era prácticamente idéntico, el valor resultante fue al menos mucho menor que el error probable esperado. En el segmento de Struve se extendió la nivelación desde el río Duna hasta el golfo de Finlandia, refiriendo allí el origen de las altitudes. Después se adentró por territorio finlandés para enlazar otra vez con el mar en Oulu, continuando luego hasta Tornio. Las dos nivelaciones se enlazaron en los dos triángulos con que se unieron las cadenas geodésicas de Lituania y de las provincias bálticas. Las altitudes en los vértices comunes mostraron una sorprendente coincidencia, puesto que unas procedían de Palanga y otras del puerto de Kunda, en el golfo de Finlandia. Struve terminaba con legítima autosatisfacción:



Real Academia de Ciencias de Suecia.

*«poseemos pues una nivelación ininterrumpida de 1800 verstas de largo y en línea recta, desde la orilla del mar Negro hasta las primeras cumbres de Laponia, cerca de Tornio»<sup>58</sup>.*

Su referencia al arco escandinavo, prolongación septentrional del gran arco ruso, pone de manifiesto el buen proceder de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Ciertamente, Struve comentaba que los astrónomos y geodestas rusos se podían haber responsabilizado de la tarea, extendiendo la cadena de triángulos desde Kemi-Tornio, por la frontera occidental de Finlandia y atravesando la provincia de Tornio-Lappmarken, hasta alcanzar los 69° de latitud, en territorio noruego. Sin embargo, la citada academia quiso respetar el derecho histórico de su homóloga sueca, cuyos representantes habían realizado en dos ocasiones levantamientos geodésicos por la misma zona, deseando además que involucrasen al rey en tan ambicioso proyecto científico. Para hacer ver sus intenciones, comisionaron a Struve para que viajara a Estocolmo en 1844; el cual tendría que defender ante el rey la idoneidad de la prolongación del arco, que contaba con el apoyo expreso de los hombres de ciencia suecos y noruegos. El éxito de su misión fue completo, pues los representantes de la Academia sueca, el Barón Fabian Jacob Wrede, ayuda de campo del rey, y Selander, director del Observatorio de Estocolmo, acordaron redactar un estudio previo

<sup>58</sup> Con su ejecución pudo realizarse un perfil longitudinal entre esos dos mares, siguiendo la estela iniciada años antes por Alexander von Humboldt en la Península Ibérica, enlazando el mar Mediterráneo con el mar Cantábrico. Otras nivelaciones análogas estuvieron relacionadas con el Canal de Suez, unión entre el mar Rojo con el Mediterráneo. Aunque hoy se sepa que sus niveles son coincidentes, cuando los expedicionarios franceses, que acompañaron al ejército napoleónico, calcularon por primera vez el desnivel entre ambos llegaron a la conclusión de que su valor era próximo a los 10 m. Se comprende así que creyeran haber confirmado el temor ancestral con que se contemplaba dicha unión, ya que de producirse se inundaría Egipto y se sumergirían las islas del mar Egeo, en una nueva versión del mítico diluvio universal. Los interesados en el asunto pueden consultar la obra *Del Mediterráneo al Mar Rojo, historia de un canal* (Universidad de Granada.2014).



Observatorios astronómicos de Estocolmo (izquierda) y de Oslo (derecha).

que sería sometido a la aprobación de esa Academia. Para recabar el apoyo de los científicos noruegos, la Academia se puso en contacto con Hansteen, director del Observatorio de Oslo y Jefe de los Trabajos Geográficos de Noruega, el cual se mostró desde el principio dispuesto a participar en la operación.

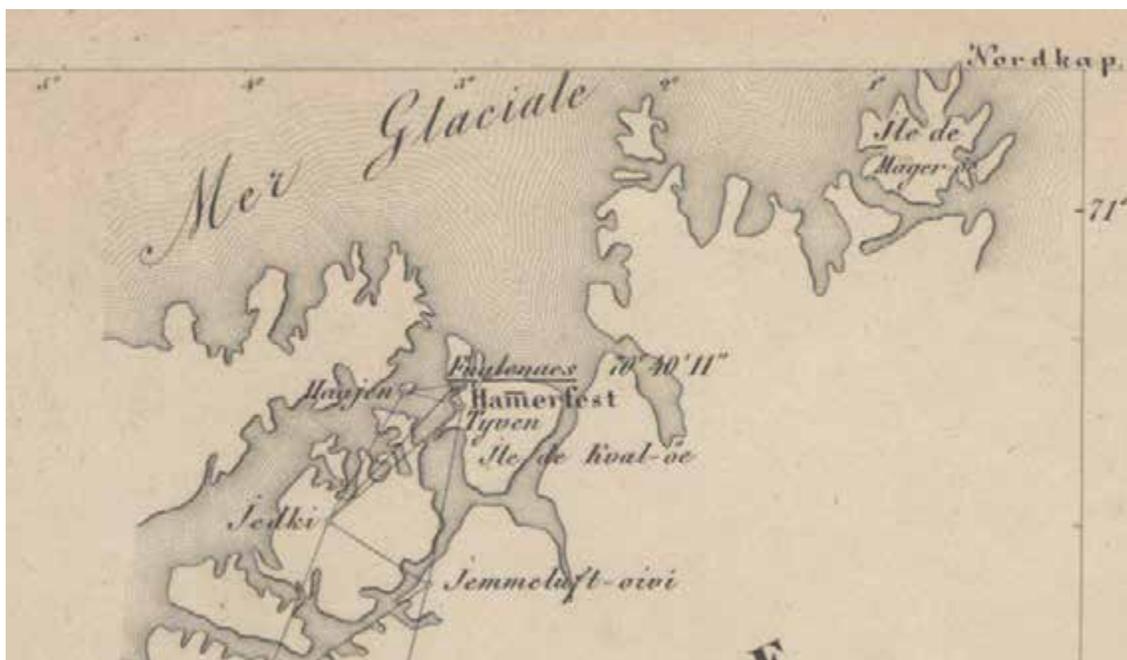
El rey, atendiendo el dictamen del Consejo de Estado de los dos reinos<sup>59</sup>, creó en el año 1845 dos comisiones para que decidieran sobre la cuestión después de haber efectuado el preceptivo reconocimiento del terreno. La sueca estuvo compuesta por Wrede, Selander y el teniente Lilienhoek; la noruega estaría dirigida por el ya citado Hansteen, aunque su docencia en la Universidad y su edad avanzada, hizo que delegase en dos oficiales de ingenieros: Klouman y Lund, que habían trabajado en los levantamientos de las costas de Finnmarken y conocían muy bien el terreno. Las dos comisiones emprendieron el viaje en el mismo verano de 1845, los suecos partirían desde Tornio hacia el Norte, mientras que los noruegos lo harían desde Cabo Norte hacia el Sur. Las dos se deberían reunir en los alrededores de la iglesia de Kautokeino, en territorio noruego cerca del distrito finlandés de Tornio Lappmarken.

Sin embargo los noruegos no pudieron acudir a la cita en el tiempo previsto, no sólo por el largo viaje entre Oslo y Hammerfest, sino también por el naufragio que sufrió su embarcación entre esa localidad y Cabo Norte. Al final recorrieron Laponia hasta llegar a Haparanda, junto a Tornio, y desde allí a Estocolmo; intercambiando con los miembros de la comisión sueca toda la información que habían recopilado. El reconocimiento probó hasta tal punto la posibilidad del proyecto, que incluso dejaron señalizados los vértices que configurarían la triangulación. Aunque en un principio se pensara en el Cabo Norte como extremo más septentrional del arco de meridiano, pues el reconocimiento así lo probaba, se optó por abandonar esa idea en favor de Fuglenaes, un vértice situado muy cerca de Hammerfest. La decisión fue sumamente prudente, pues aunque disminuyese la amplitud prevista en torno a  $1^{\circ}30'$  (la latitud de Cabo Norte es del orden de  $71^{\circ}$ ) las peculiares condiciones meteorológicas del lugar, con nieblas densas y casi permanentes, hubiesen dificultado en exceso observaciones astronómicas prolongadas durante un amplio intervalo de tiempo; en cambio con la nueva elección estaban prácticamente aseguradas.

La triangulación partiría pues de Tornio y seguiría el curso del río Tornio-Elf, con vértices casi idénticos a los usados en su día por Maupertuis y Svanberg, hasta las proximidades

---

<sup>59</sup> Oscar I fue rey de los dos reinos, Suecia y Noruega, entre 1844 y 1859.



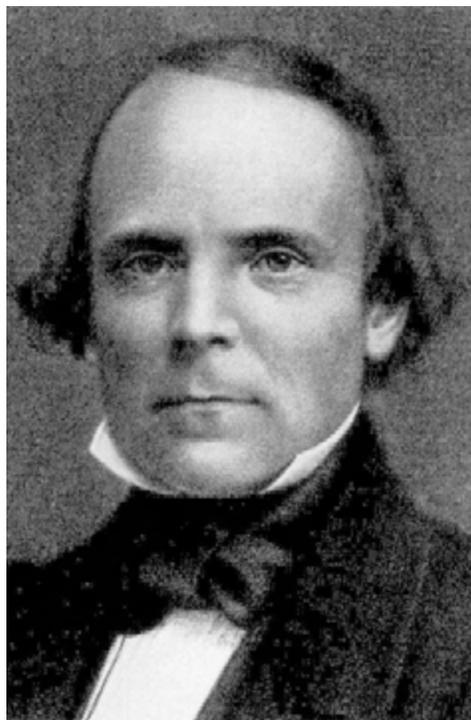
Los últimos triángulos más septentrionales de la cadena geodésica extendida a lo largo del meridiano ruso-escandinavo.

de las minas de Kengis o del antiguo vértice de Partavaara, con una latitud de  $67^{\circ}9'$ . Allí dejarían ese río y continuarían por el curso de su gran afluente Muonio-Elf, hasta el Norte de la parroquia de Muonioniska, en el paralelo  $68^{\circ}$ . Después atravesarían la región finlandesa de Tornio-Lappmarken hasta la frontera noruega, en los alrededores de Kautokeino, con  $69^{\circ}$  de latitud, justamente en los vértices Atjik y Baeljatz-Vaara. Ambos están situados sobre la llanura que separa los ríos que descienden hacia el golfo de Botnia, de los que fluyen al Océano Glacial: el Tana-Elv, dirigido hacia el Noreste, y el Alten-Elv, que sigue un poco la dirección del meridiano. Los triángulos noruegos discurren por ese segundo río hasta su desembocadura en el fiordo de Alten, cerca de los vértices Altengaard y Bossekop. A partir de ese estrechamiento los vértices orientales se localizaron en la margen continental, mientras que los occidentales se situaron sobre las islas del archipiélago que se extiende hasta el Cabo Norte. Los dos últimos triángulos enlazaban el último vértice continental, Jemmeluft-Oivi con Fuglenaes, el extremo más septentrional del arco de meridiano medido por aquellas latitudes.

La medición real de este último segmento del arco comenzó, en el año 1846, simultáneamente en sus dos extremos. El responsable del equipo sueco fue Selander, ya que Wrede tuvo que delegar en él todas las tareas científicas, al estar obligado a permanecer junto al rey por otros asuntos de estado. Selander fue nombrado formalmente, por la Real Academia de Ciencias de Estocolmo, director de los trabajos correspondientes, colaborando con él Carl Skogman, teniente de la marina real, y John Mortimer Agardh, profesor de astronomía en la universidad de Lund. Struve tradujo la memoria presentada por Selander a la Academia, en la que daba cuenta del estado en que se encontraba la medición a finales del año 1850, y que esta publicó en los anales de la misma. En primer lugar indicaba Selander que aprovechó la ocasión para contribuir con sus medidas a una cuestión tan delicada como la permanente elevación del suelo sueco sobre el nivel del mar. Consiguientemente se efectuó, al mismo tiempo que la medida del grado, una nivelación

trigonométrica que uniría entre sí Harapanda y Alten. Sus resultados proporcionarían el desnivel entre el mar Báltico y el mar Glacial, además de las altitudes de los vértices que intervinieron en dicha nivelación. Ese sería por tanto el camino a seguir en el futuro, ya que repitiendo periódicamente la operación se podría concretar el cambio de nivel entre los dos mares y la probable oscilación del terreno.

Hecha la introducción, comentó Selander que había sido asistido en la nivelación por Agardh, el cual midió las distancias cenitales de todas las visuales, desde Harapanda a la frontera de Noruega, con un recorrido de 40 millas suecas, alrededor de 427 km. Selander aclaró también que ese operador empleó un excelente teodolito universal que le había cedido la universidad de Lund, mientras que él lo hizo con un círculo vertical de 12 pulgadas; no obstante, como las lecturas de sus limbos se efectuaban a través de los clásicos microscopios y el número de distancias medidas en cada vértice nunca fue menor de 40 o 50 (en algunos fueron más de cien), se creía que los resultados serían suficientemente fiables.



John Mortimer Agardh

En cuanto a los trabajos para la medida del arco de meridiano, se habían finalizado en gran parte. Las observaciones astronómicas se habían dado por terminadas en el vértice más boreal de los triángulos suecos, a una latitud de  $68^{\circ}49'$ . Para hallar la latitud, cada uno de los operadores efectuó más de 500 medidas de la distancia cenital de la estrella polar<sup>60</sup>. La determinación del acimut corrió a cargo de Agardh y de Skogman, encargándose Selander de la medida del tiempo. En Tornio se hicieron parte de las observaciones astronómicas proyectadas, aunque no pudieran llevarse a término por las inclemencias meteorológicas. Por otro lado, Skogman midió los ángulos horizontales en seis vértices, localizándose uno de ellos en territorio noruego. El enlace de los triángulos suecos y noruegos aún estaba pendiente de ejecución, un retraso explicable por el tiempo dedicado a la nivelación ya comentada. Continuaba Selander manifestando que todavía deberían medir una base, además de su red de enlace con la cadena geodésica, y concluir las observaciones astronómicas en el extremo meridional del arco. En lo referente a la nivelación, quedaba pendiente la medición de algunos ángulos verticales en unos cuantos vértices situados entre la frontera de Noruega y el mar Glacial. Todos esos trabajos podrían terminarse en el plazo de un año, siempre que se contase con la seguridad ofrecida por una climatología favorable.

Struve aborda luego la descripción, más detallada que la anterior, de las medidas protagonizadas por los científicos noruegos, bajo la dirección de Hansteen, unos trabajos que finalizaron en el año 1850. Dado que los cometidos geográficos dependían en Noruega del Ministro del Interior, Frederik Stang, hubo que recurrir a él para conseguir la autorización oficial. Afortunada-

---

<sup>60</sup> Debe tenerse presente que la posición de la estrella polar sobre la esfera celeste es muy próxima al polo boreal, pues su declinación es casi de  $90^{\circ}$ , de modo que su distancia cenital coincide prácticamente con la colatitud del lugar. La latitud se puede definir como la altura del polo sobre el horizonte.



Academia Imperial de las Ciencias de San Petersburgo (1785).

mente su marcado interés por el proyecto y su personal implicación, contribuyó decisivamente al éxito final de la medida del arco. Hansteen asignó las medidas trigonométricas a Klouman y a Lundh, los cuales ya habían efectuado el reconocimiento y anteproyecto en 1845. Los trabajos de campo se realizaron durante los veranos de 1846, 1847 y 1850. El instrumento empleado fue un pequeño teodolito universal de Repsold con dos círculos de 6 y 7 pulgadas<sup>61</sup>, pero que permitían incertidumbres menores y obtener lecturas muy fiables, a pesar de que las divisiones de los limbos fuesen de 10'.

Aunque la duración del verano por aquellas latitudes era de sólo dos meses, los geodestas noruegos lograron medir los ángulos en los quince vértices, que les correspondieron, en el transcurso de los veranos de 1846 y 1847. Sólo quedaba por tanto medir la base y hacer las observaciones astronómicas para determinar el acimut y la latitud. Como Hansteen quería que no desmerecieran nada de las realizadas en Rusia, solicitó el apoyo técnico y científico del Observatorio de Púlkovo. De acuerdo con Struve y con la aprobación de la Academia de San Petersburgo, se trasladó a Oslo el astrónomo Daniel Georg Lindhagen, para que junto a Hansteen organizaran todos los preparativos. Se alcanzó entonces un acuerdo científico ejemplar entre los dos gobiernos, el cual permitió afrontar con las debidas garantías la expedición astronómica a Finmarken.

<sup>61</sup> Struve justificaba el tamaño añadiendo que en Finmarken hubiera sido imposible utilizar otros mayores, por la dificultad de transportarlos a vértices situados sobre rocas escarpadas y con una altitud superior, en ocasiones, a la de las nieves perpetuas. Análogas dificultades se presentaron al construir las señales que los debían identificar.

Los gastos ocasionados por la operación los sufragaría Noruega, incluidos los derivados del transporte de los instrumentos desde Púlkovo hasta Oslo. El observatorio ruso cedería para la ocasión el aparato de medir bases, el círculo vertical de Repsold para la determinación de latitudes, un anteojo Brauer<sup>62</sup> para observar pasos por el primer vertical, un gran teodolito Ertel para la determinación del acimut y la hora, así como varios cronómetros de tiempo sidéreo. Los noruegos aportarían el teodolito, con el que se observaría la red de enlace entre la base y la cadena geodésica y un cronómetro de tiempo medio. Dentro de la colaboración intergubernamental se contemplaba el traslado al Observatorio de Púlkovo de Klouman, en 1850, para entregarle el instrumental anterior y que lo transportara con él a Oslo, vía Copenhague. Sin embargo, sería Lindhagen, por deseo expreso de Hansteen, el encargado de las observaciones astronómicas que deberían localizar el vértice Fuglenaes, el extremo septentrional y definitivo del arco de meridiano. Klouman y Lindhagen medirían la base en los alrededores de Altengaard, en zona continental; también observaría el primero los ángulos de su red de enlace a la cadena principal. La colaboración científica fue sancionada por el rey el 22 de diciembre de 1849. La resolución fue remitida por Hansteen a la Academia de Ciencias de San Petersburgo en febrero del año siguiente, indicándole ésta a Struve que procediera en consecuencia.

Klouman llegó al Observatorio de Púlkovo el 11 de abril de ese año 1850. Durante su estancia de seis semanas examinó y estudió todo el instrumental, con especial dedicación a las reglas para medir bases; de hecho, tanto él como Lindhagen midieron una base de 150 toesas en las inmediaciones de aquel. Antes y después de la medida efectuaron las ineludibles contrastaciones metrológicas, con los patrones allí depositados. Los detalles de la expedición a Finnmark figuraron en un trabajo que presentó Lindhagen al propio Struve, titulado<sup>63</sup>: Memoria dirigida al Sr. Director del Observatorio Central, sobre la expedición al Finnmark noruego, realizada durante el verano de 1850.

La primera etapa del viaje les llevó hasta Copenhague, en donde embarcaron rumbo a Oslo. En esta segunda ciudad permanecieron dos semanas ultimando los preparativos de la expedición. El 25 de junio llegaron a Bossekop, junto al fiordo de Alten, en la mejor época para comenzar los trabajos de campo. Tras depositar allí los aparatos relacionados con la medida de la base, continuaron su travesía hacia Hammerfest, en donde solamente deberían de construir un pequeño observatorio sobre el vértice Fuglenaes; dos días después ya estaban de vuelta en Bossekop. La base se midió entre los días 5 y 12 de julio, resultando al final 1155 toesas, equivalentes a 2.1 verstas o a 2.24 km. A partir de ella se dedujo la del lado correspondiente de la cadena geodésica: Nuppivaara-Lodizhjokki, diez veces mayor que la de la base, después de haber calculado los doce triángulos que formaron la red de enlace con la cadena principal.

Para el 20 de septiembre se habían terminado las observaciones angulares, el mismo día en que Klouman partió para Oslo con todos los instrumentos geodésicos. Lindhagen no pudo acompañarle, tal como se había previsto al iniciar la campaña, pues aún se debían completar las observaciones astronómicas en Fuglenaes. El motivo no fue otro que el mal tiempo, desde que se esta-

---

<sup>62</sup> Se estaba refiriendo Struve a Georg Konstantinovich Brauer, un astrónomo y óptico que perteneció al Observatorio de Púlkovo y a la Universidad de San Petersburgo. Fabricó numerosos instrumentos astronómicos y geodésicos.

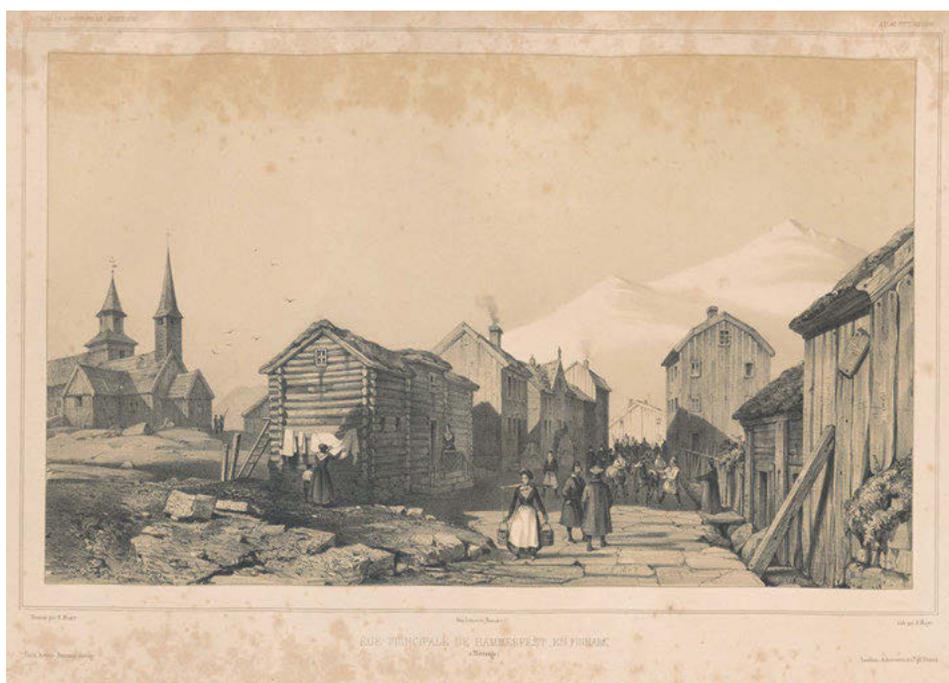
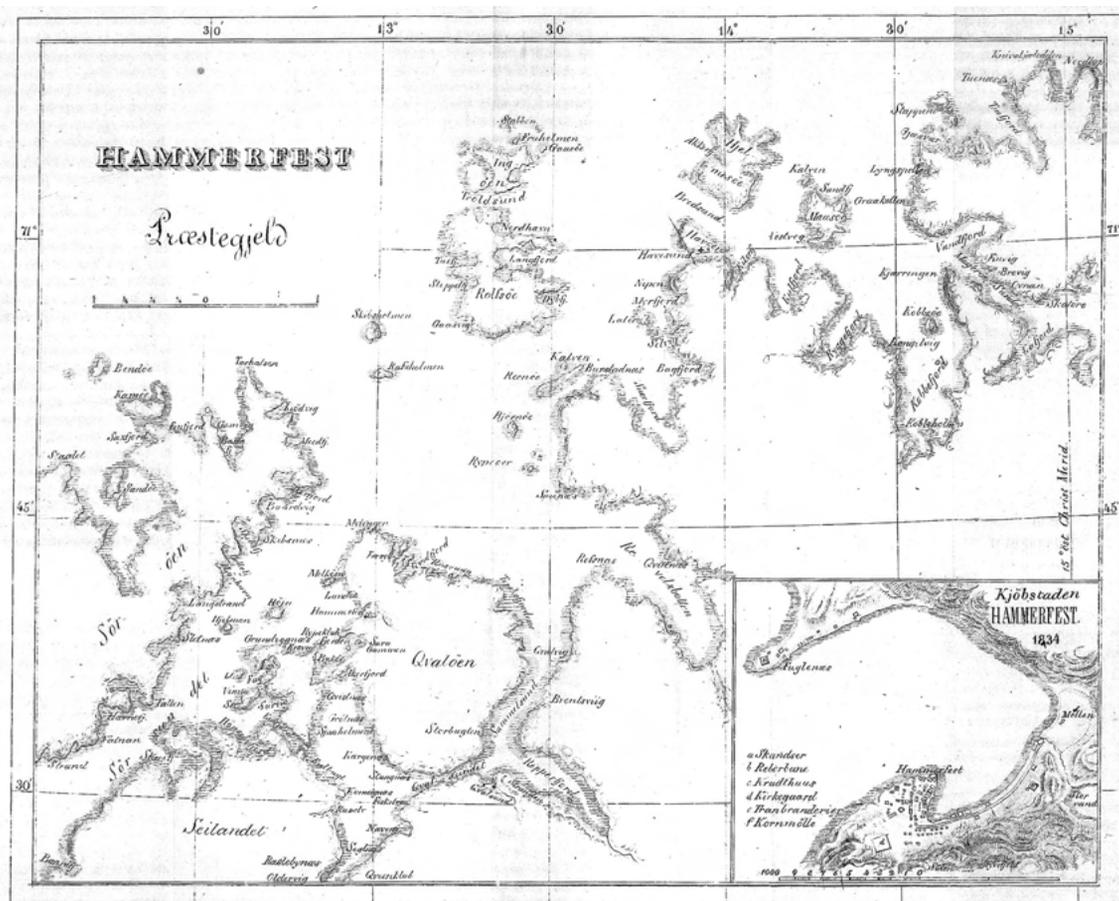
<sup>63</sup> El texto original fue escrito en alemán (*Über den geodätischen Theil der norwegischen Gradmessungsoperationen*) y publicado en el boletín de la Academia de San Petersburgo. La versión francesa del mismo es uno de los anexos con que Struve completó su obra sobre la medida del arco de meridiano.

bleció allí el 17 de julio, con un cielo permanentemente cubierto. En las primeras cinco semanas que pasó en Hammerferst, únicamente realizó algunas mediciones sin que fuesen definitivas. Cuando lo intentó de nuevo, el 8 de septiembre, tampoco fue posible observación alguna en los 11 días siguientes, por estar siempre cubierto. Ya estaba Lindhagen consentido a pasar todo el invierno en el lugar, cuando a comienzos del mes de octubre hubo quince días buenos, que le permitieron cumplir con el plan observacional previsto. El día 13 zarpó para Oslo, con todos los instrumentos astronómicos a su cargo, llegando a su destino el 2 de noviembre.

Una vez examinados todos los instrumentos usados durante la operación, se comprobó su perfecto estado y se decidió embalarlos para su traslado a Estocolmo. Dificultades de última hora, surgidas con el transporte, hicieron que se alterasen los planes primitivos, de manera que hasta el día 14 no pudo Lindhagen partir para Rusia, aunque fuese con escalas en Copenhague, Wismar y Berlin, para terminar en la antigua Königsberg y emprender desde allí el camino de Púlkovo; allí llegó sano y salvo el 16 de diciembre, siete meses después de su partida. La documentación relativa a la operación se conservó, para mayor seguridad en dos lugares: el Depósito Geográfico de Noruega y el Observatorio de Púlkovo. Struve concluía su resumen comentando que Hansteen le había hecho saber que el referido Depósito se sentía a partir de entonces libre de cualquier compromiso posterior relacionado con la medida del arco practicada en Finnmark, admitiendo que la deducción de los resultados científicos, que pudiesen derivarse de la operación, fuese responsabilidad del Observatorio Central de Rusia y de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Ante semejante declaración, Struve decidió que Lindhagen se dedicara a efectuar los cálculos de las observaciones, en las que tan activamente había participado.

Entrados ya en la segunda mitad del siglo, Struve informó al Jefe del Estado Mayor Imperial de Rusia, sobre el estado en que se encontraban los trabajos relacionados con la medida del arco de meridiano. En el documento se dejó claro que se habían dados por terminados todos los trabajos geodésicos entre el Danubio y Tornio. El informe, fechado el 7 de abril de 1851, trataba igualmente de la prolongación del arco hasta alcanzar la cifra, nunca vista, de  $25^{\circ}20'$ , señalando el rápido progreso de la misma. En efecto, después de anunciarle que los trabajos asignados a Noruega habían concluido, le trasladó la información proporcionada por la comisión de Suecia, en el sentido de que sus trabajos también se podrían terminar en el plazo de un año. Es más, le mostraron a Struve su interés por los datos proporcionados por la medida del gran segmento ruso, al estar convencidos de que habían contribuido a un mejor conocimiento del tamaño y figura de la Tierra, circunstancia muy relevante para el Depósito Topográfico de aquella nación.

Struve se sentiría alagado por sus comentarios y animado a calcular sin demora el arco medido en Rusia. Con la seguridad de que se contribuiría así a la mejor definición de la elipse meridiana, máxime cuando se alcanzaría en breve el vértice extremo de Fuglenaes, pudiendo ajustar con más rigor el valor del aplastamiento terrestre. El interés por culminar el proyecto era pues evidente, ya que gracias al acuerdo tomado por las Academias de Estocolmo y de San Petersburgo, en la primavera de 1851, se deberían realizar todas las medidas en ese mismo año. Selander se puso en contacto con Struve para hacerle saber que la Academia sueca había decidido presentar al rey una memoria con ese objetivo y que este se pronunció favorablemente; al mismo tiempo le comentó que estaban a la espera de recibir en breve el aparato para medir la base, que había prometido su homóloga rusa. Aparte de medir la base, había que enlazarla con la cadena principal y terminar las observaciones astronómicas en Tornio. Los rusos, por su parte, debían unir el último triángulo finlandés con el primero sueco, los cuales



Plano de los alrededores de Hammerfest (1834) y vista de una de sus calles en 1839.

compartían precisamente el vértice anterior, pero no un mismo lado. El enlace resultaba indispensable para aprovechar las dos bases, una al Norte y otra al Sur de dicha localidad. Por lo demás, se deberían repetir las observaciones astronómicas en Tornio, para poder determinar el acimut y, especialmente, la latitud, empleando los mismos instrumentos que con tanto éxito se habían usado en Fuglenaes, durante el año anterior.

Struve dedicó el comentario siguiente a la triangulación sueca, que llegaba a Tornio procedente del Sur, concretamente desde el lado formado por los vértices Atjik y Baeljatz-Vaara. Sus 21 triángulos, muy poco separados del meridiano, ya fueron completamente observados en la campaña de 1850, incluyendo ángulos horizontales y verticales. Todos ellos fueron bien proyectados a la vista de su forma y dimensiones, con la particularidad de que se observaron varias diagonales. Todos sus vértices coincidieron con los usados en su momento por Maupertuis y Svanberg, con la salvedad de Perra-Vaara, a medio camino entre Tornio y Huitaperi; de modo que el primer triángulo del geómetra francés fue sustituido por otros dos más pequeños pero con mejor forma. Struve señalaba que fue la tercera vez que se midió una base en las proximidades de Tornio, puesto que ya lo habían hecho Maupertuis (1736) y Svanberg (1802). Esas dos se midieron sobre el río helado Tornio-Elf, en un tramo recto de 7400 toesas, unos 14.4 km, en la dirección del meridiano. En cambio, durante 1851 se midió en verano y sobre una planicie limitada por el río y la montaña Avasaksa.

La colaboración científica entre rusos y suecos continuó su curso durante la campaña del año 1851, tal como se recoge en la Memoria ya referida de Lindhagen. Struve decidió que el astrónomo fuese acompañado por el ayudante August Fyodorovich Wagner, más tarde astrónomo



Grabado de la montaña de Avasaksa y la iglesia de Öfver-Tornio, en la frontera de los siglos XVII y XVIII.

del Observatorio de Púlkovo. Los dos operadores rusos se encontraron en Estocolmo con Klouman, el cual les entregó los instrumentos que se habían dejado en depósito el año anterior. Lindhagen, atendiendo la instrucción expresa de Struve, entregó a Selander el aparato para la medida de la base geodésica. El 15 de junio, Lindhagen, Wagner y Skogman, embarcaron hacia su destino del Norte; Skogman sería el responsable del citado instrumento y de llevarlo al emplazamiento de Laponia, en que debería ser empleado.

Cuatro días después llegaron todos ellos, pertrechados con los instrumentos de observación, a la población de Haparanda, estableciéndose los rusos en Tornio, pues era allí donde tendrían que efectuar sus determinaciones astronómicas. A continuación, Skogman llevó el aparato a Öfver-Tornio, unos 75 km al Norte de Tornio, con objeto de ir adecuando el lugar en que se mediría la base. Los astrónomos instalaron su tienda, con doble techo, de observación en una de las colinas situadas entre la iglesia y el antiguo vértice de Kokko-Mäki, perteneciente a la triangulación dirigida por Maupertuis. Lindhagen usó el círculo vertical de Repsold y el anteojo de pasos por el primer vertical, para hallar la latitud. Wagner se encargaría de la obtención del acimut y de la hora local. Todas las observaciones se ultimaron para el 15 de julio, a excepción de los pasos por el primer vertical; pues para que fuesen observables se requerían noches suficientemente oscuras, que no eran propias de aquella época del año. El tiempo libre de que dispusieron, se empleó para enlazar la estación astronómica con dos vértices, la iglesia de Tornio y el ya citado de Kokko-Mäki, separados entre sí alrededor de un kilómetro. Para ello se midió en dos ocasiones una base auxiliar de 523 pies, mediante perchas de madera con 22 pies de largo. No obstante, faltaban por unir los triángulos rusos y los suecos. La solución la proporcionaron dos lados: el sueco Kaakama-



Triángulo común a la triangulación rusa y sueca.

Vaara-Tornio y el ruso Tornio-Kivalo, pues los vértices diferentes eran visibles entre sí y estaban separados por una distancia de 26000 toesas. La operación del enlace finalizó con la medida de los ángulos en todos los puntos implicados, incluida la tienda montada por los astrónomos.

Aunque un poco más tarde, Selander se incorporó al equipo y, después de su encuentro con Lundhagen, se desplazaron todos ellos hasta las inmediaciones de Öfver-Tornio. El 2 de agosto ya se podía medir la base en el lugar habilitado por Skogman, el cual fue elegido por Selander en el verano anterior. Skogman también había dejado bien señalizados los dos extremos de la base y los cinco vértices de su red de enlace con el lado de la triangulación principal Avasaksa-Pullinki. La medición propiamente dicha comenzó el 5 de agosto, habiéndose efectuado con anterioridad los consabidos controles metrológicos. El día 12 se terminó esa primera medición, emprendiendo la segunda al día siguiente, para ultimarla una semana después. De nuevo se procedió a la contrastación pertinente, en los días siguientes, resultando al final una longitud de 1520 toesas, la máxima que permitió la morfología del lugar.

La segunda contrastación la efectuó Selander en Matarenki, permaneciendo unos días más en sus alrededores, para poder medir los ángulos en los vértices de la unión ya mencionada. Inmediatamente después se presentó en Haparanda para finalizar también las observaciones astronómicas de Tornio. Los dos astrónomos rusos dejaron Öfver-Tornio el 21 de agosto para trasladarse al vértice Kaakama-Vaara, ya que debían medir los ángulos en el mismo; llegaron a Tornio el 26 de agosto. Todas las observaciones astronómicas que aún no habían sido realizadas se terminaron el 19 de septiembre. El día 23, Selander, Lindhagen y Wagner partieron, con el instrumental, rumbo a Estocolmo, llegando a su puerto el 1 de octubre<sup>64</sup>. Selander devolvió a Lindhagen el aparato para medir bases para que lo uniera al resto del equipamiento. Los dos astrónomos rusos emprendieron de inmediato el viaje de regreso, sin olvidar todos los instrumentos que habían usado en la campaña, presentándose en Púlkovo el día 22 de octubre. Struve comentaba que ha-



Base medida (AB) y base ampliada (Avasaksa-Pullinki). Para calcular la longitud de la segunda se resolvieron todos y cada uno de los triángulos que formaron la red de enlace entre ambas (red de ampliación de base).

<sup>64</sup> Skogman abandonó antes el lugar, a comienzos de agosto, pues fue reclamado para participar en un viaje científico a Sudamérica (1851-1853). Los resultados de su viaje los comentó el propio Skogman en su obra (*Fregatten Eugenie's resa omkring jorden åren*), siendo traducida posteriormente al español por Kjell Henrichsen, con el título *Viaje de la fragata sueca «Eugenia»* (1851-1853) Brasil-Uruguay-Argentina-Chile-Perú.

bían cumplido satisfactoriamente la comisión que les había encomendado el Observatorio Central de Rusia. Lindhagen dio cuenta de esta segunda operación con la memoria titulada *Rapport adressé à M. le Directeur de l'Observatoire central, relatif au voyage en laponie entrepris, en été, 1851, dans l'intérêt de la mesure de degrés*.

### Fin del proyecto: trabajos complementarios (1851-1855)

Aunque se hubiera efectuado el enlace entre las triangulaciones rusa y sueca, todavía convenía revisarla a juicio de Struve. La razón obedecía a que hubo una cierta precipitación por la súbita partida de Skogman. Selander también debió entenderlo así, pues decidió efectuarla de nuevo en 1852, contando entonces con la ayuda de Argadh. Ambos tenían que terminar también la nivelación trigonométrica entre los dos mares, la cual se extendía desde el golfo de Botnia hasta la frontera del Finmarken noruego. Concluyeron así los trabajos geodésicos en el arco escandinavo, tras ocho años de fatigas y peligros de todo tipo, tal como manifestaba Struve, en un territorio inhóspito entre los 66° y los 70° de latitud. Struve felicitaba efusivamente a Selander por su contribución científica, tan importante como difícil. Los geodestas rusos aprovecharon ese año para cumplir con el triple objetivo que le habían marcado el Estado Mayor Imperial y el Observatorio de Púlkovo: observaciones astronómicas en Besarabia y en Finlandia, además de la unión cronométrica entre Púlkovo y Dorpat, que ya ha sido referida<sup>65</sup>. Struve concretó otra serie de tareas que merecen ser recordadas. Primeramente su deseo de recalcular la latitud y el acimut astronómico en el extremo más meridional del arco, el repetido vértice Staro-Nekrassowka, usando los mismos instrumentos e igual metodología que habían dado tan buenos resultados en Fuglenaes (1850) y en Tornio (1851). Así creía Struve que se determinaría la amplitud total del arco con la mayor exactitud posible. Paralelamente también quería que se repitieran ciertas observaciones para determinar la latitud en algunos vértices localizados entre los ríos Danubio y Duna, pues de esa forma se controlaría mejor la fiabilidad de los resultados que se habían obtenido antes.

Al examinar los diarios de trabajo correspondientes a la base de Taschbunar, se descubrió una ambigüedad que incidía negativamente sobre el valor de la distancia asignada a la misma. Para evitarla hubo que medir la base de nuevo, resultando entonces una longitud de 2770.24614 toesas, reducida al nivel del mar, cuando en la primera ocasión se obtuvieron 2770.31732 toesas. Ese error relativo de 1/38900, resultaba despreciable para la triangulación que estaba haciendo en la región de Besarabia<sup>66</sup>, pero para la medida del arco de meridiano era digno de tener en cuenta. Aparte de la base, se obtuvieron el acimut y la latitud en el extremo ya referido, así como la latitud del vértice Ssuprunkowzi; renunciándose a la determinación de la latitud en otros puntos por falta de tiempo. Todos los datos más significativos de la expedición anterior figuraron en la memoria que entregó

---

<sup>65</sup> Este tercer encargo tuvo que esperar, al no disponer en 1852 de los cronómetros que se estaban empleando en otras empresas geográficas que se estaban practicando en la Rusia europea.

<sup>66</sup> El responsable máximo de la misma fue el general Wróntschenko, el cual había sido nombrado, en 1850, jefe de la triangulación de Rusia meridional, que se extendía desde Besarabia al mar Caspio. La medida de la base fue realmente el origen de la expedición a esa provincia para terminar la medida del arco de meridiano. Struve nombró responsable al astrónomo polaco Adam Prazmowski, que se había formado en Púlkovo, en los años 1846 y 1847. Struve lo tenía en gran estima, ya que a su juicio «era un raro talento para la astronomía práctica». Prazmowski fue director del Observatorio de Varsovia y un buen fabricante de instrumentos ópticos, como prueba su asociación, en París, con el fabricante alemán Edmund Hartnack.



Observatorio de Helsinki en el año 1893.

a Struve el astrónomo polaco Prazmovski: *Rapport fait a M. le Directeur de l'Observatoire central sur les travaux de l'expédition de Bessarabie, entreprise en 1852, par M. Prazmovski, astronome de l'Observatoire de Varsovie* (1853).

Otra de las expediciones resumida por Struve también tuvo lugar en 1852, con la intención de situar astronómicamente un punto central en Finlandia, que permitiese subdividir su arco de  $5^{\circ}46'$  en dos tramos de similar amplitud. La tarea fue encomendada a Woldstedt, profesor por aquel entonces en Helsinki y antiguo colaborador de Selander, aunque contase con la colaboración de Ivan Ivanovich Fedorenko, un astrónomo formado en el Observatorio de Púlkovo, profesor adjunto en la Universidad de Járkov. La estación elegida fue Kilpi-Mäki, en la que concurrían los lados procedentes de los tres vértices siguientes: Honka-Mäki, Wesa-Mäki y Silmut-Mäki. Su latitud se calculó a partir de las observaciones efectuadas con un nuevo círculo vertical portátil de Repsold<sup>67</sup> y de un teodolito universal de Ertel, con el que se determinaría asimismo el acimut del tercer lado mencionado. Los dos geómetras, con el instrumental correspondiente, embarcaron en Helsinki el 18 de julio, con dirección a la estación elegida, llegando a ella el 30 de julio. El 1 de septiembre ya estaban de vuelta en Helsinki, una vez cumplida su misión; desde allí partió Fedorenko, con todos los instrumentos, hacia Púlkovo.

<sup>67</sup> Woldstedt ya había practicado con el círculo vertical en el Observatorio de Púlkovo. Struve revela, a propósito de ese instrumento, que fue su hijo Otto quien le dio a Repsold las características que debía tener el mismo para que las distancias cenitales con él obtenidas fuesen de gran exactitud.

Dados por finalizados los trabajos del arco de meridiano, la Academia de Ciencias de San Petersburgo propuso, en 1852, a la de Estocolmo y al astrónomo Hansteen, que se celebrase en dicha ciudad una reunión a la que asistieran tanto él como Selander y Struve<sup>68</sup>. En ella se trataría de todo lo relativo a la publicación de una obra que diera a conocer a la comunidad científica internacional la medida del referido arco, entre el Danubio y el mar Glacial. La reunión no pudo celebrarse en esa fecha, puesto que realmente Selander aún no había tenido tiempo suficiente para finalizar su tarea en el tramo septentrional del arco. Fue en la primavera del año 1853 cuando Hansteen comunicó a Struve que salía para Estocolmo, adonde pensaba llegar el 1 de julio. Como Struve sabía ya que podía contar también con la presencia de Selander, decidió emprender su viaje a Suecia<sup>69</sup>, acompañado de Lindhagen que actuaría de Secretario.



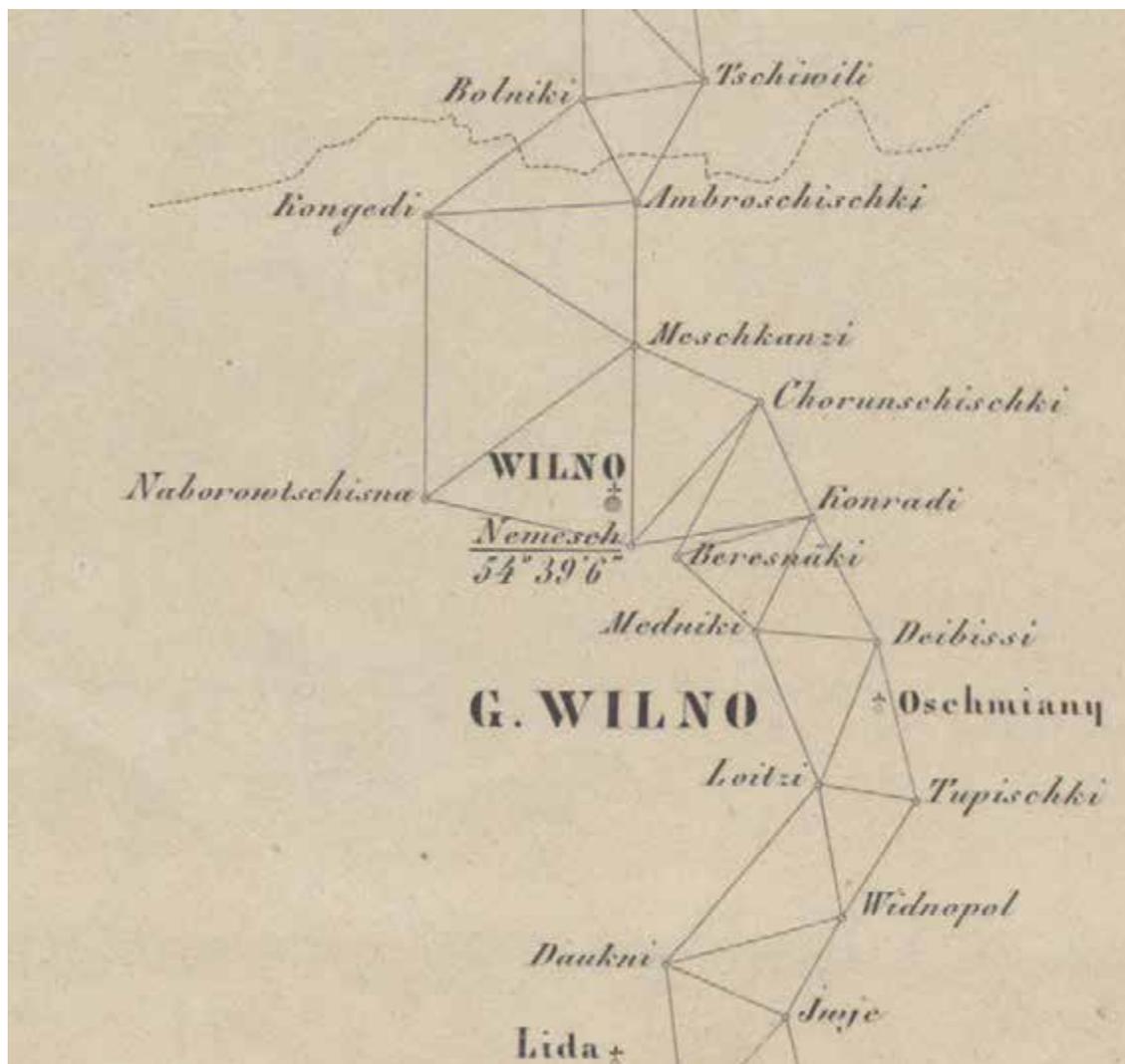
Medalla de Struve, galardón de la Academia de Ciencias rusa desde el año 2006, en el reverso figura una panorámica del Observatorio de Púlkovo rodeada por los signos del zodiaco.

La primera reunión entre Struve, Hansteen y Selander se produjo finalmente el 15 de julio, aunque luego continuasen haciéndolo hasta el día 26. Selander quiso que constase, desde el inicio, que su asistencia obedecía exclusivamente a su interés personal en la cuestión, pues no era el representante formal de la academia sueca. Hansteen, por el contrario, si actuaba como delegado del gobierno noruego, al igual que Struve lo hacía como enviado del gobierno ruso. Ya en la sesión del día 15, leyó Struve una propuesta provisional de la Academia de San Petersburgo y del Estado Mayor Imperial, la cual había sido aprobada por la primera institución el 8 de junio de 1853. Después de haberla discutido en profundidad, se acordó que debería ser Struve el encargado de redactar la obra concreta sobre la medida del arco de meridiano entre el Danubio y el mar Glacial, de acuerdo con un programa que él mismo había elaborado y que fue aceptado por Hansteen y Selander. Struve ya contaba con el compromiso de la Academia de San Petersburgo, que estaba dispuesta a costear su publicación. A lo largo de aquellos encuentros, se acordó igualmente que los responsables noruego y sueco enviasen a Struve todos los datos relativos a las observaciones, que les afectaban, del arco escandinavo<sup>70</sup>. Ello no fue óbice para que Selander propusiera a la Academia de

<sup>68</sup> Struve revelaba que, muy a su pesar, el general Tenner no pudo asistir al encuentro en representación del Estado Mayor Imperial, por sus otras ocupaciones, por el lugar tan alejado en que se encontraba y por los problemas propios de su edad (69 años). No obstante, le había hecho saber a Struve que aceptaría de buen grado los acuerdos que se adoptasen en el mismo.

<sup>69</sup> Struve hizo su viaje por Alemania, pues quería ver a su viejo amigo Argelander, director del Observatorio de Bonn, una bella construcción que todavía no conocía. Por otra parte también debía preparar una visita que pretendía hacer el rey de Prusia al Observatorio de Púlkovo, atendiendo así una invitación que le fue hecha cuando lo vio en 1842. Argelander fue a Estocolmo con Struve, y desde allí volvió con él, a través de Finlandia, hasta Púlkovo.

<sup>70</sup> Struve puntualizaba el acuerdo, en tanto que él ya contaba con la información que le había remitido en su momento Hansteen, de manera que tan sólo le restaba recibir la de Selander, la cual le llegó a finales del mes de agosto del año 1855.



La estación astronómica de Nemesch, al Sur de la ciudad de Vilnius.

Estocolmo que realizase otra publicación especial sobre las operaciones geodésicas de los geómetras suecos y noruegos.

Después de referirse brevemente al enlace cronométrico entre los observatorios astronómicos de Púlkovo y Dorpat, realizado en 1854, Struve se centró en el cálculo de la latitud de Nemesch, punto astronómico fundamental de Lituania, que realizó Sabler en el año 1855, siendo ya director del Observatorio de Vilnius. Sabler atendió gustoso el encargo de Struve, recordando sin duda los trece años (1839-1854) que pasó en el Observatorio de Púlkovo y su colaboración en los trabajos geodésicos en Finlandia y Besarabia. En todo caso no se trataba de una tarea especialmente difícil, pues Nemesch estaba sólo a 4 km del observatorio que dirigía, en una dirección fijada por el acimut de  $328^\circ$ . Struve analizó perfectamente el porqué de esa nueva determinación de la latitud, en una disertación de astronomía geodésica que no viene mal resumir en este momento. El propio Sabler construyó la estación en el mismo lugar en que lo hizo Tenner, en 1826 y 1827, con un anteojo de pasos instalado en el primer vertical. Esa circunstancia fue justa-

mente la que levantó suspicacias acerca de la exactitud de la latitud obtenida en 1827, en tanto que Struve había comprobado en varias ocasiones que podían existir diferencias significativas asociadas a la sensibilidad del nivel que fijaba la verticalidad del eje principal del instrumento. Sabler, en cambio, usó en sus observaciones un círculo vertical de Reichenbach con 18 pulgadas de diámetro, perteneciente al Observatorio de Vilnius; instrumento similar a los círculos del Observatorio de Dorpat o de Mitau, aunque Sabler lo hubiera modificado ligeramente para aumentar todavía más su exactitud. Sus observaciones las efectuó entre el 14 de julio y el 19 de agosto. Struve pensaba que podían servir de modelo, a la hora de manejar un instrumento, máxime cuando se evaluó la latitud de Nemesch con la mínima incertidumbre.

# 4

## LAS OBSERVACIONES ASTRONÓMICAS: LATITUDES Y ACIMUTES

El cálculo de la latitud y del acimut ocupó buena parte de la obra publicada por Struve, ya que su carácter astronómico las ligaba inexorablemente a las observaciones de índole geodésico-topográfica, formando ambas el «corpus» de la medida del grado de meridiano, como ya fue apuntado, y del perímetro terrestre. Tales mediciones se realizaron únicamente en una serie de puntos singulares, o estaciones, distribuidos a lo largo de los más de 25° que tuvo el arco. A modo de introducción, Struve recordó los procedimientos más inmediatos que se venían usando en la determinación de las latitudes, indicando que el anteojo de pasos, estacionado sobre el primer vertical, había llegado a sustituir al sector cenital, el instrumento astronómico por excelencia en las medidas del arco de meridiano<sup>71</sup>. Aunque hubiese sido el astrónomo danés Olaus Römer el primero en usar el anteojo de pasos, se debió a Bessel su aplicación geodésica, cerca de cien años después. No obstante, el empleo del anteojo de pasos para calcular la amplitud del arco de meridiano<sup>72</sup> presentaba ciertas dificultades, tal como señalaba Struve: «pues el instrumento no puede usarse con garantías cuando la amplitud es pequeña, de modo que esa metodología sería impracticable para obtener, con exactitud suficiente, los 25°20' existentes entre los dos puntos extremos de nuestras operaciones».

En cambio, nada se oponía, según él, a que se resolviese la cuestión relacionando las distancias cenitales de las estrellas con las declinaciones respectivas, previamente determinadas con el rigor suficiente en los observatorios astronómicos. Con independencia de todo ello, reconocía Struve que su aplicación en las 13 estaciones astronómicas del arco implicado, habría exigido observaciones sistemáticas y prolongadas durante varios años consecutivos, una posibilidad que no podría llegar a buen término. Consiguientemente, se optó por obtener las latitudes valiéndose de tales instrumentos, aunque en algunas ocasiones se determinaran por medio del anteojo de pasos, teniendo en cuenta que así se podrían controlar los valores asignados a las mayores amplitudes. Struve dividió su exposición en tres apartados:

- a) Latitudes del arco central o Báltico.
- b) Latitudes del arco meridional, comprendido entre los ríos Duna y Danubio.

---

<sup>71</sup> Es sabido que las trayectorias diurnas y aparentes de las estrellas cortan al meridiano del lugar cuando culminan, superior e inferiormente. En cambio no ocurre lo mismo con el primer vertical, puesto que solo lo cortan las trayectorias de aquellas estrellas cuya declinación es menor que la latitud.

<sup>72</sup> Al observar las culminaciones de una estrella, de declinación conocida, la latitud del lugar es combinación lineal de esa coordenada y de la distancia cenital del astro en tales instantes. De modo que si la operación se repite en dos puntos de un mismo meridiano, podría determinarse la amplitud del arco que forman, como diferencia de las latitudes correspondientes.

- c) Latitudes del arco septentrional, definido por los extremos localizados en el golfo de Finlandia y en el mar Glacial.

a) *Latitudes del arco Báltico*

El arco Báltico, cuyos extremos fueron Jacobstadt ( $56^{\circ}30'$ ) y la isla de Hogland ( $60^{\circ}4'$ ), fue considerado por Struve como el núcleo del arco de meridiano de  $25^{\circ}20'$ ; atendiendo bien a su posición geográfica<sup>73</sup> o a la influencia que había ejercido sobre las campañas astronómicas que lo prolongaron en los dos sentidos. La estación astronómica fundamental de este segmento de meridiano fue el observatorio de Dorpat, cuya latitud ya había publicado Struve en su obra *Stellarum fixarum imprimis duplicium et multiplicium positiones mediae: pro epocha 1830.0, deductae ex observationibus meridianis annis 1822 ad 1843 in Specula Dorpatensi Institutis* (1852). Su determinación se basó en las múltiples observaciones (alturas del polo) realizadas, entre 1822 y 1826, con el círculo meridiano de Reichenbach & Ertel; el valor resultante fue de  $58^{\circ}22'47''.56$ , con un error probable de  $0''.05$ .



Punto Astrogeodésico en el Observatorio de Tartu.

Las amplitudes definidas por los extremos Jacobstadt y Dorpat, de una parte, y por Dorpat y Hogland, de la otra, ya las había fijado Struve en el trabajo *Nachricht von der Russischen Gradmessung* (1822):  $1^{\circ}52'42''.59$  y  $1^{\circ}42'22''.28$ , respectivamente. De acuerdo con ello se obtuvieron las latitudes siguientes para la isla de Hogland:  $60^{\circ}5'9''.84$  asignados a la estación astronómica y  $60^{\circ}4'29''.16$  referidos al vértice geodésico, una vez restados de la cantidad anterior los  $40''.68$ , fruto del levantamiento topográfico que enlazó ambos puntos<sup>74</sup>. En cuanto al otro extremo, resultó la latitud siguiente: Jacobstadt,  $56^{\circ}30'4''.97$ . Los errores relativos asignados a las tres latitudes fueron de  $0''.05$  (Dorpat) y  $0''.10$  (Mäki-päällys y Jacobstadt).

b) *Latitudes del arco meridional*

En las primeras operaciones sobre el arco formado por los vértices Belin y Nemesch, el general Tenner evaluó las latitudes usando exclusivamente el anteojo de pasos estacionado sobre el primer vertical. Más adelante, extendió su triangulación hasta alcanzar Jacobstadt, enlazando así los triángulos de las provincias Bálticas. La triangulación se prolongó también en sentido opuesto, llegando al vértice más meridional del arco, Staro-Nekrassowka, situado muy cerca de la ciudad de Izmaïl<sup>75</sup>, en la orilla izquierda del Danubio y en el paralelo de latitud  $45^{\circ}20'$ . De ese

<sup>73</sup> Struve comentaba que el valor de la latitud media era realmente de  $58^{\circ}$  (los valores extremos fueron de  $45^{\circ}20'$  y  $70^{\circ}40'$ ), muy parecido a la de Dorpat ( $58^{\circ}23'$ ).

<sup>74</sup> Aclaraba Struve que hubo que medir una pequeña base y proyectar varios triángulos, para unir entre sí el vértice situado en la cumbre del roquedo Mäki-Päällys y el punto astronómico, una tienda para la observación construida en un valle próximo. Así pudo deducirse que la estación astronómica estaba 645.896 toesas al Norte del vértice geodésico correspondiente.

<sup>75</sup> Histórica ciudad portuaria al SW de Ucrania.

modo se configuró el gran arco ruso con una amplitud próxima a los  $14^{\circ}44'$ , la distancia angular que hay desde dicho río al golfo de Finlandia. Tal magnitud hizo necesario el empleo de instrumentos provistos de limbos verticales, aunque se contemplase asimismo la posibilidad de usar el anteojo de pasos en casos especiales. Cuatro fueron los instrumentos con los que se efectuaron las observaciones astronómicas para determinar las latitudes y, por tanto, las amplitudes de los arcos: el círculo meridiano portátil de Repsold, el teodolito universal de Repsold, el círculo vertical de Reichenbach y dos teodolitos universales de Ertel.



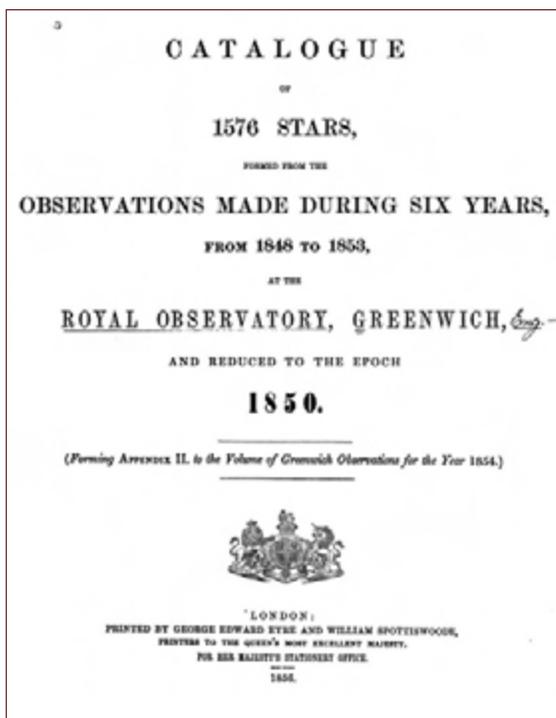
Teodolitos universales de Ertel (izda.) y Repsold (dcha.).

En el primer caso se efectuaron las lecturas sobre los limbos mediante cuatro pequeños microscopios, tal como describió Struve en la revista de Schumacher *Astronomische Nachrichten* (números 344 y 345). El anteojo tenía un objetivo de 2 pulgadas, una distancia focal de 24 y 50 aumentos. Una de sus mayores ventajas, la eliminación del efecto de la flexión, se introdujo en 1850, al poder intercambiar las lentes del ocular y del objetivo; así se procedió en todas las observaciones que se realizaron con ese instrumento. Con él se obtuvieron las latitudes de Staro-Nekrassowka, Ssuprunkowzi y Belin, siendo los operadores Wagner (1852), para los dos primeros, y Prazmovski (1853), para el tercero. El segundo instrumento era propiedad del Estado Mayor Imperial, teniendo un limbo horizontal con 12 pulgadas de diámetro y otro vertical con 10; la amplitud angular de cada una de las divisiones, en ambos círculos, fue de  $4'$ . Este aparato fue empleado por Prazmovski (1852) en los dos primeros vértices, ya comentados. Sabler obtuvo la latitud de Nemesch en 1855, efectuando las observaciones con el círculo vertical de Reichenbach, propiedad del Observatorio de Vilnius, provisto de un limbo con 18 pulgadas de diámetro. El objetivo de su anteojo tenía un diámetro de 22 líneas, una distancia focal de 25 pulgadas y 60 aumentos. Sabler había usado también el teodolito universal de Ertel, para calcular la latitud

del vértice Wodolui, en el año 1848; el diámetro de su objetivo fue de 21 líneas, su distancia focal de 18 pulgadas y 30 aumentos. El círculo vertical de ese teodolito tenía un diámetro de 11 pulgadas y divisiones de 5'. El astrónomo Melan utilizó otro instrumento análogo, en 1837, para determinar las latitudes de los vértices Ssuprunkowzi y de Kremenetz, pudiendo así calcular la amplitud del arco comprendido entre ambos.

Los datos proporcionados por los instrumentos anteriores, junto a la medida de las distancias cenitales, permitieron conocer la latitud de las seis estaciones del arco meridional, localizadas al Sur del río Duna; las estrellas observadas fueron tanto circumpolares como otras fundamentales que culminaban superiormente sobre el meridiano del lugar. Struve aclaraba que las declinaciones correspondientes las había obtenido del catálogo de 1576 estrellas formado por Airy, durante el periodo comprendido entre 1848 y 1853, apoyándose en las observaciones realizadas en el Observatorio de Greenwich, luego reducidas al año 1850. No obstante, añadía que para la información de la estrella polar se había valido del *Nautical Almanac*<sup>76</sup>; indicando que las diferencias entre esa publicación y el Catálogo de Airy<sup>77</sup> no influían sobre el valor de la latitud calculada, en tanto que se realizó la observación de la estrella a horas tan diferentes que los posibles errores posicionales se compensarían automáticamente. Struve detalló a continuación las observaciones que se hicieron en cada una de las estaciones astronómicas.

Staro-Nekrassowka fue la primera a la que se refirió. Los astrónomos que determinaron su latitud son ya conocidos: Prazmovski y Wagner, los cuales hicieron sus observaciones entre el 31 de agosto y el 18 de septiembre del año 1852. El primero utilizó el teodolito universal de Repsold, tanto en sus observaciones circunmeridianas como para los pasos por el primer vertical. Wagner, en cambio, empleó su círculo meridiano portátil para medir las distancias cenitales en los instantes de la culminación. Las observaciones circunmeridianas de Prazmovski fueron concienzudas, puesto que las lecturas de las distancias cenitales se efectuaron en diferentes sectores del limbo, colocándolo de manera que se correspondiera el cenit con los valores siguientes: 0°, 45°, 90° y 135°. En la tabla de la página siguiente figuran las estrellas elegidas, indicando las letras N y S la posición de sus culminaciones con relación al cenit. Dando a todos los resultados



Catálogo del Real Observatorio de Greenwich (Airy) utilizado por W. von Struve.

<sup>76</sup> En principio fue publicado con el nombre de *The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris, for 1767*, siendo su principal objetivo la determinación de la longitud en el mar. El organismo responsable de su formación fue *The Royal Greenwich Observatory*.

<sup>77</sup> Aunque Struve se refiriera al catálogo con esa denominación, en la portada de la misma no figuraba el nombre del director del Observatorio de Greenwich.

el mismo peso y promediando los obtenidos para cada día, se obtuvo  $45^{\circ}20' 2''.86$ , que una vez reducido al centro de la estación se transformó en  $45^{\circ}20' 2''.76 \pm 0''.13$ . Prazmovski realizó observaciones análogas con el mismo instrumento, situado en el primer vertical, con la salvedad de que le dio la mitad del peso a las que se efectuaron bajo peores condiciones atmosféricas; así obtuvo para la latitud el valor de  $45^{\circ}20' 2''.9 \pm 0''.29$ . Struve detalló asimismo las observaciones astronómicas hechas por Wagner, con el círculo meridiano y portátil de Repsold, en sus dos posiciones (círculo al Este y al Oeste), el cual obtuvo, tras promediar los resultados parciales, una latitud de  $45^{\circ}20' 3'' \pm 0''.07$ . De modo que, en función de ellos, se pudo deducir el valor final de  $45^{\circ}20' 2''.94 \pm 0''.05$ .

La latitud de la estación Wodolui fue hallada por Sabler, como ya se dijo, mediante las observaciones efectuadas con el teodolito universal de Ertel. Sobre cada una de las estrellas hizo cuatro punterías con el círculo al Este y otras tantas con el círculo al Oeste. En todas ellas se eligió la estrella  $\alpha$  de las constelaciones siguientes: Osa menor, Osa mayor, Cefeo, Águila, Pegaso y Andrómeda, copiando sus declinaciones del Catálogo de Airy. El valor final para la latitud fue de  $47^{\circ}1'24''.98 \pm 0''.24$ .

Agosto 31. Zénith à 0°.				Sept. 2. Zénith à 90°.			
S.		N.		S.		N.	
$\alpha$ Bootis	45° 20' 2,90	$\alpha$ Ursae min.	45° 20' 3,70	$\alpha$ Bootis	45° 20' 2,26	$\alpha$ Ursae min.	45° 20' 3,94
$\alpha$ Scorpii	1,97	$\beta$ Ursae min.	2,71	$\alpha$ Coronae	2,76	$\beta$ Ursae min.	3,41
$\alpha$ Ophiuchi	1,91	$\alpha$ Ursae min.	2,11	$\alpha$ Scorpii	2,47	$\alpha$ Ursae min.	4,05
$\delta$ Aquilae	2,14	$\delta$ Ursae min.	2,43	$\alpha$ Ophiuchi	3,39	$\delta$ Ursae min.	1,86
$\alpha$ Aquilae	2,83	$\alpha$ Cephei	2,12	$\delta$ Aquilae	4,07	$\alpha$ Cephei	2,24
$\alpha$ Aquarii	1,01	$\alpha$ Urs. maj. s. p.	3,17	$\alpha$ Aquilae	3,84	$\alpha$ Urs. maj. s. p.	3,90
<b>Media</b>	<b>45° 20' 2,13</b>	<b>Media</b>	<b>45° 20' 2,71</b>	$\alpha$ Aquarii	3,88	<b>Media</b>	<b>45° 20' 3,23</b>
				<b>Media</b>	<b>45° 20' 3,24</b>		
Sept. 1. Zénith à 45°.				Sept. 3. Zénith à 135°.			
S.		N.		S.		N.	
$\alpha$ Bootis	45° 20' 1,31	$\alpha$ Ursae min.	45° 20' 2,79	$\alpha$ Bootis	45° 20' 2,19	$\alpha$ Ursae min.	45° 20' 3,65
$\alpha$ Coronae	1,59	$\beta$ Ursae min.	2,85	$\alpha$ Coronae	2,86	$\beta$ Ursae min.	3,08
$\alpha$ Scorpii	1,94	$\delta$ Ursae min.	3,97	$\alpha$ Scorpii	3,73	$\delta$ Ursae min.	2,31
$\alpha$ Ophiuchi	1,84	$\alpha$ Cephei	4,45	$\alpha$ Ophiuchi	4,03	$\delta$ Ursae min.	1,19
$\delta$ Aquilae	2,27			$\alpha$ Aquilae	4,01	$\alpha$ Cephei	2,79
$\alpha$ Aquilae	0,96			$\alpha$ Aquarii	5,11	$\alpha$ Urs. maj. s. p.	2,27
$\alpha$ Aquarii	3,19			<b>Media</b>	<b>45° 20' 3,66</b>	<b>Media</b>	<b>45° 20' 2,55</b>
<b>Media</b>	<b>45° 20' 1,87</b>	<b>Media</b>	<b>45° 20' 3,51</b>				

Tabla con observaciones de Prazmovski para calcular la latitud de Staro-Nekrassowka.

Prazmovski y Wagner fueron también los encargados de las observaciones astronómicas necesarias para calcular la latitud de la estación Ssprunkowzi, entre los días 22 y 30 de octubre del año 1852; el primero con el teodolito universal de Repsold, midiendo las distancias cenitales, y el segundo con el círculo meridiano portátil del mismo fabricante. Ambos observaron, principalmente, las estrellas de la Osa menor y obtuvieron las latitudes que se indican:  $48^{\circ}45'3''.46$  (Prazmovski) y  $48^{\circ}45'2''.94$  (Wagner). Ahora bien, teniendo en cuenta que el peso de la primera fue cuatro veces menor que el de la segunda, se optó por fijar el valor definitivo en  $48^{\circ}45'3''.04$ . Para evaluar el error probable en  $0''.10$ , se tuvo en cuenta que aquí se realizaron la cuarta parte de las observaciones efectuadas en Staro-Nekrassowka, y que allí se estimó el mismo error en tan sólo  $0''.05$ .

Para determinar la latitud de la estación Kremenetz, se recurrió a la amplitud del arco formado por ella y el vértice Ssprunkowzi, determinada por Melan con un teodolito universal similar a los de la marca Ertel. La amplitud se obtuvo con fiabilidad suficiente<sup>78</sup>, gracias a las medidas de las distancias cenitales, en uno y otro extremo: Kremenetz (1837) y Ssprunkowzi (1838). La amplitud de  $1^{\circ}20'46''.91$  se halló promediando los valores obtenidos observando las estrellas  $\alpha$  y  $\delta$  de la Osa menor,  $\beta$  de Cefeo,  $\gamma$  de Pegaso y  $\gamma$  de Aguila; el error probable asociado ( $0''.28$ ) se calculó en función de los residuos obtenidos a partir de la media. Partiendo luego de que la latitud de la estación de Ssprunkowzi valía  $48^{\circ}45'3''.04 \pm 0''.10$  y que la estación de Kremenetz estaba al Norte de la anterior, resultaban para esta última  $50^{\circ}5'49''.95 \pm 0''.30$ .

La latitud de Belin fue determinada entre el 31 de agosto y el 13 de septiembre de 1853. El operador responsable de la operación fue Prazmovski, con el círculo meridiano de Repsold, el cual procedió, según Struve, «con un rigor y éxito destacable». La tabla adjunta resume los resultados de sus observaciones de las culminaciones de las estrellas boreales que se indican, siendo similares las distancias cenitales de todas ellas:

*Cálculo de la latitud astronómica de Belin*

Estrellas	Latitud	Peso
$\alpha$ de Osa menor, $\alpha$ de Can menor, $\alpha$ de Ofiuco, $\alpha$ y $\zeta$ de Aguila y $\varepsilon$ de Pegaso	$52^{\circ}2'26''.56$	8.6
$\delta$ de Osa menor, $\alpha$ de Pegaso y $\alpha$ de Boyero	$26''.26$	3.6
$\gamma$ de Cefeo y $\alpha$ de Andrómeda	$27''.54$	2.0
$\beta$ de Osa menor y $\alpha$ de Corona	$26''.67$	2.2
Valor medio $52^{\circ} 2'26''.63 \pm 0''.14$		

Además de esas estrellas, Prazmovski observó otras en las mismas fechas, obteniendo a partir de ellas una latitud de  $52^{\circ}2'26''.66 \pm 0''.05$ ; un resultado que refleja su independencia de la metodología empleada. Sin embargo, Struve dio más crédito a la primera determinación,

<sup>78</sup> Struve refería en su obra, que independientemente de ello, en la campaña del año 1852 no fue posible la determinación absoluta de la latitud, con los mejores instrumentos disponibles, por el estado tan avanzado de la estación anual.

por considerar que los errores en ese caso se habían eliminado con mayor rigor. La estación astronómica se eligió  $8''.95$  al Sur de la que utilizó el general Tenner en 1827. De modo que sumándole los  $6''.58$ , que separaban la estación de Tenner del vértice geodésico, situado al Norte de la misma, la corrección total a tener en cuenta ascendería a  $15''.53$ , con lo que el valor de la latitud del vértice sería de  $52^{\circ}2'42''.16 \pm 0''.14$ .



Caricatura y fotografía del astrónomo polaco Adam Prazmowski.

La última latitud de este segmento del arco de meridiano correspondió al vértice Nemesh. La determinó Sabler, entre el 14 de julio y el 19 de agosto del año 1855, con el círculo vertical de Reichenbach, de 18 pulgadas de diámetro, que era propiedad del Observatorio de Vilnius. Al observar las estrellas leyó sus distancias cenitales en diferentes sectores del limbo, con separación de  $15^{\circ}$ . Sabler envió al Observatorio de Púlkovo toda la documentación original de las observaciones y cálculos. La unidad de peso que eligió, la asignó a lo que llamó observación completa: compuesta de cuatro punterías efectuadas en las dos posiciones opuestas del círculo. Struve resumió los datos que le proporcionaron, del siguiente modo:

*Cálculo de la latitud astronómica de Nemesh*

Estrellas	Latitud
$\alpha$ de la Osa menor y $\alpha$ de Corona	$54^{\circ}39'0''.82$
$\alpha$ de la Osa menor y $\alpha$ de Boyero	$0''.71$
$\beta$ de la Osa menor y $\alpha$ de Lira	$0''.12$
$\beta$ de la Osa menor y $\alpha$ de Orión	$0''.95$
$\eta$ del Dragón y $\alpha$ de Auriga	$1''.38$
$\eta$ del Dragón y $\alpha$ de Virgo	$0''.82$
Valor medio $54^{\circ}39'0''.97 \pm 0''.07$	

Realmente, el valor anterior corresponde a la estación propiamente dicha, situada  $3''.19$  al Sur del vértice geodésico; de modo que la latitud de este sería  $54^{\circ}39'4''.16 \pm 0''.07$ .

c) *Latitudes del arco septentrional*

Los instrumentos empleados en este sector del arco de meridiano fueron un círculo vertical de Repsold, un círculo meridiano de la misma marca y un antejo de pasos portátil, construido por Brauer, en Púlkovo (1849), para el Observatorio de Moscú y que fue cedido para la medición del grado en los años 1850 y 1851. El círculo vertical era de nueva construcción (1851), tenía su limbo un diámetro de 11 pulgadas, con divisiones cada  $4'$ , haciéndose las lecturas con microscopios diametralmente opuestos. La abertura de su objetivo fue de 18 líneas, siendo su distancia

focal de 18 pulgadas y sus aumentos próximos a 50. Un instrumento idéntico al descrito, y que pertenecía al Estado Mayor Imperial, fue usado en 1852 para obtener la latitud de Kilpi-Mäki. En cuanto al círculo meridiano portátil, ya conocido, se utilizó para determinar la latitud de dos vértices fundamentales, a saber: Fuglenaes (1850) y Tornio (1851); tomando las declinaciones del catálogo formado por Airy para el año 1850. Struve resumió también las principales características técnicas del anteojo de pasos portátil: un objetivo con 30 líneas de abertura, una distancia focal de 30 pulgadas y tres oculares con aumentos respectivos de 60, 90 y 120. El de mayor aumento fue empleado en todas las observaciones astronómicas, estacionándolo en el primer vertical de los dos vértices mencionados: Fuglenaes (1850) y Tornio (1851).



Detalle de la placa colocada sobre la estación astronómica que se localizó en la isla de Hogland.

La primera latitud relacionada por Struve correspondió al vértice geodésico localizado en la isla de Hogland, que ya fue posicionado en el apartado dedicado al arco Báltico: Mäki-Päällys ( $60^{\circ}4'29''.16 \pm 0''.10$ ). La segunda se refirió a la estación astronómica de Kilpi-Mäki, cuyas observaciones se realizaron durante el periodo comprendido entre los días 4 y 20 de agosto del año 1852. El operador fue el astrónomo Woldstedt, valiéndose del círculo vertical de Repsold. Preferentemente eligió la estrella polar, observándola a horas muy diferentes, aunque visara también en raras ocasiones a la estrella  $\beta$  de la misma constelación. Del lado Sur, observó igualmente a las estrellas  $\alpha$  de las constelaciones que se indican: Perseo, Tauro, Auriga, Boyero y Corona. Las distancias cenitales se leyeron en diferentes sectores del limbo, situando al cenit en el entorno del  $0^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$ ,  $90^{\circ}$  y  $135^{\circ}$ . La latitud se obtuvo promediando cuatro valores provisionales:  $62^{\circ}38'5''.18$ ,  $62^{\circ}38'5''.12$ ,  $62^{\circ}38'5''.29$  y  $62^{\circ}38'5''.32$ , obteniendo por tanto  $62^{\circ}38'5''.23$ . El buen acuerdo entre esas cantidades, se tradujo en un error probable de  $0''.08$  para las determinaciones individuales, fiel reflejo, por otra parte, de la gran calidad del instrumento empleado. Corrigiendo la media por la necesaria reducción al centro de la estación ( $0''.02$ ), se obtuvo para el vértice Kilpi-Mäki una latitud de  $62^{\circ}38'5''.25 \pm 0''.08$ .

La iglesia del distrito de Tornio fue la siguiente estación astronómica en el relato de Struve. En esta ocasión fue Lindhagen el astrónomo encargado de calcular su latitud, entre el 27 de junio y el 19 de septiembre de 1851. La observación se efectuó en realidad, a unos 267 m de la misma, de modo que hubo de enlazarla con ella mediante una pequeña triangulación, cuyo gráfico fue reproducido por Struve. Sus ángulos fueron medidos por Wagner, proyectándose antes una pequeña base que se midió con reglas de madera de 3.5 toesas; uno de sus extremos coincidió precisamente con el lugar de la observación. Dos fueron los instrumentos empleados por Lindhagen, en primer lugar el círculo meridiano de Repsold, intercambiando la posición del objetivo con el ocular, y en segundo el anteojo de pasos estacionado en el primer vertical.

Combinando los resultados obtenidos con el primero, al observar la estrella polar, y los datos proporcionados al visar la estrella  $\eta$  de la Osa mayor y los de las estrellas  $\alpha$  de las constelaciones: Cisne, Lira y Corona, calculó el valor  $\varphi = 65^{\circ}49'36''.6 \pm 0''.075$ . Por otro lado, la com-

binación de las observaciones a la estrella  $\alpha$  de la Osa mayor, con las de la estrella  $\gamma$  de Águila, le proporcionó un nuevo valor:  $65^{\circ}49'36''.07 \pm 0''.175$ ; ambos errores probables se dedujeron en función de los valores individuales obtenidos por cada estrella y de las medias respectivas. Con tales criterios presentes, se llegaría finalmente a que  $\varphi = 65^{\circ}49'36''.14 \pm 0''.07$ , latitud a la que habría que sumarle  $8''.43$  para obtener la de la referida iglesia.

Una vez estacionado el anteojo de pasos en el primer vertical, observó Lindhagen tres estrellas:  $42$  y  $\pi$  de Dragón y  $\tau$  de Cefeo. De manera que extraídas sus declinaciones del catálogo, formado por Airy, y haciendo intervenir las distancias cenitales correspondientes, se obtuvieron los tres valores siguientes:  $65^{\circ}49'44''.25$  ( $42$  de Dragón),  $65^{\circ}49'44''.00$  ( $\pi$  de Dragón) y  $65^{\circ}49'44''.27$  ( $\tau$  de Cefeo). No obstante, Struve decidió no tenerlos en cuenta, a pesar del acuerdo aparente entre tales determinaciones, por las incertidumbres con que se conocían las declinaciones de la primera y de la tercera estrellas consideradas. Así que la latitud para la Iglesia del distrito de Tornio<sup>79</sup> se fijó en  $65^{\circ}49'44''.57 \pm 0''.07$ .

La latitud del vértice Stuor-oivi se halló por medio de dos series de observaciones realizadas entre los días 11 y 23 de julio, en el año 1850. Los operadores responsables fueron Selander y su colaborador Agardh, usando el primero un círculo meridiano de 12 pulgadas y el segundo otro de 9.5 pulgadas. Cada valor parcial de la latitud se obtuvo como media de 10 observaciones, 5 con el círculo al Este y otras 5 con el círculo al Oeste. Selander obtuvo como promedio de las suyas  $68^{\circ}40'57''.81$ , que reducido al centro de la estación se convirtió en  $68^{\circ}40'57''.88$ . Agardh



Las dos iglesias de Tornio que fueron vértices de la triangulación geodésica. La de la izquierda fue la que usó Maupertuis. La imagen de la derecha corresponde a la de Alatornio, cuyo campanario, construido en 1797, formó parte de la triangulación asociada al gran arco ruso y escandinavo.

<sup>79</sup> Struve indicaba que esta iglesia no coincidía con el vértice geodésico empleado, en su momento, por Maupertuis, el cual si era idéntico a la iglesia de la población. Esta segunda iglesia fue conocida más adelante como la de Alatornio, cuyo nuevo campanario fue construido en 1797.

procedió de forma análoga, llegando en un principio a  $68^{\circ}40'58''.82$ , o bien a  $68^{\circ}40'58''.92$ , después de efectuar la reducción al centro correspondiente. Haciendo la media de los valores proporcionados por los dos operadores, se obtuvo el valor definitivo:  $68^{\circ}40'58''.40$ .

La última latitud de la relación, proporcionada por Struve, se refirió al vértice Fuglenaes, que como es sabido fue la estación astronómica, y el vértice geodésico, más septentrional del arco de meridiano involucrado en la mayor operación geodésica del siglo XIX. El encargo de las observaciones pertinentes recayó en Lindhagen, el cual las realizó en el verano de 1850 con el círculo meridiano portátil de Repsold, el mismo instrumento que emplearía dos años después Wagner, en el otro extremo del arco: Staro-Nekrassowka. No obstante usó también el antejo de pasos de Bauer estacionado en el primer vertical, que ya había empleado en Tornio. Las estrellas observadas se detallan a continuación:  $\delta$  y  $\beta$  del Dragón,  $\eta$  de la Osa mayor,  $\alpha$  de la Corona, Auriga y Osa menor. La campaña comenzó el 26 de julio y finalizó el 6 de octubre. Las declinaciones de cada una de ellas las obtuvo del repetido catálogo preparado por Airy para ese mismo año. En todos los casos visó las estrellas en las dos posiciones del círculo, 5 en cada una, hasta completar la serie de 10 punterías; con la salvedad de la última (estrella polar) que la observó en 34 ocasiones. Para cada estrella promedió los resultados y obtuvo las latitudes parciales. Haciendo lo mismo con los valores obtenidos a partir de las observaciones a las estrellas  $\gamma$  y  $\beta$  del Dragón, la polar y la  $\eta$  de la Osa mayor llegó a que  $\varphi = 70^{\circ}40'11''.35 \pm 0''.07$ . En cambio, procediendo del mismo modo con las estrellas  $\alpha$  de Auriga y de Corona, obtuvo el valor de  $70^{\circ}40'11''.10 \pm 0''.12$ . Haciendo la media de ambos, calculó, con esa metodología observacional, una latitud de  $70^{\circ}40'11''.28 \pm 0''.06$ , que corregida por la reducción al vértice geodésico ( $-0''.05$ ) se transformó en  $70^{\circ}40'11''.23 \pm 0''.06$ .

Aparte de las observaciones anteriores, intercaló Lindhagen otras con el antejo de pasos estacionado en el primer vertical. Las estrellas visadas fueron, en este caso, las siguientes:  $\eta$  y  $\beta$  de Cefeo, y la  $\varepsilon$  del Dragón. Promediando las distancias cenitales de cada estrella y combinándolas con las declinaciones respectivas<sup>80</sup>, se obtuvieron tres valores:  $70^{\circ}40'12''.17$  ( $\eta$  Cefeo),  $70^{\circ}40'12''.05$  ( $\varepsilon$  Dragón) y  $70^{\circ}40'11''.44$  ( $\beta$  Cefeo). La media de todas ellas fue  $70^{\circ}40'11''.89 \pm 0''.15$ . Sin embargo, Struve no la tuvo en cuenta por dudar del verdadero valor de las declinaciones anteriores y en aras de la uniformidad del trabajo<sup>81</sup>; obrando en consecuencia, fijó la latitud de Fuglenaes en  $70^{\circ}40'11''.23 \pm 0''.06$ .

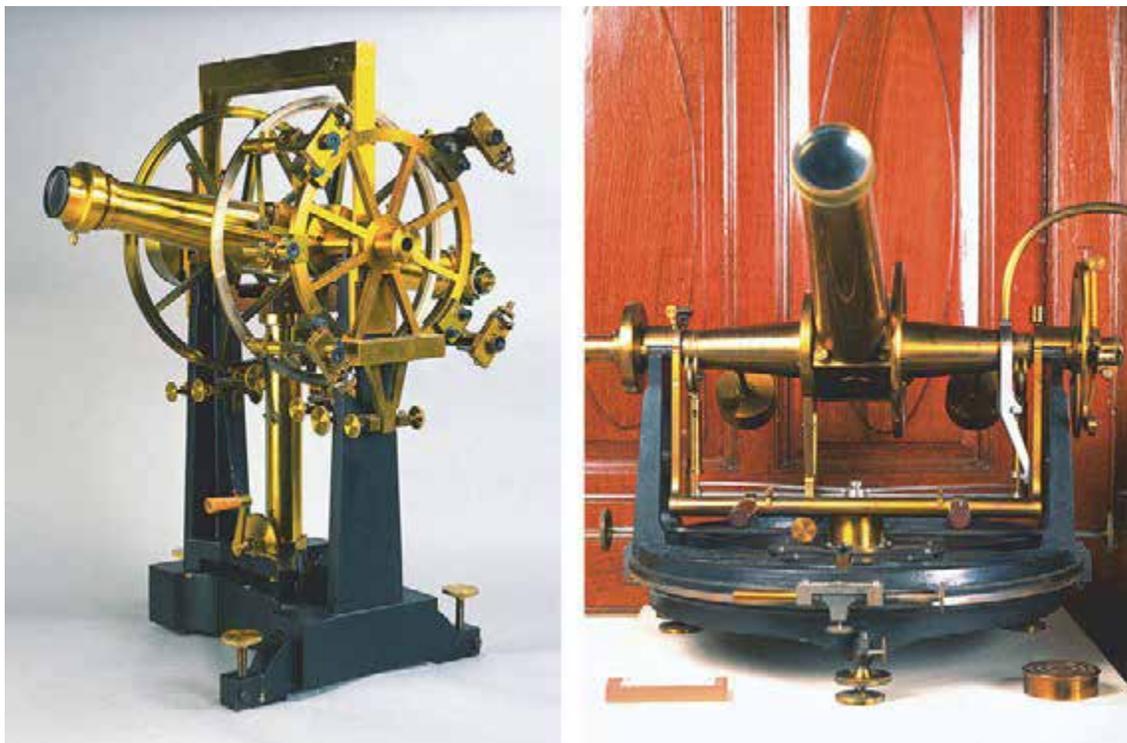
La determinación del acimut astronómico resultaba imprescindible en las mediciones del arco de meridiano, puesto que no sólo permitía su replanteo sino la proyección, sobre él, de los lados de la triangulación extendida entre sus dos extremos. El acimut se calculaba en cada una de las estaciones astronómicas, o puntos de Laplace, y desde ellas se trasladaba a todos los lados de los triángulos, gracias a los ángulos medidos en cada uno de los vértices. Para hallar el acimut de una cierta referencia terrestre situada sobre el horizonte del lugar, se elegía antes una estrella conocida y localizada por sus dos coordenadas ecuatoriales: ascensión recta ( $\alpha$ ) y declinación ( $\delta$ ). Introduciendo luego la hora de la observación podía calcularse el ángulo horario ( $H$ ) de la estrella en cuestión, ya que sería igual a la diferencia entre la hora sidérea del lugar<sup>82</sup> y la ascensión

---

<sup>80</sup> Sólo figuraba en el listado de Airy la declinación de la estrella  $\beta$  de Cefeo. Las de las otras dos fueron obtenidas en 1856 por el astrónomo Johann Heinrich Wilhelm Döllén en el Observatorio de Púlkovo. Se da la circunstancia de que estuvo casado con Charlotte una de las dos hijas de Struve. La menor, Olga, se casó con Lindhagen.

<sup>81</sup> No debe olvidarse que todas las latitudes se basaron en las declinaciones medidas en el Observatorio de Greenwich.

<sup>82</sup> La hora sidérea del lugar se define como el ángulo horario del equinoccio de primavera, o punto Aries.



Círculo meridiano portátil (Brunner) y Anteojo de pasos de Repsold.

recta. Resolviendo después el triángulo de posición, se obtenía el acimut ( $A$ ) de la estrella, en función de las coordenadas anteriores y de la latitud ( $\varphi$ ). De entre las varias fórmulas<sup>83</sup> que resuelven el problema, he seleccionado la siguiente:

$$\cos A = (\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}H) / \cos\varphi \cos H,$$

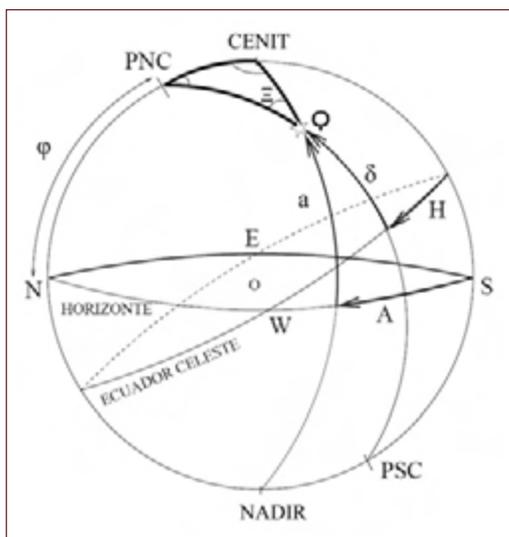
bien entendido que el acimut estaría contado en ese caso a partir del Norte, como se hace en la actualidad, y no desde el Sur como se acostumbraba a hacer en la época de Struve; la fórmula en tal caso sería ligeramente diferente,

$$\cos A = (\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}H - \operatorname{sen}\delta) / \cos\varphi \cos H,$$

ya que el acimut medido desde el Sur es  $180^\circ$  mayor que el medido desde el Norte<sup>84</sup>. A partir de ese valor se obtendría el acimut de la referencia sumándole o restándole, dependiendo de su posición relativa con relación a la estrella, el ángulo formado por los planos verticales respectivos. A la vista de la fórmula es evidente que el conocimiento de la latitud es necesario para determinar el acimut, al igual que lo es para calcular la distancia esférica entre los paralelos sucesivos de las estaciones astronómicas, uno de los principales objetivos de estas operaciones geodésicas.

<sup>83</sup> La precariedad de los antiguos medios de cálculo, antes del desarrollo de la informática y del cálculo numérico, obligaba a transformar las fórmulas directas de trigonometría esférica, expresándolas en forma de productos y cocientes, para poder aplicar logaritmos.

<sup>84</sup> Dado que  $\cos(180 + A) = -\cos A$ .



Coordenadas horizontales ( $a$ ,  $A$ ), y horarias ( $\delta$  y  $H$ ), de una estrella. Aunque en la imagen figura el acimut medido desde el Norte, como se hace en la actualidad, en tiempos de Struve se medía desde el Sur. La relación entre ambos sistemas se logra a través de la trigonometría esférica (resolviendo el triángulo de posición formado por el Polo Norte Celeste, el Cenit y la estrella  $Q$ ) o bien, estableciendo dos sistemas cartesianos trirrectangulares asociados a los mismos y teniendo en cuenta los giros que transforman uno en otro.

Struve usó en sus cálculos latitudes aproximadas, pero con exactitud suficiente como para abordar las determinaciones anteriores, pues sus errores probables fueron siempre del orden de los  $0''.05$ . Al referirse en un principio al gran arco ruso, sólo partió de las latitudes asignadas a los 9 puntos astronómicos, desde el extremo meridional, a orillas del Danubio, hasta el septentrional localizado en la isla de Hogland, en pleno golfo de Finlandia. He aquí los datos de partida:

*Vértices del gran arco ruso en que se determinó el acimut*

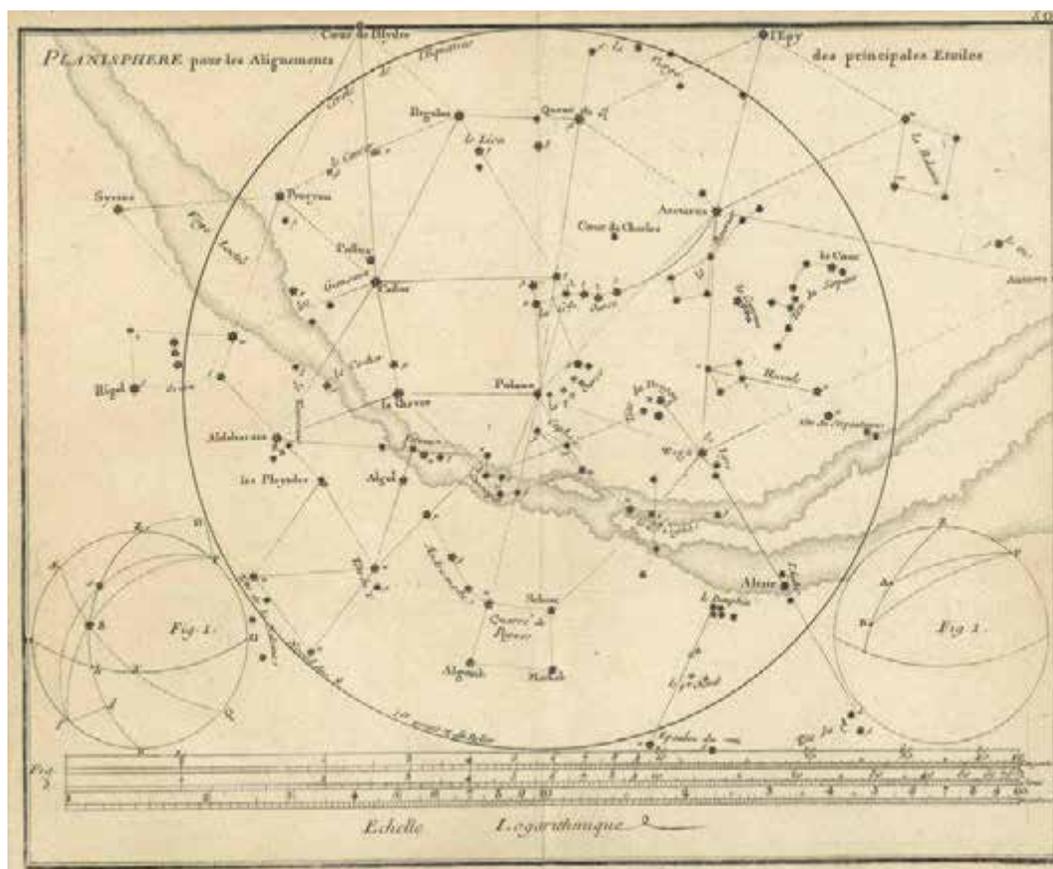
Núm.	Nombre	Localización	Latitud
1	Staro-Nekarassowka	Término meridional del arco de Besarabia, a orillas del Danubio	$45^{\circ}20'2''.8$
2	Wodolui	Vértice central de Besarabia	$47^{\circ}1'25''.2$
3	Ssuprunkowzi	Extremo meridional del arco de Volinia y de Podolia	$48^{\circ}45'3''.1$
4	Kremenetz	Vértice central del arco de Volinia y de Podolia	$50^{\circ}5'50''.0$
5	Belin	Término meridional del arco lituano	$52^{\circ}2'42''.2$
6	Nemesch	Vértice central del arco lituano	$54^{\circ}39'5''.9$
7	Jacobstadt	Extremo meridional del arco báltico	$56^{\circ}30'4''.8$
8	Dorpat	Vértice central del arco báltico	$58^{\circ}22'47''.6$
9	Mäki-Päällys	Vértice geodésico en la isla de Hogland (Golfo de Finlandia)	$60^{\circ}4'29''.4$

Recordaba Struve que la latitud, deducida de las observaciones astronómicas, se había corregido en repetidas ocasiones para reducirla al centro, justamente en todos aquellos casos en que la estación no coincidía con el vértice geodésico desde el que se iba a determinar el acimut. No obstante las correcciones resultaron obvias, al tener en cuenta las medidas directas de ángulos y distancias; únicamente hubo que realizar una operación de enlace más compleja en la isla de

Hogland, una pequeña triangulación para poder unir el vértice geodésico, Mäki-Päälys, y la tienda desde la que se realizaron las observaciones de la latitud<sup>85</sup>. Struve calculó la latitud del vértice,  $60^{\circ}4'29''.4$ , en función de la obtenida previamente en la estación astronómica,  $60^{\circ}5'10''.05$ .

Antes de adentrarse más en la determinación de cada uno de los nueve acimutes, se refirió Struve a las dificultades instrumentales que deberían superarse y a la exactitud esperada para el cálculo de los mismos; haciendo saber que los primeros aumentaban con la latitud, pues la incertidumbre en la proyección del Polo Norte Celeste sobre el horizonte se incrementaba a medida que el cenit se aproximaba a dicho punto. No obstante, insistía al mismo tiempo en que pudo evitarse la incidencia de los posibles errores instrumentales (colimación, verticalidad...) con una buena praxis observacional, propia de las medidas rigurosas (método de Bessel por ejemplo).

Otro de los problemas a superar fue la imposibilidad de ejecutar directamente la proyección del polo, punto de la esfera celeste que es el centro común a las circunferencias aparentes descritas por las estrellas circumpolares en su devenir diario. Como es lógico, insistía Struve en que la estrella que resultaba más favorable para el cálculo del acimut sería siempre la estrella polar<sup>86</sup>, por ser la más cercana al polo. Por otro lado su ascensión recta y su declinación figuraban en la



Planisferio celeste de Flamsteed centrado en la estrella polar.

<sup>85</sup> Ya se indicó que la tienda de la observación estaba situada al Norte del vértice, concretamente a unas 645.9 toesas, equivalentes a  $40''.68$ .

<sup>86</sup> La estrella resultaba fácil de identificar, por ser la más brillante en el entorno del polo norte celeste.

mayoría de los catálogos estelares al uso, de ahí que partiendo de la latitud pudiera calcularse su acimut en cualquier instante, marcado por la hora sidérea. De igual forma se facilitarían la determinación del acimut de la referencia terrestre, midiendo el ángulo formado por esta y la referida estrella. En la memoria se indica que, salvo en dos casos, se obtuvo así el acimut en cada una de las estaciones astronómicas, localizadas en el arco que unía el Danubio con el mar Glacial; habiendo realizado las observaciones con un teodolito universal<sup>87</sup>.

Todos los detalles del procedimiento fueron pormenorizadamente explicados en otra obra de Struve (*Gradmessung I*, pp. 100-107 y pp. 324-334), refiriendo como debería utilizarse el teodolito universal para minimizar los errores instrumentales y las 8 etapas en que convendría estructurar la observación, subdivididas a su vez en dos series de cuatro (unas con el círculo a la derecha y otras a la izquierda). Así fue la secuencia recomendada por el astrónomo:

Serie I.

1. Primera observación del objeto terrestre.
2. Primera observación de la estrella polar.
3. Segunda observación de la estrella polar.
4. Segunda observación del objeto terrestre.

Serie II.

5. Tercera observación del objeto terrestre.
6. Tercera observación de la estrella polar.
7. Cuarta observación de la estrella polar.
8. Cuarta observación del objeto terrestre.

Para Struve ese proceder fue el más aconsejable, puesto que se empezaba y finalizaba la operación con las observaciones a la referencia terrestre, efectuándose las punterías a la estrella en un intervalo de tiempo más corto, hecho relevante cuando se dudaba del posible estado del cielo.

La duración prevista para las ocho actuaciones se estimó en unos 40 minutos, debiendo repetirse seis veces en diferentes sectores de una cuarta parte del limbo, es decir cada 15°, para asegurar así resultados fidedignos. Las observaciones astronómicas se realizaron siempre en horas con poca reverberación, procurando colocar las miras a distancia conveniente, para que se apreciaran con nitidez. Para calcular la exactitud del acimut, obtenido por observación de la polar, en función de los errores inherentes a la latitud y a las otras dos variables que intervenían en su cálculo, recurrió Struve a las fórmulas diferenciales correspondientes<sup>88</sup>. Siempre partió este

---

<sup>87</sup> Las dos excepciones fueron Belin y Nemesch, en el arco lituano, ya que el general Tenner aún no contaba con un instrumento de tales características. En su lugar empleó un gran antejo de pasos, para determinar la hora y el acimut de una mira colocada cerca del meridiano.

<sup>88</sup> Supuesto el acimut función de tres variables: latitud, declinación y ángulo horario, podría identificarse el error cometido al fijar su valor como la diferencial de dicha función y calcularlo a partir de los errores de cada una de las variables. Dicho de otra forma si  $A = A(\varphi, \delta, H)$  y  $dA$  es el error cometido al calcular el acimut se verificaría que  $dA = (\partial A/\partial \varphi) d\varphi + (\partial A/\partial \delta) d\delta + (\partial A/\partial H) dH$ . Vista la relación entre la hora sidérea, el ángulo horario y la ascensión recta, es inmediato que el conocimiento del error  $d\alpha$  implica el de  $dH$  y recíprocamente.

**TABULAE**  
**REGIOMONTANAE**  
**REDUCTIONUM**  
**OBSERVATIONUM ASTRONOMICARUM**  
AB ANNO 1750 USQUE AD ANNUM 1850  
COMPUTATAE  
AUCTORE  
**FRIDERICO WILHELMO BESSEL.**  
**REGIOMONTI PRUSSORUM:**  
SUMPTIBUS FRATRUM BORNTRAEGER,  
1830.

Year	Month	Day	Right Ascension	Declination	Parallax	Proper Motion
1830	Jan.	0	15 27 0.09	+ 0.27	80 55 15.67	+ 0.12
	Apr.	10	10.96	+ 0.55	15.45	- 0.28
	Jul.	19	11.11	+ 0.32	15.17	- 0.37
	Oct.	27	11.63	+ 0.32	14.80	- 0.43
Dec.	66	11.12	+ 0.49	14.37	- 0.43	
1831	Jan.	0	15 28 52.80	+ 0.47	80 55 16.00	- 0.48
	Apr.	10	53.27	+ 0.42	16.42	- 0.53
	Jul.	19	53.09	+ 0.38	15.80	- 0.59
	Oct.	27	54.67	+ 0.35	15.30	- 0.65
Dec.	66	54.42	+ 0.35	14.65	- 0.65	
1832	Jan.	1	15 29 55.14	+ 0.81	80 55 17.02	- 0.68
	Apr.	10	56.45	+ 0.39	16.54	- 0.71
	Jul.	19	59.71	+ 0.30	15.83	- 0.75
	Oct.	27	59.91	+ 0.13	15.08	- 0.78
Dec.	66	56.96	- 0.09	14.30	- 0.78	
1833	Jan.	0	15 29 16.84	+ 0.13	80 55 16.88	- 0.80
	Apr.	10	16.26	+ 0.05	16.08	- 0.81
	Jul.	19	17.80	+ 0.00	15.07	- 0.82
	Oct.	27	17.01	0.00	14.45	- 0.82
Dec.	66	16.97	- 0.09	13.63	- 0.82	
1834	Jan.	0	15 25 35.81	- 0.05	80 55 16.19	- 0.82
	Apr.	10	37.93	- 0.14	15.37	- 0.81
	Jul.	19	37.59	- 0.30	14.56	- 0.80
	Oct.	27	37.59	- 0.30	13.78	- 0.80
Dec.	66	37.15	- 0.24	12.98	- 0.78	
1835	Jan.	0	15 25 34.05	- 0.27	80 55 15.90	- 0.78
	Apr.	10	37.75	- 0.32	14.74	- 0.77
	Jul.	19	37.46	- 0.36	14.02	- 0.69
	Oct.	27	37.10	- 0.40	13.28	- 0.64
Dec.	66	36.70	- 0.40	12.60	- 0.64	
1836	Jan.	1	15 25 17.64	- 0.43	80 55 15.13	- 0.61
	Apr.	10	17.31	- 0.45	14.52	- 0.61
	Jul.	19	16.74	- 0.49	13.96	- 0.50
	Oct.	27	16.27	- 0.49	13.46	- 0.50
Dec.	66	15.75	- 0.52	13.01	- 0.47	
1837	Jan.	0	15 24 56.71	- 0.58	80 55 15.36	- 0.40
	Apr.	10	56.03	- 0.54	14.96	- 0.46
	Jul.	19	55.65	- 0.54	14.62	- 0.54
	Oct.	27	55.08	- 0.57	14.25	- 0.47
Dec.	66	54.51	- 0.57	13.15	- 0.47	
1838	Jan.	0	15 24 55.40	- 0.58	80 55 15.30	- 0.15
	Apr.	10	54.91	- 0.55	15.24	- 0.08
	Jul.	19	54.53	- 0.53	14.65	- 0.16
	Oct.	27	53.76	- 0.57	14.15	- 0.21
Dec.	66	53.18	- 0.55	13.71	+ 0.08	
1839	Jan.	0	15 24 14.16	- 0.57	80 55 14.53	+ 0.12
	Apr.	10	13.50	- 0.55	14.45	+ 0.15
	Jul.	19	13.04	- 0.53	13.63	+ 0.20
	Oct.	27	12.51	- 0.53	13.09	+ 0.20
Dec.	66	12.00	- 0.51	12.21	+ 0.32	

Ascensiones rectas y declinaciones de la estrella polar (1830-1839) en las Tablas de Regiomontanus, calculadas por F.W. Bessel.

de las declinaciones y ascensiones rectas recogidas en las *Tabulae Regiomontanae*, sin olvidar el efecto de la aberración diurna, y tomó en consideración las constantes obtenidas por Bessel para la aberración y nutación. Igualmente se apoyó en las observaciones previas que se hicieron en el Observatorio de Púlkovo, para concretar los errores asociados a la ascensión recta y a la declinación de la polar. Sin embargo, admitía que una vez corregida la posición de la estrella por el par  $d\alpha$  y  $d\delta$ , todavía podían presentarse ciertos errores residuales, para esas coordenadas ecuatoriales y para la latitud, que creyó comprendidos entre  $0''.2$  y  $0''.5$ . Para evaluar el correspondiente error del acimut hubo que particularizar cada una de las derivadas parciales, propias de la fórmula diferencial, para el instante de la observación.

El instrumento empleado para obtener el acimut en el extremo Staro-Nekrassowka fue un teodolito universal fabricado por Repsold. El operador nos resulta ya familiar, el polaco Prazmovski. A ello procedió entre los días 16 y 19 de septiembre de 1852. El teodolito tenía un anteojo de 54 aumentos, una distancia focal de 22.5 pulgadas y una abertura de 22 líneas. Al no disponer este aparato de otro anteojo de verificación, obligó a estacionarlo sobre un pilar sólido que garantizase la calidad de la observación; al igual que se había procedido con anterioridad en el Observatorio de Púlkovo. Prazmovski confesaba en su diario de operaciones la imposibilidad de obtener directamente el acimut de uno de los lados de la triangulación «con un clima en el que las imágenes de los objetos terrestres distantes son raramente estables». Esa fue la razón de que optase por visar una señal<sup>89</sup> no demasiado alejada, alrededor de 1 km, y transportar su acimut al lado en cuestión, una vez medido el ángulo correspondiente; el acimut de la señal resultó ser muy próximo a los  $0^\circ$ , en tanto que se colocó en las proximidades del meridiano. Aparte de esa especie de mira meridiana, se visó también la flecha del campanario de la iglesia de San Nicolás en la ciudad de Izmaíl. El acimut se determinó en 12 ocasiones, en cada una de las cuales se observó dos veces la estrella polar, al igual que la mira, en las dos posiciones del círculo. El ángulo entre la mira y el campanario se midió también el mismo número de veces.

<sup>89</sup> Prazmovski la describía como un cuadrado negro con un pie de lado, en cuyo centro había otro blanco de dos pulgadas de lado.

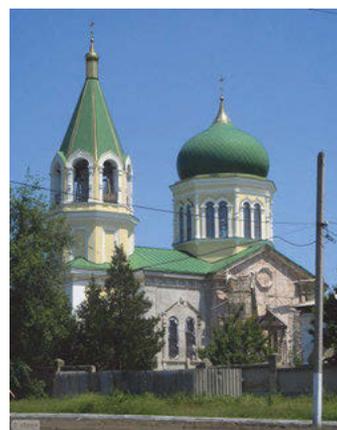
Prazmovski proporcionó los resultados provisionales, reproducidos por Struve, que figuran en la tabla adjunta, los cuales fueron obtenidos a partir de las posiciones proporcionadas, para la fecha media del 18 de septiembre del año 1852, en las *Tabulae Regiomentanae*:

		Acimut.				
1852. Sept. 16.	8 <sup>h</sup> 1 tiempo sid.	359° 54' 51 <sup>h</sup> 74	— 0,16 <i>dα</i>	+ 1,35 <i>dδ</i>	— 0,04 <i>dφ</i>	
	9,1	51,42	— 0,28 <i>dα</i>	+ 1,18 <i>dδ</i>	— 0,03 <i>dφ</i>	
	9,8	52,00	— 0,35 <i>dα</i>	+ 1,02 <i>dδ</i>	— 0,03 <i>dφ</i>	
•	17. 15,7	53,10	— 0,41 <i>dα</i>	— 0,83 <i>dδ</i>	+ 0,02 <i>dφ</i>	
	17,7	51,85	— 0,21 <i>dα</i>	— 1,28 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
•	18. 6,1	52,65	+ 0,12 <i>dα</i>	+ 1,41 <i>dδ</i>	— 0,04 <i>dφ</i>	
	6,8	52,21	+ 0,02 <i>dα</i>	+ 1,42 <i>dδ</i>	— 0,04 <i>dφ</i>	
	8,2	51,27	— 0,18 <i>dα</i>	+ 1,33 <i>dδ</i>	— 0,03 <i>dφ</i>	
	9,7	51,69	— 0,34 <i>dα</i>	+ 1,04 <i>dδ</i>	— 0,02 <i>dφ</i>	
•	19. 15,9	49,95	— 0,40 <i>dα</i>	— 0,88 <i>dδ</i>	+ 0,02 <i>dφ</i>	
	16,4	51,36	— 0,35 <i>dα</i>	— 1,02 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	16,9	50,44	— 0,30 <i>dα</i>	— 1,14 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
<b>Media α =</b>		<b>359° 54' 51<sup>h</sup>72</b>	<b>— 0,24 <i>dα</i></b>	<b>+ 0,30 <i>dδ</i></b>	<b>+ 0,01 <i>dφ</i></b>	

Tabla con valores del acimut obtenido en el vértice Staro-Nekrassowka.

Después reemplazó los valores diferenciales  $d\alpha$ ,  $d\delta$  y  $d\phi$  por los errores probables respectivos de  $0''.5$ ,  $0''.2$  y  $0''.5$ , de modo que el homólogo de la media resultó ser de  $0''.26$ . Como también había sido medido el ángulo entre la señal y la flecha del campanario, en doce ocasiones, que resultó ser de  $88^\circ 58' 44''.52 \pm 0''.36$ , pudo deducirse el acimut de la iglesia,  $270^\circ 56' 7''.20 \pm 0''.44$ . Teniendo en cuenta la reducción al vértice geodésico,  $-1''.69$ , se llegó finalmente<sup>90</sup> a que el acimut de la visual Staro-Nekrassowka-Iglesia de San Nicolás, en Izmaíl, fue de  $270^\circ 56' 5''.51 \pm 0''.44$ .

El acimut de la estación astronómica de Wodolui fue obtenido por Sabler, entre el 5 y el 6 de octubre de 1848, con un teodolito universal modelo Ertel. La referencia terrestre que eligió fue un vértice de segundo orden (Kischenew), que distaba de la



Monasterio de San Nicolás (Izmail).

<sup>90</sup> Struve dio cuenta de una determinación anterior, del año 1849, efectuada por Andrei Schidlovsky, profesor de la Universidad de Charkov, con un anteojo de pasos portátil. Aunque su resultado de  $270^\circ 56' 3''.92$  fuese parecido al de Prazmovski; decidió no tomarlo en consideración, puesto que a su juicio la estación sobre la que se situó el instrumento no ofrecía las necesarias garantías de estabilidad.

estación unas 5000 toesas y ofrecía mejor visibilidad que otro de la cadena principal. Los resultados obtenidos mediante sus seis punterías fueron los siguientes:

		Acimut.				
1848. Oct. 5.	17 <sup>h</sup> 21'	tiempo sid. 282° 6' 23,96	— 0,27 <i>da</i>	— 1,31 <i>dδ</i>	+ 0,04 <i>dφ</i>	
	18 16	22,30	— 0,16 <i>da</i>	— 1,46 <i>dδ</i>	+ 0,04 <i>dφ</i>	
• 6.	13 10	21,45	— 0,57 <i>da</i>	— 0,02 <i>dδ</i>	+ 0,00 <i>dφ</i>	
	16 0	25,05	— 0,42 <i>da</i>	— 0,98 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	17 15	25,79	— 0,28 <i>da</i>	— 1,30 <i>dδ</i>	+ 0,04 <i>dφ</i>	
	18 0	21,68	— 0,18 <i>da</i>	— 1,42 <i>dδ</i>	+ 0,04 <i>dφ</i>	
<b>Media <math>\alpha</math> =</b>			<b>282° 6' 23,37</b>	<b>— 0,31 <i>da</i></b>	<b>— 1,08 <i>dδ</i></b>	<b>+ 0,03 <i>dφ</i></b>

Determinación del acimut en el vértice Wodolui.

Teniendo en cuenta la incertidumbre con que se determinó la hora local, dedujo que el error probable en el acimut debería ser de 0".63. Ahora bien, como el ángulo formado por el vértice secundario y el principal (Dschamana), fue de  $124^{\circ}24'56''.29 \pm 0''.40$ , el acimut de la dirección Wodolui-Dschamana resultó ser de  $157^{\circ}41'27''.08 \pm 0''.74$ .

La tercera estación referida fue la de Ssuprunkowzi, en la cual determinó el acimut el capitán Melan, entre los días 8 y 14 de septiembre de 1848, usando para las observaciones otro teodolito universal de Ertel. Comentaba Struve, que al examinar los cálculos había comprobado la bondad de los mismos, haciendo saber que se optó por la ascensión recta en el instante de la culminación, en detrimento de la que presentaba la estrella en el momento de la observación. Efectuando las correcciones oportunas, para la fecha media del 11 de septiembre, y modificando también la latitud de  $48^{\circ}45' 0''.48$ , obtenida por Tenner, para elegir el verdadero valor de  $48^{\circ}45' 3''.1$ , se obtuvieron los siete acimutes provisionales del vértice Karatschkowzi, que se detallan a continuación:

		Acimut.				
1848. Sept. 8.	16 <sup>h</sup> 45'	tiempo sid. 311° 35' 47,91	— 0,44 <i>da</i>	— 1,48 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	9. 16 50	50,53	— 0,43 <i>da</i>	— 1,51 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	10. 16 52	45,52	— 0,42 <i>da</i>	— 1,53 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	11. 17 0	48,10	— 0,40 <i>da</i>	— 1,57 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	12. 16 13	47,38	— 0,51 <i>da</i>	— 1,32 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	13. 16 43	48,09	— 0,44 <i>da</i>	— 1,48 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	14. 17 14	45,66	— 0,37 <i>da</i>	— 1,62 <i>dδ</i>	+ 0,04 <i>dφ</i>	
<b>Media <math>\alpha</math> =</b>			<b>311° 35' 47,60</b>	<b>— 0,43 <i>da</i></b>	<b>— 1,50 <i>dδ</i></b>	<b>+ 0,03 <i>dφ</i></b>

Relaciones diferenciales para calcular el valor del acimut en el vértice Ssuprunkowzi.

El valor medio, que figura en el cuadro, prácticamente coincide con el determinado por Tenner, pues sólo se diferenciaron en  $0''.04$ . De manera que hallado su error probable ( $0''.48$ ), Struve fijó el valor definitivo del acimut Suprunkowzi- Karatschkowzi en  $311^{\circ}35'47''.60 \pm 0''.48$ .

Melan fue igualmente el responsable de efectuar las observaciones astronómicas del acimut en el vértice Kremenetz, en los días que van del 30 de agosto al 2 de septiembre del año 1837. El instrumento empleado fue el mismo que utilizaría un año después. Struve señalaba que en esta ocasión había ocurrido con las ascensiones rectas lo mismo que en la estación anterior, aunque la corrección para el acimut medio fuese casi despreciable, de sólo  $0''.01$ . No obstante hubo que corregir las seis punterías por el efecto de la aberración diurna, al igual que las declinaciones aparentes de la polar idéntico número de veces. Las correcciones para la fecha del 1 de septiembre, según las *Tabulae Regiomontanae* fueron de  $\Delta\alpha = 0''.68$  y  $\Delta\delta = -0''.12$ . El cálculo de los acimutes se efectuó con la latitud de  $50^{\circ}5'43''.48$ , la cual se dedujo a partir de la unión geodésica con Kremenetz, en lugar de la más ajustada:  $50^{\circ}5'50''.0$ . Contemplando todas esas correcciones, presentó Struve los seis acimutes obtenidos para la señal de Gurniki:

			Acimut.			
1837.	30 Agosto	16 <sup>A</sup> 20' tiempo sid.	18° 7' 15,67	— 0,40 dα	— 1,12 dδ	+ 0,03 dφ
	31 »	7 21	17,33	— 0,07 dα	+ 1,54 dδ	— 0,04 dφ
	1 Sept.	15 31	18,60	— 0,49 dα	— 0,89 dδ	+ 0,03 dφ
	1 »	7 12	17,70	— 0,07 dα	+ 1,54 dδ	— 0,04 dφ
	2 »	15 12	17,85	— 0,52 dα	— 0,79 dδ	+ 0,02 dφ
	2 »	6 50	17,27	— 0,00 dα	+ 1,56 dδ	— 0,04 dφ
Media a =			18° 7' 17,40	— 0,26 dα	+ 0,31 dδ	— 0,01 dφ.

Relaciones diferenciales para calcular el valor del acimut astronómico en el vértice Kremenetz.

Aunque Tenner diera en su momento un error probable de  $0''.18$ , Struve lo fijó en  $0''.35$ , con lo que el acimut definitivo de la visual Kremenetz-Gurniki fue de  $18^{\circ}7'17''.40 \pm 0''.35$ .

Struve se detuvo especialmente en la estación de Belin, en donde se determinó el acimut entre el 18 de julio y el 27 de septiembre del año 1827. El operador fue el teniente Chodzko, el cual usó un anteojo de pasos instalado en el meridiano, con una longitud de 41.6 pulgadas, un objetivo con 29.6 líneas de abertura y tres oculares con 60, 37 y 24 aumentos; contando además su retículo con cinco hilos para la observación de los pasos. El instrumento se apoyaba sobre dos pilares, sólidamente anclados al terreno. Paralelamente, fue determinada la latitud del lugar por Tenner, mediante otro anteojo de pasos mayor estacionado en el primer vertical. Ambos instrumentos se colocaron uno junto al otro, en un observatorio provisional construido al efecto.

La hora se obtuvo en los dos casos con un péndulo construido por el inglés William Hardy, propiedad del Observatorio de Vilnius. En realidad, las observaciones astronómicas de Chodzko tuvieron un doble objeto: estudiar la marcha del reloj y hallar el acimut de la mira meridiana, visible día y noche, y colocada a unas 1073 toesas al Sur de la estación. Gracias a los ajustes previos de Tenner, pudo Chodzko observar directamente los pasos de las estrellas por el círculo

vertical de la mira. Estas fueron las estrellas observadas: 12 con una ascensión recta comprendida entre  $16^{\text{h}} 19^{\text{m}}$  y  $22^{\text{h}} 48^{\text{m}}$ , de las que tres fueron australes (Antares,  $\alpha^2$  de Capricornio y  $\alpha$  de *Piscis Austrinus*<sup>91</sup>) con declinación media de  $-23^{\circ}3'$  y nueve boreales de las constelaciones del Dragón, Lira y Cisne, con una declinación media de  $46^{\circ}6'$ . Los pasos tenían lugar entre las horas favorables de la tarde y de la medianoche, un periodo en el que la observación de la mira se podía hacer con más garantías.



Dos imágenes de la constelación del Pez Austral. La imagen izquierda figuraba en un globo celeste de Mercator. La de la derecha es una versión moderna de la misma, en la que destaca la estrella Fomalhaut. Dicha estrella es la más luminosa de la constelación y una de las más brillantes del cielo, su denominación procede del árabe (boca del pez). Se encuentra a unos 25 años luz de nuestro sistema solar. En el año 2008 se descubrió un planeta en la periferia del anillo que la rodea.

El acimut de la mira se basó pues en la observación de las estrellas que se acaban de comentar. En cuanto a su exactitud, dependería como ya es sabido del grado de certidumbre asociado a las diferencias en ascensión recta de las estrellas cenitales y las más próximas al horizonte. Tenner contaba al efecto con los catálogos *Königsberger Beobachtungen*<sup>92</sup>, confeccionados por Bessel en 1821 y 1825. Apoyándose en ellos decidió dejar de lado el acimut obtenido a partir de los pasos de la estrella polar y optar por la observación de las catalogadas<sup>93</sup>. Tenner estuvo convencido de que procediendo así el acimut obtenido para la mira sería extremadamente fiable. Sin embargo, Struve enmendó sus resultados, apoyándose en una circunstancia que pasó desapercibida para Tenner, el hecho de que las ascensiones rectas proporcionadas por Bessel en 1821 y en 1825 no eran directamente comparables<sup>94</sup>: las ascensiones rectas de 1815 eran unos

<sup>91</sup> Fue una de las constelaciones listadas por Tolomeo, el Pez del Sur. En la iconografía celeste se solía representar tragándose el agua de Acuario. En la mitología astronómica se comentaba que los dos peces del signo del zodiaco descendían del gran pez anterior.

<sup>92</sup> En el volumen VI (1821) se recogían las ascensiones rectas de 58 estrellas circumpolares, obtenidas con el círculo meridiano de Reichenbach, en las dos posiciones del instrumento y en las dos culminaciones. En el volumen núm. X (1825) figuraron las 36 estrellas fundamentales.

<sup>93</sup> El volumen XI (1826) de la misma colección, en el que se recogían las efemérides de la estrella polar, aún no obraba en su poder.

<sup>94</sup> Struve aclaraba que las primeras se habían basado en un catálogo fundamental de Koenigsberg de 1815, confeccionado a partir de las observaciones efectuadas con los antiguos instrumentos de Dollond y de William Cary, y Bessel no había corregido las ascensiones rectas que debían figurar en su catálogo de 1825, adoptado para la formación de sus *Tabulae Regiomontanae*.

0<sup>s</sup>.05 mayores que las de 1825. De acuerdo con los cálculos de Chodzko, dedujo Tenner que el acimut de la mira meridiana debería ser de  $-0'' .69 \pm 0'' .21$ , de modo que estaría al Oeste del Sur.

En cambio, con el ajuste en las ascensiones rectas propuesto por Struve ( $-0^s .039$ ) el acimut de la mira sería prácticamente cero ( $-0'' .07 \pm 0'' .21$ ). Seguía comentando el geodesta que ese no podía considerarse como el valor definitivo deducido de las observaciones realizadas por Chodzko, ya que la media no se obtuvo conforme a la verdadera naturaleza de los datos. Este presentó una tabla con 113 acimutes diferentes, hallados a partir de la comparación de tres estrellas australes con diferentes estrellas boreales; cuando era obvia la necesidad de formar tres grupos, uno para cada estrella. Así lo hizo en un principio Struve, aunque al final decidiera rehacer por completo el cálculo del acimut en Belin, basándose en las ascensiones rectas, de sus *Positiones mediae*, fijadas atendiendo a los valores exactos de la aberración y de la nutación. En la tabla adjunta se detallan las seis estrellas elegidas, así como las diferencias que presentaban con relación a los valores homólogos de Tenner, en el año 1827:

*Ascensiones rectas fijadas en las Positiones Mediae*

Estrella	Valores	$\Delta$ Tenner
$\alpha$ Escorpio	$16^h 18^m 48^s .884 \pm 0^s .026$	$0^s .013$
$\gamma$ Dragón	$17^h 52^m 35^s .538 \pm 0^s .015$	$-0^s .025$
$\alpha$ Lira	$18^h 31^m 4^s .887 \pm 0^s .008$	$-0^s .007$
$\alpha^2$ Capricornio	$20^h 8^m 27^s .038 \pm 0^s .011$	$0^s .052$
$\gamma$ Cisne	$20^h 16^m 1^s .234 \pm 0^s .018$	$-0^s .124$
$\alpha$ Cisne	$20^h 35^m 32^s .166 \pm 0^s .010$	$-0^s .001$

Continuaba Struve afirmando que con esas posiciones medias había deducido las ascensiones rectas aparentes, basándose en los coeficientes de aberración ( $20'' .445$ ) y de nutación ( $9'' .223$ ), habiéndolos corregido igualmente por el efecto de la aberración diurna. Tras tales ajustes, obtuvo los dos acimutes siguientes:  $0'' .29 \pm 0'' .56$  y  $2'' .44 \pm 0'' .81$ , correspondiendo el primero a la observación de la estrella  $\alpha$  de Escorpión, durante 29 días, y el segundo a la  $\alpha^2$  de Capricornio, durante siete días; resultando por tanto un acimut medio de  $1''$  al Este del Sur<sup>95</sup>, con un error probable de  $\pm 0'' .46$ . Todavía se tenía que pasar del acimut de la mira, observada en el centro del anteojo meridiano, al de la dirección Belin-Leskowitschi.

Esa transformación fue cuidadosamente realizada por Tenner sobre el terreno, colocando una segunda mira al Oeste de la primera y a igual distancia que estaba Belin, al Oeste de la línea trazada desde el centro del anteojo meridiano a esa primera mira. Acto seguido se midió el ángulo formado por la segunda mira y el vértice Leskowitschi, con un círculo repetidor de Troughton, estacionado en Belin. El acimut buscado se fijó en  $61^{\circ}44' 6'' .48$ , posteriormente corregido por Struve:  $61^{\circ}44' 4'' .79 \pm 0'' .91$ , en los  $1'' .69$  ya citados a propósito de Chodzko.

<sup>95</sup> Struve lo consideró como el valor definitivo que provenía de las observaciones efectuadas por Chodzko, aunque difiriera del consignado por él en  $1'' .69$ .



Triángulos geodésicos en los alrededores del vértice Belin.

No obstante, perfiló aún más su análisis al corroborar que el error de  $0''.91$  era demasiado pequeño, por no haber tenido en cuenta la temible influencia de la flexión, que en el antiguo anteojo meridiano de Dorpat se estimó en  $4''.2$ . Pensando que el instrumento empleado en Belin, era mucho más pequeño, presumió que el error inducido por ella sobre el acimut sería bastante más pequeño, de ahí que lo evaluara en sólo  $2''$ . Consecuentemente, si se identificara como la magnitud final del error probable, la corrección última para el acimut sería el resultado de componerlo con el anterior de  $0''.91$ , llegando a  $61^{\circ}44' 4''.79 \pm 2''.20$ .

La estación astronómica de Nemesch mereció también una atención especial en la memoria redactada por Struve. El acimut fue observado por Hluschnewitsh en el periodo comprendido entre el 31 de julio y el 18 de octubre de 1832, aunque las medidas efectuadas por este astrónomo del Observatorio de Vilnius, fuesen publicadas, junto a los cálculos respectivos por Tenner<sup>96</sup>. El futuro general ya había colocado, en 1818, sobre el meridiano de Nemesch la señal de Meschkanzi, empleando para ello un anteojo de pasos cuya calidad no aseguró la fiabilidad del acimut. La verificación del mismo la realizó, en el año 1832, precisamente Hluschnewitsch, usando un anteojo de pasos, de 5.5 pies, fabricado por Ramsden<sup>97</sup>. Para ello se construyó, en 1832, un observatorio provisional centrado en la estación de Nemesch, en la que además de situar el anteojo de pasos, se instaló un péndulo de M. J. Lepante, para determinar la hora.

<sup>96</sup> *Zanucku* (Volumen IX, pp. 843-881).

<sup>97</sup> Con este instrumento, cedido por su observatorio, también determinó Tenner la latitud de Belin.



Detalle de su punto central.

Anteojo de pasos de Ramsden.

Construida la señal de Meschkanzi y establecido el meridiano de Nemesch, se colocó una mira a 834.33 toesas en la prolongación del mismo. Observando minuciosamente, en las dos posiciones del instrumento, los dos operadores actuaron al unísono y consideraron que la mira estaba a  $1''.54$  del referido meridiano. Las estrellas elegidas fueron  $\alpha$ ,  $\delta$  y  $\beta$  de la Osa menor, aparte de un número suficiente de estrellas fundamentales. Cuando Struve se responsabilizó del cálculo de las observaciones, Tenner le remitió una copia autenticada de su diario, deduciendo primeramente el estado y la marcha del reloj empleado. Struve eligió las estrellas  $\alpha$  y  $\delta$  de la Osa menor, en combinación con otras fundamentales, para calcular el acimut de la mira apoyándose en las ascensiones rectas de las efemérides de Berlín. Sin embargo, para uniformizar la obtención de los diferentes acimutes, rehízo todos los cálculos relativos al acimut de Nemesch basándose en las posiciones aparentes que figuraban en la repetida obra *Positiones mediae*; anotando a su vez las correcciones de la nutación y de la aberración. Con el ánimo de perfeccionar todavía más el resultado, Struve efectuó observaciones complementarias de una tercera estrella circumpolar, la  $\beta$  de la Osa menor, refiriendo el cálculo a la época de la observación (1832).

Los datos obtenidos por Struve fueron los siguientes:

1. Comparando los 33 acimutes aislados con sus respectivas medias, se obtuvo un error probable de  $2''$  para un acimut aislado a través de la estrella polar, disminuyendo hasta  $0''.36$  el del resultado; fijando el acimut de la mira en  $3''.90$ .
2. Con la estrella  $\delta$  de la misma constelación, se obtuvo un acimut aislado con un error probable de  $2''.97$ , al comparar los 11 valores y sus respectivas medias; evaluando el acimut de la mira ( $5''.67$ ) con un error de  $0''.93$ .
3. Procediendo de igual modo con la estrella  $\beta$  se obtuvo un error probable de  $2''.23$  para la observación aislada y de  $0''.44$  para el resultado final del acimut de la mira ( $5''.04$ ).

4. Los pesos respectivos fueron de 6.67 en el primer caso, 1 en el segundo y 4.47 en el tercero.

Struve estimó el valor medio del acimut de la mira en  $4''.87 \pm 0''.27$  (al Este del Sur), creyendo que los tres acimutes mostraban un acuerdo satisfactorio, pues al hallar el error probable de la media y tener en cuenta los pesos indicados, resultaron sólo  $0''.27$ . Estando la mira  $1''.54$  al Este de la prolongación meridional del lado Nemesch-Meschkanzi, el acimut de dicha prolongación sería  $4''.87 - 1''.54$ , es decir  $3''.33 \pm 0''.27$ ; con lo que el acimut de la señal de Meschkanzi sería de  $359^\circ 59' 56''.67 \pm 0''.27$ .

El acimut en el vértice de Jacobstadt fue determinado por Struve entre el 25 y el 29 de mayo del año 1826. Los detalles de las observaciones, y de los cálculos, los incluyó en su conocida publicación *Gradmessung II*. El resumen de sus resultados figuran en el cuadro siguiente:

		Acimut.				
1826. Mayo 25.	10 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> tiempo sid.	312° 22' 3,30	— 0,57 dα	+ 1,05 dδ	— 0,05 dφ	
26.	10 46	4,45	— 0,61 dα	+ 0,91 dδ	— 0,04 dφ	
26.	11 37	4,40	— 0,67 dα	+ 0,59 dδ	— 0,03 dφ	
27.	10 53	4,02	— 0,62 dα	+ 0,87 dδ	— 0,04 dφ	
27.	11 33	2,34	— 0,67 dδ	+ 0,59 dδ	— 0,02 dφ	
28.	11 23	3,15	— 0,66 dα	+ 0,68 dδ	— 0,03 dφ	
<b>Media α =</b>		<b>312° 22' 3,61</b>	<b>— 0,63 dα</b>	<b>+ 0,78 dδ</b>	<b>— 0,03 dφ.</b>	

Parte de los cálculos realizados para obtener el acimut en la estación astronómica de Jacobstadt.

Obteniendo para el acimut final un error probable de  $0''.53$ . La referencia terrestre elegida fue la señal vertical colocada en el vértice Dabors-Kalns, aunque realmente presentase una excentricidad suficiente como para corregir el acimut en  $-1''.26$ . El valor finalmente adoptado para el acimut del lado Jacobstadt-Dabors-Kalns fue por lo tanto de  $312^\circ 22' 2''.35 \pm 0''.53$ .

La octava estación reseñada por Struve tuvo para él un valor especial, al tratarse del punto localizado en el antiguo Observatorio de Dorpat. Las observaciones las realizó el propio Struve a lo largo de los años 1824 (6 determinaciones), 1827 (6 determinaciones) y 1831 (12 determinaciones). La referencia terrestre seleccionada fue la señal de Kersel. El instrumento empleado fue un teodolito universal del Observatorio. En los dos primeros años se visó directamente la señal, pero en 1831 se empleó una mira blanca, sobre fondo negro, midiendo el ángulo ( $\omega$ ) que formaba con aquella. Como ocurría en la estación anterior, se detallaron las observaciones a la polar y los correspondientes cálculos en su *Gradmessung II*. En todos los casos hubo que efectuar reducciones al centro de la estación. En la Memoria, cuya trascendencia científica se está reivindicando, figura un cuadro resumen con los 24 acimutes ya reducidos, que se transcriben a continuación:

		Acimut.			
1824.	Junio 5. 11 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup> tiempo sid.	337° 36' 36,85	— 0,73 $d\alpha$	+ 0,66 $d\delta$	— 0,03 $d\varphi$
	» 7. 12 2	35,80	— 0,76 $d\alpha$	+ 0,45 $d\delta$	— 0,02 $d\varphi$
	» 13. 12 22	37,33	— 0,77 $d\alpha$	+ 0,27 $d\delta$	— 0,01 $d\varphi$
	» 14. 11 21	36,16	— 0,71 $d\alpha$	+ 0,72 $d\delta$	— 0,03 $d\varphi$
	» » 12 21	39,68	— 0,76 $d\alpha$	+ 0,27 $d\delta$	— 0,01 $d\varphi$
	» 16. 12 51	36,70	— 0,78 $d\alpha$	+ 0,09 $d\delta$	— 0,00 $d\varphi$
1827.	Julio 30. 14 56	37,22	— 0,68 $d\alpha$	— 0,84 $d\delta$	+ 0,04 $d\varphi$
	» 31. 14 13	39,94	— 0,73 $d\alpha$	— 0,54 $d\delta$	+ 0,02 $d\varphi$
	» » 14 40	39,40	— 0,69 $d\alpha$	— 0,75 $d\delta$	+ 0,03 $d\varphi$
	» » 15 7	40,85	— 0,66 $d\alpha$	— 0,92 $d\delta$	+ 0,04 $d\varphi$
	Agosto 1. 14 47	38,80	— 0,68 $d\alpha$	— 0,79 $d\delta$	+ 0,04 $d\varphi$
	» 3. 14 58	39,01	— 0,68 $d\alpha$	— 0,84 $d\delta$	+ 0,04 $d\varphi$
1831.	Agosto 25. 17 17	41,20	— 0,36 $d\alpha$	— 1,65 $d\delta$	+ 0,07 $d\varphi$ + $d\omega$
	» 29. 16 47	37,95	— 0,44 $d\alpha$	— 1,52 $d\delta$	+ 0,07 $d\varphi$ + $d\omega$
	» » 17 20	39,53	— 0,36 $d\alpha$	— 1,65 $d\delta$	+ 0,07 $d\varphi$ + $d\omega$
	» » 5 8	41,27	+ 0,36 $d\alpha$	+ 1,75 $d\delta$	— 0,08 $d\varphi$ + $d\omega$
	» » 5 47	40,58	+ 0,21 $d\alpha$	+ 1,85 $d\delta$	— 0,08 $d\varphi$ + $d\omega$
	» 30. 16 30	41,08	— 0,48 $d\alpha$	— 1,42 $d\delta$	+ 0,06 $d\varphi$ + $d\omega$
	Sept. 1. 5 19	41,14	+ 0,32 $d\alpha$	+ 1,79 $d\delta$	— 0,08 $d\varphi$ + $d\omega$
	» » 5 53	44,26	+ 0,19 $d\alpha$	+ 1,86 $d\delta$	— 0,08 $d\varphi$ + $d\omega$
	» 3. 6 26	41,34	+ 0,09 $d\alpha$	+ 1,89 $d\delta$	— 0,08 $d\varphi$ + $d\omega$
	» » 7 13	38,43	— 0,08 $d\alpha$	+ 1,88 $d\delta$	— 0,08 $d\varphi$ + $d\omega$
	» 5. 17 2	40,93	— 0,41 $d\alpha$	— 1,58 $d\delta$	+ 0,07 $d\varphi$ + $d\omega$
	» 7. 17 14	39,49	— 0,36 $d\alpha$	— 1,61 $d\delta$	+ 0,07 $d\varphi$ + $d\omega$
<b>Media <math>\alpha</math></b>		<b>337° 36' 39,37</b>	<b>— 0,41 <math>d\alpha</math></b>	<b>— 0,24 <math>d\delta</math></b>	<b>+ 0,01 <math>d\varphi</math> + 0,5 <math>d\omega</math>.</b>

Detalle de los cálculos para la obtención del acimut en el Observatorio Astronómico de Dorpat.

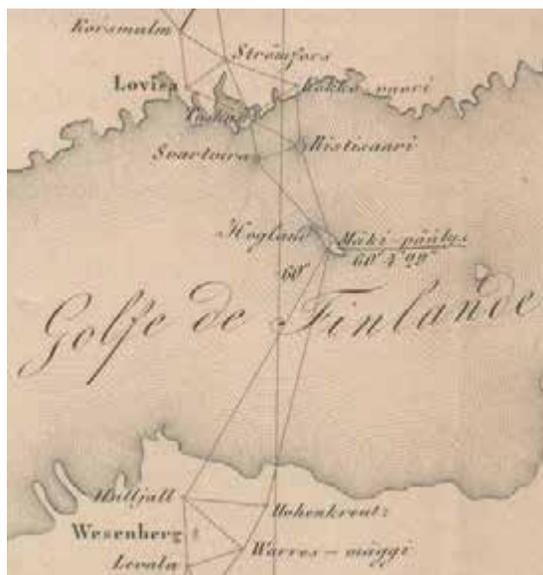
Struve reconocía que los acimutes obtenidos en 1824 fueron los menos exactos de la serie, en tanto que fueron los primeros en ser determinados por él. Sin embargo prefirió incorporarlos para no efectuar selecciones arbitrarias. También justificaba para las observaciones del año 1831, la inclusión del elemento diferencial  $d\omega$ , relativa al ángulo terrestre. El error probable de la media aritmética fue de  $0''.25$  y el final considerado para el acimut,  $0''.35$ . Struve trajo a colación otra determinación, realizada en 1824, completamente independiente de las otras, apoyándose en el ángulo entre una mira meridiana y la señal Kersel, localizada al Oeste de aquella. Siendo su valor de  $22^\circ 23'30''.33 \pm 0''.28$  y el acimut de la mira  $10''.07 \pm 0''.16$  al este del Norte, resultó que Kersel se encontraba a  $22^\circ 23'20''.26 \pm 0''.32$  al Oeste del Norte; lo que equivalía a fijar su acimut en  $337^\circ 36'39''.74 \pm 0''.32$ . Haciendo la media de los dos valores se obtendría para la dirección Dorpat<sup>98</sup>-Kersel el acimut siguiente:  $337^\circ 36'39''.55 \pm 0''.24$ .

<sup>98</sup> El acimut se refirió al centro de la torre del antiguo Observatorio.



Instrumentos matemáticos en el Observatorio de Tartu (Dorpat).

Struve fue asimismo el responsable de la medida del acimut en la estación astronómica situada en la isla de Hogland, la cual efectuó durante los días 15 y 16 de agosto del año 1826. Desde tal punto, localizado sobre una de las colinas de la isla y a una altitud de 90 toesas con relación al nivel de las aguas del golfo de Finlandia, se obtendría el acimut del campanario de Halljall (Estonia), a unas 42000 toesas. Al mismo tiempo debería medir el ángulo entre dicho campanario y el vértice de Hohenkreutz, igualmente localizado en aquella zona continental. Las observaciones de Struve fueron sumamente dificultosas, a causa del humo que envolvía la isla y que había sido causado por los incendios forestales que asolaron Finlandia durante aquel verano. Struve recordaba que ni el campanario ni el vértice eran visibles, a pesar de haber instalado en ellos potentes heliotropos. Tuvieron que pasar varias semanas, para que un viento procedente del Oeste limpiase la atmósfera y pudiese observar la luz reflejada por ambos instrumentos, el 29 y el 30 de agosto. El mismo día 29 pudo visar seis veces una mira, de la que ya había determinado su acimut los días 15 y 16 del mismo mes, y al siguiente hizo lo propio con los dos heliotropos, midiendo por tanto el tercer ángulo del triángulo más septentrional del gran arco ruso.



La isla de Hogland en la cadena geodésica, extremo septentrional del arco de meridiano medido por W. von Struve.

La mira, de la que se determinó el acimut, se había colocado en una caseta cercana al faro que se encontraba en la cumbre situada al Norte de la isla. La caseta distaba 1230 toesas de la estación Mäki-Päällys y la mira siempre era visible por lo elevado del terreno. El diario de las observaciones fue recogido en el *Gradmessung II*, aunque los correspondientes cálculos figurasen en el *Gradmessung I*. Struve resumió en la tabla adjunta los acimutes provisionales que había obtenido:

		Acimut.		
1826, Agosto 15.	16 <sup>A</sup> 24 <sup>m</sup> tiempo sid.	335° 56' 28,06	+ x — 0,53 dα	— 1,46 dδ + 0,07 dφ
» »	16 57	26,36	+ x — 0,44 dα	— 1,64 dδ + 0,08 dφ
» »	3 2	32,23	+ x + 0,75 dα	+ 1,09 dδ — 0,05 dφ
» »	3 36	30,42	+ x + 0,66 dα	+ 1,33 dδ — 0,07 dφ
» 16.	15 31	28,19	+ x — 0,64 dα	— 1,12 dδ + 0,06 dφ
» »	16 19	25,49	+ x — 0,55 dα	— 1,43 dδ + 0,07 dφ
	Media	335° 56' 28,46	+ x — 0,12 dα	— 0,54 dδ + 0,03 dφ.

Extracto de los cálculos para determinar el acimut astronómico en la isla de Hogland.

Siendo de  $126^{\circ}47'11''.19 + x \pm 0''.39$ , el ángulo entre la mira y el campanario, resultaba para el mismo un acimut dado por  $209^{\circ}9'17''.27 - 0.12 d\alpha - 0.54 d\delta + 0.03 d\phi \pm 0''.59$ ; con un error probable de  $0''.60$ . De ahí que, efectuadas las oportunas sustituciones, se obtuviese finalmente el valor de  $209^{\circ}9'17''.27 \pm 0''.60$ , para el acimut del lado Mäki-Päällys- Halljall.

Una vez obtenidos los acimutes determinados en cada una de las estaciones astronómicas, dedujo Struve el de todos los lados de la triangulación que concurrían en las mismas; teniendo en cuenta las vueltas de horizonte practicadas al efectuar las medidas de los ángulos horizontales. Junto a ellos, añadió los logaritmos de los lados correspondientes, tal como se recoge en la siguiente relación:

I. STARO-NEKRASSOWKA.		
	Log. de la distancia	Acimut.
1. ISMAIL . . . . .	3,5277623.3	270° 56' 5,51 ± 0,44 = A'
2. SSAFLANOWKA . . . . .	3,6905541.3	334 2 13,52 ± 0,71
II. WODOLUI.		
1. PLOSKA . . . . .	4,3506208.5	90° 41' 34,42 ± 0,93
2. DSCHAMANA . . . . .	4,1565250.0	157 41 27,08 ± 0,74 = A''

Distancias y acimutes en las nueve estaciones astronómicas del gran arco ruso.

	Log. de la distancia	Acimut.
3. RESENI . . . . .	4,2831442.2	204 23 38,65 $\mp$ 0,93
4. SSURUTSCHENI . . . . .	4,2124602.0	278 50 33,70 $\mp$ 1,09
5. PERESSETSCHINO . . . . .	4,2444537.2	321 44 30,58 $\mp$ 1,23
III. SSUPRUNKOWZI.		
1. KARATSCHKOWZI . . . . .	4,0997496.5	311° 35' 47,60 $\mp$ 0,48 = A'''
2. HANOWKA . . . . .	4,0187611.8	12 45 30,49 $\mp$ 0,84
3. SAGORJANE . . . . .	4,0848193.3	92 36 35,63 $\mp$ 1,09
4. WOLTSCHENETZ . . . . .	4,2235926.3	164 10 41,60 $\mp$ 1,42
IV. KREMENETZ.		
1. SMORDWA . . . . .	4,2957005.6	340° 27' 57,67 $\mp$ 0,78
2. GURNIKI . . . . .	4,2396638.2	18 7 17,40 $\mp$ 0,35 = A''
3. MOSTY . . . . .	4,0993376.8	62 29 12,00 $\mp$ 0,78
4. MATWEJEWZI . . . . .	4,0977447.2	124 34 20,95 $\mp$ 1,04
V. BELIN.		
1. BESDESCH . . . . .	4,2100345.7	8° 24' 30,86 $\mp$ 2,29
2. LESKOWITSCHI . . . . .	4,1495690.2	61 44 4,79 $\mp$ 2,20 = A'
3. SCHLÄPAN . . . . .	4,1229242.0	136 54 53,20 $\mp$ 2,29
4. BOLSCHAJA-GLUSCHA . . . . .	4,1760273.0	206 20 25,23 $\mp$ 2,38
VI. NEMESCH.		
1. NABOROWTSCHISNA . . . . .	4,2399872.2	280° 23' 41,08 $\mp$ 0,85
2. MESCHKANZI . . . . .	4,2048433.5	359 59 57,07 $\mp$ 0,57 = A''
3. CHORUNTSCHISCHI . . . . .	4,2010238.4	40 21 12,94 $\mp$ 0,85
4. KONRADI . . . . .	4,1782631.9	78 25 10,15 $\mp$ 1,06

Distancias y acimutes en las nueve estaciones astronómicas del gran arco ruso (continuación).

VII. JACOBSTADT.		
	Log. de la distancia	Acimut.
1. DABORS-KALNS.....	3,8466493.6	312° 22' 2",35 ± 0",53 = A <sup>VII</sup>
2. KREUTZBURG.....	2,7554339.9	6 15 26,82 ± 0,66
VIII. DORPAT.		
1. ARROHOF.....	4,0724390.0	241° 38' 12",60 ± 0",40
2. KERSEL.....	4,2389990.6	337 36 39,55 ± 0,24 = A <sup>VIII</sup>
IX. MÄKI-PÄÄLVS.		
1. HOHENKREUTZ.....	4,5838766.4	192° 49' 0",31 ± 0",73
2. HALLJALL.....	4,6225699.2	209 9 17,27 ± 0,60 = A <sup>IX</sup>

Distancias y acimutes en las nueve estaciones astronómicas del gran arco ruso (continuación).

El arco escandinavo, prolongación septentrional del gran arco ruso, contó con las cinco estaciones astronómicas que se incluyen en la tabla siguiente, detallándose las observaciones efectuadas sobre ellas en el tomo II de la Memoria presentada por Struve a la Academia Imperial de San Petersburgo:

*Estaciones del arco escandinavo en que se determinó al acimut*

Núm.	Nombre	Localización	Latitud
9	Mäki-Päälvs	Punto extremo meridional. Vértice geodésico en la isla de Hogland	60°4'29".4
10	Kilpi-Mäki	Vértice central de Finlandia	62°38'5.0
11	Tornio	Iglesia del distrito. Vértice meridional del arco de Laponia	65°49'44".7
12	Stuor-Oivi	Vértice septentrional del arco de Laponia	68°40'58".4
13	Fuglenaes	En la isla de Kval-oe, extremo septentrional del arco total	70°40'11".3
El error probable de las latitudes apenas alcanzó los 0".5			

Struve indicó que las número 9 y 10 habían sido observadas por Woldstadt y Fedorenko, realizándose con un teodolito universal fabricado en los talleres de Reichenbach. Los astrónomos responsables de las 11 y 13 fueron Lindhagen y Wagner, empleando en sus observaciones el teodolito universal de Ertel. La estación número 12 corrió a cargo de Selander, el cual se valió de un teodolito universal de Repsold, recientemente construido, provisto de un círculo vertical de 9.5 pulgadas. Los tres primeros siguieron la metodología que ya se comentó a propósito de la estrella polar (*Gradmessung I*, pp. 100-107 y pp. 324-334). Selander refirió en la carta que acom-

pañaba a su Memoria (10 agosto de 1855), sobre las operaciones geodésicas de Laponia, que también se valió de la estrella polar para calcular el acimut, pero que empleó otro procedimiento.

Aunque en un principio se pensara que la estación astronómica de la isla de Hogland podría servir de enlace entre los dos arcos de meridiano, ruso y escandinavo, el acimut determinado allí en 1826 no fue válido para el segundo de ellos. En efecto, sus resultados no pudieron trasladarse a los triángulos de Finlandia, por la sencilla razón de que en aquel tiempo todavía no se habían proyectado. De hecho no se decidió prolongar el arco de meridiano hasta el año 1830, aunque debieron pasar trece años para que Woldstedt visitase la isla. Las condiciones cambiaron mucho en esos años, concretamente no existía ya la flecha del campanario que tenía la iglesia de Halljall, al Sur del golfo, por haberla destruido un rayo años atrás; también había desaparecido la otra señal de Hohenkreutz. La consecuencia era obvia, el acimut deducido en 1826 no valía para hallar los correspondientes a los demás vértices situados al Norte de la isla; de manera que Woldstedt no tuvo más remedio que efectuar una nueva determinación. Las observaciones no se realizaron en realidad en el vértice Mäki-Päällys, sino sobre otros dos situados más al Norte: Ristisaari y Kokko-Vuori; con la ventaja de que la distancia entre estos dos no era excesiva, de modo que fue posible la obtención recíproca del acimut. Por otro lado, tales acimutes sí pudieron transportarse al vértice de la isla, apoyándose en el triángulo geodésico formado por los tres puntos; logrando finalmente calcular el acimut de las nuevas direcciones que partían de Mäki-Päällys.

Woldstedt realizó las observaciones, en el vértice Ristisaari, durante los días 14 y 15 de agosto de 1843. Con el teodolito universal hizo múltiples medidas terrestres (ángulos horizontales y verticales) y astronómicas (latitud, hora<sup>99</sup> y acimut). Midiendo las distancias cenitales de la polar, en varias ocasiones y en las dos posiciones del círculo, obtuvo la latitud de la estación,  $60^{\circ}18'53''.7$ , que, adoleciendo de un error probable cifrado en  $2''.1$ , era suficientemente exacta para calcular el acimut por observaciones a la misma estrella, en horas variables. Al final tuvo que reducir los resultados al centro de la estación, con las consiguientes correcciones para los ángulos horizontales y para el acimut Ristisaari-Kokko-vuori. Teniendo en cuenta los valores diferenciales  $\Delta\alpha = 0^s.84$  y  $\Delta\delta = 0''.04$ , dados por las *Tabulae Regiomontanae* para el día 15, dedujo los valores provisionales siguientes:

		Acimut.				
1843. Agosto 14.	14,5 tiempo sid.	356° 26' 56,70	— 0,70 da	— 0,66 dδ	+ 0,04 dφ	
	3,6 » »	58,70	+ 0,63 da	+ 1,27 dδ	— 0,06 dφ	
	4,5 » »	60,87	+ 0,47 da	+ 1,58 dδ	— 0,08 dφ	
» 15.	14,5 » »	59,00	— 0,71 da	— 0,66 dδ	+ 0,03 dφ	
	15,5 » »	51,99	— 0,63 da	— 1,07 dδ	+ 0,05 dφ	
	16,8 » »	56,85	— 0,44 da	— 1,52 dδ	+ 0,08 dφ	
<b>Media a =</b>		<b>356° 26' 57,35</b>	<b>— 0,23 da</b>	<b>— 0,18 dδ</b>	<b>+ 0,01 dφ.</b>	

Relaciones diferenciales planteadas con relación a los acimutes observados en el vértice Ristisaari.

<sup>99</sup> La marcha y el estado del reloj las dedujo combinando las lecturas acimutales de la estrella polar con las de otras estrellas fundamentales.

Struve fijó en  $0''.790 \sec \phi$  el error probable para una observación aislada, de modo que introduciendo el valor de la latitud resultó  $1''.6$ . Análogas consideraciones a las efectuadas en las estaciones astronómicas del arco ruso, le permitieron obtener la indeterminación en el acimut ( $0''.67$ ) y la reducción al centro de la estación ( $-51''.21$ ), con lo que el acimut del vértice Kokko-Vuori fue de  $356^\circ 26' 6''.14 \pm 0''.6$ .

La medida del acimut en dicho vértice se efectuó entre los días 23 y 27 de agosto, partiendo de una latitud de  $60^\circ 27' 43''.6 \pm 2''.1$ , siguiendo una metodología prácticamente idéntica a la del otro punto. Las correcciones  $\Delta\alpha$  y  $\Delta\delta$  fueron ahora de  $0''.84$  y de  $0''.05$  respectivamente, proporcionando los acimutes provisionales que se indican:

		Acimut.			
1843. Agosto 24.	4,5 tiempo sid.	176° 24' 26,21	+ 0,48 da	+ 1,58 dδ	— 0,08 dφ
	5,7 » »	24,30	+ 0,23 da	+ 1,84 dδ	— 0,09 dφ
» 26.	4,5 » »	28,36	+ 0,48 da	+ 1,58 dδ	— 0,07 dφ
	5,9 » »	29,61	+ 0,19 da	+ 1,86 dδ	— 0,09 dφ
» 27.	5,1 » »	28,30	+ 0,36 da	+ 1,74 dδ	— 0,08 dφ
<b>Media α =</b>		<b>176° 24' 27,36</b>	<b>+ 0,35 da</b>	<b>+ 1,72 dδ</b>	<b>— 0,08 dφ.</b>

Relaciones diferenciales planteadas con relación a los acimutes observados en el vértice Kokko-Vuori.

Supuesto un error probable para el acimut final de  $0''.83$  y una reducción al centro de  $44''.67$ , el acimut del vértice Ristisaari sería de  $176^\circ 25' 12''.03 \pm 0''.83$ .

Conocidos los dos acimutes recíprocos se procedió a transportarlos al vértice Mäki-Päällys. El problema astronómico y geodésico lo resolvió Struve a partir de la latitud de ese vértice, que consideró definitiva por su elevada exactitud, teniendo en cuenta además los valores de los referidos acimutes y los triángulos geodésicos de la cadena involucrados en esta operación; el cuadro adjunto detalla los datos seleccionados:

*Transporte del acimut al vértice Mäki-Päällys*

Datos de Partida	Valores
Latitud de Mäki-Päällys	$60^\circ 4' 29''.4$
Logaritmo del lado Mäki-Päällys- Ristisaari <sup>100</sup>	4.1589304.0
Logaritmo del lado Ristisaari-Kokko-Vuori	3.9261044.4
Acimut de Ristisaari-Kokko-Vuori	$356^\circ 36' 6''.14 \pm 0.67$
Ángulo Mäki-Päällys-Ristisaari-Kokko-Vuori	$194^\circ 24' 3''.52 \pm 1.02$
Acimut de Kokko-Vuori-Ristisaari	$176^\circ 25' 12''.03 \pm 0.83$

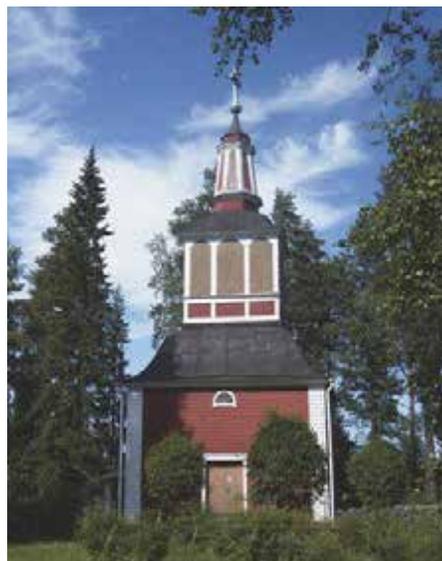
<sup>100</sup> Aunque Struve diese el logaritmo del lado, por facilitar el cálculo de las fórmulas, parece aconsejable transformarlo en la actualidad y expresar el valor del antilogaritmo (14418.843 toesas para el primer lado y 8435.375 toesas para el segundo).

Teniendo en cuenta también los desarrollos de los arcos de meridiano<sup>101</sup> comprendidos entre Mäkis-Päällys y Ristisaari, por una parte, y entre ese segundo vértice y Kokko-Vuori, por el otro: respectivamente iguales a 13721.03 toesas y a 8418.98 toesas, o bien a 14' 24".02 y a 8' 50".13, calculó Struve el nuevo valor que debería tomar el acimut del lado Ristisaari-Kokko-Vuori, cifrándolo finalmente en  $356^{\circ} 26' 8''.14 \pm 0''.53$ <sup>102</sup>. Sin embargo, aún quedaba por calcular el acimut que supuestamente se hubiese medido en la isla de Hogland. Para ello se restó del valor anterior el del ángulo  $194^{\circ} 24' 3''.52 \pm 1''.02$ , obteniendo así el acimut de Ristisaari-Mäki-Päällys:  $162^{\circ} 2' 4''.62 \pm 1''.15$ ; el cual se transformó finalmente en  $342^{\circ} 10' 10''.92 \pm 1''.13$ , una vez considerada la convergencia de meridianos entre ambos extremos.

La segunda estación del arco escandinavo coincidió con el vértice Kilpi-Mäki, responsabilizándose de ella el astrónomo Fedorenko. Utilizando el mismo instrumento que se empleó en la estación anterior, determinó la latitud y los ajustes horarios. Sus observaciones comenzaron el día 4 de agosto de 1852 y finalizaron el día 20 del mismo mes. Muy pronto tuvo que alterar el programa previsto, pues no se pudo visualizar el vértice Silmut-Mäki, del que se debería obtener su acimut, a causa del humo producido por el incendio de los bosques circundantes. La nueva señal elegida fue la cruz de la iglesia de Rautalampi, cuyos acimutes se obtuvieron entre el 4 y el 9 del repetido mes. Para deducir el del vértice anterior, se midió el ángulo formado por ambas direcciones:  $164^{\circ} 35' 27''.31 \pm 0''.46$ . A partir del 9 de agosto ya se pudo divisar siempre el vértice; de manera que, teniendo en cuenta las correcciones  $\Delta\alpha = 1^s.07$  e  $\Delta\delta = -0''.31$  (para el día 15), se calcularon los acimutes que se indican en la página siguiente.

El listado de 32 valores, obtenidos al observar la estrella polar, generalmente en cuatro ocasiones y excepcionalmente en seis, permitió calcular el error probable de una determinación aislada ( $1''.69$ ), con independencia del teórico deducido por la fórmula  $\pi = 0.536 + 0.675 \operatorname{tg}^2\phi$ ,  $1''.20$ . En consecuencia, se obtendría para la media un error de  $0''.44$ . Como la reducción al centro ascendía a  $4''.84$ , para el vértice Kilpi-Mäki y a  $0''.34$  para la señal colocada en el vértice Silmut-Mäki, habría que sumar  $5''.18$  al acimut medio del cuadro anterior, con lo que el acimut final del lado Kilpi-Mäki-Silmut-Mäki sería de  $274^{\circ} 48' 4''.29 \pm 0''.44$ .

La referencia de Struve al punto astronómico localizado en Tornio, comenzó señalando que las observaciones del acimut fueron encomendadas a Wagner y que se simultanearon con las medidas propias de los



Iglesia de Rautalampi.

<sup>101</sup> Más adelante, pero bajo este mismo epígrafe, se comentará con suficiente detalle como calculó Struve esa distancia entre paralelos.

<sup>102</sup> Struve creyó que los  $4''.01$  de diferencia entre el valor corregido y el deducido a partir de la observación era bastante mayor que el error probable esperado ( $1''.57$ ), pero de una magnitud tal que bien podría atribuirse a las propias observaciones e incluso a un posible efecto de las desviaciones locales de la vertical.

		Acimut.				
1852.	Agosto 4.	16,4 tiempo sid.	274° 47' 59,37	— 0,55 da	— 1,54 dδ	+ 0,08 dφ
		3,0 » »	60,73	+ 0,76 da	+ 1,10 dδ	+ 0,05 dφ
	» 9.	12,4 » »	60,89	— 0,79 da	+ 0,34 dδ	— 0,02 dφ
	» 12.	13,4 » »	66,78	— 0,79 da	— 0,17 dδ	+ 0,01 dφ
		14,2 » »	58,43	— 0,77 da	— 0,56 dδ	+ 0,03 dφ
		15,1 » »	58,72	— 0,71 da	— 0,99 dδ	+ 0,05 dφ
		15,6 » »	59,66	— 0,66 da	— 1,22 dδ	+ 0,06 dφ
		16,4 » »	60,75	— 0,55 da	— 1,54 dδ	+ 0,08 dφ
	» 13.	13,0 » »	55,03	— 0,80 da	+ 0,05 dδ	+ 0,00 dφ
		13,7 » »	55,10	— 0,79 da	— 0,26 dδ	+ 0,02 dφ
		14,6 » »	59,52	— 0,74 da	— 0,77 dδ	+ 0,04 dφ
		15,3 » »	60,23	— 0,69 da	— 1,08 dδ	+ 0,05 dφ
		15,9 » »	55,04	— 0,62 da	— 1,34 dδ	+ 0,07 dφ
	» 15.	13,6 » »	55,49	— 0,79 da	— 0,25 dδ	+ 0,01 dφ
		16,0 » »	60,52	— 0,60 da	— 1,39 dδ	+ 0,07 dφ
		5,9 » »	60,26	+ 0,22 da	+ 2,11 dδ	— 0,10 dφ
	» 16.	13,2 » »	62,23	— 0,79 da	— 0,07 dδ	+ 0,00 dφ
	» 17.	5,9 » »	64,73	+ 0,22 da	+ 2,11 dδ	— 0,10 dφ
	» 18.	13,4 » »	59,37	— 0,79 da	— 0,17 dδ	+ 0,01 dφ
		13,9 » »	59,12	— 0,78 da	— 0,43 dδ	+ 0,02 dφ
		14,5 » »	57,29	— 0,75 da	— 0,72 dδ	+ 0,04 dφ
		15,3 » »	58,85	— 0,69 da	— 1,09 dδ	+ 0,06 dφ
		16,2 » »	57,90	— 0,58 da	— 1,47 dδ	+ 0,08 dφ
		16,8 » »	60,28	— 0,49 da	— 1,69 dδ	+ 0,09 dφ
	» 19.	13,1 » »	59,61	— 0,80 da	+ 0,00 dδ	+ 0,00 dφ
		13,9 » »	57,81	— 0,78 da	— 0,43 dδ	+ 0,02 dφ
		15,0 » »	57,91	— 0,72 da	— 0,94 dδ	+ 0,05 dφ
		15,8 » »	56,97	— 0,63 da	— 1,32 dδ	+ 0,07 dφ
		16,6 » »	58,76	— 0,51 da	— 1,63 dδ	+ 0,09 dφ
	» 20.	14,3 » »	58,46	— 0,77 da	— 0,59 dδ	+ 0,03 dφ
		14,8 » »	57,24	— 0,73 da	— 0,88 dδ	+ 0,05 dφ
		15,8 » »	58,19	— 0,63 da	— 1,32 dδ	+ 0,07 dφ
Media a =			274° 47' 59,11	— 0,60 da	— 0,57 dδ	+ 0,03 dφ.

Relaciones diferenciales correspondientes a las diferentes observaciones realizadas, en la estación astronómica de Kilpi-Mäki (al Sur de Kuopio), para poder obtener el acimut de cualquier dirección.

trabajos geodésicos. De hecho el instrumento empleado fue el mismo teodolito universal con que se realizaron aquellos, un aparato que se estacionó en uno de los extremos (A) de la base medida en los alrededores de la iglesia Alatornio (T), para enlazarla después a la triangulación geodésica, apoyándose para ello en la señal auxiliar Kokko-Mäki y de la otra iglesia de la ciudad (T'), tal como se representa en el gráfico que se acompaña. A efectos de calcular el acimut, se colocó una mira al Sudeste de la señal B, la cual distaba 465 toesas de la estación A. Para obtener su acimut se observó repetidamente la estrella polar en el verano del año 1851. En el cálculo de los 23 valores provisionales, intervinieron las correcciones de la ascensión recta y de la declinación, fijadas por las *Tabulae Regiomontanae*, para el comienzo de los meses de julio, agosto, septiembre y octubre; resultando los siguientes:

Acimut de la mira								
1851.	Junio	27.	14,6 tiempo sid.	134° 37' 6,22	— 0,84 <i>da</i>	— 0,87 <i>db</i>	+ 0,06 <i>dφ</i>	
	Julio	9.	11,9 » »	3,77	— 0,88 <i>da</i>	+ 0,69 <i>db</i>	— 0,05 <i>dφ</i>	
			13,4 » »	7,92	— 0,90 <i>da</i>	— 0,17 <i>db</i>	+ 0,01 <i>dφ</i>	
			15,7 » »	9,47	— 0,72 <i>da</i>	— 1,43 <i>db</i>	+ 0,10 <i>dφ</i>	
	»	14.	13,6 » »	3,36	— 0,90 <i>da</i>	— 0,31 <i>db</i>	+ 0,02 <i>dφ</i>	
			15,2 » »	8,48	— 0,79 <i>da</i>	— 1,15 <i>db</i>	+ 0,08 <i>dφ</i>	
	»	17.	23,4 » »	9,98	+ 0,89 <i>da</i>	— 1,10 <i>db</i>	+ 0,06 <i>dφ</i>	
			1,7 » »	9,78	+ 0,98 <i>da</i>	+ 0,42 <i>db</i>	— 0,02 <i>dφ</i>	
	Sept.	1.	13,9 » »	9,09	— 0,89 <i>da</i>	— 0,46 <i>db</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
	»	9.	4,7 » »	4,58	+ 0,54 <i>da</i>	+ 2,06 <i>db</i>	— 0,12 <i>dφ</i>	
	»	11.	4,8 » »	8,46	+ 0,53 <i>da</i>	+ 2,09 <i>db</i>	— 0,12 <i>dφ</i>	
			5,5 » »	13,84	+ 0,35 <i>da</i>	+ 2,30 <i>db</i>	— 0,14 <i>dφ</i>	
	»	17.	10,3 » »	8,81	— 0,70 <i>da</i>	+ 1,51 <i>db</i>	— 0,10 <i>dφ</i>	
			10,9 » »	6,69	— 0,78 <i>da</i>	+ 1,20 <i>db</i>	— 0,08 <i>dφ</i>	
	»	18.	13,9 » »	2,86	— 0,89 <i>da</i>	— 0,49 <i>db</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
			14,8 » »	9,07	— 0,83 <i>da</i>	— 0,96 <i>db</i>	+ 0,07 <i>dφ</i>	
			16,7 » »	12,27	— 0,58 <i>da</i>	— 1,84 <i>db</i>	+ 0,12 <i>dφ</i>	
			17,4 » »	8,14	— 0,43 <i>da</i>	— 2,10 <i>db</i>	+ 0,14 <i>dφ</i>	
			6,9 » »	9,31	0,00 <i>da</i>	+ 2,43 <i>db</i>	— 0,15 <i>dφ</i>	
			9,7 » »	5,35	— 0,60 <i>da</i>	+ 1,78 <i>db</i>	— 0,12 <i>dφ</i>	
			10,7 » »	4,49	— 0,74 <i>da</i>	+ 1,34 <i>db</i>	— 0,09 <i>dφ</i>	
			11,7 » »	7,17	— 0,85 <i>da</i>	+ 0,79 <i>db</i>	— 0,05 <i>dφ</i>	
	»	19.	13,7 » »	5,24	— 0,90 <i>da</i>	— 0,35 <i>db</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>	
				<b>Media</b>	134° 37' 7,58	— 0,43 <i>da</i>	+ 0,23 <i>db</i>	— 0,01 <i>dφ</i> .

Acimutes de la mira en Tornio.

El error probable para una observación aislada fue de  $1''.89$ , mayor que el teórico de  $1''.31$ , obteniéndose para el valor medio otro de  $0''.46$ . A partir del acimut de la mira se deberían calcular los de los tres vértices visibles desde el instrumento, estacionado en A: El campamento de la iglesia de Alatornio (Tornio), Kaakama-Vaara y Kivalo. Para lograrlo se midieron desde el punto A los ángulos correspondientes a esos tres vértices y a la mira: con 25 punterías para los tres puntos más alejados y con sólo 7 para Tornio, el vértice más próximo; los datos obtenidos fueron los que se muestran a continuación:

*Ángulos medidos desde el punto A*

Señal visada	Lectura	Peso
Kaakama-Vaara	0°0'0".000	25
Kivalo	87°30'3".216	25
Mira	131°46'52".368	25
Tornio	335°40'47".812	7

Fruto de la compensación del triángulo formado por los tres vértices, fueron las correcciones que se indican:  $0''.369$  (Kaakama-Vaara),  $0''.484$  (Kivalo) y  $-0''.845$  (Tornio). La corrección relativa a la lectura de la mira se obtuvo como media ponderada de los valores previos, llegando finalmente a  $0''.188$ . Compensadas las lecturas reflejadas en la tabla, se pudieron hallar los ángulos entre la mira y los vértices, así como los acimutes de estos últimos, con origen en el punto A: Kaakama-Vaara ( $2^{\circ}50'15''.393 \pm 0''.56$ ), Kivalo ( $90^{\circ}20'18''.724 \pm 0''.56$ ) y Tornio ( $338^{\circ}31'1''.991$ ).

Aunque Struve realizara todos los cálculos anteriores, aún no había obtenido lo que más le interesaba: el acimut del vértice Kaama-Vaara (K), supuestamente medido desde el campanario de la iglesia Alatornio (T). Para solventar la cuestión resolvió el triángulo esférico formado por el punto A y esos dos vértices, considerando conocidos el acimut del lado AK:  $2^{\circ}50'15''.393 \pm 0''.56$  y la latitud de A, que determinó en su momento Lindhagen:  $65^{\circ}49'36''.3$ . Hallados todos los elementos del triángulo y teniendo en cuenta el carácter elipsoidal de la Tierra<sup>103</sup>, dedujo las distancias entre los paralelos de A, T y B; para llegar después al valor del acimut deseado:  $3^{\circ}1'30''.93 \pm 0''.60$ , obteniendo ese error extrapolando el de  $0''.56$  asociado al acimut homólogo obtenido desde la estación A.



Red de enlace entre las dos iglesias de Tornio: distrito (Alatornio) y ciudad, con la red geodésica del arco escandinavo.

<sup>103</sup> Otra posibilidad más rápida de obtener ese acimut con parecida verosimilitud, sería considerar al punto A como estación excéntrica asociada a la visual TK. En tal caso, el acimut de ese lado se obtendría sumándole al determinado en A el valor del ángulo en K, procediendo así se llegaría a  $3^{\circ}1'38''$ .

El vértice Stuor-Oivi, en la frontera de Noruega y Suecia, fue el penúltimo punto de Laplace con que contó el arco de meridiano escandinavo. Su observación corrió a cargo del astrónomo Selander, quien usó un teodolito universal de Repsold en agosto del año 1851. La estrella elegida fue la polar, observada en 30 ocasiones, con C.D. y C.I., y con cuyo acimut pudo determinarse el de la mira, presentando un error probable de  $1''.98$  para una observación aislada y otro de  $0''.36$  para el valor medio. Como se pretendía obtener el acimut del lado que unía dicho vértice con el de Pajtas-Vaara, se midió otras tantas veces el ángulo formado por la mira con este, presentando la media un error de  $0''.29$ . La composición de los dos últimos valores, hizo que el acimut se determinase con un error probable de  $0''.46$ . Los resultados proporcionados por Selander fueron, en resumen, los siguientes:

— Acimut medio de la mira	$179^{\circ}57'44''.223$
— Valor medio del ángulo	$11^{\circ}34'48''.069$
— Acimut pedido	$168^{\circ}22'56''.154$

Teniendo en cuenta que la corrección por la excentricidad del instrumento se estimó en  $3''.236$ , se concluyó que el acimut del lado Stuor-Oivi-Pajtas-Vaara sería de  $168^{\circ} 22' 59''.390$ . No obstante, Struve hizo una interesante matización:

«...como ni las fechas ni las horas de observación eran conocidas, opté por corregir el acimut según los diferenciales  $d\alpha$  y  $d\delta$  fijados por las *Tabulae Regiomontanae*, y asignarle un error probable de  $0''.50$ . El cual compuesto con el previo de  $0''.46$ , se transformaría en  $0''.68$ , de ahí que el valor final del acimut buscado fuese de  $168^{\circ} 22' 59''.39 \pm 0''.68$ ».

Varias han sido las ocasiones en que se ha comentado que el vértice de Fuglenaes fue el extremo septentrional del gran arco ruso escandinavo, también fue en él donde se localizó la última estación astronómica que serviría de control y cierre a los trabajos geodésicos asociados a la medición del meridiano terrestre. El acimut se determinó, entre el 21 de julio y el 1 de octubre del año 1850, por el astrónomo Lindhagen, mediante el mismo teodolito universal que se emplearía en Tornio al año siguiente. El lado elegido fue el que unía dicho vértice con el de Jedki, usándose como referencia previa una mira situada al Norte de la estación y a una distancia próxima a los 3.200 m, al otro lado de la bahía de Hammerfest; no obstante, se colocó otra unos 1.000 m al Sur y muy cerca del meridiano de la misma, la cual podía iluminarse durante las observaciones nocturnas.

A juicio de Struve, el operador midió con sumo cuidado los ángulos formados por las dos miras y el vértice Jedki, con lo que resultaba evidente el acimut de este último en función del que presentó la estrella polar, en primer lugar, y por tanto cualquiera de los que localizaban a las dos miras. También aclaraba Struve los resultados ofrecidos en la tabla siguiente, señalando que figuraban 20 determinaciones del acimut de la mira meridional, correspondiendo 17 a observaciones directas y 3 a otras deducidas del relativo a la mira del Norte. Las correcciones posicionales  $d\alpha$  y  $d\delta$  se tomaron de las *Tabulae Regiomontanae* para el inicio de los meses que se indican: julio ( $1^{\circ}.14$ ,  $-0''.36$ ), agosto ( $1^{\circ}.37$ ,  $-0''.33$ ), septiembre ( $1^{\circ}.52$ ,  $-0''.28$ ) y octubre ( $1^{\circ}.64$ ,  $-0''.19$ ).

Acimut de la mira meridional						
1850. Julio 21.	21,6	tiempo sid.	189° 34' 58,75	+ 0,69 da	— 2,50 dδ	+ 0,18 dφ
	23,5	»	61,97	+ 1,13 da	— 1,36 dδ	+ 0,08 dφ
» 22.	15,1	»	54,85	— 0,93 da	— 1,31 dδ	+ 0,11 dφ
» 25.	16,8	»	58,40	— 0,62 da	— 2,29 dδ	+ 0,18 dφ
	17,8	»	56,32	— 0,38 da	— 2,72 dδ	+ 0,21 dφ
	3,8	»	61,60	+ 0,89 da	+ 2,21 dδ	— 0,15 dφ
» 26.	15,2	»	54,16	— 0,91 da	— 1,38 dδ	+ 0,11 dφ
	16,3	»	55,89	— 0,70 da	— 2,04 dδ	+ 0,16 dφ
» 29.	11,5	»	56,74	— 0,99 da	+ 1,05 dδ	— 0,08 dφ
	12,6	»	57,58	— 1,02 da	+ 0,33 dδ	— 0,03 dφ
	16,2	»	59,53	— 0,72 da	— 2,00 dδ	+ 0,16 dφ
	16,7	»	61,21	— 0,64 da	— 2,24 dδ	+ 0,18 dφ
Agosto 6.	5,6	»	62,09	+ 0,57 da	+ 2,89 dδ	— 0,21 dφ
	6,1	»	63,31	+ 0,34 da	+ 2,98 dδ	— 0,22 dφ
Sept. 28.	12,1	»	60,35	— 1,05 da	+ 0,68 dδ	— 0,06 dφ
» 29.	12,6	»	59,20	— 1,06 da	+ 0,29 dδ	— 0,03 dφ
	14,7	»	57,65	— 0,98 da	— 1,06 dδ	+ 0,09 dφ
Oct. 1.	1,1	»	60,28	+ 1,24 da	+ 0,04 dδ	+ 0,00 dφ
	3,2	»	57,55	+ 1,02 da	+ 1,74 dδ	— 0,11 dφ
	3,9	»	59,62	+ 0,88 da	+ 2,22 dδ	— 0,14 dφ
<hr/>						
Media α =			189° 34' 58,85	— 0,16 da	— 0,23 dδ	+ 0,01 dφ.

Relaciones diferenciales planteadas para las observaciones del acimut practicadas en el vértice Fuglaes.

El error probable para la observación aislada fue de  $1''.70$ , habida cuenta que se estimó la latitud en  $70^{\circ}40'$ . En cambio, el de la media fue de  $1''.70/\sqrt{20} \approx 0''.38$ . Struve destacó la precisión de la observación acimutal ( $\sec \varphi \approx 3.02$ ), buen testimonio de la calidad del instrumento empleado, tanto por la solidez de su construcción como por la sensibilidad y fiabilidad de sus niveles<sup>104</sup>, llenos de éter sulfúrico. El error probable que resultó para el acimut fue de  $0''.39$ . Struve

<sup>104</sup> Struve hizo una sabia digresión sobre los niveles del teodolito universal que conviene repetir. Los niveles de éter, introducidos por Repsold, presentaban sobre los clásicos de alcohol la ventaja de su mayor rapidez en alcanzar el equilibrio. En uno de éter bastaban segundos para que la burbuja quedase en reposo, mientras que en los otros se requerían minutos. En cambio presentaban el inconveniente de su dilatación, con el consabido incremento en la longitud de la burbuja, aunque fuese evitable disminuyendo a conveniencia el diámetro del tubo. Según explicaba, los niveles de Púlkovo eran operativos en el rango de  $-25^{\circ}\text{R}$  y los  $25^{\circ}\text{R}$ . Tales niveles se venían construyendo desde hacía diez años en los talleres del Observatorio, por su mecánico Brauer, con prestaciones análogas a las que presentaban los de Repsold.

subrayó igualmente lo bien que había proyectado la observación el astrónomo Lindhagen, al combinar las horas de forma que las incertidumbres en las localizaciones de la estrella polar fuesen prácticamente despreciables, tal como probaban los coeficientes tan pequeños de los términos diferenciales:  $d\alpha$ ,  $d\delta$  y  $d\phi$ . Dado que el ángulo entre la mira meridional y el vértice Jedki fue de  $30^{\circ}55'21''.67 \pm 0''.35$ , el acimut del lado Fuglenaes-Jedki se fijó en  $220^{\circ}30'20''.52 \pm 0''.53$ . Cuatro años después de estas observaciones astronómicas, se erigió la columna meridiana con el beneplácito del rey Oscar II; un monumento geodésico singular, con una altura de 4 m, que recuerda la importante contribución de aquellos hombres de ciencia a un mayor conocimiento de la figura y tamaño de la Tierra.

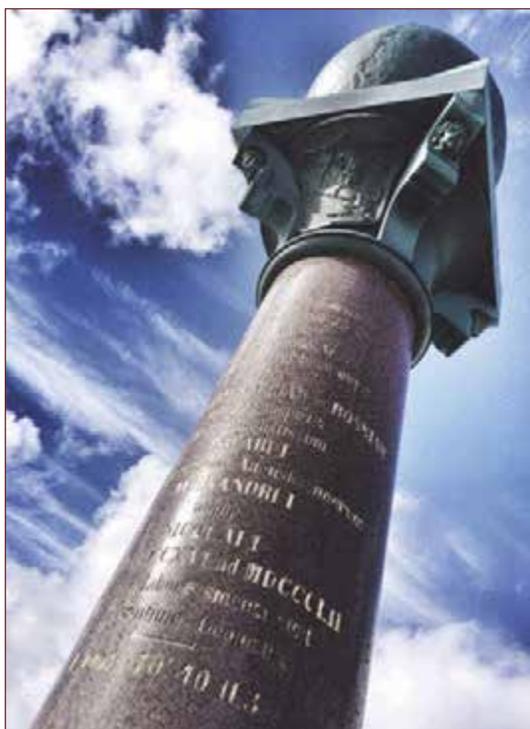
Como sucedió en el gran arco ruso, Struve añadió en esta prolongación septentrional, un listado con los acimutes de todos los lados que concurrían en las estaciones astronómicas citadas y los logaritmos de las distancias correspondientes:

			IX. MÄKI-PÄÄLYS.	
	Log. de la distancia	Acimut.		
1. SVARTVIRA.....	4,1924707.4	318°	7'	2,07 ± 1,30
2. RISTISAARI.....	4,1589304.0	342	10 10,93	± 1,15 = A <sup>II*</sup>
			X. KILPI-MÄKI.	
1. SILMUT-MÄKI...	4,0754498.1	274°	48'	4,29 ± 0,44 = A <sup>r</sup>
2. WESA-MÄKI....	4,2667027.7	336	6 26,06	± 0,71
3. HONKA-MÄKI....	4,3122556.5	25	25 48,33	± 0,88
			XI. TORNEA, iglesia del distrito.	
1. PERRA-VAARA ...	4,0819651.5	333°	7'	0,32 ± 1,03
TORNEA, iglesia de				
la ciudad....	3,0770306	344	25 4,2	
2. KAAKAMA-VAARA..	4,2507822.7	3	1 30,93	± 0,60 = A <sup>II</sup>
3. KIVALO.....	4,2995801.7	90	43 7,13	± 0,77
KEMI, iglesia ...			3,9628222 96 10 6,4	
4. AJOS.....	4,1189927.5	134	42 22,27	± 0,94
			XII. STUOR-OIVI.	
1. ATJIK.....	4,1686899.0	359°	46'	7,08 ± 1,61
2. BÄLJÄTZ-VAARA..	4,3604929.8	29	59 34,04	± 1,37
3. KERSTI-VAARA ...	4,3058116.2	94	56 3,02	± 1,08
4. PAJTAS-VAARA...	4,3973592.4	168	22 59,39	± 0,68 = A <sup>III</sup>

Acimutes y distancias en los cinco puntos astronómicos del arco escandinavo.

XIII. FUGLENAES.				
1. TYVEN.....	3,2674725.7	159° 2' 57 <sup>73</sup>	± 1,47	
2. JEDKI.....	4,2246745.5	220 30 20,52	± 0,53	= A <sup>xiii</sup>
HAAJEN.....	3,6566482	259 14 1,75	± 1,47	

Acimutes y distancias en los cinco puntos astronómicos del arco escandinavo (continuación).



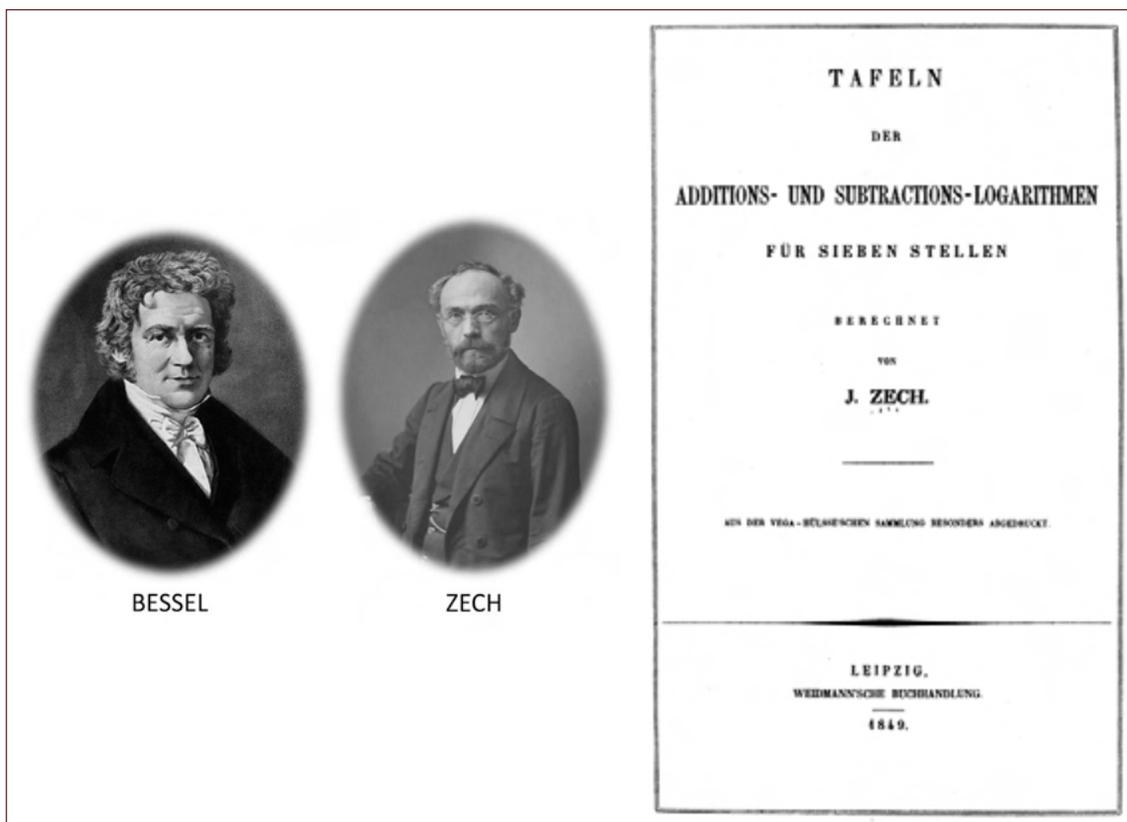
Bella imagen de la columna meridiana colocada en el vértice Fuglenaes (Hammerfest).



Sello de 0,58 euros emitido por Estonia en el año 2011, como homenaje a la figura del astrónomo y geodesta Friedrich Georg Wilhelm von Struve.

Finalizados el análisis y los comentarios sobre las observaciones astronómicas efectuadas en el arco de meridiano ruso-escandinavo, refirió Struve una de sus aplicaciones geodésicas más relevantes, en tanto que se podría posicionar cualquiera de los vértices de la triangulación. Se trató en realidad del establecimiento de las coordenadas polares, en la esfera y en el elipsoide de revolución, es decir el desarrollo de la línea geodésica y los acimutes correspondientes<sup>105</sup>. Indicaba Struve que partiendo de una de las estaciones astronómicas localizadas en los extremos de un arco parcial, se podría calcular la longitud de la geodésica que la unía a cualquier vértice intermedio de la triangulación, suponiendo conocidos los acimutes que fijaban las direcciones que partían de dicha estación. Tanto esa distancia como el acimut de la dirección pertinente, serían pues las dos coordenadas polares.

<sup>105</sup> Tales coordenadas polares no son más que una generalización de las que se estudian en la geometría analítica plana: módulo y argumento. El primero se transformaría en la longitud del arco geodésico y el segundo en el acimut, bien entendido que el papel del eje de las abscisas lo jugaría el meridiano del lugar.



Bessel, Zech y las tablas de logaritmos formadas por este.

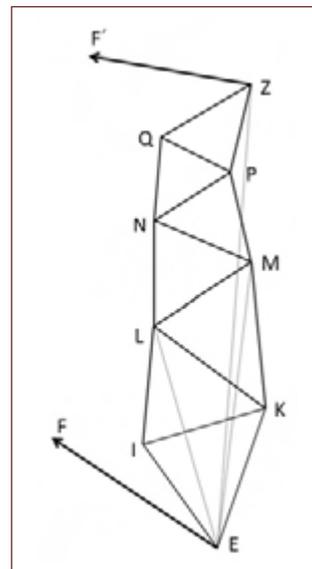
Tan importante problema geodésico se podría resolver con relativa facilidad siguiendo el método que propuso Bessel en la revista *Astronomische Nachrichten* (vol. I, página 34 y siguientes), una vez simplificado por el matemático y astrónomo Julius Augustus Zech, con la introducción de su nueva tabla de logaritmos, tal como apuntaba Struve: «el empleo de las *Tafeln der additions und subtractions-logarithmen für sieben stellen*, reforma esencialmente los cálculos trigonométricos, pues evitan la transformación de las fórmulas primitivas en otras adaptadas al cálculo logarítmico; cada fórmula compuesta de varios términos es ahora una fórmula logarítmica, con su empleo se aumentó la exactitud de los resultados, al disponer de menos entradas». Efectivamente, tal como apuntaba Struve, aplicando el teorema de Legendre, con la sabia modificación dada por Gauss en sus *Disquisitiones generalis circa superficies curvas*<sup>106</sup> (1818), todos los cálculos se reducían a una serie de resoluciones de triángulos planos, en los que se conocían dos lados y el ángulo comprendido; proporcionando unos resultados con una exactitud acorde al número de cifras decimales empleadas<sup>107</sup>.

<sup>106</sup> Así se refería Gauss al exceso esférico: *Excessus summae angulorum trianguli a lineis breuissimis in superficie curua concauo-concaua formati ultra 180°, vel defectus summae angulorum trianguli a lineis breuissimis in superficie curua concauo-conuexa formati a 180° mensuratur per aream partis superficiei sphaericae, quae illi triangulo per directiones normalium respondet, si superficies integra 720 gradibus aequiparatur*. En el capítulo dedicado a la triangulación se concretará más la cuestión del exceso esférico.

<sup>107</sup> Struve recordó que a lo largo de tales cálculos conservó siempre la octava cifra decimal que proporcionaba la interpolación en las tablas de siete cifras.

Para fijar mejor el procedimiento a seguir, expuso Struve un ejemplo, iluminado con una figura análoga a la que se acompaña. En ella se simbolizó con la letra *E* el punto de partida, o estación astronómica, enlazado al extremo *Z* por los siete triángulos que se indican: *EIK*, *IKL*, *KLM*, *LMN*, *NPQ* Y *PQZ*; en ellos se suponían conocidos todos sus ángulos y lados, materializándose la dirección cardinal del Norte con la línea *EF*. La marcha del cálculo recomendada y seguida por Struve fue la siguiente:

1. Los acimutes *FEI* y *FEK* se considerarán datos de partida<sup>108</sup>.
2. La obtención de la distancia *EL* y del acimut *FEL*, exige la resolución del triángulo polar *EKL*, en el que son datos los lados *EK* y *KL*, así como el ángulo comprendido *EKL*; el cual es la suma de los *EKI* e *IKL*, que pertenecen a los dos primeros triángulos de la cadena.
3. Se prosigue con la resolución del triángulo polar *ELM*, en el que son conocidos *EL* y *LM*, al igual que el ángulo comprendido *ELM*, suma de los *KLM* y *KLE*, obtenidos en dicho cálculo. El ángulo calculado *LEM*, sumado al acimut *FEL*, permite deducir el acimut buscado, *FEM*, de la línea *EM*.
4. Los cálculos continuarían de acuerdo con la marcha en zigzag señalada, obteniendo sucesivamente las coordenadas de los vértices *N*, *P*, *Q* y *Z*.



Cadena triangular planteada por Struve, a modo de ejemplo, entre los vértices *E* y *Z*.

Los cálculos efectuados, siguiendo semejante proceso, podían contrastarse fácilmente. Así las coordenadas polares de *L*, proporcionadas al resolver el triángulo *EKL*, también podrían haberse obtenido por medio del triángulo *EIL*; debiendo ser idénticos los resultados logrados por cualquier vía. Igual sucedería con las coordenadas del vértice *M*, obtenidas primeramente a través del triángulo *ELM* y resolviendo después el triángulo *EKM*, y así sucesivamente. Es muy interesante la llamada de atención que realizó Struve, al subrayar que en la cadena de los siete triángulos que unían *E* y *Z*, había dos tipos de lados: periféricos y transversales. Al primer grupo pertenecían los cinco lados del borde oriental y los cuatro del occidental, mientras que el segundo lo formaban los seis lados que enlazaban ambos flancos. Con semejante consideración, en lugar de avanzar en zigzag, como se apuntaba antes, cabría también la posibilidad de llegar a un cierto vértice por dos itinerarios diferentes: oriental y occidental, pero con la seguridad de alcanzar un resultado idéntico<sup>109</sup>.

Ese fue a grandes rasgos, el cálculo efectuado por el eximio geodesta, cuyos resultados resumió en los dos tomos de sus Memorias. Para su presentación eligió una tabla con seis columnas y nueve filas para cada vértice, reservándose la primera de ellas para el nombre que lo identificaba. En las otras filas figuraban los ángulos, con los logaritmos de los lados opuestos, la suma de los ángulos de cada triángulo y las coordenadas polares de cada punto (logaritmo de la distancia y acimut), con origen en la estación astronómica de partida. En las columnas se vaciaron los

<sup>108</sup> Recuérdese que ya se habían determinado los acimutes de las direcciones que concurrían en cada una de las estaciones astronómicas.

<sup>109</sup> Salvo las inexactitudes derivadas de los inevitables truncamientos siempre presentes en las tablas de logaritmos, tal como añadía Struve.

I. 23. STARO-NEKRASSOWKA. Tr. No. 1, p. 191.					
STARO-NEKRASSOWKA.	92° 22' 15,861	4,9857812.0	STARO-NEKRASSOWKA.	29° 16' 7,850	4,9653620.8
WODOLUI . . . . .	1 59 41,004	3,5277623.3	WODOLUI . . . . .	1 29 17,358	3,6905541.3
ISMAIL . . . . .	85 38 6,267	4,9848914.7	SSAPIANOWKA . . . . .	149 14 37,021	4,9848914.2
Suma	180 0 3,132		Suma	180 0 2,229	
$R^{\circ}$ I. 22	185 24 20,638		$R^{\circ}$ I. 20	184 53 56,992	
$R$	183 24 39,634		$R$	183 24 39,634	
$\lg r^{\circ} = 4,9848914.4 = r', \S 63.$					
$R^{\circ} = 183^{\circ} 24' 39,634 = \mathcal{R}', \S 63.$					
p. 242. Az. I. 1.	270 56 5,510		p. 242. Az. I. 2.	334 2 13,520	
$Q$	3 18 21,371		$Q$	3 18 21,370	
$Q^{\circ} = 3^{\circ} 18' 21,371 = \mathcal{Q}', \S 63.$					



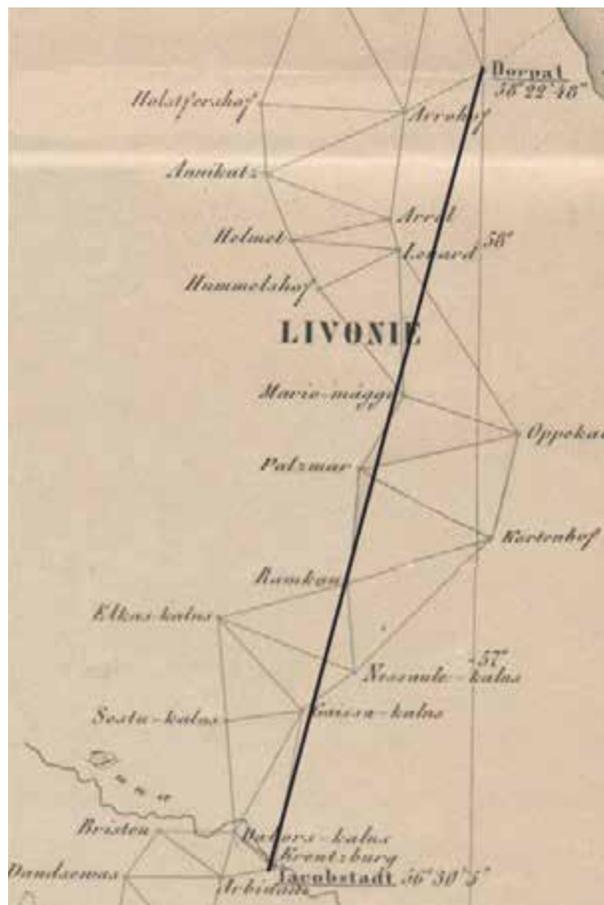
Triángulos polares del arco meridional, con origen en la estación Staro-Nekrassowka.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
XII. 15. FUGLENAES. Tr. No. 258, T. II, p. 148.					
FUGLENAES.....	30° 57' 18,221	5,0051334.1	FUGLENAES.....	30° 30' 4,587	5,0554377.9
STUOR-OIVI... +	4 53 32,988	4,2246745.5	STUOR-OIVI... -	0 28 26,227	3,2674725.7
JEDKI .....	144 9 18,319	5,0614779.6	TIVEN.....	149 .1 30,224	5,0614780.6
Suma	180 0 0,528		Suma	180 0 1,038	
R° XII. 13	3 47 48,306		R° XII. 14	9 9 47,525	
R =	8 41 21,294		R =	8 41 21,298	
		$\lg r^{\circ} = 5,0614780.1 = r^{\text{III}}, \S 117.$			
		$R^{\circ} = 8^{\circ} 41' 21,296. = R^{\text{III}}, \S 117.$			
T. II, p. 164.			T. II, p. 164.		
Az. XIII. 2.	220° 30' 20,520		Az. XIII. 1.	159° 2' 57,730	
Q =	189 33 2,299		Q =	189 33 2,317	
		$Q^{\circ} = 189^{\circ} 33' 2,308 = Q^{\text{III}}, \S 117.$			



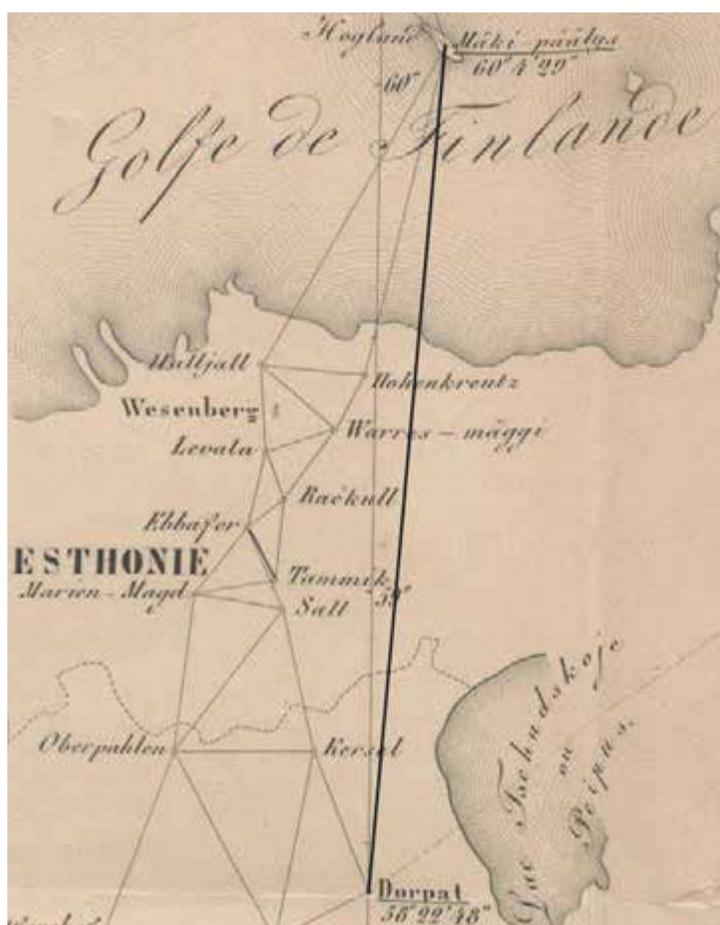
Triángulos polares del arco septentrional, con origen en la estación Stuor-Oivi.

VII. 22. JACOBSTADT. Tr. No. 126, p. 209.					
JACOBSTADT.....	61° 11' 55,481	5,0306832.1	JACOBSTADT.....	7° 18' 31,010	5,0412493.3
DORPAT..... —	3 17 20,171	3,8466493.6	DORPAT..... —	0 2 15,902	2,7554339.9
DABORS-KALNS.....	115 30 50,885	5,0434741.4	KREUTZBURG.....	172 39 13,166	5,0434741.2
Suma	180 0 6,537		Suma	180 0 0,078	
$R^{\circ}$ VII. 20	197 34 59,558		$R^{\circ}$ VII. 21	194 19 55,288	
$R =$	194 17 39,387		$\mathcal{R} =$	194 17 39,386	
$\lg r^{\circ} = 5,0434741.3 = r^{\text{III}}, \S 63.$					
$R^{\circ} = 194^{\circ} 17' 39,386 = \mathcal{R}^{\text{III}}, \S 63.$					
p. 243. Az. VII. 1.	312 22 2,350		p. 243. Az. VII. 2.	6 15 26,820	
$Q =$	13 33 57,831		$\mathcal{Q} =$	13 33 57,830	
$Q^{\circ} = 13^{\circ} 33' 57,830 = \mathcal{Q}^{\text{III}}, \S 63.$					



Triángulos polares del arco central, con origen en la estación Jacobstadt.

VIII. 14. MÄKI-PÄÄLYS. Tr. No. 155, p. 213.					
MÄKI-PÄÄLYS.....	24° 43' 48,504	4,7897826.3	MÄKI-PÄÄLYS.....	8° 23' 31,557	4,7743940.4
DORPAT..... +	16 32 19,984	4,6225699.2	DORPAT..... +	5 24 2,803	4,5838766.4
BALLJALL.....	138 44 7,877	4,9875244.6	HOHENKREUTZ.....	166 12 30,863	4,9875245.2
Suma	180 0 16,365		Suma	180 0 5,223	
R° VIII. 12	347 40 18,121		R° VIII. 13	358 48 35,298	
R =	4 12 38,105		R =	4 12 38,101	
$lgr^{\circ} = 4,9875244.9 = r'''$ , § 63. $R^{\circ} = 4^{\circ} 12' 38,103 = \alpha'''$ , § 63.					
p. 243. Az. IX. 2.	209 9 17,270		p. 243. Az. IX. 1.	192 49 0,310	
Q =	184 25 28,766		Q =	184 25 28,753	
$Q^{\circ} = 184^{\circ} 25' 28,760 = \beta'''$ , § 63.					



Triángulos polares del arco central, con origen en la estación situada en el Observatorio de Dorpat.

nombres de cada punto, los valores angulares de cada triángulo y los logaritmos de los lados opuestos<sup>110</sup>. Struve presentó un cuadro para cada estación astronómica, incluyendo en él los vértices comprendidos entre dos consecutivas; a la vez que resaltaba el hecho de que el último triángulo polar de cada una de las series, mostraba el resultado principal de los cálculos correspondientes, esto es: el valor de la diagonal de la cadena (*EZ* en el ejemplo) y el acimut de la geodésica definida por las dos estaciones extremas; simbolizados respectivamente por  $r^*$  y  $R^*$ . Aunque Struve listara los datos proporcionados por los cálculos de los arcos parciales formados por las estaciones astronómicas consecutivas, sólo se han seleccionado aquí, y de manera parcial<sup>111</sup>, cuatro de ellos: los de los extremos meridional y septentrional, y los dos centrales que partían del Observatorio de Dorpat. El arco formado por las estaciones de Staro-Nekrassowka y de Wodolui constó de 20 triángulos. El más septentrional, que unió las estaciones de Stuur-Oivi y de Fuglenaes, sólo tuvo 12 triángulos. En lo que se refiere a los dos arcos centrados en Dorpat, Jacobstadt-Dorpat y Dorpat-Mäki-Päälys, tuvieron 19 y 12 respectivamente.

Los cálculos efectuados por Struve aún no podían considerarse finalizados, en tanto que se debía proceder al ajuste de sus resultados, para pasar así de los valores provisionales a los definitivos. Él mismo expresaba su temor de que el mantenimiento de la octava cifra decimal, en las operaciones logarítmicas, no fuese garantía suficiente para la exactitud, pensando fundamentalmente en los numerosos cálculos parciales de que constaba el proceso. Creía, en cualquier caso, que convendría demostrar de manera taxativa el hecho de que el posible error cometido en los cálculos era insignificante, al compararlo con el que era propio de las medidas lineales (bases) y angulares. Struve comprendía que el problema de los errores y, en su caso, el proceder a su compensación no era una tarea sencilla; es más la suponía tan complicada que sólo la consideraba práctica «para ciertos casos simples», añadiendo «trataré, en consecuencia de obtener, al menos con aproximación suficiente, el error esperado para las coordenadas finales de nuestros arcos parciales<sup>112</sup>, a través de una vía básicamente empírica».

Cada cálculo parcial proporcionó dos valores:  $\lg r^*$  y  $R^*$ , los cuales eran la media aritmética de los resultados obtenidos por el enlace oriental y por el occidental. Struve recopiló los datos proporcionados por sus cálculos de los dos arcos: meridional y septentrional, con 144 operaciones parciales en el primero y otras 97 en el segundo. Asimismo comprobó que aunque en las tablas de logaritmos todos los errores fuesen igual de probables, la múltiple combinación de las indeterminaciones tabulares hizo que las pequeñas diferencias fuesen más frecuentes que las grandes; con lo que la distribución de los errores efectivos guardaba una evidente relación con la teoría de los mínimos cuadrados. Teoría que aplicó para probar que el error probable de una diferencia logarítmica estuvo comprendido entre 0.335 y 0.341. Apoyándose en él, y llamando  $r^N$  a la diagonal obtenida a partir de  $n$  cálculos parciales, dedujo que el error probable de  $\log r^N$  sería próximo a  $0.171\sqrt{n}$ .

<sup>110</sup> Téngase en cuenta que cada lado transversal era común a dos triángulos, de manera que figuraban tres columnas para cada uno de ellos.

<sup>111</sup> Se reproducirán únicamente los datos relativos al último triángulo polar, para resaltar la importancia que le dio Struve al valor de la diagonal y al acimut de la misma.

<sup>112</sup> En el texto original figuraba realmente «nuestros 8 arcos parciales», pues estaba recogido en el primer tomo de su Memoria. Como en el segundo procedía de forma parecida, con los cuatro segmentos del arco septentrional, me he permitido la licencia de transcribir la referencia de un modo más genérico.

Para proceder al ajuste de los acimutes, halló las diferencias entre los valores correspondientes  $R$  y  $\mathfrak{R}$ , reflejados en los 241 cálculos parciales, los cuales se detallaron en las columnas de los ángulos que figuraban en los cuadros ya comentados y parcialmente reproducidos. Los resultados obtenidos fueron elocuentes: la mitad de las ocasiones estuvieron comprendidos entre  $0''.0000$  y  $0''.0040$ , y la otra entre  $0''.0040$  y  $0''.0315$ . De modo que el valor probable de una diferencia se fijó en  $0''.0040$ , la suma de las 241 diferencias, que fue de  $1''.299$ , daba un valor probable de  $0''.0045$ , mientras que la suma de los 241 cuadrados de las diferencias, que ascendía a  $0.015007$ , daba otro valor probable de  $0.0053$ . Aplicando el método de los mínimos cuadrados, y admitiendo el valor mayor ( $0.0053$ ), resultaría que el acimut final  $R^N$ , deducido a partir de  $n$  cálculos parciales, presentaría un error probable de  $0''.00265 \sqrt{n}$ .

Struve halló después la media de todos los errores probables asociados a las diagonales y a los acimutes, empleando las fórmulas respectivas de  $0.171\sqrt{n}$  y  $0''.00265 \sqrt{n}$ , de los arcos parciales, con los resultados siguientes:  $0.72$  para las primeras y  $0''.011$  para los segundos<sup>113</sup>; incluyéndose en ellos las inexactitudes producidas por el empleo de las tablas de logaritmos, aunque su naturaleza fuera completamente diferente y no se acumulasen. Sus conclusiones se indican a continuación: el valor medio de  $0.72$  muestra que el error probable obtenido por el cálculo, en la longitud de la línea geodésica que une los puntos extremos de uno de los arcos parciales, fue del orden de las seis millonésimas; es decir unas doce veces menor que el asociado a las bases que se midieron. Dicho de otra forma, la incertidumbre de tales diagonales podría considerarse despreciable al compararla con los de tales líneas y más aún si la analogía se efectúa con los errores cometidos en las medidas angulares. En lo que se refiere a los acimutes, creía Struve que la insignificancia de los errores probables calculados (alrededor de una centésima de segundo) era acorde con la naturaleza del cálculo y desde luego del todo despreciable al compararlos con los obtenidos en los acimutes directamente observados.

Con esos antecedentes procedió Struve al ajuste de las observaciones, centrándose aquí en los repetidos arcos parciales, determinados por dos estaciones astronómicas consecutivas, y de modo más concreto en la geodésica,  $r$ , que unía sus dos extremos y en los dos acimutes de esa línea. En la tabla resumen de los resultados, que se reproducen en la página siguiente<sup>114</sup>, recordó Struve las dos latitudes que fijaban los paralelos respectivos, designando al acimut meridional de la geodésica con la letra  $\mathfrak{A}$  y al boreal con la letra  $\mathfrak{B}$ . Además de haber calculado los logaritmos de los desarrollos,  $\lg r$ , halló también el antilogaritmo de dicho valor,  $r$ , y los errores probables<sup>115</sup> de cada uno de ellos; expresando el segundo en toesas. A partir de los datos proporcionados por la tabla, dedujo Struve que el menor error relativo cometido en las diagonales de los ocho primeros arcos, fue el del octavo ( $\approx 1/194700$ ), correspondiendo el máximo ( $\approx 1/104500$ ) al quinto. Los valores medios asociados a los arcos de ese segmento meridional fueron:  $r \approx 111430$  toesas, un error absoluto de  $\approx 0.796$  toesas y otro relativo de  $\approx 1/14000$ . Por lo que se refiere a los cuatro arcos parciales del segmento septentrional, estos fueron los resultados: menor

---

<sup>113</sup> Struve insistió en que esos errores probables solo se referían a los derivados de la resolución de los triángulos polares, al suponer exactos los datos obtenidos mediante la resolución previa de los triángulos de enlace, entre dos estaciones astronómicas consecutivas.

<sup>114</sup> Sólo reprodujo Struve los datos correspondientes al último triángulo polar de cada una de las cadenas de enlace entre las estaciones astronómicas extremas.

<sup>115</sup> Recordaba Struve que tales errores eran una consecuencia más de la compensación final de la triangulación, incluyendo en ella la de los tres ángulos de cada triángulo y las de todas las bases medidas, a la que nos referiremos con más detalle en el capítulo séptimo. Mención aparte merece la deducción del error probable con que se obtuvo el  $\lg r$ , ya que debió ser especialmente prolija; reconociendo Struve que fue Lindhagen el responsable de la misma.

error relativo ( $\approx 1/145839$ ) en el décimo arco, mayor error relativo ( $\approx 1/65089$ ) en el duodécimo y último arco. Los valores medios para este segmento fueron:  $r \approx 155453$  toesas, un error absoluto de 1.45 toesas y otro relativo de  $1/101535$ . Promediando los resultados para la totalidad de los doce arcos parciales, se obtendrían:  $r \approx 133441$  toesas, error absoluto de  $\approx 1.123$  toesas y relativo de  $\approx 1/117705$ .

Referencia	Puntos extremos	Latitudes	Distancias	Acimutes
I. Triángulo polar I. 23, p. 255.	STARO-NEKRASSOWKA	$\varphi^I = 45^\circ 20' 2,8$	$\lg r^I = 4,9848914,4 \mp 29,2$	$\alpha^I = 3^\circ 18' 21,37 \mp 0,44$
	WODOLUI.....	$\varphi^{II} = 47 1 25,2$	$r^I = 96580,94 \mp 0,650$ toises.	$\beta^I = 183 24 39,63 \mp 0,74$
II. Triángulo polar II. 22, p. 262.	WODOLUI.....	$\varphi^{II} = 47 1 25,2$	$\lg r^{II} = 5,1192468,0 \mp 26,0$	$\alpha^{II} = 319 19 51,80 \mp 1,09$
	SSUPRUNKOWZI..	$\varphi^{III} = 48 45 3,1$	$r^{II} = 131597,24 \mp 0,788$ toises.	$\beta^{II} = 137 38 38,34 \mp 1,09$
III. Triángulo polar III. 17, p. 267.	SSUPRUNKOWZI..	$\varphi^{III} = 48 45 3,1$	$\lg r^{III} = 4,9395650,2 \mp 32,4$	$\alpha^{III} = 332 18 47,52 \mp 0,48$
	KREMENETZ.....	$\varphi^{IV} = 50 5 50,0$	$r^{III} = 87009,17 \mp 0,649$ toises.	$\beta^{III} = 151 28 24,00 \mp 0,78$
IV. Triángulo polar IV. 18, p. 273.	KREMENETZ.....	$\varphi^{IV} = 50 5 50,0$	$\lg r^{IV} = 5,0513246,3 \mp 38,6$	$\alpha^{IV} = 351 22 51,48 \mp 0,35$
	BELIN.....	$\varphi^V = 52 2 42,2$	$r^{IV} = 112544,59 \mp 1,001$ toises.	$\beta^{IV} = 171 0 30,46 \mp 2,29$
V. Triángulo polar V. 29, p. 282.	BELIN.....	$\varphi^V = 52 2 42,2$	$\lg r^V = 5,1727435,8 \mp 41,6$	$\alpha^V = 1 15 58,46 \mp 2,20$
	NEMESCH.....	$\varphi^{VI} = 54 39 5,9$	$r^V = 148848,20 \mp 1,425$ toises.	$\beta^V = 181 20 51,02 \mp 0,85$
VI. Triángulo polar VI. 23, p. 289.	NEMESCH.....	$\varphi^{VI} = 54 39 5,9$	$\lg r^{VI} = 5,0300461,0 \mp 28,9$	$\alpha^{VI} = 9 9 44,45 \mp 0,57$
	JACOBSTADT.....	$\varphi^{VII} = 56 30 4,8$	$r^{VI} = 107163,31 \mp 0,714$ toises.	$\beta^{VI} = 189 36 5,53 \mp 0,53$
VII. Triángulo polar VII. 22, p. 296.	JACOBSTADT.....	$\varphi^{VII} = 56 30 4,8$	$\lg r^{VII} = 5,0434741,3 \mp 25,2$	$\alpha^{VII} = 13 33 57,83 \mp 0,53$
	DORPAT.....	$\varphi^{VIII} = 58 22 47,6$	$r^{VII} = 110528,46 \mp 0,642$ toises.	$\beta^{VII} = 194 17 39,39 \mp 0,24$
VIII. Triángulo polar VIII. 14, p. 300.	DORPAT.....	$\varphi^{VIII} = 58 22 47,6$	$\lg r^{VIII} = 4,9875244,9 \mp 22,3$	$\alpha^{VIII} = 4 12 38,10 \mp 0,24$
	MÄKI-PÄÄLYS....	$\varphi^{IX} = 60 4 29,4$	$r^{VIII} = 97168,28 \mp 0,499$ toises.	$\beta^{VIII} = 184 25 28,76 \mp 0,60$
IX. Triángulo polar IX. 38, T. II, p. 177.	MÄKI-PÄÄLYS....	$\varphi^{IX} = 60^\circ 4' 29,4$	$\lg r^{IX} = 5,1657315,6 \mp 31,7$	$\alpha^{IX} = 357^\circ 55' 11,06 \mp 1,15$
	KILPI-MÄKI.....	$\varphi^X = 62 38 5,0$	$r^{IX} = 146464,23 \mp 1,07$ toises	$\beta^{IX} = 177 44 29,48 \mp 0,44$
X. Triángulo polar X. 35, T. II, p. 188.	KILPI-MÄKI.....	$\varphi^X = 62 38 5,0$	$\lg r^X = 5,2877241,2 \mp 29,7$	$\alpha^X = 341 35 44,21 \mp 0,71$
	TORNEA.....	$\varphi^{XI} = 65 49 44,7$	$r^X = 193965,33 \mp 1,33$ toises	$\beta^X = 159 14 44,50 \mp 0,77$
XI. Triángulo polar XI. 21, T. II, p. 195.	TORNEA.....	$\varphi^{XI} = 65 49 44,7$	$\lg r^{XI} = 5,2205626,1 \mp 42,8$	$\alpha^{XI} = 349 48 43,43 \mp 0,60$
	STUOR-OIVI.....	$\varphi^{XII} = 68 40 58,4$	$r^{XI} = 166173,82 \mp 1,64$ toises	$\beta^{XI} = 168 30 48,51 \mp 0,68$
XII. Triángulo polar XII. 15, T. II, p. 200.	STUOR-OIVI.....	$\varphi^{XII} = 68 40 58,4$	$\lg r^{XII} = 5,0614780,1 \mp 66,8$	$\alpha^{XII} = 8 41 21,30 \mp 1,37$
	FUGLENAES.....	$\varphi^{XIII} = 70 40 11,3$	$r^{XII} = 115206,77 \mp 1,77$ toises	$\beta^{XII} = 189 33 2,31 \mp 0,54$

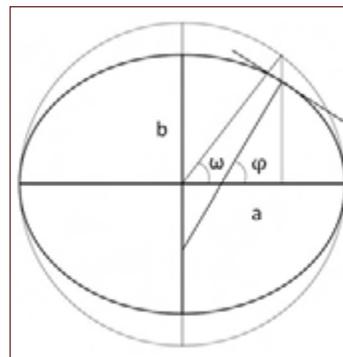
Diagonales geodésicas de los arcos parciales y acimutes obtenidos en sus extremos.

Otra cuestión notable que analizó Struve, en este capítulo, fue la de la diferencia de acimutes que presentaría la diagonal geodésica en los dos extremos de cada uno de los arcos parciales. Se trataba por lo tanto de evaluar la diferencia entre  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$ , para las dos estaciones astronómicas genéricas: E, de latitud  $\varphi$ , y Z de latitud  $\varphi'$ , ya referidas en el ejemplo con las cadenas triangulares de enlace. Las fórmulas empleadas por Struve para resolver el problema sobre el elipsoide de revolución (a, b) fueron las siguientes<sup>116</sup>:

$$\operatorname{tg} \omega = b/a \operatorname{tg} \varphi, \operatorname{tg} \omega' = b/a \operatorname{tg} \varphi'$$

y

$$\operatorname{sen} \mathfrak{B} / \operatorname{sen} \mathfrak{A} = \cos \omega / \cos \omega'$$



Relación geométrica entre la latitud geodésica ( $\varphi$ ) y la reducida ( $\omega$ ) en el elipsoide de revolución.

Una primera consideración, a la vista de las fórmulas, es que la diferencia de tales acimutes y la convergencia de meridianos dependerán del modelo elipsoidal elegido. De ahí que Struve efectuase sus cálculos apoyándose en el que definió Bessel y en el suyo propio<sup>117</sup>. Los valores correspondientes se obtendrían interpolando en la tabla que formó, para las latitudes comprendidas entre los 45° y los 71° (a intervalos de un grado), con la ayuda de las tablas de Zech, ya conocidas. El coeficiente  $b/a$  valdría en cada caso: 0.9967 (Bessel) y 0.9966 (Struve). Como es obvio, las discrepancias obtenidas con uno u otro modelo fueron casi insignificantes. La prueba la proporcionó Struve, al determinar el acimut final en el segundo arco parcial, precisamente el de la dirección más separada del meridiano. Los datos de partida fueron:  $\varphi = 47^{\circ}1'25''.2$ ,  $\varphi' = 48^{\circ}45'3''$ . 1 y  $\mathfrak{A} = 319^{\circ}19'51''.80$ . Con el modelo de Bessel se obtuvo un acimut de  $\mathfrak{B} = 137^{\circ}38'42''.088$ , mientras que con el de Struve resultó un poco mayor,  $\mathfrak{B} = 137^{\circ}38'42''.358$ ; es decir que sólo hay entre uno y otro una diferencia de  $0''.27$ . Concluidos esos cálculos, examinó la relación entre los llamados acimutes efectivos<sup>118</sup>,  $\mathfrak{A}^*$  y  $\mathfrak{B}^*$ , sirviéndose de los acimutes calculados  $\mathfrak{A}'$  y  $\mathfrak{B}'$ . Tras la estimación de las desviaciones que consideró más plausibles, la conclusión de Struve fue que la discrepancia entre los acimutes efectivos y calculados, en el segmento meridional del arco ruso-escandinavo, era inferior a los  $10''$  en siete de los arcos parciales, con la excepción de los  $21''$  que existían entre los acimutes del arco número seis. Por el contrario, en el segmento más septentrional mejoraron ostensiblemente los resultados, en tanto que las divergencias fueron menores de  $4''$  en tres de los arcos parciales, con una muy próxima a los  $13''$  correspondiente al arco número once.

<sup>116</sup> Las fórmulas empleadas por Struve fueron la versión logarítmica de las que se indican, señalando que «servirían para calcular el segundo acimut, si uno solo de los dos es dado». Obsérvese que la variable  $\omega$  no es más que la latitud paramétrica o reducida asociada a la latitud geodésica  $\varphi$ , en el elipsoide definido por los dos semiejes  $a$  y  $b$ . Viene bien recordar en este momento que si se adopta como variable descriptiva del elipsoide la latitud reducida, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de las geodésicas de dos superficies, de manera que dos geodésicas de la misma constante de Clairaut (seno de su acimut en el ecuador) tendrían los mismos acimutes en los puntos de igual latitud reducida; se trataría por tanto de una correspondencia que conservaría las latitudes paramétricas y los acimutes pero no las longitudes.

<sup>117</sup> Los parámetros geométricos de este elipsoide de Struve (página 84 del primer tomo de su Memoria) fueron: semieje mayor de 3272539 toesas y  $e^2 = 0.00677436$ . En el capítulo dedicado a la triangulación se aportará más información al respecto. Los valores anteriores pueden transformarse en sus equivalentes métricos, suponiendo que la toesa tenía 1.949 m. Resultarían así un semieje mayor de 6378.178 km, uno menor de 6356.538 km y un aplastamiento polar próximo a  $1/294.74$ .

<sup>118</sup> Determinados en función de los acimutes observados y de los ángulos obtenidos al resolver los triángulos polares ya citados.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº. 438.

Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluß auf die Bestimmung der Figur der Erde.  
Von Herrn Geh. Rath und Ritter Bessel.

In dem Comptes rendus Académ. des sciences de l'Inst. des Sciences von 21<sup>ten</sup> Juin 1841 findet sich der Bericht eines, aus den Herren Mathieu, Duany und Leprotte zusammengesetzten Comités, über einen Fehler der Beobachtung, welche im Jahr 1806 angestellt worden ist, von der Entfernung der Parallelen von Montjoy und Mols (auf Veranlassung) aus den Beobachtungen abzuholen, welche die Herren Biot und Arago, zur Bestimmung derselben gemacht und in ihrem 1821 erschienenen Werke „Recherch. d'Optique géométrique“ mitgetheilt haben. Diese fehlerhafte Beobachtung wurde von einer Commission der Akademie befragt; die Herren Biot und Arago selbst schienen das Resultat ihrer Arbeit nicht getreulich zu haben. Herr Pasteur hat das Verloren, die Unrichtigkeit des Resultats der früheren Commission zur Sprache gebracht zu haben.

Die Entfernung der Parallelen von Montjoy und Mols, welche früher 132440<sup>7</sup>777 angegeben war, wird gegenwärtig von Herrn Mathieu ..... 13267929  
Leprotte..... 424  
Duany..... 2,65  
Foucault..... 4,81

also von 6592 bis 6795 größer als früher gefolgt. Wie dieser Fehler nicht begangen, so würde die Länge des Meridians dessen Bestimmung die sichere Voraussetzung der gewesen, die Bildung zur Bestimmung der Figur der Erde immer ausdrücklich Mithodeu Untersuchung war, mehr als 9/10 größer festgestellt werden würde, als wirklich geschah ist. Dieser Einfluß des Fehlers hat jedoch keine so geringe, da das Mehr die Länge betrachtete Entfernung in diesem Falle hätte, und wirklich nichts Anderes sehr kann, als als, zwar noch eine gewisse Abweichung gewöhnlich, — aber dennoch innerhalb einiger oder weiterer Grenzen wirklicher Theil der Erde ist. Als in die französische Gradmessung an der Bestimmung der Abweichungen des Erdmittels den wichtigsten Beitrag liefert, welcher ihrer Ausdehnung angemessen ist, so wird jetzt möglich, das von den vorherigen, unvollständigen französischen Messungen von Meridionalen genaue Resultat

dieser Art, welches ich No. 333 der Astr. Nachr. bekannt gemacht habe, durch Berücksichtigung des Fehlers zu verbessern.

Die zu ergänzen vier neuen Beobachtungsstände innerhalb weniger Tagen überstreifen, und selbst der Unterschied der beiden Verfahren unter ihrem keinen Einfluß auf die Bestimmung der Länge des Erdmittels einzuwirken, welcher nicht viel kleiner wäre als die von den Ungleichheiten der Erdfläche selbst, von den Beobachtungsständen und wahrscheinlich auch von kleinen Unvollkommenheiten der Beobachtung einer oder der anderen Gradmessung entsteht. Uebrigens, so könnte man wohl ohne dieser vier Resultate, oder das arithmetische Mittel aller vier, zur Grundlage einer neuen Untersuchung der Figur und Größe der Erde machen. Ich habe aber geglaubt, bis zu dem in dem Werke der Herren Biot und Arago enthaltenen Beobachtungen selbst zurückzugehen, als den vier Resultaten auch ein flüchtiges Hinsehen zu müssen.

In dem eben angeführten Werke (p. 179 etc.) finden sich zwei Werthe der Winkel anderer Deutsche angegeben; nämlich die Werthe, welche die frühere Commission angenommen hat und die, welche die Beobachter selbst für die wahrscheinlichsten halten. Die ersten sind in den Rechnungen der Herren Duany und Leprotte, die letzteren in der Rechnung der Herren Mathieu angegeben worden. Diese doppelten Werthe der Winkel sind aus dem Vorhandensein von mehr Beobachtungen, als zur Bestimmung der Winkel erforderlich waren, hervorgegangen: sie können durch einen bestimmten Werth jedes Winkels, welchen die Vertheilung der Punkte der kleinen Quadrats immer ergibt, ersetzt werden, wenn man nicht mehr als Höhe, sondern — nämlich wegen — Gewissen schwächerer Resultate, als das unvollständige Resultat einer geschlossenen geodätischen Operation verlangt. Die Beobachtungen der Herren Biot und Arago ergeben nicht allein die Winkel der einzelnen Punkte voneinander, sondern es sind die Summen von zwei oder mehreren, von einem Punkte der Beobachtungen ausgehend; ferner ergeben sie die vollständige Beobachtung der Winkel des Vierecks Dantons et l'P. — Erpsen — Clèves — Montjoie und seiner Hauptstadt. In

1. Peruanische Gradmessung. Tarqui..... - 0'606 Cotchesqui..... + 0,606	Blenheim..... + 2'705 Arburyhill..... + 1,395 Clifton..... - 3,679
2. 1 <sup>te</sup> Ostindische. Trivandeporum... - 0,271 Paudree..... + 0,271	6. Hannoversche Gradmessung Göttingen..... - 2,493 Altona..... + 2,493
3. 2 <sup>te</sup> Ostindische. Punnae..... - 1,470 Putehappolliam... - 1,712 Dodagoostah..... + 4,016 Namthabad..... - 1,447 Daumeragidda.... - 0,065 Takal K'hera..... + 3,537 Kullianpoor..... - 2,859	7. Dänische. Lauenburg..... + 0,451 Lysabbel..... - 0,451
4. Französische. Formentera..... + 0,955 Montjoie..... + 4,115 Barcelona..... + 0,764 Carcassonne..... - 0,433 Evau..... - 6,447 Pantheon..... - 1,099 Dünkirchen..... + 2,144	8. Preussische. Trunz..... - 0,907 Königsberg..... - 1,448 Memel..... + 2,355
5. Englische. Dunnoe..... - 1,816 Greenwich..... + 1,396	9. Russische. Belin..... - 1,732 Nemesch..... - 2,384 Jacobsstadt..... + 1,826 Bisten..... + 2,627 Dorpat..... - 1,044 Hochland..... + 0,607
	10. Schwedische. Malörn..... + 0,560 Pahlawara..... - 0,560

\*) Herr Geh. Rath Bessel hat seine Ausdehnung über Naturwissenschaften veröffentlicht in seinem Jahrbuch für 1840 p. 142 ausgesprochen. S.

Primera página del trabajo de Bessel y los diez arcos de meridiano seleccionados.

Struve se pronunció acto seguido sobre la difícil cuestión del aplastamiento terrestre y su estrecha conexión con la desviación de la vertical, como paso previo a la compensación definitiva de los acimutes de las diagonales geodésicas de cada arco parcial y de los desarrollos de las mismas. A tal efecto recordaba que una de las mejores aportaciones de Bessel al análisis de la forma de la Tierra, incluida en el número 438 de la revista *Astronomische Nachrichten*<sup>119</sup>, fue la determinación del error medio de una latitud, cifrado en 2".640. Struve pensaba que el error era debido indudablemente a la composición de dos causas distintas, las inexactitudes propias de las observaciones y las irregularidades inducidas por las desviaciones locales de la vertical<sup>120</sup>. Dado que la componente atribuida a las latitudes parecía demasiado grande, se postuló que las diferencias  $d\varphi$  entre los valores observados y calculados obedecían principalmente a que no existía una elipse generatriz media, debiéndose admitir aplastamientos diferentes para los distintos meridianos terrestres e incluso para los segmentos de un mismo meridiano; sin embargo, Struve no tardaría en refutar esa hipótesis de achatamiento variable.

<sup>119</sup> Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluß auf die Bestimmung der Figur der Erde (Relativo al error cometido en los levantamientos franceses y a su influencia sobre la determinación de la figura de la Tierra).

<sup>120</sup> Struve cuantificaba ambos efectos: 1".20 como error medio de las latitudes observadas y 2".35 achacables a las atracciones locales sobre la plomada.

En efecto, Struve fue contundente al afirmar que las diferencias de latitudes muy próximas, en un mismo arco de meridiano, apenas resultarían afectadas por la supuesta falta de la elipse generatriz media. Para cerciorarse de ello sólo se deberían comparar los elementos diferenciales  $d\varphi$  y  $d\varphi'$ , relativos a cada par de latitudes próximas, listadas en la tabla incluida por Bessel en su trabajo de referencia y deducir las diferencias correspondientes a sus dos elementos. Struve reprodujo pues los errores relativos  $d\varphi' - d\varphi$ , asociados a los diez arcos elegidos por Bessel<sup>121</sup>, en las 28 parejas de latitudes próximas. Sumando los cuadrados de dichas diferencias, igual a 344.0, dedujo que el error medio de una latitud aislada sería de  $2''.45$ , igual a  $(344/56)^{1/2}$ . Un error tan parecido a los  $2''.64$  que había determinado Bessel en la hipótesis de una elipse generatriz media, que la diferencia de sólo  $0''.19$  debería ser accidental. Struve consideraba plenamente justificada esa pequeña discrepancia, atendiendo a que en los pares de latitudes próximas debería ser mayor la compensación de los errores de observación que en el caso más general. Pero es que había además otra razón de peso, «la imperfección de las operaciones geodésicas que proporcionan las distancias entre paralelos, incidía menos sobre la comparación de latitudes próximas que sobre las más alejadas, y que pertenecían a un arco total dividido en varios arcos parciales». Para él estaba claro el resultado: «en los diferentes arcos de meridiano medidos hasta el presente, no existe indicio alguno que permita desechar la idea de una elipse de generatriz media para el elipsoide terrestre». Aunque añadiese que existían otras opiniones al respecto, que se basaban en el hecho incontestable de que la combinación de diferentes combinaciones de arcos de meridiano daban lugar a modelos elipsoidales completamente diferentes, no tardaba en refutarlas: «a lo que parece, esos sabios no han sopesado suficientemente los errores probables de que adolecen los resultados obtenidos por tales combinaciones aisladas».

Al admitir por tanto el resultado de Bessel, de  $2''.64$ , como error medio de una latitud, consecuencia de dos fuentes (observación y atracción local), traducido en  $2''.35$  para error medio de una latitud a causa de las perturbaciones locales de la gravedad, se deduciría uno probable de  $1''.59$  por idéntica causa. Como por otra parte resultaba inadmisibles que tales perturbaciones en la dirección de la plomada tuviesen lugar únicamente en el sentido del meridiano, o de la latitud, pareció obligado suponer que fuesen igualmente posibles en todas direcciones. Así dedujo Struve que los  $1''.59$  era el valor total de la desviación de la vertical en una dirección cualquiera, reflejo de la desviación angular entre el cenit efectivo y el cenit ideal sin perturbación local. A tal error correspondería una desviación acimutal dada por  $dA = 1''.59 \operatorname{tg} \varphi$  y referida a una referencia terrestre localizada cerca del horizonte, independientemente del error acimutal cometido en la propia observación. Las desviaciones correspondientes a los 13 puntos de Laplace fueron las que figuran en la tabla siguiente.

Teniendo en cuenta las correcciones a los ángulos de los triángulos intermedios de cada cadena en el arco parcial, las que afectaron a las bases geodésicas que condujeron al cálculo final de los ángulos y lados, concluyó Struve que los acimutes observados, y los ángulos de los polígonos triangulares, presentaban errores de mayor entidad que los que les fueron asignados en un principio, ateniéndose escrupulosamente a los efectos de las posibles fuentes que supuestamente los ocasionaron. Dentro de este cálculo de las observaciones, prestó una atención especial al arco comprendido entre Nemesch y Jacobstadt, pues la discrepancia entre acimutes fue 4.7 veces mayor que el error probable estipulado.

---

<sup>121</sup> Los arcos fueron los siguientes: Perú, Indias orientales (2), Francia y España, Inglaterra, Hannover, Dinamarca, Prusia, Rusia y Suecia.

*Desviaciones de la vertical en las estaciones astronómicas del gran arco de meridiano entre el Danubio y el Mar Glacial*

Nombre	Valor	Nombre	Valor
Staro-Nekrassowka	1".61	Jacobstadt	2".40
Wodolui	1".71	Dorpat	2".58
Ssuprunkowzi	1".81	Mäki-Päällys	2".76
Kremenetz	1".90	Kilpi-Mäki	3".07
Belin	2".04	Tornio	3".54
Nemesch	2".24	Stuor-Oivi	4".08
		Fuglenaes	4".53

A su juicio era verosímil que la exactitud en la medida de los ángulos involucrados hubiese sido sensiblemente inferior a la esperada, o bien que fuese debida a la existencia de perturbaciones extraordinarias en la dirección de la plomada. No obstante desechó esa segunda posibilidad, atendiendo a dos poderosas razones. En primer lugar la excelente concordancia entre el acimut de Nemesch y el de Belin, y que el de Jacobstadt fuese confirmado por el acimut de Dorpat. Por otra parte, las tres latitudes tan próximas de Belin, Nemesch y Jacobstadt, comparadas entre sí, justificaban del todo la hipótesis de la elipse generatriz media. El análisis final de Struve pareció pues



Monumento en el lugar que ocupó la estación astronómica de Jacobstadt (Letonia). El parque circundante lleva el nombre de Struve. Jacobstadt era el nombre alemán de Jekabpils. Se ha abierto una ventana para mostrar el estado del vértice, tras su recuperación del año 1931. Al fondo se observa un monolito que recuerda la inclusión del arco en el Patrimonio Científico de la Humanidad.

obligado: «no nos queda otro remedio que suponer una exactitud inferior para los ángulos de los triángulos de este arco». La causa fue, en su opinión, la medida defectuosa de los ángulos en el año 1827, con una metodología menos fiable que la empleada en los años venideros, situándola principalmente en la dirección de la diagonal, sin que afectase en la práctica a la certidumbre de los lados, la cual se constató, para su satisfacción, gracias al acuerdo entre las dos bases de Ossowitz y Ponedeli. Para terminar, expuso Struve una tabla con los acimutes y distancias definitivas referidas a todos los arcos parciales que podemos ver en la imagen de la página siguiente.

Los datos proporcionados en la tabla, acimutes y distancias, fueron en los que se basó Struve para calcular la separación entre los paralelos, definidos por cada una de las estaciones astronómicas, eligiendo la vía trigonométrica. El problema que se le planteaba se facilitó por medio del triángulo formado, en el elipsoide terrestre, por el Polo Norte,  $P$ , y por dos estaciones astronómicas,  $A$  y  $B$ , extremos de la línea geodésica, cuyo desarrollo es  $r$ . La solución proporcionaría el valor de la distancia,  $D$ , entre los paralelos de tales puntos, es decir  $D = PA - PB$ , otra alternativa sería llevar sobre los meridianos respectivos las distancias  $PE = PB$  y  $PG = PA$ , determinando a continuación los dos valores idénticos  $D^a = AE$  y  $D^b = BG$ . Struve realizó, para ello, las siguientes construcciones geométricas complementarias:

1. Por el punto  $B$  trazó una geodésica  $BC$ , perpendicular en  $C$  al meridiano de  $A$ .
2. Análogamente trazó la línea  $AF$ , perpendicular en  $F$  al meridiano del punto  $B$ .

Haciendo  $AC = \mathfrak{R}$ ,  $CE = m$ ,  $BF = \mathfrak{R}'$  y  $FG = m'$ , se cumpliría que  $D^a = \mathfrak{R} - m$ ,  $D^b = \mathfrak{R}' + m'$ , con lo que resultaría el valor medio siguiente:  $D = (\mathfrak{R} + \mathfrak{R}' + m' - m)/2$ . Tanto  $\mathfrak{R}$  como  $\mathfrak{R}'$  se obtuvieron al resolver los triángulos rectángulos,  $ABC$  y  $BAF$ , sobre el elipsoide, teniendo en cuenta el valor del exceso esférico<sup>122</sup>. En cada uno de ellos se conocen todos sus ángulos. Ya que llamando, de ahora en adelante  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$ , a los ángulos agudos que se corresponderían con los acimutes compensados de la tabla citada, y designando con las letras  $e$  y  $e'$  a los excesos de los triángulos  $ABC$  y  $BAF$ , se tendrían los ángulos siguientes:

$$ABC \rightarrow BAC = \mathfrak{A}, ACB = 90^\circ \quad \text{y} \quad ABC = 90^\circ - \mathfrak{A} + e.$$

$$BAF \rightarrow ABF = \mathfrak{B}, BFA = 90^\circ \quad \text{y} \quad BAF = 90^\circ - \mathfrak{B} + e'.$$

Los ángulos planos que contempla el teorema de Legendre<sup>123</sup>, vendrían dados por:

$$\mathfrak{A} - a, 90^\circ - \tau \quad \text{y} \quad 90^\circ - \mathfrak{A} + a + \tau.$$

$$\mathfrak{B} - a', 90^\circ - \tau' \quad \text{y} \quad 90^\circ - \mathfrak{B} + a' + \tau'.$$

Ahora bien, como  $a + \tau$  y  $a' + \tau'$  pueden considerarse respectivamente iguales a  $2e/3$  y a  $2e'/3$ , sin cometer errores superiores a la milésima de segundo, resultarían unos ángulos planos de:

$$\mathfrak{A} - e/3, 90^\circ - e/3 \quad \text{y} \quad 90^\circ - \mathfrak{A} + 2e/3$$

$$\mathfrak{B} - e'/3, 90^\circ - e'/3 \quad \text{y} \quad 90^\circ - \mathfrak{B} + 2e'/3.$$

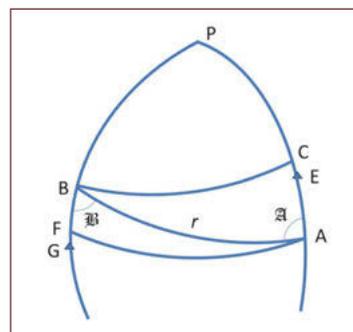
<sup>122</sup> De nuevo remito al lector interesado al capítulo dedicado a la triangulación y a su cálculo.

<sup>123</sup> Las letras  $a$  y  $\tau$ , representan las diferencias entre los ángulos del triángulo sobre el elipsoide y sus homólogos de un segundo triángulo plano, cuyos lados coincidiesen con los del primero.

I.	{ STARO-NEKRASSOWEA WODOLUI.....	$\mathfrak{A}'_e = 3^\circ 18' 24,988$	$\lg r' = 4,9848914.4$
		$\mathfrak{B}'_e = 183 24 35,737$	
II.	{ WODOLUI..... SSUPRUNKOWZI.....	$\mathfrak{A}''_e = 319 19 49,834$	$\lg r'' = 5,1192468.0$
		$\mathfrak{B}''_e = 137 38 40,272$	
III.	{ SSUPRUNKOWZI..... KREMENETZ.....	$\mathfrak{A}'''_e = 332 18 43,009$	$\lg r''' = 4,9395650.2$
		$\mathfrak{B}'''_e = 151 28 28,714$	
IV.	{ KREMENETZ..... BELIN.....	$\mathfrak{A}''''_e = 351 22 51,580$	$\lg r'''' = 5,0513246.3$
		$\mathfrak{B}''''_e = 171 0 30,293$	
V.	{ BELIN..... NEMESCH.....	$\mathfrak{A}^V_e = 1 16 1,624$	$\lg r^V = 5,1727435.8$
		$\mathfrak{B}^V_e = 181 20 48,708$	
VI.	{ NEMESCH..... JACOBSTADT.....	$\mathfrak{A}^{VI}_e = 9 9 34,103$	$\lg r^{VI} = 5,0300461.0$
		$\mathfrak{B}^{VI}_e = 189 36 16,160$	
VII.	{ JACOBSTADT..... DORPAT.....	$\mathfrak{A}^{VII}_e = 13 33 57,606$	$\lg r^{VII} = 5,0434741.3$
		$\mathfrak{B}^{VII}_e = 194 17 39,622$	
VIII.	{ DORPAT..... MÄKI-PÄÄLYS.....	$\mathfrak{A}^{VIII}_e = 4 12 37,313$	$\lg r^{VIII} = 4,9875244.9$
		$\mathfrak{B}^{VIII}_e = 184 25 29,636$	
IX.	{ MÄKI-PÄÄLYS..... KILPI-MÄKI.....	$\mathfrak{A}^{IX}_e = 357^\circ 55' 9,337$	$\lg r^{IX} = 5,1657315.6$
		$\mathfrak{B}^{IX}_e = 177 44 31,144$	
X.	{ KILPI-MÄKI..... TORNEA.....	$\mathfrak{A}^X_e = 341 35 45,883$	$\lg r^X = 5,2877241.2$
		$\mathfrak{B}^X_e = 159 14 42,746$	
XI.	{ TORNEA..... STUOR-OIVI.....	$\mathfrak{A}^{XI}_e = 349 48 49,509$	$\lg r^{XI} = 5,2205626.1$
		$\mathfrak{B}^{XI}_e = 168 30 41,974$	
XII.	{ STUOR-OIVI..... FUGLENAES.....	$\mathfrak{A}^{XII}_e = 8 41 22,854$	$\lg r^{XII} = 5,0614780.1$
		$\mathfrak{B}^{XII}_e = 189 33 0,791$	

Compensación de acimutes y diagonales geodésicas en los diez arcos parciales.

A partir de tales valores, se pudieron calcular los dos segmentos  $\mathfrak{R}$  y  $\mathfrak{R}'$ , aunque previamente tuviera que obtener  $e$  y  $e'$ , a partir del valor del grado medio, cifrado en 57019.75 toesas, y de una relación entre los semiejes del elipsoide, dada por 0.9966; las indeterminaciones respectivas de ambas magnitudes fueron 1.15 toesas y 0.0000197. La obtención de  $m$  y  $m'$ , la basó Struve en el cálculo de las latitudes reducidas. Ciertamente, si la de  $B$ , igual a la de  $E$ , fuese  $\chi$ , se trataría de hallar la del punto  $C$  ( $\psi$ ) y expresar la diferencia  $\psi - \chi$  en toesas. Siendo  $\sigma$  el desarrollo de un segundo de arco de meridiano, se verificaría, para la latitud media de  $(\chi + \psi)/2$ ,  $m = \sigma(\psi - \chi)$ . Designando la latitud reducida asociada a  $\chi$  por



Triángulo auxiliar para calcular la distancia entre paralelos.

v y por  $\omega$  la correspondiente a  $\psi$ , es evidente que, siendo  $\text{tg } v = (b \text{ tg } \chi) / a$  y después de considerar sobre el elipsoide el triángulo  $PCB$ , la conocida relación entre los acimutes y las latitudes reducidas permitiría deducir las relaciones:

$$\cos \omega = \cos v \cos (\mathfrak{B} - \mathfrak{A} + e) \quad \text{y} \quad \text{tg } \psi = (a \text{ tg } \omega) / b.$$

El cálculo de  $FG = m'$ , relativo al triángulo  $BAF$ , sería parecido al de  $CE = m$ ; llegándose a que  $m' = (\omega - \varphi) \sigma'$ , una vez obtenido  $\sigma'$  a partir de  $(\varphi + \omega)/2$ . Según Struve, el rigor de sus cálculos exigió que emplease unos valores de  $\sigma$  y  $\sigma'$  acordes con las dimensiones de la Tierra que ya había venido utilizando. A esos efectos, recordó que las tablas *Berliner Jahrbuch* (1852)<sup>124</sup>, proporcionaban el valor medio<sup>125</sup> del grado de meridiano a intervalos de  $10'$ , desde el ecuador al Polo; de manera que con una simple interpolación se podría hallar  $\sigma$  como  $g/3600$ . Con el fin de aclarar mejor su procedimiento, detalló el caso concreto de la distancia entre los paralelos de Wodolui y Suprunkowzi, resultando  $D = 98558.2956$  toesas, como diferencia de  $\mathfrak{K} = 99836.9080$  toesas y  $m = 1278.6124$  toesas. Acto seguido se relacionaron los valores correspondientes a todos los arcos parciales (los del segmento meridional en el primer tomo de la Memoria y los del septentrional en el segundo).

Struve aprovechó la ocasión para ensalzar de nuevo la figura geodésica de Bessel, al referir: «Bessel, en su excelente obra sobre la medida de un arco de meridiano en Prusia, *Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer* (Berlin, 1838, p. 446)<sup>126</sup>, ha dado una fórmula tan elegante como cómoda, para hallar la distancia entre paralelos, en función de la longitud de la línea geodésica y de los acimutes que presenta esta en sus extremos». Él mismo explicó que la empleó como medio ideal para comprobar los cálculos que había efectuado por un procedimiento completamente diferente. El resultado de la comprobación fue muy satisfactorio, puesto que las diferencias entre las distancias obtenidas por ambas vías fueron las milésimas de toesa, que se indican para cada uno de los arcos parciales: I (0.001), II (0.027), III (0.009), IV (0.000), V (0.000), VI (0.020), VII (0.002), VIII (0.001), IX (0.000), X (0.040), XI (0.012) y XII (0.001). Aunque la validez de los dos procedimientos quedase demostrada, es cierto que con el de Bessel se evitaba el cálculo del exceso esférico y por tanto tenía la ventaja de ser más breve. No obstante, la vía usada por Struve también tenía las suyas: su fuerte componente geométrica facilitaba la estimación de los errores asociados a los resultados del cálculo, achacables a las incertidumbres de que adolecían las dimensiones medias de la Tierra o bien a las posibles irregularidades de carácter local.

Struve terminó este apartado de su Memoria con unas consideraciones acerca de la forma y tamaño de la Tierra, que me han parecido necesario reproducir. Comentaba que si la Tierra hubiese sido un elipsoide perfecto con dimensiones conocidas, las distancias entre paralelos obtenidas a través de los triángulos  $ABC$  y  $BAF$ , en cada arco parcial, deberían haber sido idénticas. Sin embargo, los cálculos presentaban siempre pequeñas diferencias  $\Delta D$ , que convenía exponer para que su investigación fuese lo más completa posible. Con ese objeto las detalló, expresadas en toesas, en una tabla, junto a los excesos medios de ambos triángulos, expresados en segundos:

<sup>124</sup> Formadas por el astrónomo Johann Franz Encke, discípulo de Gauss.

<sup>125</sup> Dichos valores medios ( $g$ ) se obtuvieron a partir de una excentricidad de 0.00667437, muy similar al valor empleado por Struve (0.00667436).

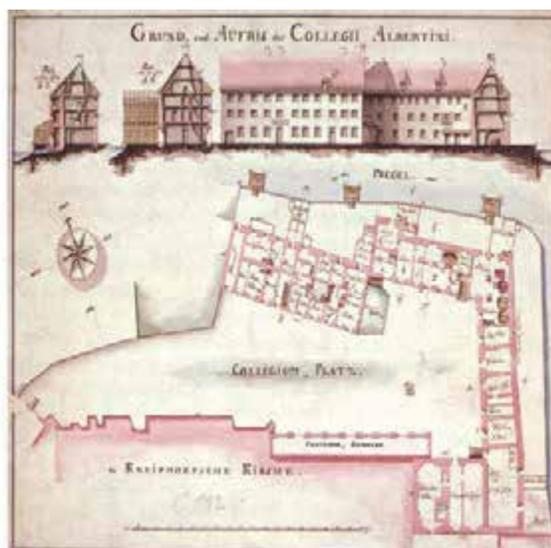
<sup>126</sup> Aunque Struve diese ese título, el verdadero fue *Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreiecksketten*. Bessel lo firmó como *Director der Königsberger Sternwarte*, el antiguo observatorio astronómico unido a la Universidad Albertina de la ciudad.

*Diferencias de distancias entre paralelos y excesos medios  
de los triángulos polares en los doce arcos parciales*

Arco	$\Delta D$	Exceso	Arco	$\Delta D$	Exceso
I	-0.0062	5".25	VII	0.2131	27".41
II	-0.6150	82".70	VIII	-0.0023	6".80
III	0.6143	30".26	IX	0.0016	7".78
IV	-0.0337	18".42	X	-0.9499	113".81
V	0.0018	4".86	XI	0.4076	48".86
VI	-0.0841	17".74	XII	-0.0333	19".90

Obsérvese que cinco incrementos son positivos y siete negativos, muestra de que no han sido producidos por una causa que actuase con sentido constante, sino que parecen más bien el efecto de anomalías locales en la forma del elipsoide terrestre. Struve constató igualmente que los incrementos aumentaban con las áreas de los triángulos, es decir con los excesos. En su afán de ajustar todavía más los resultados, intentó averiguar la naturaleza de tales incrementos, viendo que su término principal dependía de la diferencia entre los dos posibles valores de las diagonales geodésicas ya comentadas. Finalmente obtuvo los errores probables de cada  $\Delta D$ , a causa de supuestas anomalías locales de la Tierra, destacando el valor de media toesa que se presentó en el segundo arco parcial.

Además de las distancias entre los paralelos, calculó Struve la que separaba cada estación astronómica del punto más meridional del arco, esto es la estación de Staro-Nekrassowka, repre-



El Observatorio astronómico de Königsberg, antes de que fuese destruido por la RAF a finales de agosto de 1944 (durante los bombardeos de la ciudad). El Observatorio estaba ligado a la antigua Universidad de Albertina, hoy denominada Universidad Estatal Immanuel Kant, especialmente centrada en el estudio de las matemáticas y de la astronomía; era la única universidad de Prusia oriental. El plano representa el aspecto de la plaza hacia el año 1810 (*Aufriss von Albertinum und nördlicher Domhälfte*).

sentándola con la letra **D**. Los errores probables de estas nuevas distancias estuvieron comprendidos entre 7.116 toesas y 2.645 toesas, optando aquel por fijarlos como la media geométrica de los mismos. Así figuraron en la tabla que presentó en la página 210 del segundo tomo de su Memoria, con el título siguiente: *Distancias definitivas entre los paralelos de los doce puntos astronómicos del arco total comprendido entre el Danubio y el mar Glacial.*

Estaciones astronómicas	Distancias Error probable	Sumas Error probable
	toesas	toesas
<b>1. STARO-NEKRASSOWKA</b>		<b>0,000</b>
<b>2. WODOLUI</b> .....	<b>96415,136 ± 0,651</b>	<b>96415,136 ± 0,651</b>
<b>3. SSUPRUNKOWZI</b> .....	<b>98557,988 ± 1,251</b>	<b>194973,124 ± 1,646</b>
<b>4. KREMENETZ</b> .....	<b>76751,386 ± 0,710</b>	<b>271724,510 ± 2,039</b>
<b>5. BELIN</b> .....	<b>111219,011 ± 1,008</b>	<b>382943,521 ± 2,611</b>
<b>6. NEMESCH</b> .....	<b>148809,521 ± 1,426</b>	<b>531753,042 ± 3,453</b>
<b>7. JACOBSTADT</b> .....	<b>105730,879 ± 0,926</b>	<b>637483,921 ± 3,393</b>
<b>8. DORPAT</b> .....	<b>107280,563 ± 0,675</b>	<b>744764,484 ± 4,177</b>
<b>9. HIGHLAND, punto Z</b> .....	<b>97538,618 ± 0,503</b>	<b>842302,102 ± 4,372</b>
<b>10. KJLPI-MAKI</b> .....	<b>145713,567 ± 1,072</b>	<b>988016,669 ± 4,502</b>
<b>11. TORNEA</b> .....	<b>182794,304 ± 1,673</b>	<b>1170810,973 ± 4,957</b>
<b>12. STUOR-OIVI</b> .....	<b>163221,904 ± 1,689</b>	<b>1334032,877 ± 5,539</b>
<b>13. FUGLENAES</b> .....	<b>113753,906 ± 1,785</b>	<b>1447786,783 ± 6,226</b>

Distancias entre paralelos, expresadas en toesas, junto a los errores probables correspondientes.

La identificación de los vértices geodésicos fue una operación delicada y clave para la observación fiable de la triangulación y, a la postre, para su cálculo definitivo. Las señales diseñadas al efecto debían reunir una serie de características que, no por parecer obvias, han de ser recordadas. En primer lugar la de su visibilidad a grandes distancias, a la vez que presentaban un aspecto inequívoco, dos factores muy a tener en cuenta. Mención especial merecen su carácter permanente<sup>127</sup> y su fácil replanteo, una posibilidad que se veía facilitada al colocar una serie de señales testigo en el entorno de la principal, igualmente permanentes, y ocasionalmente otras situadas en el subsuelo pero en la vertical del vértice.

La señalización en el arco de meridiano ruso-escandinavo fue muy heterogénea, tal como se refleja en la Memoria presentada por Struve, el cual dividió las señales en dos grandes grupos: simples y de plataforma. Como él mismo apuntaba, la forma de las señales era de suma importancia para poder aumentar la exactitud de las medidas angulares, ya que sus posibles irregularidades podrían afectar negativamente a la incertidumbre de la lectura angular correspondiente<sup>128</sup>. Se desprendía pues la obligatoriedad de proyectar señales más regulares cuando disminuyera el valor de la distancia desde la que tendrían que visarse, una precaución sobre la que hacía Struve especial énfasis: «en efecto, para el lado más pequeño de nuestros triángulos principales, de 3400 toesas, cada pulgada equivaldría a 0".84, con lo que las irregularidades previstas deberían ser de sólo alguna fracción de pulgada».

La heterogeneidad citada se evidenciaba otra vez cuando Struve se refería por separado a las señales del arco báltico y a las usadas entre los ríos Duna y Danubio. Entre las del primer arco las había de dos modelos, reproducidos en la plancha XX del segundo tomo de la Memoria que se viene comentando. Las dos eran armazones de madera sólidos, equilibrados y contruidos de modo que presentasen siempre la tan deseada simetría. Los puntos de mira fueron en el primero de ellos una viga redonda y vertical, que salía del vértice de una pirámide cuadrangular, y

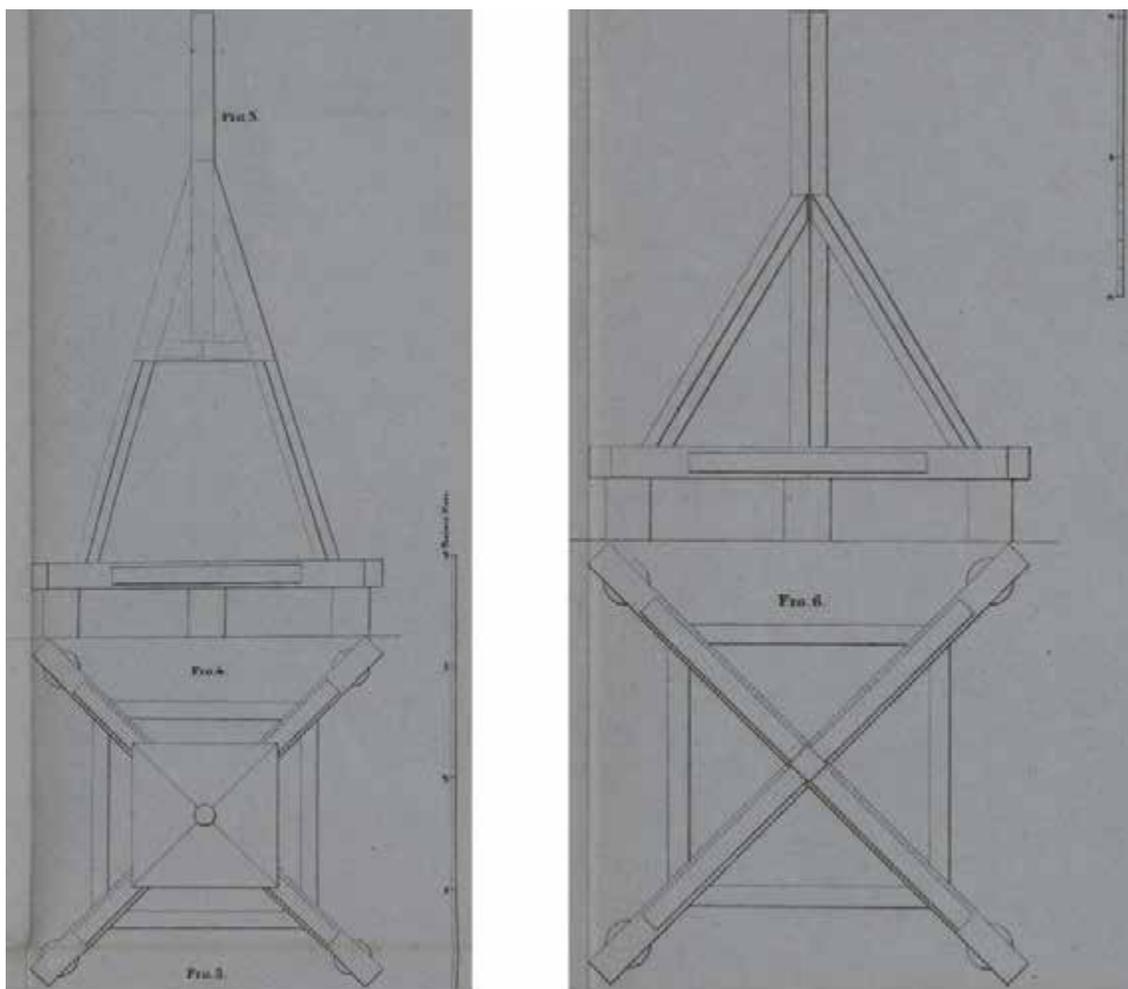
---

<sup>127</sup> Aunque se trate de una severa crítica al trabajo de campo de Struve, es obligado manifestar que no dejó sobre el terreno, comprendido entre Hogland y Jacobstadt, ninguna señal permanente, salvo en los extremos de las bases. Como era presumible no se conservó ninguna de las señales de madera que construyó para materializar los vértices de los triángulos que observó.

<sup>128</sup> Struve lo aclaraba perfectamente con un ejemplo, aunque se reproduzca aquí traducido al Sistema Métrico Decimal. Comentaba que si la longitud media de los lados de los triángulos era del orden de los 26 km, el ángulo bajo el que se vería, a esa distancia, un segmento de 30 cm sería del orden de 2".4; es decir que irregularidades de 5 cm equivaldrían a 0".4, justamente la fiabilidad con la que se pretendían medir los ángulos horizontales.

en el segundo otra de sección cuadrada, también vertical, la cual sobresalía de cuatro puntales inclinados, que convergían en un punto de la misma. El diámetro de la primera varió entre 8 y 12 pulgadas, oscilando el lado de la segunda entre 4 y 8 pulgadas, dependiendo siempre de las distancias desde las que deberían ser visadas. Las dimensiones aparentes, que ofrecían al observarlas con el anteojo, las concretó asimismo Struve para la señal, con 9 pies de alto y 12 pulgadas de ancho, colocada en el vértice Lenard al visarla desde la estación Oppekaln<sup>129</sup>, separados unas 30000 toesas ( $\approx 58$  km): «una línea de 10'' de alto con un ancho de 1''.1, presentando el aspecto de un objeto bien diferenciado y adecuado para una buena puntería».

Struve barnizó sus señales con un aceite negro intenso que mejoraba la visibilidad, favorecía el contraste y contribuía mejor a la atenuación del temido efecto de fase. Taxativamente afirmó que jamás apuntó a la pirámide truncada de la que salía la viga, sino a ella misma sin excepción. A lo largo de sus observaciones tuvo ocasión de comprobar que al iluminar el Sol una de sus caras inclinadas, podía desaparecer después y menoscabar consiguientemente la bondad



Señales geodésicas empleadas por W. von Struve en su triangulación.

<sup>129</sup> El tercer vértice del triángulo geodésico fue Mario-Mäggi.

de las lecturas obtenidas. La viga vertical, por el contrario, no estaba sujeta a tales cambios, aunque pudiese reflejar la luz del Sol en las proximidades de su ocaso. Sin embargo, a esas horas ya no se efectuaban las medidas angulares, por la clásica reverberación. Struve concretaba el periodo más adecuado para observar «las imágenes en reposo», hacia la mitad del intervalo definido por el mediodía y la puesta de Sol. También se pronunció sobre la verticalidad de las señales, que comprobó en todos los casos; únicamente señaló una importante excepción en la señal, ya mencionada de Lenard, y que cifró en 2.1 pulgadas sobre 8 pies de alto, la cual tuvo en cuenta al realizar los cálculos correspondientes.

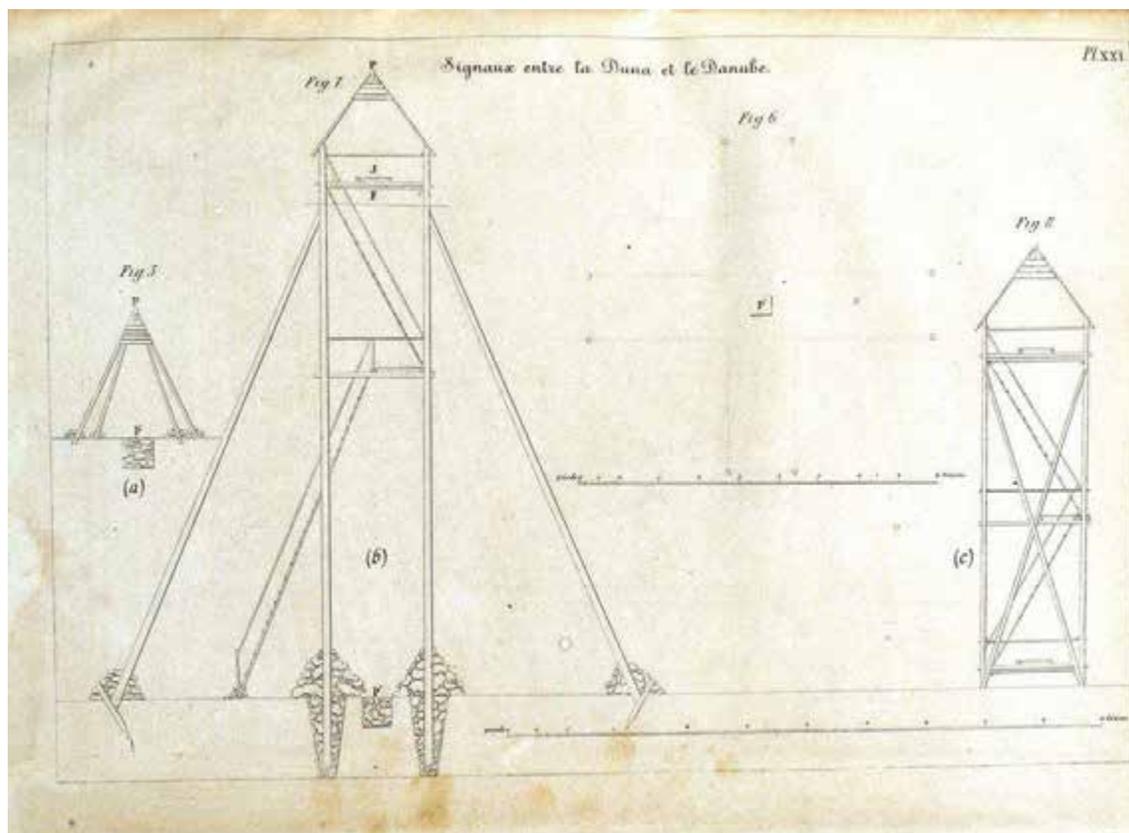
Hubo también otra clase de señales empleadas por Struve, coronadas por un paralelogramo blanco sobre fondo negro, en la triangulación secundaria que enlazó la base de Simonis con la cadena geodésica principal. Muchos de los campanarios de iglesias, terminados en flecha<sup>130</sup>, fueron igualmente usados, al igual que miras especiales que colocaba en las galerías de otros o en la torre de algún castillo. Aunque se afirme que Struve empleó el heliotropo profusamente en esta triangulación, la verdad es que no lo hizo en tantas ocasiones; él mismo se pronunciaba así: «el uso del heliotropo ha sido excepcional... los 34 triángulos desde Hogland hasta Jacobstadt, constan de 69 lados y 138 visuales. Para 27 de ellas se ha empleado el heliotropo. Un uso exclusivo del heliotropo habría ralentizado demasiado la marcha del trabajo, en nuestro clima, son más numerosos los días cubiertos que los despejados, mejorando las condiciones de observación por producirse menos el fenómeno de la reverberación». Struve finalizaba recordando la extremada atención que había prestado al evaluar las relaciones (distancias reducidas y direcciones) entre los diferentes puntos de mira y el centro de la estación<sup>131</sup>. Su autocomplacencia fue exagerada al añadir: «las precauciones y atenciones referidas han conducido, en todo caso, a una observación perfectamente exacta en el sentido óptico, y han contribuido decisivamente a los satisfactorios resultados de las operaciones».

Al igual que Struve describió, con sumo detalle, sus señales en el *Gradmessung I* (pp. 70-72), Tenner incluyó la descripción de las que empleó, en las Memorias del Depósito Topográfico (V.III. pp. 170-175), escritas en ruso. Afortunadamente Struve reprodujo los dibujos, empleados por el general, en la plancha XXI del segundo tomo de su obra, permitiendo así que se puedan presentar también junto a estas líneas. La imagen (a) representa una de las señales simples, pirámides cuadrangulares de madera, empleadas en todos aquellos vértices desde los que pudo hacerse la observación colocando el soporte del instrumento directamente sobre el suelo. La altura vertical de las pirámides variaba entre 3 y 6 toesas, dependiendo de las circunstancias. Cada una de ellas terminaba con una cubierta negra de 3.5 pies de ancho, la cual soportaba un paralelepípedo ( $P$ ) de 4 pulgadas de alto y 18 pulgadas de largo. La base de la cubierta definía un cuadrado con 3 pies de lado. Para aumentar su solidez, las cuatro aristas de la señal estaban unidas con traviesas, aunque no aparecieran en el gráfico. El punto  $P'$  era la proyección de  $P$  sobre el terreno, convenientemente marcada en una piedra rodeada de mampostería ordinaria.

En la imagen (b) se dibujó una señal mayor, constituida por una torre de madera con 11 toesas de alto, es decir más de 21 m. Las cuatro vigas verticales de su estructura limitaban un cuadrado de 10 pies de lado, consiguiéndose la estabilidad indispensable con dos grandes contrafuertes

<sup>130</sup> La flecha presentaba la ventaja de que su pequeño diámetro mejoraba la fiabilidad de la lectura acimutal.

<sup>131</sup> Para la proyección de los puntos visados usó un pequeño antejo de pasos portátil, con una focal de 8 pulgadas, provisto de trípode. A ese propósito, comentó que incluso había sobrepasado la exactitud requerida.



Señales geodésicas empleadas por Tenner entre los ríos Duna y Danubio.

inclinados, dos para cada viga. También contribuían a su equilibrio las dos galerías y los planos que las unían, a la vez que servían de apoyo para las escaleras de acceso. La torre se coronaba con otra pirámide, similar a la de la primera señal, sobre la que se realizaba la puntería. Por debajo de ella había dos suelos independientes, uno (*J*) para colocar el instrumento y otro (*F*) sobre el que se situaban los dos observadores. El anteojo del instrumento, estacionado con su soporte en *J*, distaba una toesa del vértice (*P*) de la torre. En la imagen (*c*) se representa un piso suplementario para la torre anterior, logrando así que el vértice de la pirámide (la señal visada) estuviese a 16.3 toesas, altura equivalente a la de un edificio con más de diez plantas.

Struve hizo muy bien en recalcar, aunque fuese indirectamente, la dificultad de las observaciones, los esfuerzos que tuvieron que realizar los operadores y hasta los peligros que debieron de afrontar en muchas ocasiones. Así se desprende de su relato, cuando se refería a un tercer piso, por encima del segundo, para la torre de observación, hasta llegar a 20 toesas, o incluso más, de alto. Tales pisos suplementarios ya no contaban con el apoyo de los contrafuertes y tampoco tenían la rigidez proporcionada por las traviesas colocadas en el exterior o en el interior de la estructura. Para aquellos casos excepcionales en que la altura de la torre superase las 15 toesas, el cuadrado formado por las vigas verticales tenía un lado de 17 pies.

Struve recordaba que cuando Tenner terminó la descripción de las torres, comentó que las medidas angulares realizadas a una altura de 15 a 20 toesas, sólo eran factibles en ausencia de viento, puesto que en cuanto aumentaba su velocidad se producían oscilaciones que impedían

cualquier medida, con un mínimo de rigor. Otra de las advertencias que hacía el militar ruso era la de usar en esas torres instrumentos menos pesados<sup>132</sup>, Struve la aprovechó para añadir que la observación de ángulos a tanta altura sobre el suelo era menos fiable que la que se efectuaba a ras del mismo. No obstante, trató de salvaguardar la tarea de Tenner al manifestar que, a pesar de todo, era indudable que sus medidas angulares habían sido impecables, incluso cuando la altura de la estación fue máxima. Ello no impidió que criticase también la forma piramidal<sup>133</sup> de la señal visada, en tanto que había podido reducir, aunque fuese poco, la precisión óptica de las punterías. Tenner no empleó el heliotropo en ninguna de sus observaciones.

La ventaja principal de las señales empleadas en el tramo entre ríos, con relación a las del arco de Struve, fue que el centro de la estación ( $P'$ ) siempre se materializó sobre el terreno, contando además con la permanente verificación de la verticalidad de la línea  $PP'$ . Varias fueron las marcas testigo empleadas por Tenner: una pequeña perforación sobre una roca permanente, una cruz grabada sobre una roca similar, indicando la vertical de la estación la intersección de sus brazos. Otras fueron más fácilmente recuperables, como las construcciones sólidas que mandó colocar en el subsuelo que llevaban incorporadas en su extremo superior una piedra o un ladrillo perforado. Para los extremos de las bases reservó pilares regulares en cuya superficie encastró un ladrillo, cuyas diagonales quedaron materializadas para que su intersección señalase uno de sus extremos.



Vértice Rudi (Moldavia): pilar en el subsuelo y monumento levantado en el año 2006, tras ser declarado Patrimonio de la Humanidad.



<sup>132</sup> El coronel Melan, estrecho colaborador de Tenner, opinaba que el teodolito universal de Ertel no era el más apropiado para observar desde las torres, pues tenía una gran sensibilidad.

<sup>133</sup> Ampliamente adoptada por todas las empleadas durante el siglo XVIII. Así se hizo en el virreinato de Perú y en Laponia.



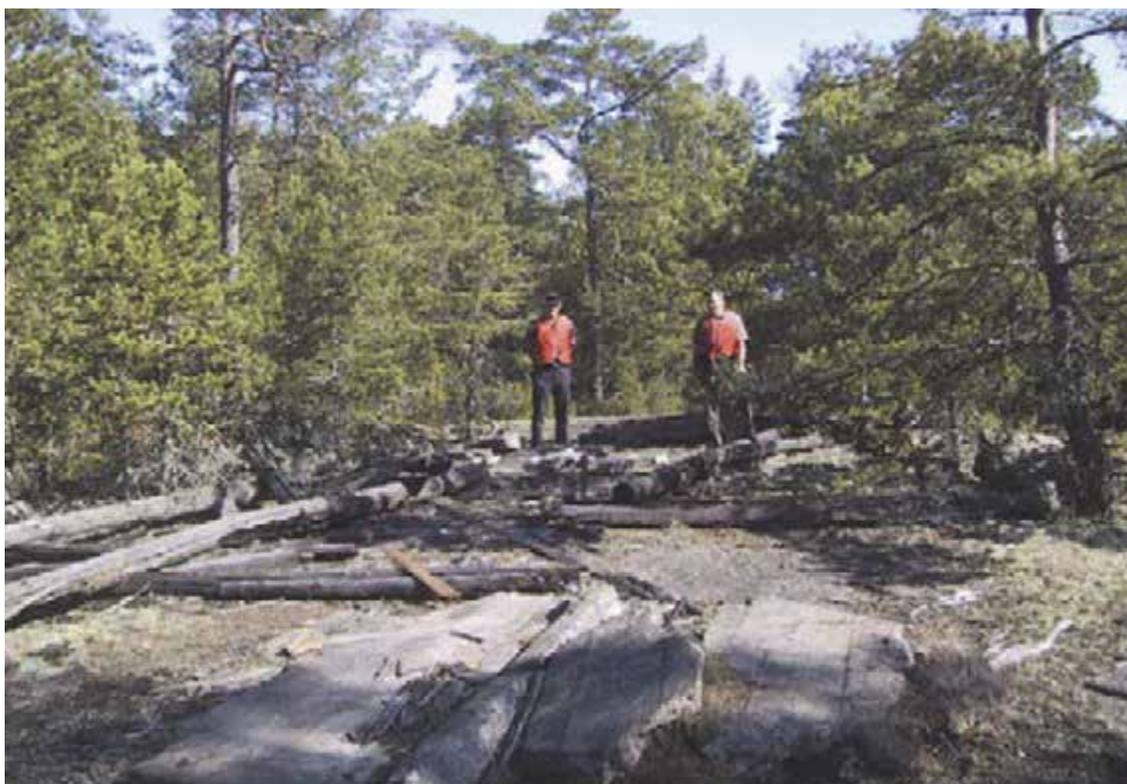
El vértice Tchekutsk (Chekutsk. Bielorusia): la marca original colocada por Tenner y el monumento colocado al ser declarado Patrimonio de la Humanidad.



Señal original colocada en el vértice Meschkanzi (Meskonys. Lituania), la cerca se colocó al ser declarado Patrimonio de la Humanidad.

Las señales empleadas en el gran ducado de Finlandia fueron análogas a las del segundo tipo que diseñó Struve para las provincias bálticas, con la salvedad de que su altura media alcanzó sólo los 12 pies. El trozo de viga que sobresalía de los contrafuertes se pulió en forma cilíndrica, con 4 pies de alto y una sección que presentaba un radio de 35 pulgadas. Todas las señales se pintaron de negro. Sin embargo, hubo algunos casos en que las dimensiones de las señales fueron considerablemente mayores, aquellos en los que la altura del instrumento debía posibilitar la visión de los vértices de su entorno. Esas señales mucho más elevadas servían fundamentalmente de plataforma para colocar el teodolito y, en su caso, el heliotropo; siendo raras las ocasiones en que se visaron para efectuar las lecturas angulares.

En los diarios de campo se indicaba como el heliotropo había sido usado con relativa frecuencia, bien para visar vértices lejanos o para aquellos otros en que no se proyectaban las señales sobre el cielo sino sobre zonas en sombra. Struve completaba la información refiriendo que en esos últimos supuestos, los geodestas además del heliotropo hicieron uso de tabletas verticales blanqueadas con cal y colocadas justo detrás de las señales; especialmente cuando se trataba de visuales que no fuesen demasiado largas. En los 70 triángulos principales, de aquel territorio, se observaron 282 direcciones, usándose el heliotropo en 37 de ellas. Este instrumento también resultó imprescindible en el golfo de Botnia, desde Laton-Mäki hasta Tornio, pues la observación de sus triángulos hubiese resultado imposible sin su concurso; debe recordarse que la visibilidad entre vértices alejados se veía muy entorpecida por las brumas casi permanentes que cubrían la superficie del mar.



Restos de la torre de observación levantada en el vértice Svartvira, localizado en la isla Mustaviiri (golfo de Finlandia). En la fotografía, del año 2002, aparecen los geodestas J. Ratia y M. Haanperä del Servicio Topográfico Nacional de Finlandia (*Maanmittauslaitos*).

La referencia a las señales geodésicas usadas en el sector más septentrional del arco de meridiano, las colocadas en Laponia y en Finmarken, fue extraída por Struve de los diarios que le entregó Selander. El enlace entre las triangulaciones de Finlandia y Laponia, a través del lado común Tornio-Kaakama-Vaara, fue realizado por los geodestas rusos, los cuales observaron tanto desde Tornio como desde Kivalo la señal que había colocado el astrónomo sueco en el vértice Kaakama-Vaara. La señal fue realmente un árbol, sujeto por dos puntales, al que se le añadió en su parte superior un tonel cilíndrico, sólidamente anclado a la misma. Struve manifestó con toda rotundidad que en aquella zona jamás se usó el heliotropo.

Acto seguido centró su relato en las numerosas dificultades que se tuvieron que superar al construir las señales de Finmarken, pues se tenía que transportar la madera necesaria desde el distrito de Alten, donde se hallaba el bosque de abetos más al Norte de Europa; la razón era que la cadena triangular atravesaba un territorio cubierto solamente por una especie de monte bajo. Ante tal panorama, los operadores Klouman y Lundh proyectaron señales tan simples como les fue posible: un poste, sensiblemente cilíndrico, con 12 pies de largo y 4 pulgadas de diámetro, empotrado verticalmente en una roca y mantenido así con tres puntales; si bien contribuyó poderosamente a ello el montón de piedras que lo rodeaba hasta llegar a los 6 pies de altura.

Cuando se trataba de visuales muy largas el poste se enfundaba en su parte superior con medio tonel bien sujeto al mismo. Las dimensiones de esa especie de armadura fueron de 3 pies de diámetro y 2 de altura; su parte frontal se dividió en dos mitades, al pintarla una de blanco y otra de negro. Struve consideraba que el contraste fue obligatorio, puesto que las señales del lado oriental se proyectaban, muy a menudo, sobre el terreno, cuando se visaban desde sus homólogas del lado occidental con mayor altitud. Tales toneles se formaban al pie de la señal, uniendo las duelas que se habían preparado en Alten<sup>134</sup>.

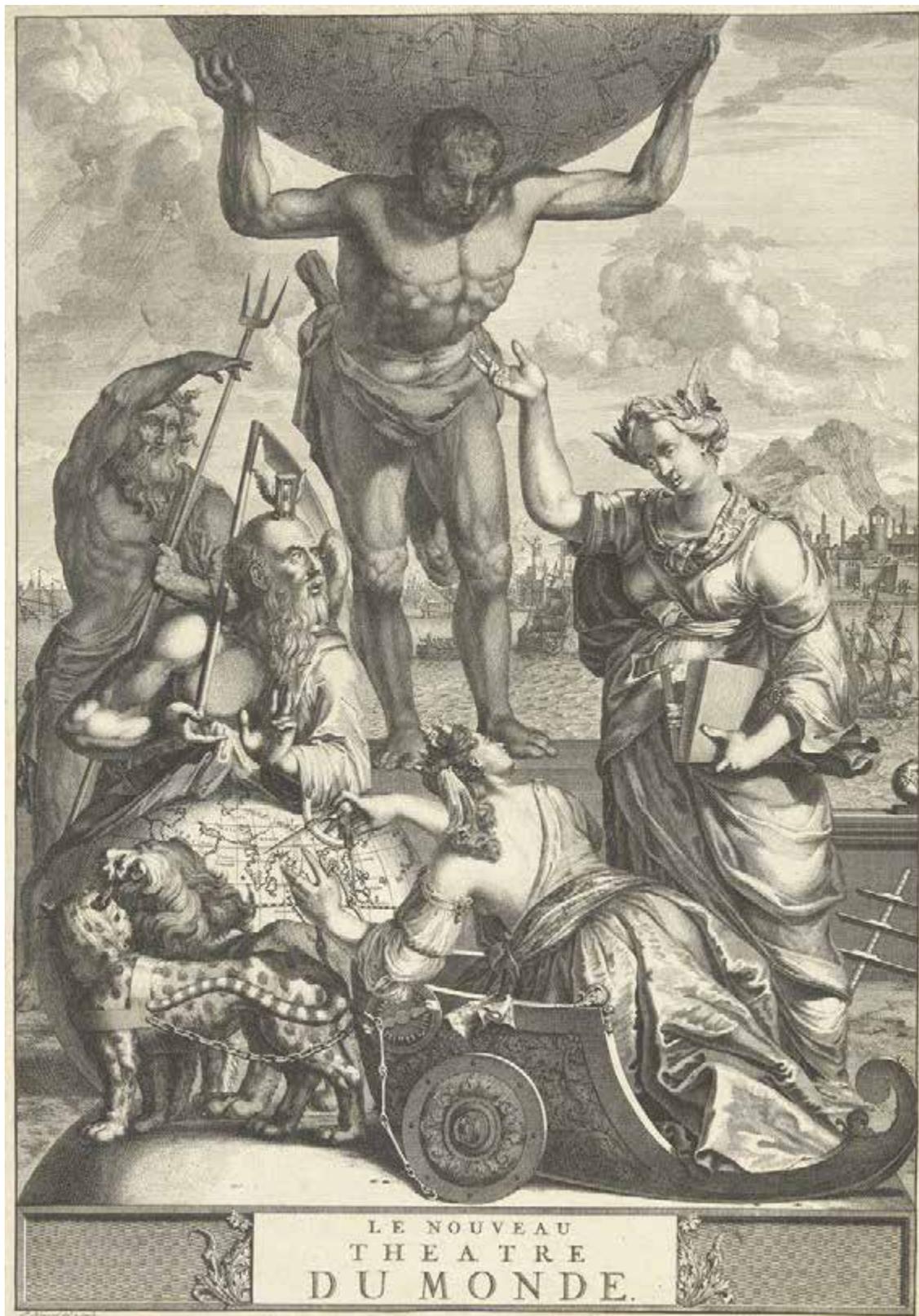


Grabado de 1838, centrado en la desembocadura del río Alten.

---

<sup>134</sup> Struve aclaraba que el transporte de los toneles hubiese resultado imposible.

El resumen concluyó con una referencia a la red de enlace entre la base medida en Alten y el lado principal constituido por los vértices Nuppi-Vaara y Lohdizhajokki, la cual constó de diez vértices secundarios. Las señales correspondientes se diseñaron sobre la marcha, preparándose su armazón en Altengaard. Varias de ellas llevaron incorporados, como en las principales, los toneles ya citados. En esta ocasión el transporte del material se efectuó sin mayores complicaciones, ya que las distancias a recorrer fueron pequeñas, al igual que las altitudes que tuvieron que salvar. De hecho la distancia entre Altengaard y el vértice secundario más alejado, Vuosgol-Vaara, fue de unos 21 km. En cuanto al desnivel entre el terreno de la base y los del lado principal fue siempre menor de 125 toesas.



Aunque ya sea muy conocido que la medida de arcos de meridiano contribuyó, en su momento, al estudio de la forma y dimensiones de la Tierra, tanto con observaciones astronómicas como otras de índole geodésico o topográfico, debe subrayarse la importancia de estas últimas para calcular el desarrollo del arco correspondiente, el radio de la misma (en el supuesto esférico) o sus dos radios de curvatura principales (en el supuesto elipsoidal). En un principio se evaluó la distancia con poca aproximación y se obtuvieron valores muy dispares del perímetro terrestre, con una excepción tan extraordinaria como el resultado atribuido a Eratóstenes<sup>135</sup>; el cual contó a buen seguro con información precisa y preciosa depositada en la Biblioteca que dirigía. En esta pincelada histórica, parece obligado retroceder aún más en el tiempo para alcanzar el Egipto de los faraones y detenerse ante la gran pirámide de Keops; un grandioso monumento metrológico, geodésico y astronómico, cuya diagonal (o altura oblicua) guardaba, según los antiguos cronistas, una estrecha relación con el tamaño de la Tierra.

Algunos de ellos, como Diodoro Sículo y Estrabón, comentaron que dicho segmento equivalía a la décima parte del desarrollo de un minuto del meridiano terrestre. La primera comprobación documentada de semejante y sorprendente posibilidad fue protagonizada por E. F. Jomard, un ingeniero geógrafo que acompañó a Napoleón cuando invadió aquel país. Partiendo de uno de los modelos elipsoidales de su tiempo, y teniendo en cuenta la latitud del lugar, dedujo que el valor de esa diagonal, o altura oblicua, era precisamente una de las medidas itinerarias más usadas en la antigüedad, esto es, el estadio; su equivalencia métrica resultó ser del orden de 184.7 m, aproximadamente la décima parte del desarrollo del minuto en aquellas latitudes. Habiendo calificado este hecho curioso de sorprendente, también merecería el mismo calificativo otra característica igualmente relevante de la gran pirámide de Giza: la orientación de los cuatro lados de su base era cinco veces más ajustada que la que presentaban los muros que limitaban el observatorio astronómico de Uraniburgo (Isla de Ven), cuyo proyecto y dirección corrió a cargo de Tycho Brahe, profesor de J. Kepler.

La exactitud en la medida de las distancias siguió estancada durante siglos, evaluándose el desarrollo del arco mediante comparaciones directas con un cierto patrón: cuerdas, cadenas, etc.

---

<sup>135</sup> Aunque se considere a Eratóstenes el fundador de la geodesia, debe señalarse que la importancia de su contribución radicaría más en el procedimiento seguido que en la bondad del resultado, puesto que Alejandría y Siena no estaban en el mismo meridiano (condición indispensable para la aplicación de su método).



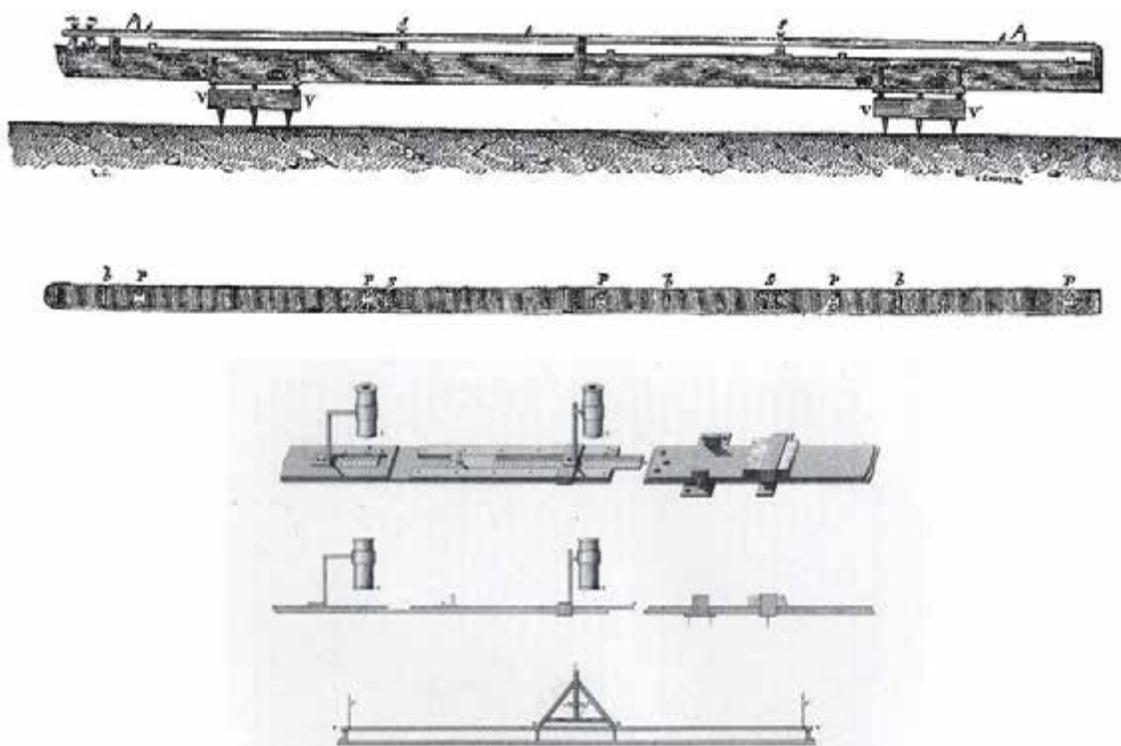
Medición de una base geodésica en el siglo XVIII, tal como figura en: *Illustrations de La Méridienne de l'observatoire royal de Paris vérifiée dans toute l'étendue du royaume par de nouvelles observations*. César-François Cassini de Thury (1744).

Ya en pleno siglo XVII se produjo un salto cualitativo importante en el cálculo del desarrollo, cuando Snellius<sup>136</sup> empleó una cadena triangular que enlazaba entre sí a los dos extremos del arco de meridiano. A continuación se resolvían los triángulos y se proyectaban sus lados sobre él, apoyándose para ello en los acimutes que se habían obtenido por medios astronómicos. El cálculo o resolución de la triangulación, que permitía hallar distancias inimaginables hasta entonces, requería una medida lineal previa que diera sentido al tamaño de los triángulos. Dado que no se podía evaluar directamente cualquiera de sus lados, se recurría al artificio de medir otra distancia mucho menor, en un lugar sensiblemente horizontal, y se enlazaban sus extremos, con otros triángulos auxiliares, al lado más próximo de la triangulación principal. El proceso continuaba después con la aplicación sucesiva del teorema del seno y la obtención de todos los lados de los triángulos principales, hasta desembocar en el desarrollo del arco pretendido.

Al basarse el cálculo de la triangulación en la medida de esas distancias menores, se entiende la denominación de base geodésica que se le aplicó a tales segmentos. Desde los inicios de la triangulación se constató la importancia del papel desempeñado por esas bases, por la repercusión final que tendría la exactitud con que se midieran en las operaciones ulteriores; la incidencia se hizo todavía más patente a raíz del perfeccionamiento de las lecturas angulares. Al estudiar el modo de eliminar los errores cometidos en su medida, colocando directamente sobre el terreno el patrón lineal, se fue cimentando la aparición de un nuevo aparato de medición

<sup>136</sup> Nombre latino de Willebrord Snell van Royen. Su medida del arco holandés la publicó en la obra *Eratosthenes Batavus, sive de terræ ambitus vera quantitate* (1617).

que llegó a solventar el problema a comienzos del siglo XIX. Surgieron así las llamadas reglas de J. Ch. Borda, Tenner, Th. F. Colby, Bessel y la del propio Struve<sup>137</sup>.



Alzado y planta de la regla de Borda, junto a ciertos detalles de la misma. Fue empleada para medir las bases de Melun y de Perpignan, las cuales formaban parte del meridiano de Francia medido con relación a la implantación del Sistema Métrico Decimal. Los protagonistas principales fueron los astrónomos, y geodestas, Delambre y Méchain.

<sup>137</sup> En ese listado debe figurar también, por méritos propios, la regla de la Comisión del Mapa, la cual fue diseñada conjuntamente por F. Saavedra Meneses y por C. Ibáñez e Ibáñez de Ibero. Se construyó en los talleres parisinos de Brunner y con ella se midió la base central de Madrಿದೆjos. Una operación que situó a España al mismo nivel que el de los países más adelantados en esa disciplina científica. Mención especial merece igualmente el conocido como aparato de Ibáñez, con el que se midieron varias bases periféricas de la red geodésica de España y se simplificó considerablemente el protocolo de la medición. La descripción del mismo figuró en la Memoria titulada: *Nuevo aparato de medir bases geodésicas (1869)*. Por D. Carlos Ibáñez e Ibáñez. Coronel de Ingenieros, de la Academia de Ciencias. La Memoria fue premiada con la medalla de oro en un concurso convocado en 1868. Las ventajas del nuevo instrumento las comentaba el autor con estas palabras:

«...Conviene, sin embargo, examinar si después de todo lo que se ha hecho no sería posible avanzar algún tanto: no con respecto a exactitud, que sobre esto se ha ido más allá de lo indispensable, sino con relación a la sencillez de objetos y operaciones y, por consecuencia, a la facilidad de transportes, a la posibilidad de utilizar personal subalterno que carezca de estudios científicos y finalmente a la rapidez de los trabajos de observación y cálculo en virtud de la cual sea dable repetir las mediciones; lo que, a la verdad, es casi impracticable con los últimos aparatos cuyo manejo, después de algunas semanas de uniformes y minuciosas observaciones, fatiga el ánimo de tal suerte que no hay quien intente comenzar de nuevo tan enojosa operación. Planteado el problema en este terreno, no vacilo en afirmar que puede tener una nueva solución más satisfactoria que todas las que hasta el día ha recibido, y que por mi parte he caminado en esa dirección, como me propongo en breve demostrar».

El hecho de referirse a esos instrumentos con el nombre de reglas para medir bases geodésicas, es acertado y hasta coherente, si bien no debe de inducir a pensar que se trataba del único instrumento que intervenía en la operación; sirvan de ejemplos los que se apuntan a continuación. Al ser la dimensión lineal de las reglas de varios metros<sup>138</sup>, se tenían que ir colocando sucesiva y exactamente a todo lo largo de la alineación de la base, empotrando una en otras, aún a sabiendas de que el resultado finalmente obtenido sería siempre superior al verdadero. Para minimizar ese error se usaban anteojos colimadores, con los cuales quedaba más asegurada la coincidencia del eje longitudinal del instrumento con la línea marcada por los extremos de la base a medir. Otra de las precauciones a tener en cuenta era la horizontalidad de la regla, dependiente de la sensibilidad de los niveles que llevaba incorporados. La temperatura también incidía directamente en la fiabilidad de los resultados de la medición, ya que al tratarse de reglas metálicas se tenía que concretar con la menor de las incertidumbres las deformaciones elásticas de las mismas. Esa circunstancia, por sí misma, obligaba a contrastar los instrumentos, antes y después de las medidas, usando para ello los patrones metrológicos correspondientes; las unidades de medida empleadas dependieron del país en que se efectuaba la operación, aunque predominase la toesa hasta que se implantó definitivamente el metro<sup>139</sup>.

Dos fueron las unidades lineales empleadas al medir las bases geodésicas del gran arco ruso-escandinavo: el sazhen y la toesa. La primera era una antigua y clásica medida rusa, similar a la braza, equivalente a 2.1336 m, la cual estaba contenida quinientas veces en la versta. De la segunda nada novedoso se puede añadir, salvo que se trataba de la que fabricó Fortin para Struve y que fue contrastada con la de Perú en la capital francesa (1821), tal como certificó el astrónomo F. Arago<sup>140</sup> y recogía Struve en el primer tomo de su Memoria (página 36). No obstante, fue mucho más relevante la importancia de la toesa, claramente preferida por Struve, el cual la eligió para dimensionar el patrón metrológico con el que se contrastaron las diez bases medidas, a lo largo de la triangulación que unió los dos mares: Negro y Glacial.

Struve describió ese patrón de hierro forjado, al comentar que presentaba una sección cuadrada de 1.25 pulgadas de lado, aunque sus dos extremos tuviesen un baño de acero. Dichos bordes eran verdaderamente dos pequeños cilindros, con 2.5 líneas de diámetro, limitados por

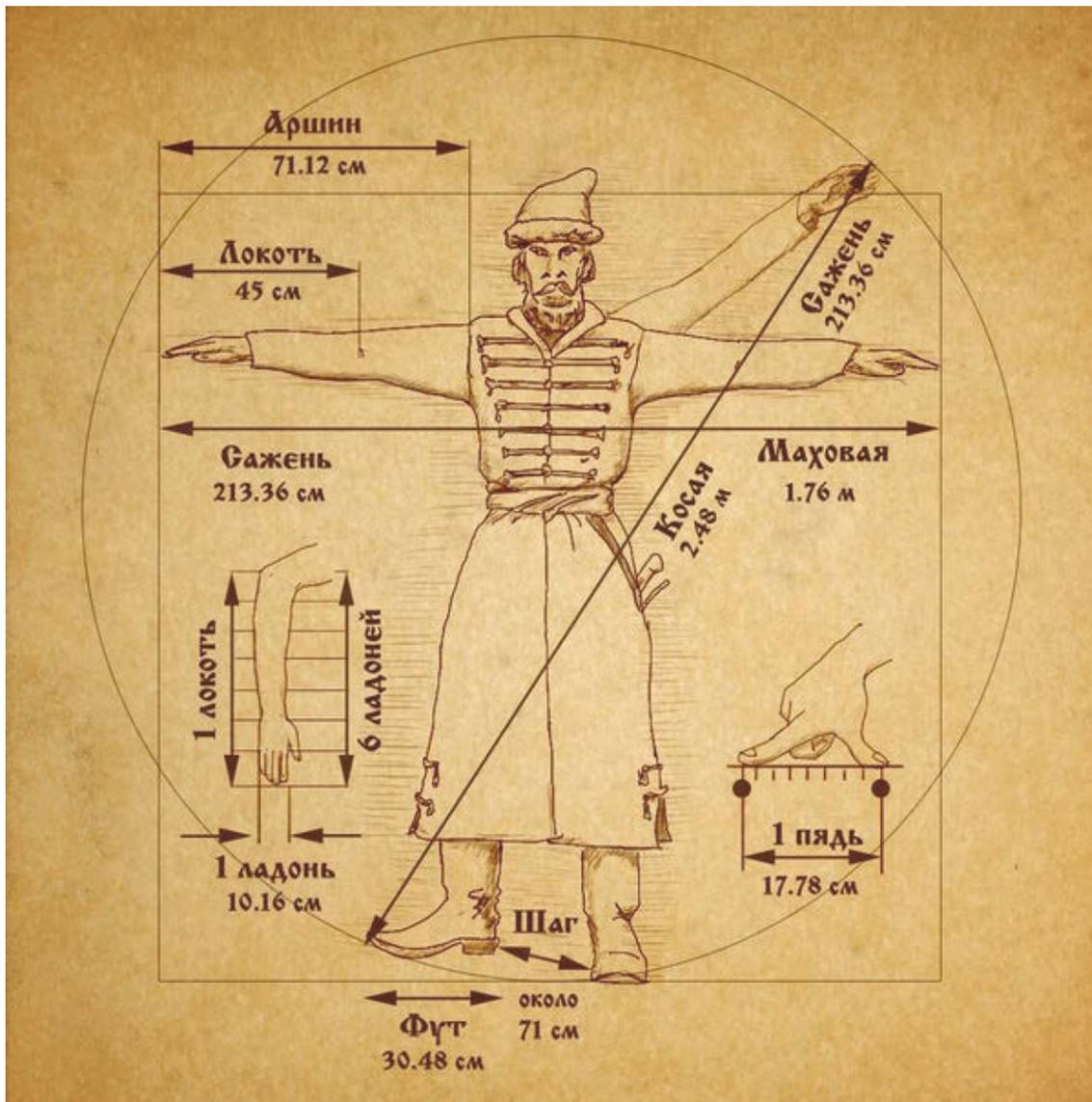
---

<sup>138</sup> La longitud de la regla proyectada por Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero fue de 4 m.

<sup>139</sup> En el año 1880 se produjo un considerable avance en la medida precisa de estas distancias, gracias al invento del profesor sueco Edward Jäderin: unos hilos de acero y latón separados y suspendidos bajo el peso de un kilo y a partir de dos trípodes colocados en sus extremos. Los hilos tenían una longitud de 24 m y un grosor de 1.63 mm, siendo de 60 cm la altura de los trípodes. No obstante, permaneció sin resolver el problema de la temperatura hasta que en 1896 idearon la aleación INVAR dos científicos franceses del BIPM (René Biot y Charles Édouard Guillaume). Por semejante descubrimiento, Guillaume recibió el Premio Nobel de Física en el año 1920. El nuevo material se componía de un 36% de níquel y de un 63.3 % de acero, con trazas de Manganeso (0.46%) y de Carbono (0.1%), de ahí que en ocasiones se le identifique con la sigla FeNi36. La ventaja fundamental de tan novedosa aleación radicó en que el coeficiente termoelástico resultaba prácticamente nulo (1.2 ppm / °C). Con los nuevos equipos de Hilos Invar se midieron las bases de la primera red geodésica establecida en las Islas Canarias, a finales del primer tercio del siglo pasado.

<sup>140</sup> Así lo manifestó Struve en la página 36 del primer tomo de su Memoria. Aunque no incluyera en esta el texto del certificado si lo hizo en otra de sus obras: *Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands*, cuyos dos tomos fueron publicados en Dorpat (1831). El interés histórico del texto es obvio: *Je soussigné, membre de l'Institut et du bureau des longitudes, certifie avoir comparé la Toise en fer construite par Fortin et destiné a Monsieur Struve, à la Toise de Pérou qui est conservée, dans les archives de l'observatoire Royal. Les deux toises m'ont paru parfaitement égales; le comparateur dont je me suis servi m'aurait fait connaitre une différence de la deux centième partie d'un millimètre. Arago. Paris, le 14 Novembre 1824.*

superficies circulares un tanto convexas y perfectamente pulidas. La longitud del patrón era por tanto la distancia entre los centros de tales superficies extremas, medida a una temperatura de  $13\text{ }^{\circ}\text{R} \approx 16.25\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; en sus comentarios posteriores, ese patrón sería identificado por Struve con la letra *N*. Él mismo lo compararía con la toesa de Fortin (*F*) en el Observatorio de Dorpat, con los resultados que se indican: partiendo de que  $F = 864.0000$  líneas, resultó que  $N = 1728.01249 \pm 0.00074$  líneas a  $13\text{ }^{\circ}\text{R}$ , en otras palabras que la longitud de *N* era aproximadamente de 2 toesas o de 4 metros.



Las antiguas medidas antropométricas empleadas en Rusia. El sazhen equivalía a 2.336 m, de ahí que a veces se le llamase también la toesa rusa. Rusia fue uno de los estados que participó en la Conferencia Internacional del Metro celebrada en París en el año 1875, uno de cuyos objetivos fue la sustitución universal de los antiguos patrones metrológicos por los definidos en el Sistema Métrico Decimal. El nuevo sistema fue introducido en su imperio mediante la ley promulgada el 4 de junio de 1899.



La versta fue una medida itineraria empleada en Rusia antes de que se implantase a partir del año 1899 el Sistema Métrico Decimal. Generalmente se admite que tenía 500 sazhen. Siguiendo la tradición se amojonaban las vías de comunicación con monumentos en los que se indicaba la distancia del lugar al origen. En la imagen se presentan tres de ellos: el origen situado en San Petersburgo, con un reloj de Sol incorporado, el levantado en Tsárskoye Seló y el tercero en el Observatorio de Púlkovo, a 19 verstas de la ciudad.

Esa longitud de  $N$  fue por consiguiente la referencia para todos los cálculos de las medidas lineales efectuadas durante la ejecución del proyecto comandado por Struve. Su error probable fue un claro reflejo de la exactitud en las operaciones de contraste, ya que partiendo de que  $N = 1728.01249$  líneas, se obtenía  $F = 864.0000 \pm 0.00035$  líneas, sin que su valor se tuviese que tener en cuenta durante los controles posteriores. Para asegurarse de la fiabilidad del patrón  $N$  se realizaron múltiples comparaciones con las copias de otros patrones lineales, tanto rusos como extranjeros, siempre bajo la supervisión de Struve. Al mismo tiempo, y para facilitar la contrastación de las reglas geodésicas, se hicieron copias de  $N$ , cuya exactitud resultó incuestionable. Struve concretó tanto las longitudes de las copias,  $P$  y  $R$ , como la relación de  $N$  con el sazhen ( $T$ ), el cual sería usado por Tenner para dividir una de las escalas de su regla: si se partía de que  $N$  tenía 1728.01249 líneas, a la temperatura standard, se obtendrían los valores siguientes:

$$P = N - 0.01809 \text{ líneas} = 1727.99440 \pm 0.00019 \text{ líneas}$$

$$R = N + 0.00742 \text{ líneas} = 1728.01991 \pm 0.00077 \text{ líneas}$$

$$T = 0.547309580 N = 945.75779 \pm 0.00038 \text{ líneas.}$$

En el cuadro que se acompaña, se detallan las localizaciones de las diez bases medidas, las latitudes de los emplazamientos, la fecha de la operación, el aparato empleado y el patrón elegido en cada caso:

## Las bases geodésicas del arco ruso-escandinavo

Nombre y localización	Latitud	Año	Regla	Patrón
Alten a orillas del mar Glacial	69°55'	1850	Struve	<i>P</i>
Öfver-Tornio en Laponia	66°22'	1851	Struve	<i>P</i>
Uleaborg en el Norte de Finlandia	65°00'	1845	Struve	<i>N</i>
Elimä en el Sur de Finlandia	60°50'	1844	Struve	<i>N</i>
St. Simonis en Estonia	59°02'	1827	Struve	<i>N</i>
Ponedeli en el Norte de Lituania	55°58'	1820	Tenner	<i>T</i>
Ossownitza en el Sur de Lituania	52°14'	1827	Tenner	<i>T</i>
Staro-Konstantinov en la provincia de Volinia	49°42'	1838	Tenner	<i>T</i>
Romankautzi en el Norte de Besarabia	48°30'	1848	Tenner	<i>R</i>
Taschbunar en el Sur de Besarabia	45°35'	1852	Struve	<i>P</i>

Struve comentaba como en las medidas de 1827, 1844 y 1845, la contrastación se había hecho sobre el terreno, pero que después prefirió que el patrón se quedase en Púlkovo, para no exponerlo a los riesgos propios de viajes tan largos. Por tal motivo se hizo precisamente la copia *R* (1847) en los talleres del Observatorio<sup>141</sup>, la cual acompañaría a las cuatro reglas en Besarabia, Estonia y Finlandia; así como en la base de Romankautzi. La medida de esta última se realizó bajo la dirección de Sabler, en el año 1848. Las reglas se quedaron en Besarabia para ser entregadas en su momento al general F. P. Wrontschenko, el cual las tendría que usar en las cadenas geodésicas que enlazarían los ríos Prut y Volga, siguiendo aproximadamente la dirección de los paralelos. Sin embargo, el patrón *R* sufrió algunos daños antes de que se le entregase al general, con el resto de los instrumentos, de ahí que se tuviese que hacer una nueva copia (*P*).



Patrón metrológico construido en los talleres Brunner de París y destinado a contrastar la regla para medir bases geodésicas, que hicieron por encargo de la Marina Española. Cortesía del Observatorio de San Fernando (Cádiz).

<sup>141</sup> Inmediatamente después se comparó, a satisfacción, con el prototipo *N* en el propio Observatorio.

Antes de referirse a ella, recordó Struve que la primera regla construida bajo su dirección (Dorpat.1827) se tuvo que quedar en el Sur de Rusia y que se había visto obligado a construir otras nuevas para medir las bases más septentrionales del arco, situadas en Noruega y Laponia. Las nuevas reglas, confeccionadas en 1850 de acuerdo con el modelo previo, incorporaron algunas mejoras, tales como un segundo comparador, realizadas todas con la maestría que caracterizaba a «nuestro artista Brauer», añadía Struve. Fue entonces cuando se hizo la nueva copia del patrón, identificada con la letra *P*, que se uniría a la regla y se compararía con ella antes de que fuese enviada al mar Glacial (1850) y a su regreso de Laponia (1852). La primera contrastación dio como resultado  $P = N - 0.01699$  líneas = 1727.99550 líneas (peso 4), con la segunda se obtuvo el siguiente:  $P = N - 0.01831$  líneas = 1727.99418 (peso 20). Struve proclamaba con satisfacción que esa diferencia de 0.00132 líneas era sólo 1/1300000 de la longitud total, prueba irrefutable de su inmutabilidad con relación al patrón principal. La media de 24 comparaciones proporcionó justamente el valor ya conocido de  $P = 1727.99440 \pm 0.00019$  líneas. Esa misma copia fue enviada a Besarabia, en 1852, para contrastar con ella las reglas empleadas al medir la base de Taschbunar.

El patrón metrológico, *T*, usado por Tenner perteneció al Depósito Topográfico del Estado Mayor Imperial y estaba inventariado con el número 10. Se componía de dos reglas de hierro forjado, unidas a todo lo largo en ángulo recto con numerosos tornillos. La regla horizontal tenía un largo de 87.1 pulgadas inglesas, un ancho de 2.1 pulgadas y un grosor de 0.5 pulgadas. Llevaba superpuestas dos láminas de plata sobre las que se hicieron los trazos que fijaban su longitud, el sazhen ruso de 7 pies ingleses. La segunda regla, en el dorso de la anterior, tenía un largo de 83.2 pulgadas, un espesor de 0.5 y una altura en su centro de 1.9 pulgadas, que disminuían hasta 1.4 en sus extremos. La relación entre el sazhen de este patrón *T* y el de referencia *N*, fue obtenida conjuntamente por Tenner y Struve en el año 1828, aprovechando el enlace entre los arcos del Báltico y de Lituania; el resultado fue  $T = 945.76611$  líneas a  $13^\circ R$ . Struve se quedó después con ese patrón para su custodia en el Observatorio de Púlkovo. Posteriormente fue de nuevo comparado con *N*, en 1852 y 1853, obteniéndose la relación<sup>142</sup>  $T = 945.75779 \pm 0.00038$  líneas, a  $13^\circ R$ . La diferencia entre esos dos valores de *T*, en los 25 años transcurridos, solamente fue de 0.00832 líneas; prueba de que la primera contrastación se hizo con todas las garantías<sup>143</sup>. Tenner dio por buena la primera equivalencia y así la aplicó al calcular los triángulos cuyo tamaño quedó fijado en función de sus tres bases: Ponedeli, Ossownitza y Staro-Konstantinov; de modo que, como indicó Struve, cometió un error por exceso al fijar las dimensiones de todos los lados de la triangulación, las cuales reclamaban la reducción correspondiente para responder así al nuevo valor obtenido en las contrastaciones de 1852 y 1853.

La descripción de las reglas, o aparatos, para medir bases construidas tanto por Tenner como por Struve, planteó algunas dificultades fáciles de superar. Los detalles del primer aparato fueron escritos en ruso (*Zanucku* VIII. pp. 126-169)<sup>144</sup>. Los relativos a las primeras reglas de Struve figuraron, según el mismo apuntó, en el *Gradmessung* I (pp. 51-60), que como es sabido fue escrito en alemán. Afortunadamente se contó para el primer caso con la descripción que hizo el propio Struve en su Memoria (T. I. pp. 45-46). Al no disponer de la del primer aparato de

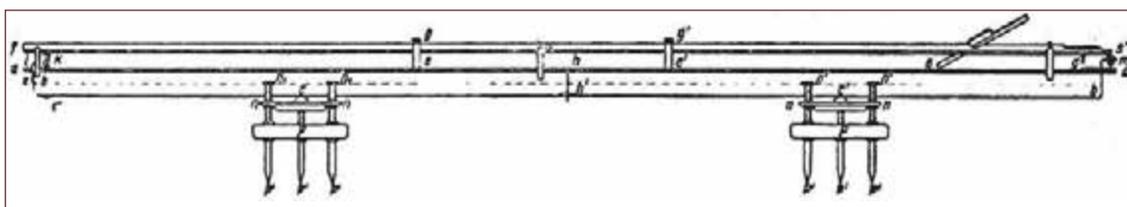
---

<sup>142</sup> Struve fijó también la equivalencia de Ten toesas, mediante la igualdad  $\log(T/864) = 0.0392661847$ .

<sup>143</sup> Struve mostraba su satisfacción al comentar que en 1828 habían alcanzado una precisión notable «en una determinación complicada y difícil, como es la de dos unidades lineales, entre las que no existe en absoluto una relación simple, y en la que una era un patrón sin divisiones y la otra una escala graduada».

<sup>144</sup> Referencia dada por Struve, página 45 del primer tomo de su Memoria.

Struve, se intentó buscar una versión francesa, pero no se logró encontrar ninguna. No obstante se sospechó que probablemente la habría comentado, aunque fuese de pasada, Carlos Ibáñez en la Memoria descriptiva de su regla para medir bases, conocida después como Aparato de Ibáñez (1869). La sospecha resultó cierta, puesto que en ella figuraba la descripción detallada no sólo del primer aparato de Struve<sup>145</sup>, sino también del de Tenner<sup>146</sup>. Creyendo que ambas descripciones son difíciles de superar, teniendo en cuenta además de su relevancia histórica la indiscutible solvencia del protagonista, se decidió rescatar íntegramente las efectuadas por Ibáñez:



Regla de Tenner para medir las bases geodésicas.

### Aparato de Tenner

*La medición se hace con cuatro reglas de hierro forjado, cada una de las cuales tiene 14 pies ingleses de longitud, y su sección transversal 0.85 por 0.30 de pulgada. Una vigueta de 3.5 por 4.5 pulgadas sirve de apoyo a la regla, la cual se halla en cierto modo resguardada de la acción directa del Sol, por medio de un listón que sostiene unas tiras de lienzo clavadas por ambos lados a la vigueta. La regla se halla unida invariablemente a esta por una de sus extremidades, quedando en libertad de dilatarse o contraerse por los cambios de temperatura. La otra extremidad lleva una lengüeta, dividida en centésimas de pulgada, movable en una corredera y cuya posición se conoce por medio de un nonio que permite apreciar directamente las milésimas de pulgada. Por lo tanto la operación es análoga a la que exige el aparato Borda: puestas las cuatro reglas, una a continuación de otra, de suerte que haya un pequeño intervalo entre cada dos consecutivas, se mide este con las correspondientes lengüetas que se mueven hasta ponerse en contacto con el canto o extremo de la regla inmediata.*

*La temperatura que se adopta para cada regla es la que indica un solo termómetro de mercurio colocado en el medio y en contacto con el metal.*

*Para conocer la inclinación, hay hacia uno de los extremos de cada regla un nivel de aire sujeto a un brazo metálico, giratorio por medio de un piñón que engrana en una pieza dentada, leyéndose el ángulo recorrido, en el correspondiente arco graduado.*

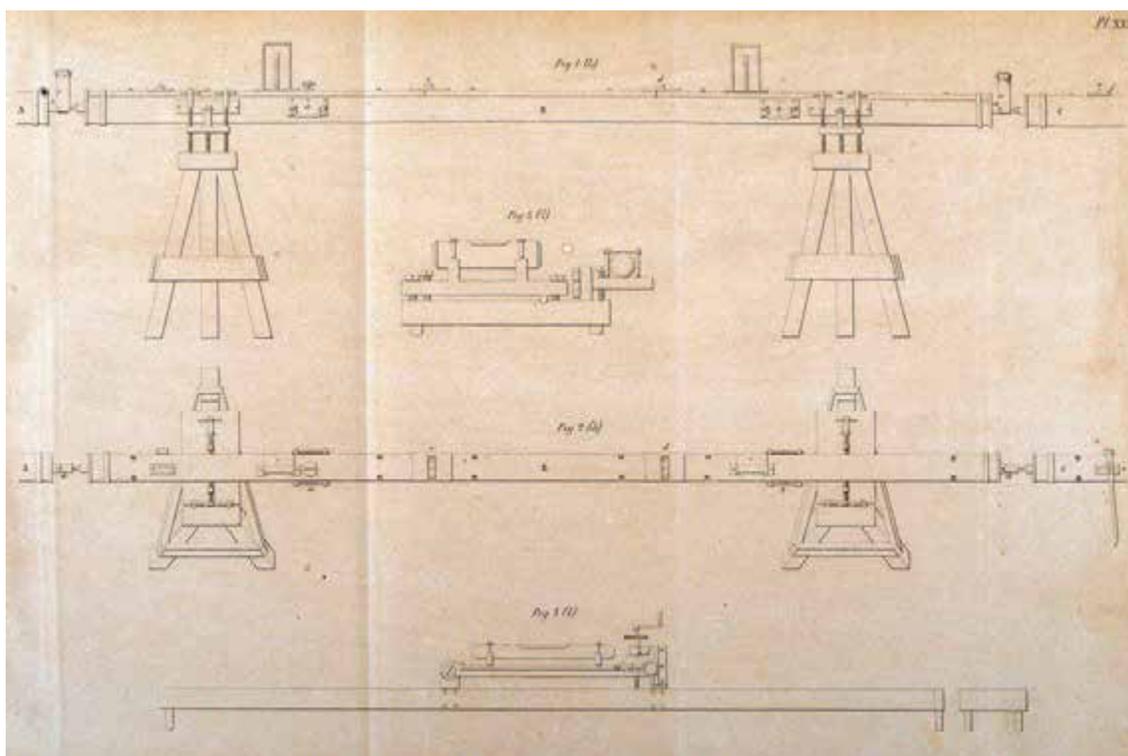
*La alineación de las reglas se obtiene valiéndose de pequeños anteojos fijos en sus extremos; y las referencias del fin del trabajo al terreno y de este al aparato, cuando se comienza la operación del día, se hacen simplemente con la plomada.*

<sup>145</sup> Indirectamente se puso de relieve el dominio de los idiomas que poseía el inminente creador del Instituto Geográfico.

<sup>146</sup> Ibáñez citó como fuente la Memoria de W. von Struve.

*Al medir el general Tenner en 1826, 1827 y 1838 las tres bases con el aparato que lleva su nombre, ejecutaba por sí mismo las operaciones más delicadas como son la colocación de la primera regla sobre el punto de partida y la determinación del de llegada al fin del día, durante el cual verificaba los contactos de cada lengüeta con la regla siguiente así como las lecturas de los nonios, las de los termómetros y las del nivel en todas las posiciones de las reglas. Necesitaba, sin embargo, para evitar errores de lectura, para la alineación y demás operaciones que exigen inteligencia, cuatro colaboradores pertenecientes a la clase de Oficiales facultativos, dos sargentos y un personal de 40 hombres de servicio.*

*La velocidad de medición fue de unos 80 metros por hora y el error probable de 1/30000 de la longitud medida. Ninguna de las tres bases se midió dos veces a causa sin duda de su mucha extensión: puesto que la más corta tiene cerca de cinco kilómetros, y pasa de 11 la más larga<sup>147</sup>.*



Alzado y planta de la regla de Struve. Imagen cedida por el Instituto Geográfico Nacional.

<sup>147</sup> Struve pareció minusvalorar las reglas de Tenner, al considerarlas como una imitación casi exacta del aparato de Borda, empleadas por J. B. Delambre y P. F. Méchain en la medida del meridiano de París (conocido también como meridiano de Francia), con la diferencia sustancial de haber rechazado el termómetro metálico original (colocado en cada una de las reglas de Borda) por uno de mercurio. Más adelante concluía subrayando la incomodidad de las medidas, al tenerse que efectuar a solo un pie del suelo.

## Aparato de STRUVE

*Al mismo tiempo que Colby media la primera base con su nuevo aparato, empleaba Struve el suyo. Se compone este de cuatro reglas o barras de hierro forjado cuyas dimensiones son 12 pies franceses de longitud y 15 líneas el lado de su sección cuadrada. Una de las extremidades de cada regla lleva una pieza de acero templado, que termina en superficie ligeramente convexa y muy bien pulimentada. El otro extremo tiene adaptada invariablemente una palanca giratoria, cuyo brazo más corto termina por una semi-esfera de acero pulimentado, que sirve para el contacto con la regla inmediata, y el más largo, de 54 líneas, tiene un índice que recorre el correspondiente arco graduado, en el que se lee la distancia a la regla inmediata, partiendo de una división que indica la longitud normal de aquella. De suerte que las cuatro reglas se van colocando a continuación y cada una se aproxima a la anteriormente establecida hasta que tiene lugar el contacto, en cuyo caso se lee en el arco la división que indica la corrección que se debe introducir en la suma de la longitud normal de ambas reglas.*

*La consecuencia de esta disposición es tener que comparar con mucha frecuencia la longitud normal de cada regla, con un tipo<sup>148</sup> que se lleva al campo y acompaña constantemente al aparato; pues si las palancas de contacto o sus arcos de círculo sufren alteración en el transporte o con el uso, desaparece por completo toda medida. La comparación exige, como es consiguiente, un nuevo aparato especial que está fundado en el mismo principio del contacto medido en su mayor o menor intensidad con la palanca giratoria; componiéndose además de otras piezas combinadas con mucho ingenio pero que constituyen un comparador de contactos como las reglas que le han dado origen.*

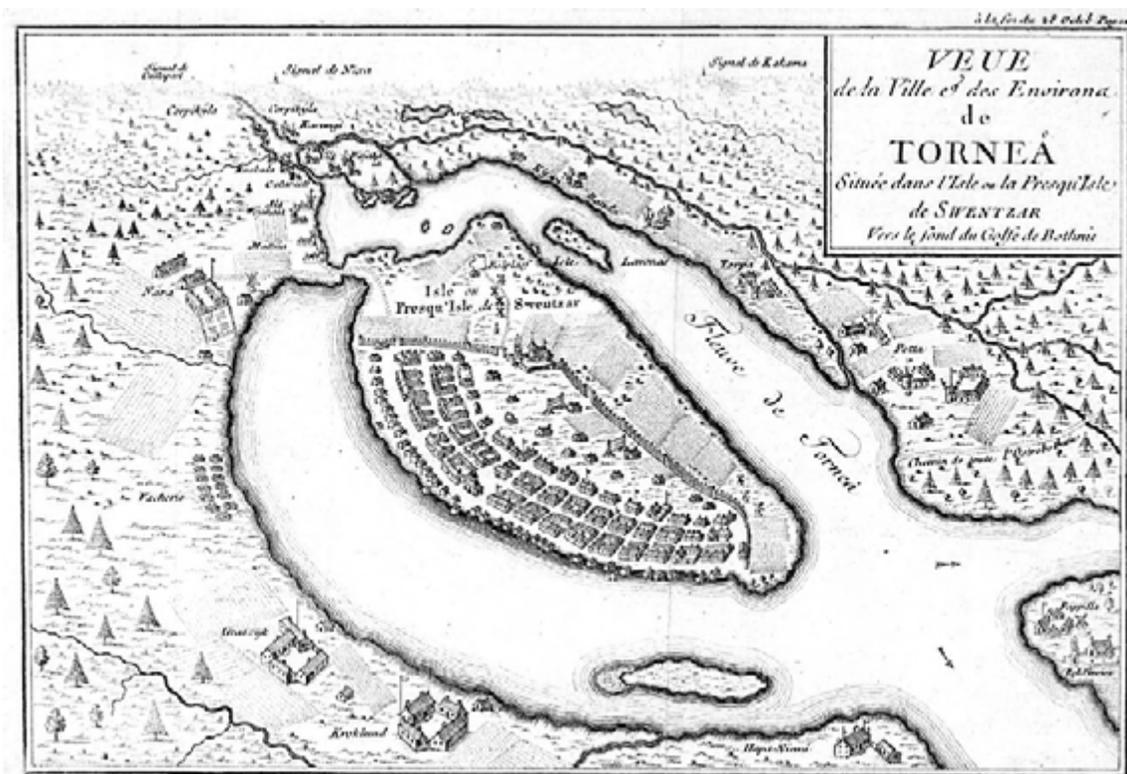
*Para conocer la temperatura, tiene cada regla dos termómetros de mercurio colocados perpendicularmente a su longitud. Las reglas siguen la inclinación del terreno, y por medio de un nivel portátil se toman los datos de reducción al horizonte en cada posición.*

*Un teodolito, usado como instrumento de pasos, sirve para la alineación de las reglas, por medio de pínulas ordinarias; y para fijar en tierra el punto en que se finalice el trabajo del día, se establece análogamente otro teodolito a unos ocho metros de la línea, y en la perpendicular levantada a ella en el término de la operación. El mismo procedimiento se usa al día siguiente al comenzar el trabajo, para referir a la primera regla el fin de la medición en el día anterior.*

*Con este aparato y utilizando el hábil concurso de los sabios astrónomos Struve, Selander, Sabler, Woldstedt, Lindhagen, Wagner y Prazmovski, del General Wrangell y de los Oficiales de Ingenieros Klouman y Napersnikow, se midieron en los años 1827, 1844, 1845, 1848, 1850, 1851 y 1852, siete de las bases que comprende el arco de Meridiano entre el Danubio y el mar glacial; habiendo resultado el error probable de 1/1200000 de la longitud medida. A cada operación concurrían generalmente cuatro observadores y diez hombres para el servicio.*

<sup>148</sup> Ibáñez se estaba refiriendo al patrón metrológico ya comentado.

*Sin contar el tiempo empleado en las rectificaciones del aparato y en las diversas comparaciones con el tipo, se midieron unos 70 metros por hora y de las siete bases sólo una, la de Öfver-Tornio, se midió por segunda vez; a pesar de que todas eran de corta extensión, puesto que la más larga no llega a los seis kilómetros y el promedio de todas ellas apenas pasa de tres y medio.*



La villa de Tornio cuando Maupertuis midió el grado de meridiano.

El segundo aparato de Struve, descrito en el tomo primero de su Memoria (C.VI. pp. 40-44) junto a todas las innovaciones con relación al primer modelo, fue empleado por los geodestas escandinavos para medir las dos bases más septentrionales del arco de meridiano, esto es la de Öfver-Tornio, en Laponia, y la de Alten, en el litoral del mar Glacial. Las imágenes que ilustraron la descripción de sus componentes figuraron en las planchas XXII, XXIII y XXIV anexas al referido tomo. En ellas destaca el patrón metrológico *P*, las cuatro reglas (*A*, *B*, *C*, *D*) y el comparador. Las reglas se presentaron una a continuación de la otra, en una vista lateral, con la particularidad de que la central reposaba en sus trípodes y caballetes, tal como ocurría durante la medida real de la base.

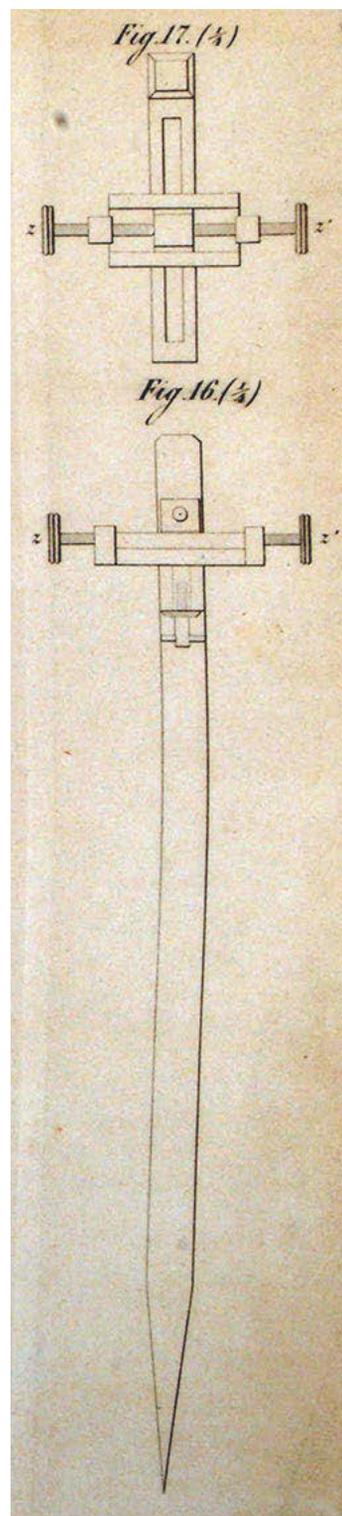
Todas las reglas eran de hierro forjado, siendo sus dimensiones las siguientes: largo de 12 pies ( $\approx 4$ m), ancho y alto de 15 líneas. Uno de los extremos llevaba incorporada una pieza de acero templado redondeado, con una superficie un tanto convexa y perfectamente pulida. El otro contaba con una palanca de contacto, también de acero, directamente aplicada sobre la regla y formando con ella un solo cuerpo. El brazo más corto terminaba con una semiesfera pulida, existiendo en el otro un índice que recorría un arco de cobre plateado, igualmente fijado a la regla; las divisiones de este se leían a través de una placa de vidrio. La longitud efectiva de

la regla era el segmento definido por el centro de la superficie convexa ( $\alpha$ ) y el punto extremo de la citada semiesfera ( $\beta$ ); el índice de la palanca se situaba exactamente sobre el trazo 15 de la citada división.

La descripción de los accesorios de la regla se iniciaba con la de los termómetros incrustados en cada regla y siguió con la de las tablillas que controlaban la inclinación de la misma. Otros de sus accesorios eran los caballetes de madera, de 2.5 pies de alto; con una solidez extrema, pues sobre ellos se hacía la medida de la base. Cada uno de ellos llevaba un trípode de latón, con tres tornillos verticales de hierro para calar la regla y otros dos horizontales para su alineación. Quizás fuese uno de los accesorios más relevantes, el dispositivo que marcaba sobre el terreno el final de cada jornada de medición. Su elemento principal era un gran clavo de hierro, con sección cuadrada, de 32 pulgadas de largo que se hundía verticalmente en el suelo, hasta alcanzar una profundidad de 24 pulgadas. En su parte superior tenía un brazo con una ranura, sobre la que se deslizaba, y se fijaba en el lugar conveniente, un cubo metálico, provisto de un círculo plateado, cuyo delicado centro debería marcar el término. La proyección del último punto de la regla sobre ese centro se efectuaba con la ayuda de un teodolito, usado como antejo de pasos, estacionado a una distancia de 25 pies y en una dirección perpendicular a la de la línea medida.

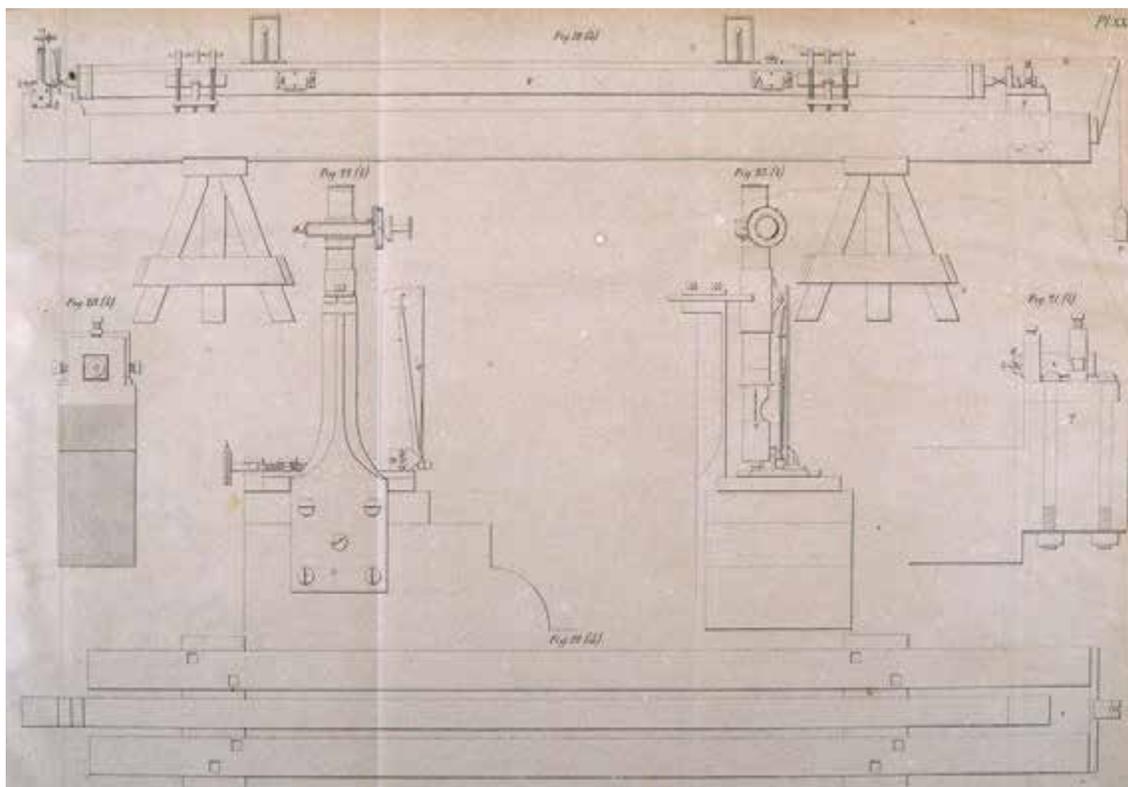
Struve recordaba la utilidad del comparador al contrastar el patrón con las cuatro reglas, a partir de dos señales fijas similares a los extremos de las mismas. Las figuras que se adjuntan representan el comparador visto de lado y el patrón de frente, además de la planta de dos caballetes de madera, análogos a los ya mencionados, con tres vigas. Las dos vigas externas, de madera de abeto, se fijaron sobre los caballetes con cuatro pernos y sus respectivas tuercas. Sobre ellas se colocaron los dos trípodes metálicos, los cuales soportaban indistintamente el patrón o la regla de medida que se debería compara con él. La viga central, hecha de madera de roble, era la parte principal del comparador, teniendo 13 pies de largo, 6.5 pulgadas de alto y 4.25 pulgadas de ancho. En uno de sus extremos iba el aparato del punto fijo  $\gamma$  y en el otro la pieza  $\delta$  destinada a la medida, compuesta por una palanca de contacto y un microscopio provisto de micrómetro, con una ampliación de 1/200 de línea.

Al colocar la regla sobre el comparador, la palanca de la primera se pone en contacto con el punto fijo del comparador y la palanca de este avanza hacia el borde fijo de la regla. En cambio no ocurre lo mismo al situar el patrón entre dos señales fijas. En ese caso, uno de sus extremos tendría que hacerse coincidir



Dispositivo para señalar sobre el terreno el final de la jornada. Imagen cedida por el Instituto Geográfico Nacional.

con el punto de apoyo del comparador. Para lograrlo, dicho extremo debía colocarse antes a una distancia de un décimo de línea de tal punto. El último movimiento que terminaba en contacto se realizaba por medio de una cuerda, que pasaba por una polea, de la que colgaba una pequeña pesa. Struve concluía afirmando que con la información que había proporcionado bastaba para tener una idea cabal de su nuevo aparato para medir bases.



El comparador y el patrón, tal como fueron representados en la Memoria escrita por W. von Struve. Imagen cedida por el Instituto Geográfico Nacional.

La última parte de este capítulo metrológico la dedicó Struve al estudio de los coeficientes de dilatación de las reglas y de los patrones correspondientes. Comenzando con el de los tres patrones:  $N$ ,  $P$  y  $R$ , y siguiendo con el de las ocho reglas, cuatro para cada uno de sus dos aparatos (I:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y II:  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$ ), incluyendo además el de las dos composiciones, a saber:  $S = A + B + C + D$  y  $S^* = A^* + B^* + C^* + D^*$ . En un principio hizo saber que la determinación de las dilataciones relativas de un par de barras, con una longitud tan parecida, era sumamente fácil, pues se podría suponer despreciable la dilatación asociada al diferencial de longitud. En efecto, si  $v$  fuese el coeficiente de  $N$  para  $1^\circ\text{C}$  y  $\pi$  el de  $P$ , bastaría comparar, mediante el comparador,  $N$  y  $P$  a temperaturas considerablemente diferentes para obtener  $\pi - v$ . No obstante también hubo que tener en cuenta el coeficiente de dilatación absoluta, aunque sólo fuese necesario calcularlo para una de las barras, pues en función de las dilataciones relativas se podrían deducir los de todas las demás.

Struve prefirió elegir una vía distinta de la convencional, basándose en las sucesivas comparaciones realizadas en el intervalo  $18^\circ\text{C}$  y  $-2^\circ\text{C}$ , sometiendo siempre los patrones a temperaturas idénticas. En una segunda fase se efectuarían las contrastaciones con  $N$  a  $18^\circ\text{C}$  y  $P$  a  $-2^\circ\text{C}$ ,

así como con  $N$  a  $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $P$  a  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Tras la comparación de la primera clase, Struve llamó  $\omega$  a la diferencia  $P - N$  a  $16.25\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $\eta$  a la diferencia  $P - N$  pero a una temperatura genérica  $t$ , llegando así a la ecuación:

$$\omega + (t - 16.25) (\pi - \nu) = \eta.$$

Teniendo en cuenta las comparaciones de la segunda clase, se obtendría la relación siguiente:

$$\omega + (t' - 16.25) \pi - (t - 16.25) \nu = \eta,$$

siendo  $t$  y  $t'$  las temperaturas respectivas a que se encontraban los patrones  $N$  y  $P$ . Como es lógico, las unidades de  $\omega$ ,  $\pi$ ,  $\nu$  y  $\eta$  serían siempre fracciones de la longitud total o unidades lineales idénticas, líneas por ejemplo. En la primera ecuación  $t$  variaría entre  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El intervalo para  $t$  y  $t'$ , en la segunda relación, quedaría marcado por los valores siguientes:  $t = 18\text{ }^{\circ}\text{C}$  si  $t' = -2\text{ }^{\circ}\text{C}$ , o  $t = -2\text{ }^{\circ}\text{C}$  si  $t' = 18\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Los valores finales más probables de  $\omega$ ,  $\nu$ ,  $\pi$  y  $\pi - \nu$  se obtuvieron resolviendo los sistemas de ecuaciones planteados, mediante el método de los mínimos cuadrados. En el análisis posterior de las fuentes de error, señaló Struve dos de las más importantes: la precisión con que se evaluase la diferencia entre las dos temperaturas  $t$  y  $t'$ , así como las que achacó a la operación en sí; dando después un ejemplo de las comparaciones efectuadas en salas del Observatorio de Púlkovo el día 15 de abril de 1852. Asimismo dejó constancia de que las contrastaciones de su primer aparato las realizó el mismo, pero que solamente supervisó las primeras pruebas relacionadas con el segundo, las cuales fueron finalmente efectuadas por Lindhagen y Wagner.



Placa dedicada a Struve en el Observatorio Astronómico de Púlkovo, colocada en el año 2009. Junto a ella figura la medalla de la primera clase de la Orden de San Estanislao, que le concedió el zar Nicolás I tras visitar por primera vez dicho observatorio.

Los resultados de todas las observaciones practicadas al efecto fueron resumidas del siguiente modo:

*Dilatación absoluta para 1 °C*

Patrón <i>N</i>	$\nu = 11.394 \mu \pm 0.018 \mu$
Patrón <i>P</i>	$\pi = 11.253 \mu \pm 0.017 \mu$
Toesa de Fortin <i>F</i>	$\varphi = 11.291 \mu \pm 0.020 \mu$
Toesa auxiliar <i>H</i>	$\eta = 11.480 \mu \pm 0.057 \mu$
$S = A + B + C + D$	$\sigma = 11.399 \mu \pm 0.023 \mu$
$S^* = A^* + B^* + C^* + D^*$	$\sigma^* = 11.221 \mu \pm 0.025 \mu$
$\mu$ son millonésimas ( $10^{-6}$ )	

*Dilatación relativa*

De <i>S</i> y <i>N</i>	$\sigma - \nu = 0.005 \mu \pm 0.013 \mu$
De $S^*$ y <i>P</i>	$\sigma^* - \pi = -0.032 \mu \pm 0.018 \mu$

El general Tenner determinó por su parte las dilataciones absolutas de las barras de hierro forjado que constituían el núcleo principal de sus reglas. Struve reprodujo los valores que se repiten a continuación:

*Dilatación absoluta para 1 °C*

Regla número I	11.688 $\mu$
Regla número II	11.709 $\mu$
Regla número III	11.821 $\mu$
Regla número IV	11.794 $\mu$
Valor medio 11.753 $\mu$	

La dilatación supuesta para sus lengüetas de cobre fue de 17.83  $\mu$ , la misma que había calculado Borda en su momento; un coeficiente que, a juicio de Struve, era suficientemente exacto para la reducción de la suma de los intervalos entre las reglas sucesivas, pues su promedio era menor que cuatro milésimas de la longitud de la base. Tenner no tuvo en cuenta la dilatación de la escala *T*, con la que se contrastaron las reglas, al suponerla sensiblemente igual que la de las reglas a una temperatura de 1° R. Struve finalizó estas consideraciones metrológicas proporcionando los valores medios de las dilataciones experimentadas por las barras de hierro forjado empleadas en sus mediciones<sup>149</sup>:

<sup>149</sup> Excluyendo los coeficientes de la dilatación absoluta de *H* y de  $S = A + B + C + D$ , reglas en las que había una pieza de cobre en uno de sus extremos.

## Dilataciones para 100 °C

Toesa de Fortin <i>F</i>	$\chi = 0.001129$	Hierro forjado francés
Patrón <i>N</i>	$\chi = 0.001139$	Hierro forjado ruso
Patrón <i>P</i>	$\chi = 0.001125$	id
Reglas <i>S</i> *	$\chi = 0.001122$	id
Reglas de Tenner	$\chi = 0.001175$	id
Valor medio $\chi = 0.001129$		

A esos cinco coeficientes les añadió Struve el de la regla de hierro forjado número 4 del aparato de Repsold, empleado en los años 1820 y 1821 por H. C. Schumacher<sup>150</sup> al medir la base de Braack y por Gauss en sus levantamientos geodésicos en el reino de Hannover. En el año 1853, ese patrón de 2 toesas de largo, con un ancho y alto de 1.5 pulgadas, se trasladó desde Altona hasta el Observatorio de Púlkovo, a instancias del gobierno danés, para ser comparado con el allí existente; la dilatación obtenida fue de  $\chi = 0.001154$ . Por otro lado, Bessel dedujo para su toesa de Fortin<sup>151</sup>  $\chi = 0.001126$ . Struve concluyó que el gran acuerdo observado entre las dilataciones de las barras de hierro forjado, de diferente procedencia, era un hecho digno de ser subrayado. Excluyendo el aparato de Tenner, halló la media de las dilataciones de las seis barras de hierro forjado, para una temperatura de 100 °C,  $\chi = 0.0011325 \pm 0.0000033$ . Sin embargo, para cada regla se obtendría un error probable próximo a  $0.0000083 = 0.0073 \chi = 1/137 \chi$ .

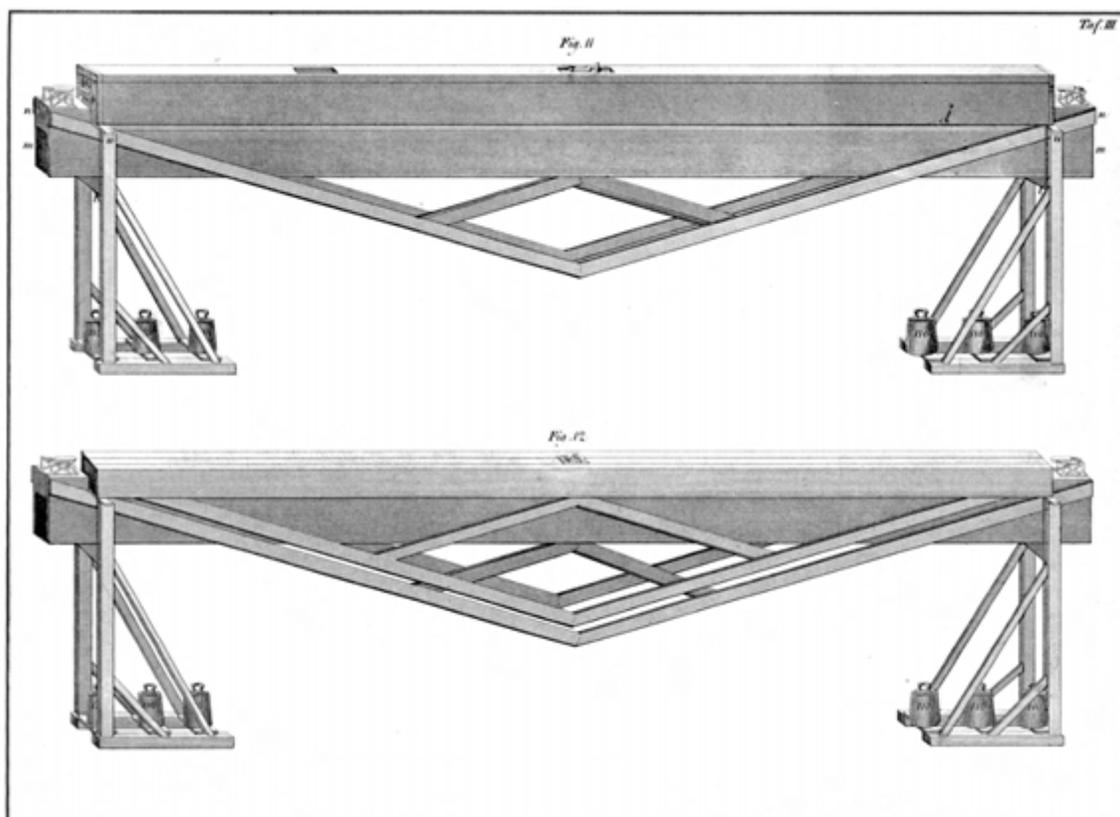
La medida de las bases, propiamente dicha, y las exactitudes obtenidas en ellas, fueron incluidas por Struve en los dos tomos de su Memoria: I (las seis del arco ruso) y II (las cuatro del arco escandinavo). Los primeros comentarios fueron para reconocer que lo ideal hubiese sido medir directamente el arco con las reglas utilizadas en las bases, pues el resultado sería sin duda más fidedigno que el obtenido por la vía indirecta, apoyada en la medida de una distancia mucho más pequeña y en la observación de una serie de ángulos<sup>152</sup>. Sin embargo, tal posibilidad resultaba del todo impracticable en la mayoría de los supuestos, debido a la propia morfología del terreno. Siendo consciente de ello, Struve optó por la mejor solución, incluir bases intermedias de control, con la mayor longitud que permitiera el lugar, para aumentar así la exactitud final. Otro de sus deseos fue que la longitud de tales bases se aproximase lo más posible a la media de la que tenían los lados de la triangulación, que en su caso fue del orden de las 14000 toesas. No obstante, se impuso la realidad marcada por el terreno, de manera que la base mayor sólo pudo ser de 6055 toesas; correspondiendo a la que midió Tenner en el año 1820 y que pasó a formar parte de la cadena triangular a través del lado Ponedeli-Jakshti. Todas las demás midieron menos que la anterior, siendo la más corta la que se estableció en Alten, con una longitud de 1155 toesas.

Struve insistía en que se trataba de un caso excepcional que había sido inevitable, aunque la exactitud dependiera no solamente de la longitud de la base sino también de la medida de los

<sup>150</sup> Su sobrino fue el autor del plano de situación del Observatorio de Púlkovo, en donde trabajó de astrónomo asistente.

<sup>151</sup> Ese patrón lo empleó en sus experiencias pendulares y en las triangulaciones geodésicas de Prusia.

<sup>152</sup> Para dar mejor idea de su afirmación añadía que si el error probable asociado a su aparato fuese de  $0.8 \mu$ , el cometido al determinar un lado de un triángulo, con igual longitud, partiendo de otro lado del mismo triángulo, sería del orden de  $2.0 \mu$ , aunque el triángulo hubiese sido equilátero y en la medida de cada uno de sus ángulos se cometiese un error probable de  $0.5''$ .



Regla de Bessel para medir bases geodésicas.

ángulos que formaban parte de la red de enlace a la cadena principal. El promedio de las tres bases medidas por Tenner resultó ser de 5447 toesas, aproximadamente el 40% de la longitud media del lado de los triángulos que discurrían por Lituania y Volinia, al Oeste de Ucrania, en los que el error medio del ángulo observado fue de  $\omega \approx 1.21''$ . Unas cifras que le permitieron a Struve fijar en 2756 toesas la longitud idónea de las bases, acorde con la incertidumbre esperada en las medidas angulares del arco báltico; sin embargo, confesaba que ya había tenido que ceder en la base de Simonis. En efecto, las condiciones del terreno impusieron finalmente bases menores de 2315 toesas, al igual que restringieron la longitud de los lados de la triangulación en la zona, en donde había algunos de 5398 toesas. De hecho la relación de esas bases con un lado medio de Livonia fue de 0.16, en cambio el valor de  $\omega$  sólo fue de  $0.57''$ . Las dos bases de Besarabia tuvieron una longitud media de 2840 toesas, equivalente al 24% de la longitud media de un lado principal, con  $\omega \approx 1.02''$ .

Las dificultades en el segmento del meridiano comprendido entre el golfo de Finlandia y el mar Glacial fueron aún más difíciles de superar, puesto que se trataba de una región salpicada de rocas graníticas frecuentemente rodeadas de pantanos. No es extraño por tanto que los geómetras escandinavos sólo pudieron encontrar tres emplazamientos en los que medir bases: Elimä, Uleaborg<sup>153</sup> y Öfver-Tornio, con longitudes respectivas de 1349 toesas, 1505 toesas y 1520 toesas;

<sup>153</sup> Actual ciudad finlandesa de Oulu.

cuya media de 1458 toesas equivalía al 10% del lado promedio de la triangulación principal. Struve se refirió de nuevo a la base de Alten, la más corta de todas (8% de un lado), recordando la preocupación de los geodestas al pensar que difícilmente podrían encontrar una zona en la que medir la base, en una región tan extensa como la limitada por cabo Norte y la frontera Sur de Laponia, cerca de la iglesia de Kautokeino. La preocupación era fundada, pues Klouman, que había levantado el mapa del Finnmarken noruego y prolongado sus reconocimientos hasta la citada iglesia, ya declaró que la medida de una base en aquellos parajes resultaba «absolutamente impracticable», salvo que se hiciese al borde del mar. De hecho así se hizo, cerca de Alten, dándose la circunstancia de que 50 toesas se midieron aprovechando que el reflujó de la marea dejó el suelo libre de agua<sup>154</sup>. Por otra parte, la base de Över-Tornio, que había elegido Selander, se hallaba muy cerca del lugar en que midieron la suya Maupertuis (1736) y Svanberg (1802). Realmente, la de estos se midió, mayoritariamente, sobre el cauce helado del río Tornio; en cambio Selander efectuó la medición en la ribera oriental de dicho río, a unos cuatro metros por encima del cauce y sobre una pequeña planicie estable, con la limitación de que su longitud máxima fue de 1520 toesas.

Struve emprendió luego la tarea, ciertamente complicada, de intentar acotar la exactitud alcanzada en las medidas de las bases geodésicas con sus dos aparatos (I y II) y con el de Tenner. El problema era múltiple, tal como él mismo reconocía al subdividirlo en los siguientes apartados:

- a) Evaluación de los errores acimutales derivados de la alineación.
- b) Determinación de los errores debidos a la inclinación de las reglas.
- c) Incidencia de la contrastación de las reglas con el patrón metrológico *N* y sus copias *P* y *R*.
- d) Incertidumbres esperadas al contrastar la composición de las cuatro reglas.
- e) Cálculo de los errores cometidos en las lecturas del índice de la palanca de contacto sobre el arco graduado y al efectuar la división del mismo.



Los dos extremos de la base de Simonis. El mojón, de 1.2 m de altura, es el extremo (SE) situado en la proximidad de Simuna (al Noreste de Estonia), el otro (NW) se localizó junto a la población de Võivere; fue restaurado y protegido en el año 2012.

<sup>154</sup> Struve comentó que afortunadamente se trataba de un suelo sólido formado por pequeños cantos rodados.

- f) Obtención de los errores personales cometidos por los dos observadores, al realizar sus lecturas independientes, durante la medición de la base.
- g) Deformaciones ligadas a los cambios de temperatura. Struve compuso un cuadro con los datos de las siete bases que habían sido medidas con sus reglas, el cual le valió como punto de partida para sus investigaciones:

Base de	Aparato empleado	Patrón empleado	Duración de la medida	Longitud de la base	Temperatura media, grados centesimales		Des-nivel entre los dos puntos de la base	Inclinación media entre los dos extremos de la base	Suma de las reducciones por las inclinaciones de las reglas
					De las reglas en la medida de la base.	Del patrón y las reglas en su contraste			
				$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{e}$	$\bar{h}$		$\bar{r}$
1. SIMONIS	I	N	1827. Sept. 1 à Sept. 15	2315,2	16,392	12,16	3,00	4,5	-0,1326
2. ELIMÄ	I	N	1844. Août 21 à Août 28	1348,8	19,846	18,07	1,25	3,2	-0,1538
3. ULEABORG	I	N	1845. Août 13 à Août 21	1505,3	14,632	18,06	1,06	2,4	-0,1674
4. ROMANKAUTZI	I	R	1848. Août 27 à Sept. 8	2910,2	14,364	14,82	3,27	3,9	-0,3632
5. TASCHBUNAR	I	P	1852. Sept. 26 à Oct. 8	2770,3	20,949	20,64	14,07	17,5	-0,1493
6. ALTEN	II	P	1850. Juill. 5 à Juill. 12	1154,7	15,000	15,46	2,98	8,9	-0,2148
7. ÖFVER-TORNEA	II	P	1851. } Août 5 à Août 12 } » 12 à » 19	1519,9	14,473	17,38	0,04	0,1	-0,1998.

Las siete bases medidas con las reglas de Struve y algunas de las circunstancias de la operación.

Aunque figuren en la tabla las duraciones de las medidas, en realidad incluyen únicamente el tiempo invertido en la medición directa sobre el terreno, es decir no se contempló el empleado en los preparativos de la operación o el que llevó la contrastación posterior a la misma. También deberían sustraerse de tales duraciones las pérdidas de tiempo ocasionadas por inclemencias meteorológicas u otros factores imprevistos. Struve concretó el tiempo verdaderamente empleado en la operación, en los siguientes términos: «sumando las horas de trabajo efectivo, he calculado que la base de Simonis<sup>155</sup> se midió en 65 horas, lo que equivaldría a 17.8 reglas estacionadas y observadas en una hora. Pero este tipo de medidas va siempre más despacio al comienzo que al final». Struve creía que, siguiendo un ritmo normal, se podían estacionar más de 20 reglas en una hora, de modo que durante una jornada de 10 horas se deberían colocar 200 reglas, equivalentes a unos 800 m.

Al analizar la alineación de las reglas recordó Struve que salvo en la base de Simonis, donde se empleó una alidada de pínulas, en todas las demás se consiguió esta mediante un ante-ojo de pasos. Suponiendo una desviación máxima de 2', habría que aplicar a la longitud de la regla una corrección sustractiva dada por  $2 \text{ sen}^2 1' \approx 0.000000169 \approx 0.169 \mu$ , siendo  $\mu$  la millonésima parte de la longitud. Ahora bien como la máxima desviación esperada era de 2', las com-

<sup>155</sup> Se conservan los dos extremos de esa base (Simuna-Vöivere). El primero está materializado por un gran mojón de granito apoyado en una base prismática. El otro extremo se dio por perdido hasta que fue recuperado, mediante GPS, en el año 2001. El centro de la señal es una piedra granítica perforada en su centro y colocada a unos 20 cm bajo el nivel del suelo; en el año 2012 fue protegida por una capa de cristal transparente.

prendidas entre 0' y 2' serían mucho más frecuentes; de ahí que la reducción anterior disminuyera considerablemente hasta llegar a un tercio del valor anterior, esto es a  $0.056 \mu$  (1). En el estudio de los efectos de las inclinaciones de las reglas, de nuevo fue una excepción la base de Simonis al haberla obtenido Struve con un teodolito. En las seis restantes se determinó la inclinación con la ayuda de un nivel unido a la regla. Los efectos fueron coherentes en cuanto que la desviación media para las cuatro reglas fue de  $27''$  en la base de Simonis, y de  $7''$ ,  $9''$ ,  $3''$ ,  $3''$  y  $5''$  para las otras. Struve cifró las correcciones correspondientes en  $f = 20''$  para Simonis y en  $f = 10''$  para las demás bases. De manera que llamando  $h$  al desnivel entre la primera y la última regla, en los extremos de la base, se tendría finalmente una reducción en la longitud dada por  $dr = -h \operatorname{sen} f$ . Si  $g$  fuese el error accidental de una dirección observada, su efecto sobre la reducción sería  $\delta r = \operatorname{sen} 2g \sqrt{r}$ . Combinando ambos errores se obtendría una reducción final dada por  $(dr^2 + \delta r^2)^{1/2} = (2)$ . La incidencia del apartado  $c$  del problema ya fue comentada al tratar de los patrones metrológicos, limitándose Struve a recordar los valores relativos para cada uno de ellos:  $0.000 \mu$  (3),  $0.110 \mu$  (3) y  $0.455 \mu$  (3), respectivamente asociados a  $N$ ,  $P$  y  $R$ .

La referencia al apartado  $d$  comenzó señalando la estabilidad de las reglas de medida, prácticamente invariables, no sólo mientras se realizaba la operación, sino también en otros periodos de larga duración e incluso después de haberlas transportado a grandes distancias. Struve resumió todas las comparaciones realizadas entre 1827 y 1852, entre las reglas de sus dos aparatos y los patrones metrológicos, bien con  $N$  o con  $P$  y  $R$ . En su relato siguió llamando  $S$  y  $S^*$  a la composición de las cuatro reglas, expresada en líneas; junto a ellas detalló los nuevos valores  $\Sigma$  y  $\Sigma^*$ , los cuales expresaban las sumas de las longitudes de las cuatro reglas a la temperatura normal de  $16.25 \text{ }^\circ\text{C}$ , deducidas a partir de  $S$  y  $S^*$ , en función de los coeficientes de la dilatación relativa previamente determinados.

#### Longitudes de las reglas del aparato I de Struve

Año	Periodo	$S$ en líneas	$T$ en $^\circ\text{C}$	$\Sigma$ en líneas	Media
1827	Agosto, antes de la medida de Simonis	6912.20983	12.72	6912.20995	
1827	Agosto, después de la medida de Simonis	6912.20799	11.60	6912.20815	6912.20905
1828	Agosto en Dorpat	6912.19925	18.11	6912.19919	
1828	Diciembre en Dorpat	6912.19815	-12.79	6912.19916	6912.19918
1844	Julio en Púlkovo	6912.28028	17.79	6912.28023	
1844	Agosto, antes de la medida de Elimä	6912.31640	19.75	6912.31628	
1844	Agosto, después de la medida de Elimä	6912.31468	16.38	6912.31468	6912.31548
1845	Agosto, antes de la medida de Uleaborg	6912.29083	21.24	6912.29060	
1845	Agosto, después de la medida de Uleaborg	6912.28015	14.88	6912.28019	6912.28540
1848	Agosto, antes de la medida de Romankautzi	6912.30054	16.86	6912.30113	
1848	Septiembre, después de la medida de Romankautzi	6912.28913	12.78	6912.28575	6912.29344
1852	Septiembre, antes de la medida de Taschbunar	6912.36188	21.42	6912.38691	
1852	Octubre, después de la medida de Taschbunar	6912.37338	19.86	6912.37690	6912.38190

*Longitudes de las reglas del aparato II de Struve*

Año	Periodo	$S^*$ en líneas	$T$ en °C	$\Sigma^*$ en líneas	Media
1850	Julio, antes de la medida de Alten	6912.00334	15.12	6912.00306	
1850	Julio, después de la medida de Alten	6912.00161	15.80	6912.00151	6912.00228
1851	Agosto, antes de la medida de Öfver-Tornio	6912.00116	18.45	6912.00068	
1851	Agosto, después de la medida de Öfver-Tornio	6911.99959	16.30	6911.99958	6912.00013

Nota: Las comparaciones en Dorpat se realizaron para hallar la variación relativa entre N y S por el cambio de temperatura.

Struve intercaló en su resumen dos notas reveladoras de su escrupulosidad en el cuidado de las reglas. En la primera comentó que el aparato se trasladó de Dorpat a Púlkovo en el año 1843, haciéndole por ese motivo una revisión concienzuda. Fruto de la misma fue la constatación de que se encontraba en perfecto estado a pesar de no haberse usado durante quince años; sólo hubo que efectuar algunos retoques en el pulido de los ejes de las palancas y hacer una nueva división en la escala vertical del nivel. En la segunda indicó que después de medir la base de Romankautzi, la regla quedó en Besarabia, aunque la usase luego el general Wrontschenko y volviese allí en 1852. Dicho general manifestó que el aparato le fue entregado en no muy buenas condiciones, apreciándose una evidente falta de mantenimiento, la cual fue rápidamente subsanada por el mecánico que acompañaba a la expedición, quien tuvo que fabricar una nueva palanca para sustituir a la que se había roto. Como complemento del cuadro anterior, Struve formó una tabla complementaria con las diferencias  $\Sigma^{\text{II}}$  y  $\Sigma^{\text{I}}$ , relativas a cada una de las siete bases anteriores, siendo  $\Sigma^{\text{II}}$  y  $\Sigma^{\text{I}}$  los valores alcanzados por  $\Sigma^*$  y  $\Sigma$ , después y antes de medirlas:

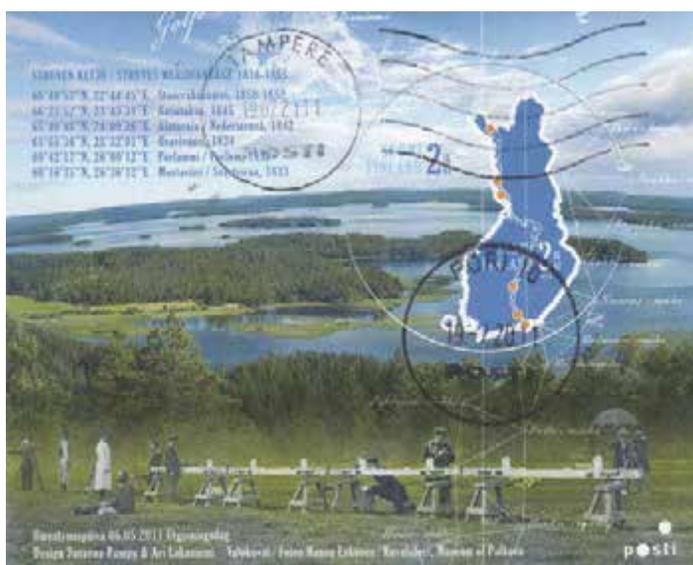
*Diferencias entre  $\Sigma^{\text{II}}$  y  $\Sigma^{\text{I}}$*

Bases	Líneas
Simonis	-0.00180
Elimä	-0.00160
Uleaborg	-0.01041
Romankautzi	-0.01538
Taschbunar	-0.01001
Alten	-0.00155
Öfver-Tornio	-0.00110
Valor promedio $-0.00598 = 0.865\mu = 1/1160000$	

La interpretación que dio Struve de los dos cuadros anteriores fue sagaz y práctica, mostrando implícitamente la solidez de sus conocimientos metrológicos. Su primera apreciación fue la de que todas las reglas habían experimentado en las medidas de las bases un pequeño acortamiento medio de 0.00598 líneas para la suma de las cuatro y otro individual de 0.00150 líneas. A partir de ello dedujo que la doble contrastación de las reglas con el patrón, antes y después

de la medida de la base, había sido crucial para aumentar la fiabilidad del resultado. Según él, la media de las dos comparaciones  $(\Sigma^I + \Sigma^{II})/2$ , usada en el cálculo de la base proporcionaría una relación muy exacta entre el patrón y las reglas durante la medida. Efectivamente, al considerar los residuos entre  $\Sigma^{II} - \Sigma^I$  y su media, producidos por perturbaciones aleatorias, se tendría para cada diferencia observada un error probable de 0.00394 líneas y para  $(\Sigma^I + \Sigma^{II})/2$  otro de  $(4) = 0.00197$  líneas =  $0.287\mu \approx 1/3480000$  de la longitud. Esa cantidad se podría asociar a la dilatación producida a una temperatura de  $0.025$  °C, aunque a Struve le pareciese demasiado grande. Otra de sus conclusiones fue que el transporte de su primer aparato, de una a otra base, había ejercido una cierta influencia sobre las reglas, si bien de poca entidad. Entre la última  $\Sigma$  del año 1827 y la del mes de agosto de 1828 hubo una disminución de 0.00896 líneas.

Durante el invierno de ese periodo de tiempo, se transportó el aparato desde Simonis a Dorpat, en dos trineos, atando las reglas con cuerdas. Por otra parte se constató un alargamiento de 0.03605 líneas a causa del viaje efectuado, en 1844, desde Púlkovo a Elimä y un acortamiento de 0.02408 líneas durante los transportes posteriores: desde Elimä a Helsinki, «para invernar en su observatorio», tal como escribió Struve, y las dos travesías marítimas siguientes: una desde Helsinki hasta Abo<sup>156</sup>, en un barco a vapor, y otra desde allí a Uleaborg, siguiendo el litoral del golfo de Botnia en un barco de cabotaje. En lo que se refiere al segundo aparato, comentó Struve que una de las contrastaciones se hizo a orillas del mar Glacial y otra en Laponia, resultando de ambas una diferencia insignificante de 0.00083 líneas, para la longitud total de las cuatro reglas<sup>157</sup>.



Homenaje postal de Finlandia (19. julio.2011) a la medida de las bases geodésicas. A la derecha aparece superpuesta parte de la triangulación. El sello fue diseñado por Susanna Rumpu y por An Lakaniemi.

El quinto apartado del problema que se viene tratando lo resolvió Struve considerando que, una vez contrastadas las reglas de su primer aparato, el índice de la palanca indicaba  $m = 20$ ; en cambio con la del segundo partió del valor  $m = 15$ , sobre el arco graduado. El contacto de las reglas al medir las bases se realizaba procurando que los índices  $l$  e  $l^*$  apenas se separasen de  $m$  y  $m^*$ , una fracción mínima de una división. Así que, si la base total constaba de  $n$  reglas, la suma  $[l]$  sería sensiblemente igual a  $20n$  y a  $15n$ . Llamando  $v$  y  $v^*$  a los valores de una división, en cada aparato, resultarían unas correcciones para  $l$  y  $l^*$  dadas por los valores:  $\lambda = (20n - [l])v$

<sup>156</sup> Nombre sueco de la ciudad finlandesa de Turku.

<sup>157</sup> A pesar del intervalo de un año y del largo viaje por mar alrededor de Noruega, desde Oslo a Goetmburgo, desde allí hasta Estocolmo, usando el canal de Gotha, y más tarde desde esa capital a Tornio, para trasladarse, finalmente por tierra, hasta la base establecida en Öfver-Tornio.

y  $\lambda^* = (15n - [l]) v^*$ . La exactitud de las mismas dependería por tanto de las lecturas  $l$  y  $l^*$ , así como de la precisión con que se hubiesen obtenido  $v$  y  $v^*$ . Struve calculó en su *Gradmessung II* (página 379) los valores  $v = 0.0227$  líneas y  $v^* = 0.0218$  líneas, para los que supuso una precisión por debajo de  $1/200$  de su valor, lo que equivalía a fijar unos errores probables máximos de  $0.005 v$  y de  $0.005 v^*$ . Concretando esas magnitudes para la base de Simonis y comparando los valores de  $l$  consignados en los dos diarios independientes, fijó el error probable de la lectura  $l$  de la palanca en  $v/36 = 0.00063$  líneas =  $0.36 \mu$ , es decir cerca de una tres millonésima de la longitud de una regla. Acto seguido matizó tales resultados: al haber efectuado la lectura a simple vista, se comprobó que las palancas eran un medio tan exacto como cómodo a la hora de fijar magnitudes lineales mínimas. Sin embargo se lamentaba Struve de haber podido efectuar tales cálculos sólo para cuatro de las bases, ya que la determinación de las incertidumbres en las longitudes  $l$  se realizaron bajo el prisma de los errores personales. Considerando que los errores probables fuesen únicamente de  $0.005 v$ , formó el cuadro siguiente:

*Correcciones para las longitudes de las bases por los índices*

Base	$\lambda$ en toesas	Error probable en toesas
Simonis	-0.0018	$\pm 0.000009 = \pm 0.004 \mu$ (5)
Taschbunar	0.0050	$\pm 0.000025 = \pm 0.009 \mu$ (5)
Alten	-0.0008	$\pm 0.000004 = \pm 0.004 \mu$ (5)
Öfver-Tornio	-0.0016	$\pm 0.000008 = \pm 0.005 \mu$ (5)

Struve completó la relación anterior con las bases de Elimä, Uleaborg y Romankautzi, cuya medición corrió a cargo de Sabler. Este observó de nuevo la palanca de contacto, prefiriendo colocar la de la regla precedente exactamente a 20, mediante un movimiento micrométrico de la regla siguiente. Con semejante proceder se evitaba al menos que los observadores tuviesen que anotar la posición del índice, «aunque nos privara del control efectuado por dos observadores independientes», apostillaba Struve. Por otra parte, el procedimiento era un tanto heterodoxo, ya que no bastaba con anular prácticamente la desviación, pues también se debería de haber evaluado el valor restante, por pequeño que fuese. Tras la experiencia y el estudio efectuado por Sabler, el error probable cometido, al situar el índice en 20, se estimó próximo a  $0.2 v$ , o a  $0.0045$  líneas; induciendo otro, en la longitud de la base de  $0.0045 \sqrt{n}$ . Los resultados para las tres bases resultaban así obvios:

*Correcciones para las longitudes de las bases por los índices*

Base	$n$	Errores probables
Elimä	674	0.117 líneas = $0.100 \mu$ (5)
Uleaborg	753	0.123 líneas = $0.095 \mu$ (5)
Romankautzi	1455	0.171 líneas = $0.068 \mu$ (5)

En el apartado sexto se limitó Struve a resumir los resultados obtenidos por los dos observadores en cada una de las bases, recordando cómo se habían obtenido independientemente las lecturas de los índices de las palancas, las temperaturas y las divisiones de los niveles; de manera

que se contaba con diarios separados de las siete medidas. He aquí el cuadro resumen, tal como fue reproducido en la Memoria<sup>158</sup>:

BASE	$\mathfrak{A}$ toesas	Según el diario de	$\mathfrak{B}$ toesas	Según el diario de	$K = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2}$ toesas	$\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ toesas
SIMONIS. . . .	2315,17309	Struve	2315,17205	Wrangell	2315,17257	+0,00104 = +0,449 $\mu$
ELIMÄ . . . .	1348,74916	Sabler	1348,75113	Woldstedt	1348,75014	-0,00197 = -1,460 $\mu$
ULEABORG . .	1505,31900	Sabler	1505,31662	Woldstedt	1505,31781	+0,00238 = +1,582 $\mu$
ROMANKAUTZI.	2910,22585	Sabler	2910,22619	Napersnikow	2910,22602	-0,00034 = -0,117 $\mu$
TASCHBUNAR .	2770,26928	Prazmovski	2770,26963	Wagner	2770,26946	-0,00035 = -0,127 $\mu$
ALTEN. . . . .	1154,74489	Lindhagen	1154,74427	Klouman	1154,74458	+0,00062 = +0,537 $\mu$
ÖFYER-TORNEA	1519,85023	Selander	1519,84988	Lindhagen	1519,85006	+0,00035 = +0,230 $\mu$

Longitudes de las bases geodésicas en el arco ruso.

Al hallar las diferencias  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ , que figuran en el cuadro, a los efectos de las ecuaciones personales, de origen múltiple, entre las parejas de observadores, se dedujeron para  $\mathfrak{A}$  o  $\mathfrak{B}$  el error probable de  $0.412 \mu$  y para la media  $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})/2$ , otro dado por  $(6) = 0.292\mu = 1/3420000$  de la longitud total.

La extraordinaria influencia de los cambios de temperatura, sobre las reglas metálicas con que se medían las bases, fue la parte central del apartado séptimo. Struve consideró las dos fuentes de error siguientes: fiabilidad en las magnitudes de las propias temperaturas y en los coeficientes de dilatación asociados; estos fueron sus planteamientos. Sea  $K$  la longitud de la base, dada por  $n S'$ , con  $S'$  igual a la suma de las cuatro reglas implicadas en su medida, a la temperatura media  $t$ .  $S$  es la longitud de dicha composición  $4 E' + u$ , siendo  $E'$  la longitud del patrón metrológico a una temperatura  $e$ .  $E = N + w$ , a  $16.25^\circ \text{C}$ , es la relación entre el patrón referente y la copia empleada en la contrastación. Finalmente,  $\varepsilon$  representará el coeficiente de dilatación a  $1^\circ \text{C}$  para el patrón  $E$ , y  $\sigma$  el mismo para  $S$  a idéntica temperatura. Con tal simbología y despreciando las posibles dilataciones insignificantes de las magnitudes infinitesimales  $u$  y  $w$ , se verificarían las siguientes igualdades:

$$E' = E [1 + (e-16.25) \varepsilon] = N + w + (e - 16.25) \varepsilon N;$$

$$S = 4N + 4w + u + 4(e - 16.25) \varepsilon N;$$

$$S' = 4N + 4w + u + 4(e - 16.25) \varepsilon N + 4(t - e) \sigma N;$$

$$K = n (4N + 4w + u) + 4n (e - 16.25) \varepsilon N + 4n (t - e) \sigma N.$$

De modo que haciendo  $K' = n (4N + 4w + u)$  resultaría

$$K = K' + (e - 16.25) \varepsilon K' + (t - e) \sigma K' = K' + [(e - 16.25) (\varepsilon - \sigma) + (t - 16.25) \sigma] K'.$$

<sup>158</sup> Con la salvedad de los epígrafes, que se han traducido al español.

En la expresión anterior serían variables dependientes de la temperatura:  $e$ ,  $t$ ,  $\varepsilon$  y  $\sigma$ , es decir que podrían calcularse las diferenciales  $de$ ,  $dt$ ,  $d\varepsilon$  y  $d\sigma$ . Consiguientemente, si se diferencia esa última expresión quedaría:

$$dK / K' = dK / K = (e - 16.25) d(\varepsilon - \sigma) + (t - 16.25) d\sigma + (\varepsilon - \sigma) de + \sigma dt.$$

Llamando ahora a cada uno de los sumandos  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  y  $K_4$ , se llegaría a que  $dK / K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ . Si en lugar de hallar el valor real se calculase el más probable<sup>159</sup>, y se designase con (7), es obvio que (7) =  $(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + K_4^2)^{1/2}$ . Al ser el término  $K_4$  el de mayor relevancia, se trataría de obtener solamente el error probable de  $t$ , ya que si  $dt$  fuese de 0.1 °C, valdría 1.13 $\mu$ , cantidad mayor que la suma de los efectos producidos por las demás fuentes de error.

**Vergleichung 1.**

31. August. 3,8 Uhr.

	Wahre Temperat.	Schraube.	
	°	"	
N	12,78	2,119	Mittel für N = 2,113u
B	12,69	1,722	A = N + 1,199u
A	12,42	0,914	B = N + 0,391u
C	12,82	1,198	C = N + 0,915u
D	12,68	1,343	D = N + 0,770u
N	12,71	2,106	S = 4 N + 3,275u = 4 N + 0,16402 Lin.

**Vergleichung 2.**

31. August. 5,8 Uhr.

	Wahre Temperat.	Schraube.	
	°	"	
N	12,67	2,107	Mittel für N = 2,102u
D	12,65	1,367	A = N + 1,162u
C	12,71	1,221	B = N + 0,331u
A	12,40	0,940	C = N + 0,881u
B	12,41	1,771	D = N + 0,735u
N	12,72	2,097	S = 4 N + 3,109u = 4 N + 0,15571 Lin.

**Vergleichung 3.**

20. September. 4,2 Uhr.

	Wahre Temperat.	Schraube.	
	°	"	
N	12,02	1,553	Mittel für N = 1,573u
A	11,78	0,248	A = N + 1,325u
B	11,71	1,190	B = N + 0,383u
C	11,98	0,804	C = N + 0,769u
D	11,93	0,897	D = N + 0,676u
N	12,04	1,594	S = 4 N + 3,153u = 4 N + 0,15791 Lin.

**Vergleichung 4.**

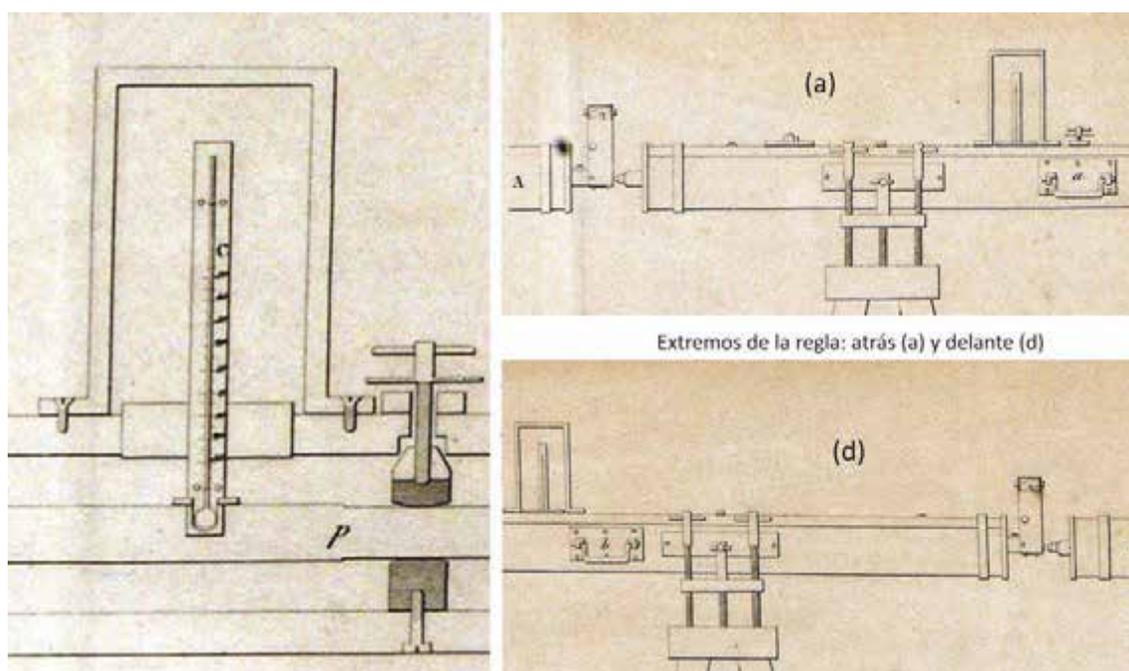
21. September. 3,2 Uhr.

	Wahre Temperat.	Schraube.	
	°	"	
N	11,17	1,796	Mittel für N = 1,783u
A	10,92	0,486	A = N + 1,297u
B	10,86	1,433	B = N + 0,350u
C	11,10	1,012	C = N + 0,771u
D	11,02	1,043	D = N + 0,740u
N	11,19	1,770	S = 4 N + 3,158u = 4 N + 0,15816 Lin.

Correcciones termométricas calculadas por Struve, en 1827, para la base geodésica de Simonis. Los cuadros figuran en la página 397 de la obra Gradmessung (II): *Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, Ausgeführt und Bearbeitet, in den Jahren 1821 bis 1831.*

<sup>159</sup> Téngase en cuenta que los coeficientes de dilatación ya los había fijado Struve, junto a los errores probables respectivos. Por otro lado supuso aquí que la incertidumbre de la temperatura era de 0.2 °C, un valor demasiado elevado a tenor de lo que comentó en el apartado cuarto.

Struve ya había explicado en su obra *Gradmessung II* los procedimientos para calcular las correcciones de los termómetros empleados durante la medida de la base de Simonis, algunas de las cuales se han reproducido en los cuadros anteriores. Al tener el aparato, con sus cuatro reglas, 8 termómetros, dedujo que la fiabilidad de la corrección termométrica media era inferior a los  $0.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Análoga metodología siguió para los otros termómetros, tanto con los llamados a sustituir a los deteriorados del primer aparato como con los que se integrarían en el segundo. Una vez obtenidas las correcciones referidas resultaba imperiosa la necesidad de controlar la invariabilidad de todos los termómetros, una operación que requería el examen de los orígenes de sus escalas sobre el terreno de la base, como se hizo antes y después de su medida, en el Observatorio de Púlkovo. Struve fijó el error medio de los termómetros en una cantidad inferior, en todo caso<sup>160</sup>, a los  $0.05\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



Detalle del termómetro y de los extremos en la regla de Struve: atrás (a) y delante (d).

¿Pero con que fiabilidad se obtendrían las lecturas sobre los dos termómetros<sup>161</sup> de que constaba la regla? Se preguntaba Struve. El mismo respondía sin dilación «la certidumbre con que se han leído los termómetros es incontestable», así se desprende del acuerdo que ofrecen las temperaturas medias registradas para cada base por los dos operadores que intervinieron en su medida. Una aseveración que refrendó al incluir la tabla siguiente:

<sup>160</sup> El suponer un error probable igual a  $0.05\text{ }^{\circ}\text{C}$  para la media de los ocho termómetros fue excesivamente prudente, tal como comentó Struve.

<sup>161</sup> Los termómetros se colocaron sobre la regla a  $1/4$  y a  $3/4$  de su longitud.

*Acuerdo entre las temperaturas medias de las siete bases*

Denominación	Operadores	$\Delta$ °C
Simonis	Struve & Wrangel	0.017
Elimä	Sabler & Woldstedt	0.012
Uleaborg	Sabler & Woldstedt	0.004
Romankautzi	Sabler & Napersnikow	0.007
Taschbunar	Prazmovski & wagner	0.008
Alten	Lindhagen & Klouman	0.000
Öfver- Tornio	Selander & Lindhagen	0.010

Tales diferencias proporcionarían un error probable de 0.005 °C para cada observador, o de 0.0035 °C para la media de los dos, que se traduce en otro error de 0.040  $\mu$  para la longitud; una cantidad insignificante que aseguraba el efecto despreciable que tenían las incertidumbres de la lecturas termométricas sobre la longitud de la base.

Al situar sobre cada regla los termómetros a 1/4 y a 3/4 de su longitud, Struve supuso que uno de ellos indicaría la temperatura de la primera mitad de la regla y el otro la de la segunda. Él creía que estaba en lo cierto, sobre todo teniendo en cuenta la serie considerable de medidas que se hacían durante una jornada de trabajo; pues la temperatura aumentaba desde la mañana hasta el mediodía y descendía después hasta la puesta de Sol. Si como sucedía en la medición real, la temperatura media del periodo matutino era igual que la del vespertino, la validez de su hipótesis parecía irrefutable. No obstante, se producía generalmente una cierta subida de la temperatura desde la mañana a la tarde, dependiendo fundamentalmente del estado del cielo; el mayor aumento se presentaba durante los días despejados y el menor en los días cubiertos. Struve concretó la serie de valores para las siete bases:

*Aumento medio de la temperatura*

Bases	Valor
Simonis	2.7 °C
Elimä	2.65 °C
Uleaborg	6.96 °C
Romankautzi	5.38 °C
Taschbunar	12.96 °C
Alten	-0.54 °C
Öfver-Tornio <sup>162</sup>	I: 1.26 °C, II: 4.32 °C

<sup>162</sup> Aunque se presentase esa diferencia de temperaturas, Struve concluyó su análisis afirmando que los termómetros indicaron la verdadera temperatura media de las reglas.

La media de tales valores resultó ser de 4.46 °C, aunque se transformase en 3.26 °C si no se promediaba la subida de Taschbunar<sup>163</sup>. Tras algunas consideraciones sobre la interrelación de esas subidas de temperatura y de las posiciones de las reglas en relación con la de los termómetros, Struve introdujo en una sola tabla los cuatro términos de la incertidumbre termométrica, expresando sus valores individualizados y el efecto combinado de los cuatro, identificado con (7):

	SIMONIS.	ELIMĀ	ULEABORG.	ROMANKAUTZI.	TASCHBUNAR.	ALTEN.	ÖFFTER-TORNEA.
$e-16,25 =$	- 4,09	+ 1,82	+ 1,81	- 1,43	+ 4,39	- 0,79	+ 1,13
$t-16,25 =$	+ 0,142	+ 3,596	- 1,618	- 1,886	+ 4,699	- 1,250	- 1,772
$\epsilon =$	11,394 $\mu$	11,394 $\mu$	11,394 $\mu$	11,300 $\mu$	11,253 $\mu$	11,253 $\mu$	11,253 $\mu$
$\sigma =$	11,399 $\mu$	11,221 $\mu$	11,221 $\mu$				
$\epsilon-\sigma =$	- 0,005 $\mu$	- 0,005 $\mu$	- 0,005 $\mu$	- 0,099 $\mu$	- 0,146 $\mu$	+ 0,032 $\mu$	+ 0,032 $\mu$
$de =$	$\mp$ 0,018 $\mu$	$\mp$ 0,018 $\mu$	$\mp$ 0,018 $\mu$	$\mp$ 0,150 $\mu$	$\mp$ 0,017 $\mu$	$\mp$ 0,017 $\mu$	$\mp$ 0,017 $\mu$
$d\sigma =$	$\mp$ 0,023 $\mu$	$\mp$ 0,025 $\mu$	$\mp$ 0,025 $\mu$				
$d(\epsilon-\sigma) =$	$\mp$ 0,013 $\mu$	$\mp$ 0,013 $\mu$	$\mp$ 0,013 $\mu$	$\mp$ 0,153 $\mu$	$\mp$ 0,029 $\mu$	$\mp$ 0,018 $\mu$	$\mp$ 0,018 $\mu$
$K_1$	$\mp$ 0,057 $\mu$	$\mp$ 0,026 $\mu$	$\mp$ 0,025 $\mu$	$\mp$ 0,142 $\mu$	$\mp$ 0,127 $\mu$	$\mp$ 0,014 $\mu$	$\mp$ 0,020 $\mu$
$K_2$	$\mp$ 0,003 $\mu$	$\mp$ 0,083 $\mu$	$\mp$ 0,037 $\mu$	$\mp$ 0,043 $\mu$	$\mp$ 0,108 $\mu$	$\mp$ 0,031 $\mu$	$\mp$ 0,044 $\mu$
$K_3$	$\mp$ 0,001 $\mu$	$\mp$ 0,001 $\mu$	$\mp$ 0,001 $\mu$	+ 0,019 $\mu$	$\mp$ 0,029 $\mu$	$\mp$ 0,006 $\mu$	$\mp$ 0,006 $\mu$
$K_4$	$\mp$ 0,661 $\mu$	$\mp$ 0,651 $\mu$	$\mp$ 0,606 $\mu$				
(7) =	$\mp$ 0,663 $\mu$	$\mp$ 0,666 $\mu$	$\mp$ 0,663 $\mu$	$\mp$ 0,678 $\mu$	$\mp$ 0,682 $\mu$	$\mp$ 0,652 $\mu$	$\mp$ 0,608 $\mu$

Incertidumbres termométricas en la medición de las bases geodésicas del gran arco ruso.

Concluido el análisis de las diferentes fuentes de error contempladas al medir las bases geodésicas con sus dos aparatos, Struve resumió los resultados obtenidos en el cuadro que se reproduce seguidamente, del que conviene destacar el montante total de 1/1240000:

	Por la alineación (1) =	Por la inclinación (2) =	Por el patrón (3) =	Por el contraste de las reglas (4) =	Por la lectura de la palanca (5) =	Por las ecuaciones personales (6) =	Por las temperaturas (7) =	Error probable total ó $\mp(1) \dots \mp(7) =$ $\frac{dK}{K} =$
SIMONIS . . . . .	0,056 $\mu$	0,130 $\mu$	0,000 $\mu$	0,287 $\mu$	0,004 $\mu$	0,292 $\mu$	0,663 $\mu$	$\mp$ 0,792 $\mu$
ELIMĀ . . . . .	0,056 $\mu$	0,072 $\mu$	0,000 $\mu$	0,287 $\mu$	0,100 $\mu$	0,292 $\mu$	0,666 $\mu$	$\mp$ 0,793 $\mu$
ULEABORG. . . . .	0,056 $\mu$	0,062 $\mu$	0,000 $\mu$	0,287 $\mu$	0,095 $\mu$	0,292 $\mu$	0,663 $\mu$	$\mp$ 0,789 $\mu$
ROMANKAUTZI. . . . .	0,056 $\mu$	0,068 $\mu$	0,445 $\mu$	0,287 $\mu$	0,068 $\mu$	0,292 $\mu$	0,678 $\mu$	$\mp$ 0,914 $\mu$
TASCHBUNAR . . . . .	0,056 $\mu$	0,248 $\mu$	0,110 $\mu$	0,287 $\mu$	0,009 $\mu$	0,292 $\mu$	0,682 $\mu$	$\mp$ 0,842 $\mu$
ALTEN . . . . .	0,056 $\mu$	0,147 $\mu$	0,110 $\mu$	0,287 $\mu$	0,004 $\mu$	0,292 $\mu$	0,652 $\mu$	$\mp$ 0,793 $\mu$
ÖFFTER-TORNEA. . . . .	0,056 $\mu$	0,039 $\mu$	0,110 $\mu$	0,287 $\mu$	0,003 $\mu$	0,250 $\mu$	0,608 $\mu$	$\mp$ 0,729 $\mu$
								Media = $\mp$ 0,807 $\mu$
								= $\mp$ $\frac{1}{1240000}$

Efectos probables de las diferentes fuentes de error.

<sup>163</sup> Struve explicó esa aparente anomalía al aclarar que la medida se realizó en días totalmente despejados y serenos, y durante un periodo (finales de Septiembre y primeros de Octubre) en que hacía mucho calor a mediodía, pero con noches tan frías y húmedas que a veces, al salir el Sol, la temperatura era próxima a los 0 °C. También indicó que Prazmovski decidió comenzar la medida de la base al salir el Sol, para asegurarse así de que la temperatura no se apartaría demasiado de los 16.25 °C.

Los comentarios de Struve a propósito de las bases medidas por el general Tenner concreta-ron, en primer lugar, su participación directa en las de Ponedeli, Ossownitza y la de Staro-Konstantinoy, aunque contase siempre con un nutrido grupo de colaboradores<sup>164</sup>. Antes de adentrarse en los pormenores del cálculo de la longitud de la base, presentó Struve dos cuadros resumen de las tres operaciones, los cuales se reproducen junto a estas líneas:

Base de	Duración de la medida	Longitud de la base <i>K</i>	Temperatura media de las reglas <i>t</i>	Desnivel de la base <i>h</i>	Inclinación de la base	Suma de las reducciones por la inclinación de las reglas <i>r</i>
PONEDELI . . . . .	1820. Sept. 13 à Oct. 14	6055,4 toesas	+ 10°,521 C.	2,62 toesas	1,5	- 1,1295 toesas
OSSOWNITZA . . . . .	1827. Sept. 22 à Oct. 6	5720,0	+ 12,511 »	1,93	1,2	- 0,8372
STARO-KONSTANTINOW	1838. Sept. 6 à Sept. 24	4564,2	+ 15,851 »	2,17	1,6	- 0,2594

Base de	Número total de reglas	Días de observación	Horas de observación	Número medio de reglas por hora	Media de las temperaturas			Subida media diaria
					Comienzo de la mañana	Máx. de los dif. días	Final de la tarde	
PONEDELI . . . . .	2754	23	171	16,2	+ 7°,50 C.	+ 12°,74 C.	+ 10°,86 C.	+ 3°,36 C.
OSSOWNITZA . . . . .	2604	14	115	22,7	+ 6,64 »	+ 17,41 »	+ 15,24 »	+ 8,60 »
STARO-KONSTANTINOW	2075	15	112	18,6	+ 9,11 »	+ 20,34 »	+ 15,16 »	+ 6,05 »

Cuadros resumen para las bases de Tenner.

Si bien se cifró en 32 días la duración de la medida efectuada en Ponedeli, habría que descontar los 9 días en que se tuvo que interrumpir, pues Tenner solamente midió bajo cielo cubierto hasta que dispuso de los bastidores portátiles que protegían las reglas y el terreno de los rayos del Sol. En el cuadro inferior figura un incremento de temperatura que sigue marcando la diferencia entre las lecturas termométricas realizadas al comienzo y al final de la jornada laboral, con la particularidad de que la base de Ponedeli se midió durante un día nublado y las otras dos con sombra artificial, presentando por ello una subida media de 7.32 °C. Otra de las peculiaridades citadas por Struve fue la de que las medidas hechas con el aparato de Tenner resultaron un poco más rápidas que las efectuadas con los suyos<sup>165</sup>. El análisis posterior de la exactitud alcanzada en estas tres bases siguió el mismo esquema del precedente, estructurado como es sabido en siete apartados, con la salvedad de que la incertidumbre asociada al empleo de las palancas (*e*) se substituyó por la que apareció al usar lengüetas móviles.

La alineación de las reglas y la medida de sus inclinaciones se determinaron, de acuerdo con lo reseñado por Struve, con los mismos medios empleados en las otras bases ya citadas.

<sup>164</sup> Struve detalló el que le ayudó en la base de Ossownitza, a saber: Gerassimow (Estado Mayor), Saitzow (Artillería), Rewkowsky (estudiante de la Universidad de Vilnius), Grigoriew (conductor del Cuerpo de Ingenieros), dos suboficiales y 40 soldados del arma de Artillería.

<sup>165</sup> La velocidad media alcanzada con el de Tenner fue de 42 toesas por hora, mientras que la base de Simonis se midió a razón de 36 t/h.



Cruz grabada en el vértice Ossownitza.

La cuantificación del error debido a la primera fue de  $(1) = -0.056 \mu$ , en cuanto a los segundos, estos fueron sus valores:  $(2) = 0.027 \mu$  en Ponedeli,  $(2) = 0.023 \mu$  en Ossownitza y  $(2) = 0.025 \mu$  en Staro-Konstantinov. Estos últimos errores probables fueron sensiblemente inferiores a los cometidos en las otras siete bases, pues el terreno en que se localizaron las tres medidas por Tenner era muy uniforme y con una inclinación máxima de  $1.6'$ , cuando en las demás se llegaron a superar los  $17'$ .

El error cometido en el tercer apartado fue  $(3) = 0.402 \mu$ , en función de la relación ya conocida  $T = 0.547309580 N$ . Struve confesaba que la comparación de las cuatro reglas (I, II, III y IV) con el patrón  $T$  había resultado sumamente complicada, en tanto que se debía contrastar una unidad limitada por dos trazos con una barra de doble escala, cuya longitud era el segmento comprendido entre sus dos extremos. El procedimiento seguido por Tenner fue resumido por Struve, al señalar que el patrón  $T$  se comparó primeramente con la regla número II y que luego se comparó esta con las otras tres. No obstante, se dio mayor fiabilidad a la contrastación posterior del año 1828, según lo manifestado por este: «las distintas comprobaciones se efectuaron de una vez por todas en 1828, con la ayuda de dos microscopios micrométricos fabricados por Johannes Pistor, que habían sido cedidos por el Observatorio de Dorpat». Hasta tal punto fueron definitivas, que a partir de entonces el patrón  $T$  perdió toda su vigencia, en favor de las reglas, consideradas por el propio Tenner como modelos invariables. Struve insistía todavía más sobre esa cuestión, al afirmar que desde 1817 hasta la fecha en que escribió su Memoria habían transcurrido 37 años, durante los cuales siempre estuvieron las reglas custodiadas por Tenner<sup>166</sup>. La comparación de las reglas, I, III y IV con la II no supuso dificultad alguna, aunque a Struve no le

<sup>166</sup> Con el auxilio de un destacamento de soldados que las transportaban bajo la supervisión de dos oficiales.



Midiendo una base con las reglas de Struve (Museo del Observatorio de Púlkovo).

mereciesen toda la confianza las múltiples precauciones tomadas por Tenner; no obstante supuso que podía ser admisible un error  $(4) = 2.000 \mu$ , es decir  $1/500000$  de la longitud total.

Para fijar los errores cometidos en el apartado quinto (e), examinó Struve los intervalos medidos por Tenner con ayuda de las lengüetas. Con tal objetivo comparó las dos pulgadas de cada una de ellas con un intervalo, también de dos pulgadas, de la escala  $T$ , evaluando reiteradamente las centésimas de pulgada de las lengüetas por medio de micrómetros y confeccionando al final una tabla en la que figuraron las correcciones a aportar sobre cada lectura de la repetida lengüeta. El proceso le mereció a Struve tal confianza que supuso nulo el posible efecto inducido sobre la longitud de la base, esto es que  $(5) = 0.000 \mu$ . Al evaluar las consecuencias de los posibles errores personales, Struve no tuvo la posibilidad de plantear ecuaciones personales, puesto que Tenner realizó por sí mismo las tareas más importantes: el ajuste de la primera regla sobre el punto de partida, la posición del término diario y el reajuste de la regla al comenzar la operación del día siguiente; después efectuaba el contacto de las lengüetas con las reglas siguientes, las lecturas de dichas lengüetas y las de los termómetros. La imposibilidad referida queda perfectamente justificada en la Memoria de Struve: «todas las lecturas, al igual que las indicaciones del nivel, observadas por un auxiliar, pero verificadas siempre por el jefe, se dictaron para que figurasen en dos diarios, que formarían sin embargo un solo cuerpo, obedeciendo la dualidad a la necesidad de evitar errores de oído o de escritura». A pesar de ello, Struve estaba tan convencido de la meticulosidad de Tenner que fijó el error en  $(6) = 0.412 \mu$ , el mismo valor que ya había calculado para un solo diario.

El apartado dedicado a los efectos de los cambios de temperatura, en la medida de las tres bases, fue desigual. En la de Ponedeli sólo se dispuso de dos termómetros para las cuatro reglas, en Ossownitza cada regla tuvo el suyo, en cambio en la de Staro-Konstantinov contaron con dos termómetros para cada regla. Struve estuvo de acuerdo en que, en tales condiciones, se hizo muy

bien al efectuar la medida de la base de Ponedeli con cielo cubierto y al emplear bastidores portátiles en las otras bases durante los días soleados. Por el contrario subrayó el inconveniente que supuso la defectuosa colocación de los termómetros sobre las reglas, pues con tal disposición no se pudo constatar con fiabilidad suficiente las temperaturas medias de las reglas y de los termómetros: «es imposible fijar esta incertidumbre, aumentada incluso por los pequeños errores presentes en las correcciones termométricas adoptadas». No obstante, concluía Struve que le parecía verosímil suponer que el error probable total de las temperaturas de las tres bases fuese de  $0.14^{\circ} R = 0.175^{\circ} C$ .

Aunque Tenner emplease en el cálculo, de las bases que midió, un coeficiente de dilatación  $\sigma = 11.753 \mu$  para  $1^{\circ} C$ , resultó ser mayor que el obtenido para otras seis barras de hierro<sup>167</sup>: con un valor medio de  $11.325 \mu$  y residuos insignificantes. Struve manifestó entonces que, al parecer, los puntos que Tenner había considerado fijos en sus experiencias metrológicas, sufrieron realmente ciertas alteraciones al variar la temperatura entre  $0^{\circ} C$  y  $100^{\circ} C$ . Seguidamente supuso que el error probable de  $\sigma$ , igual al de  $\epsilon$ , era de  $0.200 \mu$ , con lo que el de  $(\epsilon - \sigma)$  sería de  $0.283 \mu$ . Con esos valores aproximados y recordando que la contrastación de las reglas con la escala se efectuó a  $14^{\circ} R = 17.50^{\circ} C$ , obtuvo Struve el error probable (7) para las tres bases medidas por Tenner; usando para ello las mismas fórmulas que empleó cuando se refirió a esa cuestión y a las reglas de sus dos aparatos<sup>168</sup>.

	PONEDELI.	OSSOWNITZA.	STARO-KONSTANTIN.
$\epsilon - 16^{\circ}25 =$	$+ 1^{\circ}25 C.$	$+ 1^{\circ}25 C.$	$+ 1^{\circ}25 C.$
$t - 16,25 =$	$- 5,729 C.$	$- 3,739 C.$	$- 0,399 C.$
$bt =$	$\mp 0,175 C.$	$\mp 0,175 C.$	$\mp 0,175 C.$
$\sigma = \epsilon =$	$11,735 \mu$	$11,735 \mu$	$11,735 \mu$
$b\sigma = b\epsilon =$	$\mp 0,200 \mu$	$\mp 0,200 \mu$	$\mp 0,200 \mu$
$b(\epsilon - \sigma)$	$\mp 0,283 \mu$	$\mp 0,283 \mu$	$\mp 0,283 \mu$
$K_1$	$\mp 0,354 \mu$	$\mp 0,354 \mu$	$\mp 0,354 \mu$
$K_2$	$\mp 1,146 \mu$	$\mp 0,748 \mu$	$\mp 0,798 \mu$
$K_3$	$0,000 \mu$	$0,000 \mu$	$0,000 \mu$
$K_4$	$\mp 2,057 \mu$	$\mp 2,057 \mu$	$\mp 2,057 \mu$
$(7) =$	$\mp 2,381 \mu$	$\mp 2,216 \mu$	$\mp 2,236 \mu.$

Incertidumbre termométrica para las medidas efectuadas con las reglas de Tenner.

<sup>167</sup> Tres rusas, dos de Francia y una de Inglaterra.

<sup>168</sup> Realmente despreció antes los posibles efectos producidos en la dilatación estimada para el cobre de las lengüetas, dado que la suma de los intervalos medidos solo llegó a valer 1/340 de la longitud total de la base.

Agrupando los errores probables esperados en los siete apartados anteriores, compuso Struve el cuadro final que se acompaña:

	(1) = -	(2) = ±	(3) = ±	(4) = ±	(5) = ±	(6) = ±	(7) = ±	$\frac{bK}{K}$
PONEDELI . . . . .	0,056 $\mu$	0,027 $\mu$	0,402 $\mu$	2,000 $\mu$	0,000 $\mu$	0,412 $\mu$	2,381 $\mu$	± 3,16 $\mu$
OSSOWNITZA . . . . .	0,056 $\mu$	0,023 $\mu$	0,402 $\mu$	2,000 $\mu$	0,000 $\mu$	0,412 $\mu$	2,216 $\mu$	± 3,04 $\mu$
STARO-KONSTANTINOW	0,056 $\mu$	0,053 $\mu$	0,402 $\mu$	2,000 $\mu$	0,000 $\mu$	0,412 $\mu$	2,236 $\mu$	± 3,05 $\mu$
							Media = ± 3,08 $\mu$	
							= ± $\frac{1}{325000}$	

Efectos probables de las diferentes fuentes de error en las bases de Tenner.

Struve enunció su conclusión final en los siguientes términos: «los errores probables hallados para las siete bases medidas con el aparato de Struve se apoyaron en los datos numéricos obtenidos a lo largo de las operaciones... sólo he de añadir que las cifras ofrecidas son demasiado exageradas, de modo que la incertidumbre efectiva es menor que el último valor relativo que figura en la tabla. En cuanto a las tres bases de Tenner, a falta de datos numéricos proporcionados por sus experiencias, he debido recurrir ocasionalmente a la estima del valor alcanzado por los efectos perturbadores; por consiguiente hay una cierta arbitrariedad en los últimos errores que se indican. En todo caso esta investigación resultaba indispensable para hacerse una idea cabal, aunque en parte subjetiva, acerca de la exactitud de las bases, un juicio que me servirá de guía en posteriores análisis. Por otro lado, poco más puedo comentar sobre el error probable medio de las bases de Tenner, 1/325000, salvo que no sé si existen motivos para admitir un valor numérico mayor o menor.»

Emprendió después Struve una etapa fundamental en la medida de las bases geodésicas, cuyo fin último era su reducción al elipsoide. Se partía para ello de la longitud de la base proyectada sobre su horizonte medio, procediendo luego al cálculo del arco elipsoidal limitado por las dos normales a dicha superficie, trazadas por los extremos de la referida base<sup>169</sup>. En el primer tomo de las Memorias presentadas por él a La Academia de Ciencias de San Petersburgo, solamente redujo las seis bases del segmento de meridiano situado más al Sur, esto es: Taschbunar,

<sup>169</sup> El problema de la reducción de la base se puede abordar desde la Topografía, la Geodesia y la Cartografía. En la primera se finaliza el proceso con la proyección de la base sobre el plano horizontal, una vez hallada la distancia resultante, también conocida como distancia reducida. En la geodesia se continuaría la transformación hasta alcanzar el elipsoide, interviniendo en la reducción la altitud media de la zona en que se encontrara la base. Al no conocerse, con fiabilidad suficiente, la separación entre el elipsoide y el nivel medio del mar (asimilable en una primera aproximación al geoides), se optó por reducir la base a ese nivel. No por ello se cometieron errores de consideración, en tanto que la máxima discrepancia entre el modelo matemático del elipsoide de revolución y la superficie física del geoides es del orden de los 110 m, un valor insignificante si se compara con el radio de la Tierra ( $R \approx 6371$  km en el modelo esférico). Finalmente es en la cartografía en donde se puede continuar el proceso de transformación, pasando de ese último segmento elipsoidal a su homólogo sobre el plano del mapa, haciendo uso del factor de escala asociado al sistema cartográfico con el que se hubiese formado el mapa. Entre la diversa bibliografía que puede consultarse al respecto, me permito sugerir el libro *Nociones de Topografía y Fotogrametría Aérea* (Universidad de Granada. 2003), en cuyos capítulos 5 (pp. 135-137) y 6 (pp. 155-158) se aborda la cuestión con más detalle.

Romankautzi, Staro-Konstantinov, Ossownitza, Penedeli y Simonis. Las distancias horizontales de partida, identificadas con la letra  $K$ , respondían como se dijo a la fórmula:

$$K = K' + [(e - 16.25) (\varepsilon - \sigma) + (t - 16.25) \sigma] K'.$$

No obstante, las relativas a las bases medidas por Tenner fueron calculadas independientemente por este, resultando  $K = 5531.71327 T'$ , para Ponedeli,  $K = 5225.24993 T'$ , para Ossownitza y  $K = 4169.55375 T'$ , para Staro-Konstantinov. La unidad en que se expresaron fue el sazhen, marcado sobre el patrón metrológico a  $14.0^\circ R = 17.5^\circ C$ , un poco más largo que el identificado en su momento con la letra  $T$ , a  $13.0^\circ R = 16.25^\circ C$ , tras sufrir la dilatación producida por un incremento de  $1.25^\circ C$ . Transformadas las unidades en toesas, resultaron los seis valores siguientes:

*Bases del segmento Sur de meridiano*

Denominación	Distancia reducida
Simonis	2315.17257
Ponedeli	6055.25206
Ossownitza	5719.78406
Staro-Konstantinov	4564.17347
Romankautzi	2910.22602
Taschbunar	2770.26946

Para reducir las distancias anteriores al nivel del mar hubo que fijar previamente los valores de las altitudes de la zona y el del radio de la Tierra, dado por la fórmula de Euler aplicada al modelo elipsoidal definido por Bessel. Recuérdese que el citado teorema relaciona el radio de una sección normal de acimut dado con los dos radios de curvatura principales en un punto de latitud conocida. Llamando  $N$  y  $\rho$  a esos radios principales<sup>170</sup> (máximo y mínimo), se verificaría que el radio de la sección normal de acimut  $\alpha$  vendría dado por

$$(1/\rho) \cos^2 \alpha + (1/N) \sin^2 \alpha = 1/R_\alpha;$$

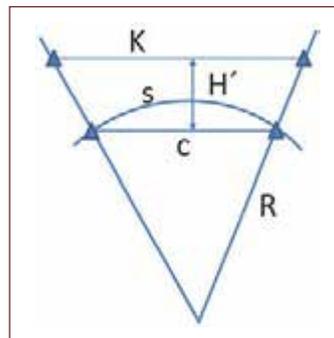
el acimut  $\alpha$  de una cierta dirección lo dedujo Struve a partir del gráfico de la triangulación. En realidad Struve usó para su cálculo las tablas construidas por Encke<sup>171</sup> e incluidas en las Efemérides de Berlín (1852, pp. 343-373).

La determinación de las altitudes se consiguió a partir de las nivelaciones trigonométricas efectuadas dentro de la operación geodésica principal. En las de Struve se localizó el origen en el golfo de Finlandia, junto al puerto de Kunda, mientras que el usado en las de Tenner se situó en

<sup>170</sup>Supuesto definido el elipsoide por los valores de su semieje mayor,  $a$ , y por el cuadrado de su primera excentricidad,  $e^2$ , se cumple que  $N = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$  y  $\rho = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$ .  $N$  es el radio máximo (primer vertical) y  $\rho$  es el radio mínimo (meridiano).

<sup>171</sup>Tablas relativas a la figura de la Tierra, en las que se tabuló la fórmula anterior ligeramente transformada, para calcular las curvaturas en lugar de los radios.

el mar Báltico, cerca de Polangen; es destacable que durante las segundas pareció deducirse que el nivel del Báltico estaba unas 0.53 toesas por encima del mar Negro<sup>172</sup>. Si  $h$  y  $h^n$  fuesen las altitudes de los dos extremos de la base,  $H' = (h + h^n)/2$  sería la altitud media de tales puntos. Para calcular la latitud media de la base habría que hallar otro valor  $H = (h + h^1 + \dots + h^n)/2$ . Es obvio que siempre existiría un cierto residuo  $H - H' = dH'$ , fácilmente deducible con la ayuda de las inclinaciones sucesivas que fuesen presentando las reglas<sup>173</sup>. Struve llamó  $\psi$  a la reducción de la base al nivel del mar, haciéndola igual a  $-H'K/R$ . Con dicho valor formó la tabla que se presenta a continuación, figurando en ella las reducciones en toesas que se tendrían que aplicar a las seis bases<sup>174</sup>.



Reducción de distancias al nivel del mar.

	Latitud $\varphi$	Acimut $\alpha$	$\log R$	$H'$	$dH'$	$H$	Reducción $\psi$
				toesas	toesas	toesas	toesas
SIMONIS .....	59° 2'	75°	6,51583	55,77	+ 0,19	55,96	- 0,03950
PONEDELI .....	55 58	26	6,51508	49,78	- 1,26	48,52	- 0,08974
OSSOWNITZA .....	52 14	37	6,51503	81,01	- 0,37	80,64	- 0,14090
STARO-KONSTANTINOW	49 42	86	6,51566	146,83	- 1,78	145,05	- 0,20194
ROMANKAUTZI .....	48 30	49	6,51508	148,94	- 0,99	147,95	- 0,13151
TASCHBUNAR .....	45 35	38	6,51467	26,81	+ 0,72	27,53	- 0,02332

Reducción de las seis bases al nivel del mar.

Struve asumía que se trataba de unas correcciones poco aproximadas, al referirse a las altitudes en estos términos: «siempre sujetas a una relativa incertidumbre, máxima a medio camino entre los dos mares». De todos modos consideró que no le parecía descabellado admitir para las seis bases los errores probables en altitud que se detallan en el cuadro siguiente, además de las reducciones  $\psi$ , deducidas en función de ellos. En la tabla incluyó igualmente los demás errores probables que afectaban a las longitudes de las bases y el efecto combinado de todos ellos, al cual designó con la expresión  $\mathcal{DK}/K$ :

<sup>172</sup> Sin embargo, Struve rectificó radicalmente dicho resultado, al señalar que tal diferencia era mucho más pequeña que el error probable esperado y que le pareció obligado adoptar el mismo nivel para los dos mares, conservando inalterables las altitudes de las distintas bases referidas en los diarios de las operaciones respectivas.

<sup>173</sup> Struve llamó a ese procedimiento alternativo nivelación mecánica, considerándolo como el método más exacto de todos, aunque tuviese la desventaja de ser más lento.

<sup>174</sup> Struve no dedujo la fórmula anterior por su inmediatez. En efecto, la relación entre la cuerda  $c$  (asociada al arco elipsoidal) y la longitud de la base  $K$ , será idéntica a la existente entre el radio  $R$  y el radio incrementado en la latitud  $H'$ , es decir que se verificarán las expresiones:  $K/c = (R + H')/R \rightarrow c = KR/(R + H')$ . De modo que

$$\psi = c - K = KR/(R + H') - K = (KR - KR - KH')/(R + H) \rightarrow \psi = -KH'/(R + H') \approx -KH'/R.$$

Bien entendido que dicha reducción debería ser un tanto menor, pues al tratarse de la cuerda y no del arco, se le tendría que sumar a la cuerda una nueva corrección para transformarla en el arco  $s$ .

	$bH$	$b\psi$	$\frac{b\psi}{K}$	$\frac{bK}{K}$	$\frac{\Delta K}{K}$
SIMONIS . . . . .	$\mp 0,5$ toesas	$\mp 0,00035$ toesas	$\mp 0,153 \mu$	$\mp 0,792 \mu$	$\mp 0,806 \mu$
PONEDELI . . . . .	$\mp 1,2$	$\mp 0,00222$ »	$\mp 0,366 \mu$	$\mp 3,16 \mu$	$\mp 3,18 \mu$
OSSOWNITZA . . . . .	$\mp 1,9$	$\mp 0,00332$ »	$\mp 0,580 \mu$	$\mp 3,04 \mu$	$\mp 3,10 \mu$
STARO-KONSTANTINOW	$\mp 2,5$	$\mp 0,00348$ »	$\mp 0,764 \mu$	$\mp 3,05 \mu$	$\mp 3,15 \mu$
ROMANKAUTZI . . . . .	$\mp 1,8$	$\mp 0,00160$ »	$\mp 0,550 \mu$	$\mp 0,914 \mu$	$\mp 1,067 \mu$
TASCHBUNAR . . . . .	$\mp 1,0$	$\mp 0,00085$ »	$\mp 0,306 \mu$	$\mp 0,940 \mu$	$\mp 0,989 \mu$

Acción combinada de las fuentes de inexactitud sobre las seis bases.

Una vez calculados los últimos errores probables y efectuados los correspondientes ajustes, expuso Struve las longitudes finales de las bases, reducidas al nivel del mar Báltico, con los errores probables de las mismas:

*Longitudes, en toesas, de las seis bases reducidas al nivel del Mar Báltico*

Nombre	Valor	Error probable
Simonis	2315.13307	0.00187
Ponedeli	6055.16232	0.01925
Ossownitza	5719.64316	0.01773
Staro-Konstantinov	4563.97153	0.01438
Romankautzi	2910.09451	0.00309
Taschbunar	2770.24614	0.00274

La información sobre el resto de las bases la proporcionó Struve en el tomo segundo de su Memoria (C. IV. pp. 17-19). En un primer cuadro, incluyó las longitudes sin reducir al nivel del mar, las altitudes medias y los errores probables estimados para ambas magnitudes:

Base de	Longitud entre los puntos extremos, $K =$	Error probable $\frac{bK}{K} =$	$H =$ $bH$
ELIMÄ . . . . .	<b>1348,75014</b> toesas	$\mp 0,793 \mu$	$+ 10,72 \mp 0,5$ toesas
ULEABORG . . . . .	<b>1505,31781</b> »	$\mp 0,789 \mu$	$+ 0,71 \mp 0,5$ »
ÖFVER-TORNEA	<b>1519,85006</b> »	$\mp 0,729 \mu$	$+ 24,63 \mp 0,5$ »
ALTEN . . . . .	<b>1154,74458</b> »	$\mp 0,793 \mu$	$+ 1,84 \mp 0,5$ »

Longitudes de las cuatro bases septentrionales.

Acto seguido añadió otro con las reducciones al nivel del mar y los errores probables correspondientes, igualmente referido a ese segmento del arco de meridiano y sus bases de Elimä, Uleaborg, Öfver-Tornio y Alten:

	Elimä.	Uleaborg.	Öfver-Tornio.	Alten.
$H' =$	+ 11,13	+ 1,46	+ 24,43	+ 3,16 toesas
$dH' =$	— 0,41	— 0,75	+ 0,20	— 1,32 »
$H =$	+ 10,72	+ 0,71	+ 24,63	+ 1,84 »
$\varphi =$	60° 50'	65° 0'	66° 22'	69° 55'
$\alpha =$	12°5	40°0	23°0	84°0
$\lg R =$	6,51527	6,51568	6,51564	6,51610
reducciones $\psi =$	— 0,00441	— 0,00032	— 0,01142	— 0,00065 toesas
error prob. $b\psi =$	+ 0,00021	+ 0,00023	+ 0,00023	+ 0,00018 »
$\frac{b\psi}{K} =$	+ 0,153 $\mu$	+ 0,153 $\mu$	+ 0,153 $\mu$	+ 0,153 $\mu$
et $\frac{bK}{K} + \frac{b\psi}{K} = \frac{bK}{K} =$	+ 0,808 $\mu$	+ 0,804 $\mu$	+ 0,745 $\mu$	+ 0,808 $\mu$

Reducción al nivel del mar de las cuatro bases septentrionales.

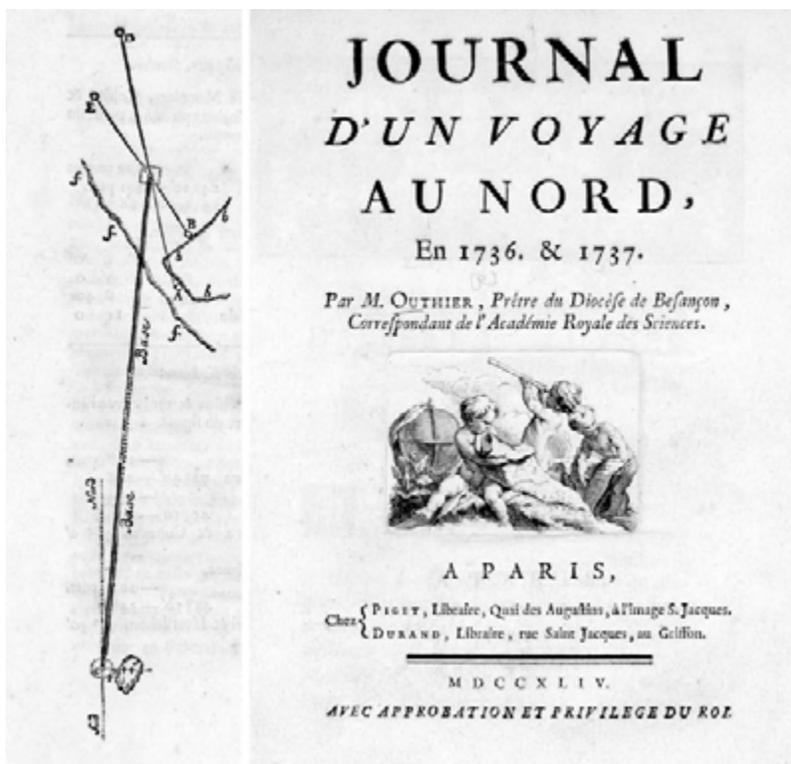
Struve complementó su relato con una serie de comentarios que se resumen a continuación. Primeramente refirió la proximidad de la base de Uleaborg al golfo de Botnia y la de Alten al mar Glacial, y lo fácil que resultó el cálculo de las altitudes medias. También expresó su convencimiento de que su posible indeterminación obedecería exclusivamente al efecto accidental del viento, ya que la influencia de la marea pudo eliminarse sin dificultad comparando los niveles alcanzados durante la pleamar y la bajamar. Las otras dos bases estaban más alejadas del litoral, la de Elimä a 23.5 km del golfo de Finlandia y la de Öfver-Tornio a poco más de 69 km del golfo de Botnia. Como en los dos golfos se consideró, prácticamente, despreciable el efecto de la marea, creyó que el error probable en las altitudes de los extremos debería ser menor de 0.5 toesas<sup>175</sup>.

Por otra parte, la zona en que Selander midió la base de Öfver-Tornio casi coincidió con la que usaron antes Svanberg y Maupertuis, dándose la circunstancia de que este último despreció de hecho la altitud de su base. Svanberg<sup>176</sup>, en cambio, atribuyó a la suya una altitud próxima a los 48.58 m, es decir unas 25.13 toesas, sin haber indicado como la obtuvo<sup>177</sup>; una magnitud casi idéntica a la determinada por Selander, tal como se verá un poco más adelante.

<sup>175</sup> Struve matizaba esa cifra, al suponer que si la hacía extensiva a las cuatro bases estaba exagerando la realidad.

<sup>176</sup> *Exposition des opérations faites en Laponie, pour la détermination d'un arc du méridien en 1801, 1802 et 1803*. Estocolmo 1805.

<sup>177</sup> Struve criticaba las observaciones de Svanberg, por no figurar en ellas «un cálculo hipsométrico detallado», sobre las distancias cenitales medidas en cada estación, que le debieron servir para reducir al horizonte los ángulos inclinados, observados con el círculo de Borda.



Base medida por Maupertuis. La imagen ilustró el libro titulado *Journal d'un voyage au Nord* (1736-1737), escrito por Réginald Outhier, astrónomo que participó en la expedición científica a Laponia.

Dos de las bases geodésicas de este segmento septentrional del meridiano merecen un tratamiento diferenciado, ya que fueron las únicas de las que se concretaron ciertos detalles de su medida, los cuales fueron transmitidos en la comunicación que presentó Selander sobre la Operación de Laponia (10 agosto 1855) y en el Diario de las Operaciones Geodésicas en Finmarken, también incluidas en el tomo segundo de la Memoria redactada por Struve. La base de Öfver-Tornio fue medida doblemente, por Selander y Lindhagen, reseñándose en sus diarios los valores siguientes:

*Base de Öfver-Tornio en toesas*

Operadores	Selander	Lindhagen
Primera medida	1519.85097	1519.85092
Segunda medida	1519.84940	1519.84892
Promedio	1519.85018	1519.84902
Media de los promedios 1519.85005		

Para calcular la altitud media de la base se realizaron observaciones recíprocas y simultáneas en las estaciones de Tornio, Perra-Vaara, Huitaperi y Avasaksa, que permitieron obtener la altitud de ese último vértice sobre el nivel del mar: 123.595 toesas. Desde él se midieron las distancias cenitales de los dos extremos de la base, resultando los desniveles siguientes: 99.163 toesas en el septentrional y 99.172 en el meridional; pudiendo admitirse así estas altitudes sobre el nivel del mar: 24.432 toesas (extremo septentrional) y 24.423 toesas (extremo meridional), siendo su





bién se le denominase al lado de la triangulación base ampliada. Al haberse medido diez bases, la cadena extendida por el meridiano contó con diez bases ampliadas, las cuales se destacaron en el gráfico de la triangulación con un trazo más grueso: Katlabuch ↔ Taschbunar II, Britschani ↔ Wosdauzi, Montschinzi ↔ Katerinowka, Ossownitza ↔ Leskowitschi, Ponedeli ↔ Jakshti, Ebbafer ↔ Tammik, Mustila ↔ Korsmalm, Sarvi ↔ Kangas, Pullinki ↔ Avasaksa y Nuppi-vaara ↔ Lodizhjokki<sup>180</sup>.

---

<sup>180</sup> Se han relacionado comenzando en la de menor latitud.

La triangulación fue el método geodésico por excelencia, hasta el reciente e imparable desarrollo de las técnicas espaciales. No se sabe a ciencia cierta cuando apareció<sup>181</sup>, aunque debió ser en la primera mitad del siglo XVI, se trata por lo tanto de un procedimiento que se vino usando sin interrupción durante más de cuatrocientos años. Tampoco se puede concretar con exactitud cuándo se aplicó por vez primera a la geodesia, si bien se tiene constancia de algunos trabajos al respecto en el observatorio de la isla de Ven, visitada por el abate y astrónomo francés Jean Picard en el año 1671; siendo el quien proporcionó valiosa información al respecto. Allí había permanecido, entre 1594 y 1596, Willem Janszoon Blaeu, estudiando matemáticas y astronomía. Según el propio Picard<sup>182</sup>, aprovechó su estancia para medir un segmento de meridiano usando la triangulación y obteniendo para el radio de la Tierra un valor similar al que obtendría él al medir el meridiano de Francia. Blaeu fue precisamente el que construiría años después el cuadrante astronómico que empleó Willebrord Snel van Royen (*Snellius*) en la observación de la triangulación<sup>183</sup> que proyectó para medir el desarrollo del arco de meridiano definido por las ciudades de Alkmaar y Bergen op Zoom, durante los años 1615 y 1617, alcanzando una extensión de 1°11' y asignando al perímetro terrestre un valor aproximado de 38600 km. La medida de Snellius fue crucial para el avance de la geodesia, pues siguiendo su metodología midió Picard un arco del meridiano de París y obtuvo el valor más riguroso del radio de la Tierra conocido hasta entonces<sup>184</sup>.

La práctica de la triangulación conlleva la realización ininterrumpida de una serie de intersecciones directas, con las que va localizándose la posición de un nuevo vértice en función de la de otros previamente observados. La denominación de intersección directa es obligada, pues la posición buscada no es más que el corte geométrico de las dos rectas que unen el vértice buscado con los ya conocidos. La simple interpretación geométrica demuestra implícitamente que la

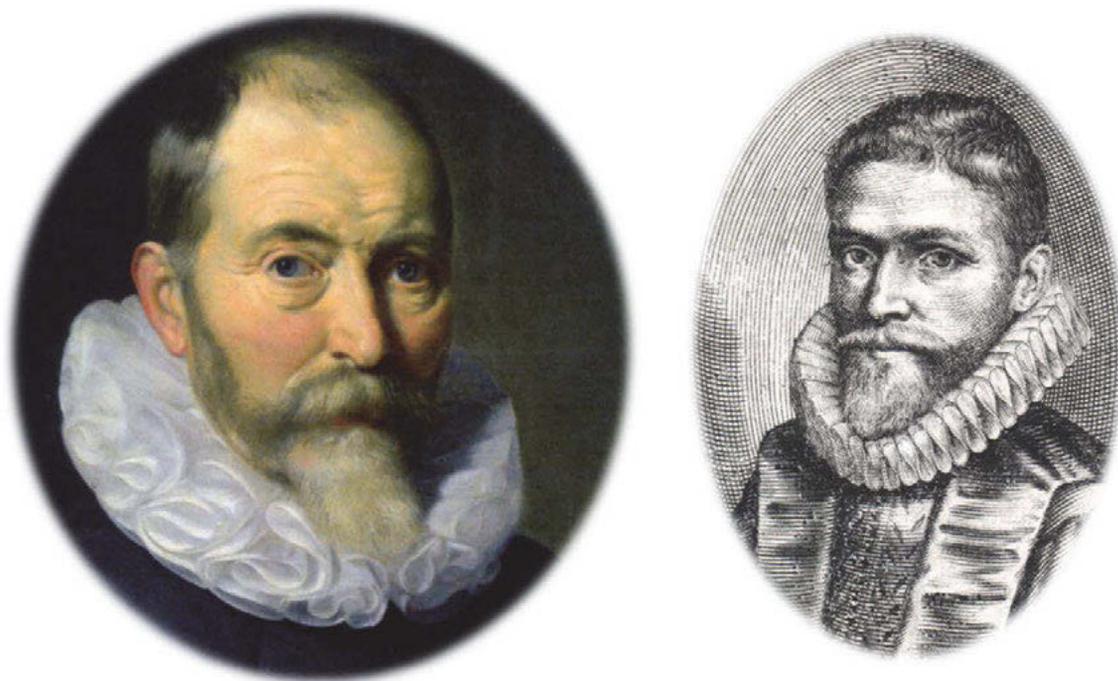
---

<sup>181</sup> Uno de los primeros en emplearla fue el cosmógrafo flamenco Jacob Relofs van Deventer, profesor en la Universidad de Lovaina y maestro de Reigner Gemma Frisius; en el taller de este último se formaría el gran Mercator.

<sup>182</sup> Picard es reconocido universalmente como el fundador de la geodesia moderna, a él se debió la primera determinación rigurosa del radio terrestre. Su medida fue crucial para la ciencia, ya que Newton se valió del mismo para comprobar la bondad de su ley de gravitación, decidiéndose finalmente a publicar sus renombrados *Principia*. La referencia al trabajo de Blaeu está en la página 195 del tomo VII (1) publicado en el año 1729, dentro de las *Memoires de l'Academie Royale des Sciences: depuis 1666 jusqu'à 1699*.

<sup>183</sup> Concretamente para la determinación de las latitudes de los dos extremos del arco.

<sup>184</sup> Autoproclamado *Eratosthenes Batavus*.



Willem Janszoon Blaeu (izda.) y Willebrord Snell van Royen (dcha.), dos de los primeros en usar la triangulación para medir grados del meridiano terrestre.

exactitud de la determinación será máxima cuando ambas rectas sean perpendiculares, una propiedad que se comprueba analíticamente al estudiar la fórmula que cuantifica el error cometido en la intersección. Ahora bien, la imposibilidad de que haya otro ángulo recto en el triángulo formado por tres vértices, vuelve intuitiva la idea de que la forma más recomendable del mismo, al efectuar el proyecto de la triangulación, es la equilátera. La cuestión de la forma de los triángulos fue justamente la que trató Struve, al iniciar el capítulo correspondiente, en el primer tomo de su Memoria.

Tal como apuntaba Struve, para enlazar geodésicamente los dos extremos de un arco de meridiano con una triangulación, bastaría con medir uno de los lados de sus triángulos y los ángulos de todos ellos; es más en teoría sería suficiente el conocimiento de sólo tres elementos para resolverlos. Ciertamente, con la medida de sólo dos ángulos de un triángulo y con el valor de uno de sus lados, se podrían calcular los tres elementos restantes, teniendo en cuenta que la magnitud del tercer ángulo resultaría obligada, sabido que la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es de  $180^\circ$  más el exceso esférico<sup>185</sup>. Aunque sea cierta esa posibilidad, en la práctica operacional se recomendaba medir los tres ángulos a modo de comprobación. Struve clasificaba los lados y ángulos de los triángulos de la red en diversas categorías. Dado un triángulo genérico  $ABC$ , denominaba ángulos de continuación al  $C$ , opuesto al lado conocido  $c$ , y al  $B$ , opuesto al lado  $b$ , que sería el lado conocido en el triángulo siguiente; al tercer ángulo  $A$  le llamaba ángulo intermediario. Los lados  $b$  y  $c$  los consideraba transversales en la cadena triangular exten-

---

<sup>185</sup> Como en la medida de los ángulos se habría cometido un cierto error  $\varepsilon$ , la suma valdría realmente  $180^\circ + Ex + \varepsilon$ . Supuesto que el error afectaría igual a cada ángulo, se podría obtener su valor corregido restándole al valor observado un tercio del error; en tal caso la suma de los tres ángulos si sería  $180^\circ + Ex$ .



Los cuatro protagonistas del arco ruso y escandinavo. De izquierda a derecha: Struve, Tenner, Selander y Hantseen.

cida sobre el meridiano, mientras que serían laterales todos aquellos, que como el  $a$ , fuesen opuestos a los ángulos intermedarios.

Después entró de lleno en el análisis de la forma de los triángulos: «el cálculo de  $b$  y  $c$  será tanto más exacto si  $B$  y  $C$  se aproximan a los  $90^\circ$ . Pero en tal caso el ángulo intermedio tendería a cero y el avance inducido por el triángulo dejaría de tener sentido. La igualdad de los tres ángulos reuniría las ventajas de una determinación precisa del nuevo punto y el rápido avance de la operación en la dirección pretendida». Para resolver el triángulo esférico aplicó el procedimiento de Legendre, de manera que suponiendo conocido el lado  $c$  y siendo el exceso  $Ex = A + B + C - 180^\circ$ , halló los ángulos reducidos  $A - Ex/3$ ,  $B - Ex/3$ ,  $C - Ex/3$  para aplicar sucesivamente el teorema del seno y calcular los elementos restantes del triángulo como si fuese plano. La novedad principal que se observa en los cálculos de Struve, con relación a los que se hubiesen realizado en nuestro tiempo, es el empleo de los logaritmos.

Eso explica que introdujera tres nuevas variables  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  para designar los cambios en la séptima cifra decimal de  $\log \sin A$ ,  $\log \sin B$  y  $\log \sin C$ ; correspondientes al cambio de un segundo en el ángulo respectivo. De modo que si  $\mathfrak{E} = (\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2)/3$  y  $\Omega$  fuese el cuadrado del error medio  $\omega$  del ángulo medido, expresado en segundos, se cumpliría que el cuadrado del error medio del  $\log (b/c) = \Omega (\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2)/3 = \Omega \mathfrak{E}$  y  $\log (a/c) = \Omega (\alpha^2 + \gamma^2 + (\alpha + \gamma)^2)/3$ . Al intervenir  $n$  triángulos de análoga exactitud, o que presentasen el mismo  $\Omega$ , y empleando corchetes para indicar la suma de cantidades sinónimas, se verificaría que el cuadrado medio del error medio del  $\log (b/c)$ , en esa serie de triángulos, sería  $\Omega [\mathfrak{E}]/n$ . Struve comparó después ese valor con el cuadrado  $\Omega \mathfrak{E}'$ , referido a un triángulo equilátero de exactitud similar. En él se tendría que  $\beta = \gamma = 12.156$  y  $\mathfrak{E}' = 295.54$ , obteniendo el llamado peso de continuación  $\rho$ , de los triángulos de la serie, mediante el cociente  $\rho = 295.54 n / [\mathfrak{E}]$ . En los cálculos posteriores de la triangulación, halló Struve el valor de  $\mathfrak{E}$  para cada triángulo, subrayando que en los 153 que enlazaban la isla de Hogland con el Danubio, resultó  $[\mathfrak{E}] = 73125$ , siendo su media  $478.0$  y  $\rho = 295.5 / 478.0$  el peso de continuación del total de esa serie.

En cuanto al tamaño de los triángulos, comentó la evidencia de que se lograría un progreso mucho más rápido, en la medida del arco, con grandes triángulos, si bien habría que saber compatibilizar esa supuesta ventaja con la dificultad real de observar con nitidez las señales colocadas a grandes distancias, empleando incluso «los heliotropos inventados por Gauss». Aún a

sabiendas de lo difícil que resultaba acotar las dimensiones de los lados, al final se pronunció con cierta claridad «consideramos en consecuencia que el triángulo equilátero con 15000 toesas de lado debería ser el normal, en tamaño y forma, para nuestras operaciones».

Las recomendaciones formuladas por Struve, en relación con la forma equilátera de los triángulos, no siempre pudieron ser atendidas. La causa fue la geomorfología de las zonas por donde discurría la triangulación, puesto que la elección de la forma de los triángulos estaba poderosamente influenciada por la misma: no era lo mismo proyectar una red triangular en una zona boscosa que en una despejada, tampoco resultarían comparables los triángulos diseñados en regiones abruptas que en otras más onduladas o llanas. Él mismo reconocía el sesgo impuesto por la altitud sobre la magnitud de los triángulos, y la gran variedad que ofrecía a ese respecto el territorio ruso; destacando la región del Cáucaso por las vistas tan extensas que se observaban desde sus mayores cumbres. Struve alabó el valor que tuvo el general Chodzko, el cual sería responsable de la geodesia en aquellos territorios, al situar un vértice en la propia cima del mítico monte Ararat<sup>186</sup>, con una altitud de 5.165 m. Allí estableció su campamento y permaneció en él cinco días totalmente despejados, con lo que se pudieron efectuar todas las observaciones astronómicas y geodésicas previstas.

El relato de Struve continuó ensalzando la importancia de la empresa, al apuntar que se trataba a su juicio de la estación de observación de mayor altitud usada hasta entonces y haciendo énfasis en las grandes dificultades que se hubieron de superar. Comparó para ello las medidas efectuadas sobre las planicies de los Andes, a gran altitud y sobre el ecuador, con las que se realizaron en Ararat a 39°42' de latitud y en una cima que «sobresalía bruscamente de la llanura de



Dos imágenes con el Monte Ararat. En la de la izquierda se ofrece un grabado del año 1820 en el que figuran las dos cumbres (grande y pequeño Ararat), el cual se incluyó en la obra de Sir Robert Ker Porter: *Travels in Georgia, Persia, Armenia, ancient Babylonia...* (1822). En la de la derecha aparece la erupción del volcán que tuvo lugar el 2 de julio del año 2013. El topónimo Ararat tiene fuertes connotaciones bíblicas, pues existe la creencia de que en el libro del Génesis se dice que fue allí donde se posó el arca de Noé después del diluvio universal (Génesis 8:4: «que el decimoséptimo día del séptimo mes, el arca se detuvo sobre las montañas de Ararat»).

---

<sup>186</sup> Struve fijó su altitud en 2678 toesas.

Araxes, elevándose más de 2200 toesas por encima de las aguas del río, en un tramo de tan sólo 26 verstas. Uno de los vértices observados desde el de Ararat fue el del monte Godarebi<sup>187</sup>, distante de él 103840 toesas, estableciéndose así «la mayor línea geodésica directamente observada hasta el presente». Struve confirmaba su comparación con el ejemplo siguiente<sup>188</sup>:

*Las grandes líneas geodésicas citadas por Struve*

Denominación	Toesas	Lugar
Ararat ↔ Godarebi	103840	Cáucaso
Camp Vell ↔ Desierto	82555	Arco de Francia <sup>189</sup>
Brocken ↔ Inselberg	54374	Hannover
Halljall ↔ Mäki-Päällys	41934	Golfo de Finlandia

En cambio las estepas de la parte oriental de la Rusia europea y meridional presentaban un aspecto sustancialmente distinto al de las provincias caucásicas: «planas, casi como la superficie del mar y completamente desprovistas de árboles, monte bajo incluido». Sin embargo ofrecían la singularidad de pequeños túmulos, llamados kurganes, con una altura comprendida entre las dos y las cinco toesas. Gran parte de ellos fueron útiles como vértices de la triangulación, obteniendo visuales que se encontraban unos cuantos metros por encima del terreno circundante; aunque sólo se pudiesen conseguir así triángulos con dimensiones reducidas, ya que se surgió el serio inconveniente de la falta de madera y la imposibilidad de construir señales que permitiesen aumentar la altitud de la estación y por ende el tamaño de los lados.

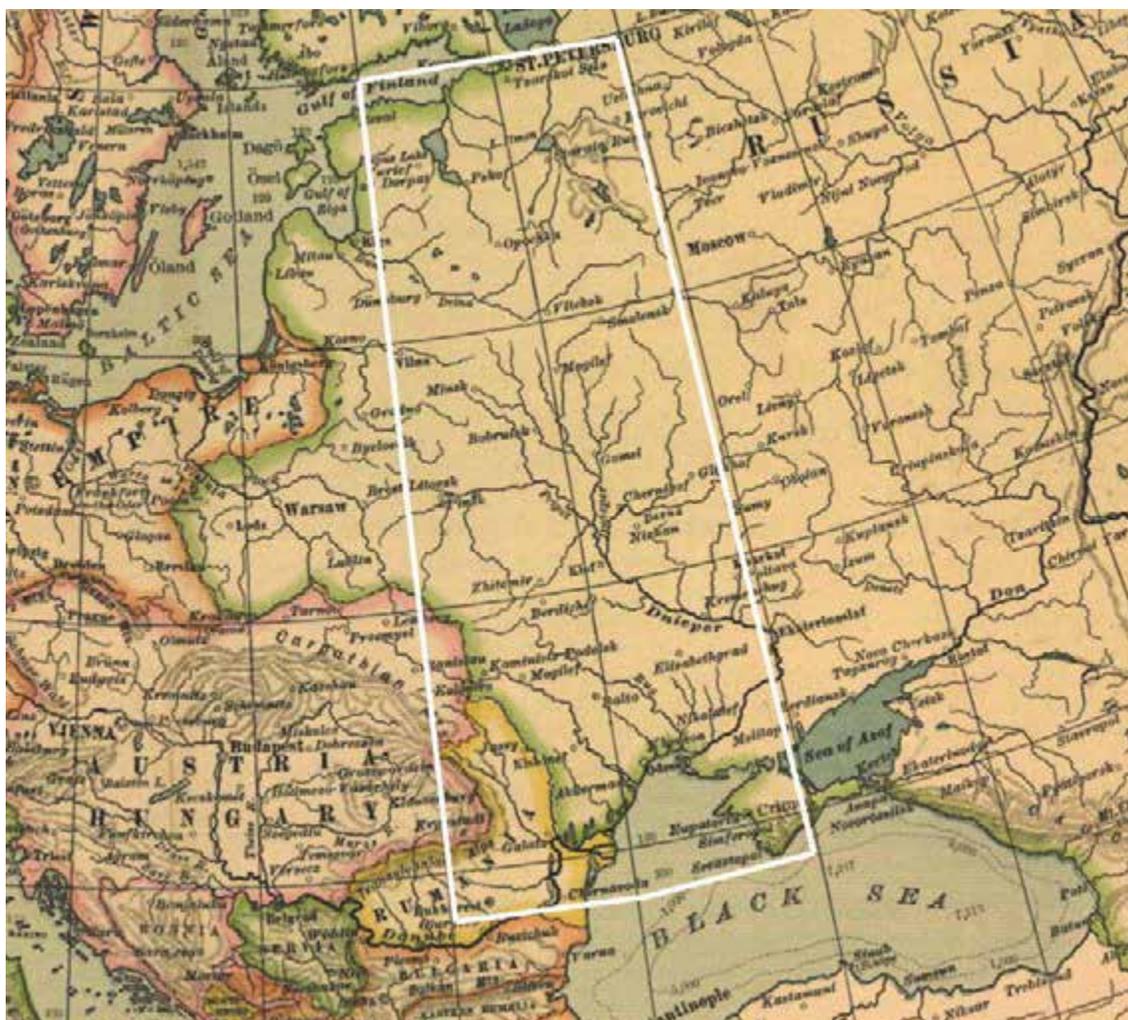
Otros territorios por los que debería discurrir el arco de meridiano presentaban unas características bien diferentes, se refería Struve a la inmensa extensión comprendida entre el golfo de Finlandia y el río Danubio, a lo largo de 1.600 km. En todos ellos resultó sumamente difícil proyectar la triangulación, pues no se contaba con cadenas montañosas ni con elevaciones aisladas en las que ubicar los vértices geodésicos. A partir del golfo iba aumentando poco a poco la altitud, a través de ondulaciones más o menos relevantes, debiendo de recorrer casi 1.100 km para alcanzar las 200 toesas, cerca de Kremenetz (Volinia) y a una latitud de 50°6'; desde allí hasta cerca de Kischenew<sup>190</sup> (Besarabia), a una latitud de 47°1' se mantenía prácticamente la misma altitud. Desde allí se iniciaba el descenso hacia el Danubio, presentando el terreno continuas ondulaciones. Struve concretó la altitud media de todos los vértices en ese segmento meridional del arco, alrededor de 107.3 toesas, siendo la mayor de 208, en las proximidades de Kremenetz y la menor de 8, ya muy cerca de la ciudad de Izmail. Sin embargo, no fue la altitud el factor único

<sup>187</sup> Desde él divisó Chodzko el Ararat al Sur, así como Elbrus y Kasbek al Norte. Para recalcar más la amplitud de su horizonte sensible, añadió Struve que la distancia entre Ararat y Elbrus era de 3° 12' en línea recta.

<sup>188</sup> El ejemplo de Struve dejó de ser válido en el año 1879, cuando se culminó el enlace geodésico y astronómico entre Europa y África. Los lados mayores del cuadrilátero de enlace y las dos diagonales del mismo alcanzaron valores nunca vistos. Mulhacén ↔ Filhaoussen 269927.2m, Tetica ↔ M'Sabiha 225713.6 m, Mulhacén ↔ M'Sabiha 269847.8 m y Tetica ↔ Filhaoussen 257413.0 m.

<sup>189</sup> Aunque Struve lo ubicase ese lado en el Arco de Francia, realmente formó parte de su prolongación hasta las costas levantinas. El vértice Camp Vell se encuentra en la isla de Ibiza y el del Desierto en la provincia de Castellón. Las dificultades de esa visual sobre el Mediterráneo hicieron que tardase varios meses en poder ser observada.

<sup>190</sup> Es la actual Chisináu, la mayor ciudad y capital de Moldavia.



Región en la que se proyectó la triangulación del gran arco ruso: desde el golfo de Finlandia al delta del Danubio (*The Century Atlas EUROPE. The Century Company. 1897.*)

a tener en cuenta, pues la vegetación tan diferente que se daba en aquellos lugares también significó otro serio inconveniente. Desde el río Duna al Dniéster, en una extensión latitudinal cercana a los 8°, predominaba un terreno plano y pantanoso, pero cubierto de grandes masas boscosas, a menudo impracticables. Fue en ella donde desplegó Tenner su reconocido ingenio, construyendo grandes torres de observación que se elevaban por encima de las más altas copas, haciendo así viable gran parte del proyecto. Algunas de ellas situaban la plataforma de observación a más de 40 m sobre el suelo, con el consiguiente riesgo y esfuerzo de los operadores, pero con la ventaja de conseguir formar triángulos sensiblemente equiláteros.

Realizados los comentarios generales anteriores, procedía detallar los pormenores del proyecto de la triangulación asociada al gran arco ruso, insistiendo naturalmente en la forma y dimensiones de sus triángulos. Así lo hizo Struve, dividiendo su estudio en cuatro apartados:

- a) Provincias bálticas.
- b) Lituania.

- c) Volinia y Podolia.
- d) Besarabia.

Tal división territorial fue debida a su correspondencia con los cuatro segmentos de que se componía todo el arco, desde el golfo de Finlandia hasta el río Danubio. El cuadro siguiente especifica los años en que se fueron ejecutando las medidas y las latitudes extremas de cada tramo:

*Cronología del gran arco ruso*

Segmento	Responsable	Periodo	Latitudes
Arco Báltico	Struve	1821-1827	60°4'29" a 56°30'5"
Arco de Lituania	Tenner	1816-1832	56°30'5" a 52° 2'42"
Arco de Volinia	Tenner	1836-1840	52° 2'42" a 48°45'3"
Arco de Besarabia	Tenner	1844-1849	48°45'3" a 45° 20'3"

Struve aclaraba que durante los años de inactividad aparente (1832-1836, 1840-1844 y después de 1849) se habían ejecutado trabajos geodésicos en las provincias próximas al meridiano y en Polonia. Digno de mención fue su homenaje a Tenner: «un ejemplo, quizás único, de dedicación a la geodesia durante cuarenta años consecutivos, proyectando y realizando todos los trabajos».

El territorio por el que debería discurrir la triangulación, por Estonia y Letonia, presentaba mucho bosque, pero también elevaciones naturales frecuentemente libres de vegetación y susceptibles de localizar sobre ellas vértices geodésicos. Desde la isla de Hogland hasta Jacobstadt proyectó Struve 28 triángulos, identificando sus 30 vértices del modo siguiente: 24 fueron materializados mediante señales construidas ex profeso, 4 se localizaron en campanarios de iglesias y 2 en las torres de sendos castillos. En los vértices provistos de señales se estacionó el instrumento directamente sobre el suelo, excepción hecha de Raëküll, en donde, según confesaba Struve, se tuvo que colocar el teodolito «sobre un trípode colosal de 20 pies de alto, provisto de una sólida estructura y rodeado de una galería totalmente aislada del anterior». Por lo que se refiere a los edificios, cinco si ofrecieron buenos estacionamientos, salvo el campanario de la iglesia de Oppekaln, que sólo pudo ser usado como punto de mira, en donde hubo que hacer la observación desde una estación excéntrica próxima a la torre.

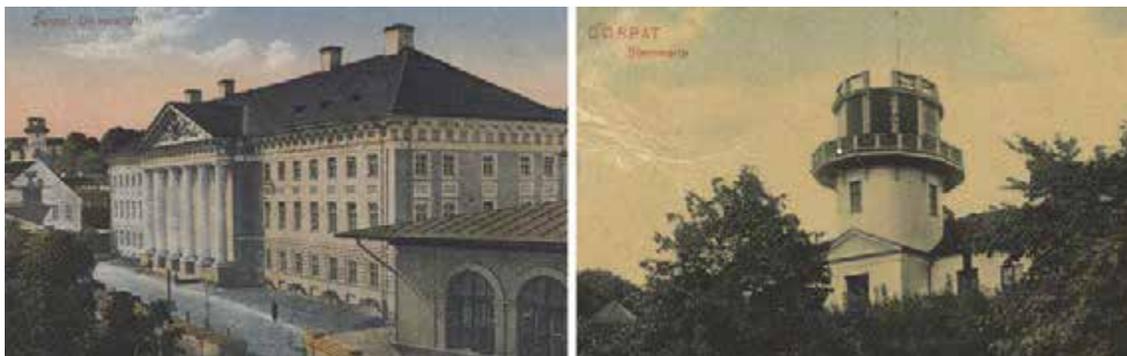


El curso del río Embach (Emajõgi) entre los lagos Wertz-jerw (Võrtjärv), a la izquierda, y Peipus (Peipsi) a la derecha. En el centro se observa la ciudad de Dorpat (Tartu). Imagen de satélite proporcionada por la NASA.

En el litoral estonio del golfo de Finlandia abundaba la roca calcárea, que pronto alcanzaba una altitud de 30 a 35 toesas. Después va ascendiendo paulatinamente en dirección meridional, formando una especie de terraza sobre la que se asientan colinas con alturas que llegaban, en ocasiones, a las 20 toesas. La mayor altitud de Estonia, según Struve, era la de Sall (86 toesas), a medio camino entre el golfo y Dorpat<sup>191</sup>. Dicha ciudad se situaba en los valles que rodean los dos lagos de Peipus y Wert-erw, unidos por el río Embach, que tenía en ella una altitud de 17 toesas. Al sur de Dorpat, de nuevo asciende el terreno a una segunda terraza, cuya cumbre Lenard alcanzaba las 110 toesas de altitud. Desde ella comienza la bajada hacia el valle que recorre el río Aa, siendo su altitud media próxima a las 32 toesas. Ramkau, con 121 toesas, era una elevación destacable del lado opuesto. Se iniciaba entonces una llanura que continuaba hasta la bajada meridional que llevaba al río Duna. Sobre esa planicie sobresalía Gaissa-Kalns como punto dominante, estimándose su altitud en 161 toesas. Dicho río discurre con una altitud media de 40 toesas cerca de Jacobstadt, superándola la de la ciudad en sólo 3 toesas. Struve comentó igualmente como las llanuras que bordeaban los valles de los dos ríos anteriores habían permitido la prolongación de la triangulación, situando vértices en los puntos más elevados de aquella región. La altitud media de tales vértices fue de 801 toesas: la de Oberpahlen fue la menor (31 toesas) y la de Gaissa-Kalns la mayor (161 toesas).

Faltaba la referencia al tamaño y forma de los triángulos. El lado menor de 5398 toesas fue el formado por los vértices Ebbafer y Raëkül, y el mayor, de 41934 toesas, por el par Halljall y Mäki-Päällys. La geomorfología propia de la zona al Norte de Sall, hizo que los triángulos pequeños fuesen los predominantes, al contrario de lo que ocurrió con los más meridionales, cuyos tamaños fueron más acordes con las directrices del proyecto. Sumando los 57 lados de los 28 triángulos bálticos, se obtuvo una longitud media de 15318 toesas, cerca de 30 km. Con ellos se avanzó en el sentido del meridiano alrededor de  $3^{\circ}35'$ , de modo que el progreso medio de cada triángulo se estimó en 7315 toesas. Struve calculó además el valor de la suma  $[\mathcal{G}]$  para valorar así la forma de todos esos triángulos, llegando a que  $[\mathcal{G}] = 20665$ , con una media de  $\mathcal{G} = 738.0$  y un peso de continuación medio dado por la expresión  $\rho = 295.5/738.0 \approx 0.400$ .

La característica que mejor define al territorio por el que se proyectó la cadena triangular lituana fue la presencia de bosques. La altitud variaba desde las 40 toesas del río Duna a las 60 ó 90 que tenían los vértices situados entre él y la base de Ponedeli. Más allá se incrementaba toda-



Universidad y Observatorio Astronómico de Dorpat, a finales del siglo XIX.

<sup>191</sup> La altitud del observatorio de Dorpat, dada por Struve, fue de 35 toesas.

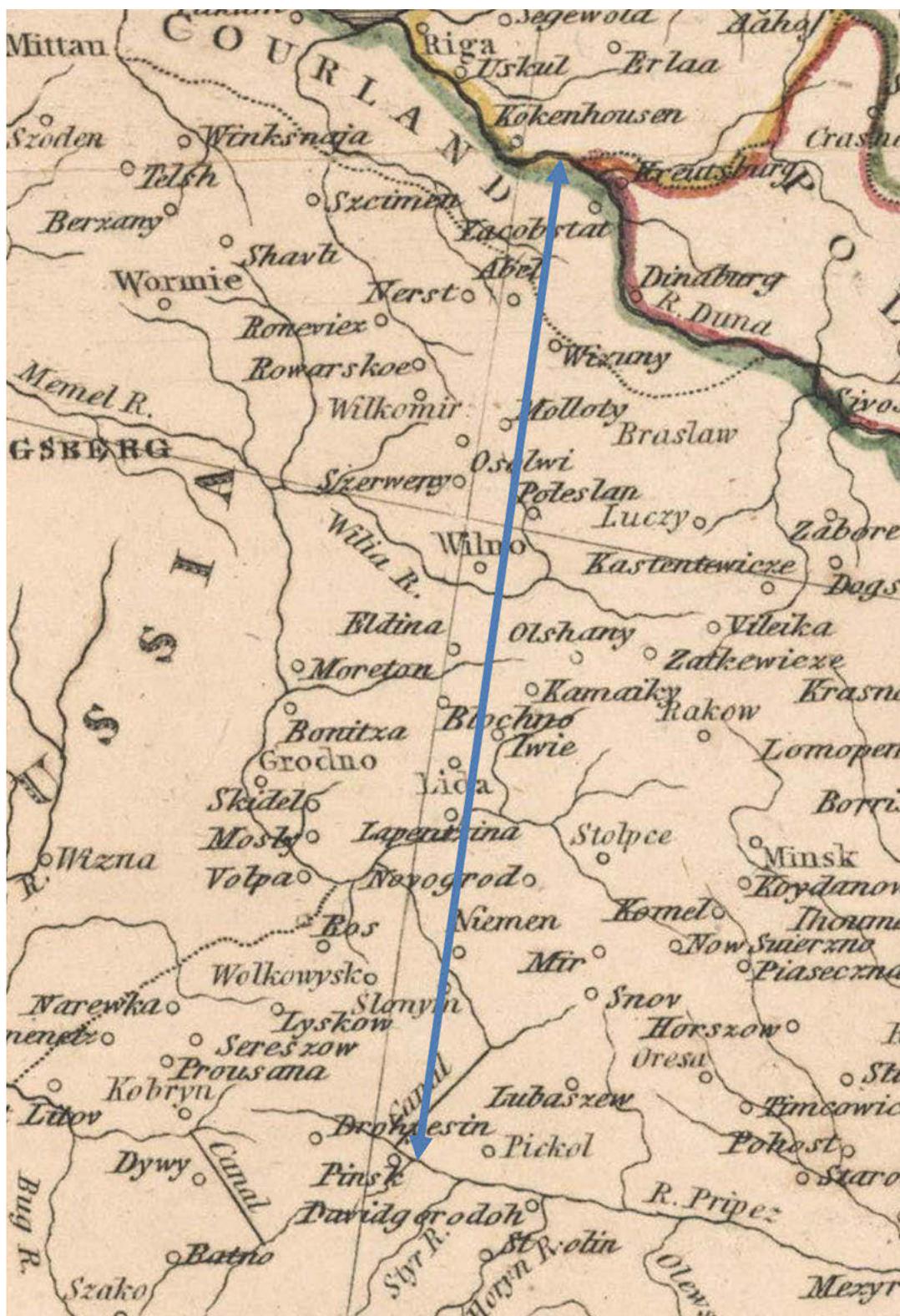
vía más la altitud hasta llegar al máximo de 166 toesas que tenía el vértice de Putzewitschi. Después se produce el consiguiente descenso, pero manteniéndose una altitud constante, de 80 toesas, para los diez últimos vértices. La zona en que se encontraban estos, el distrito de Pinsk, se distinguía por sus numerosos pantanos, en medio de los cuales se localizaba la población de Belin, con una altitud de 76 toesas, sobre una llanura tan horizontal que no aparecía una sola colina en 75 km a la redonda. La triangulación en este segmento constó de 49 vértices, fiel reflejo de la naturaleza del terreno, a la vista de las numerosas plataformas que construyó Tenner para poder efectuar las observaciones angulares: sólo fue posible estacionar sobre el suelo en 9 de ellos. Las alturas de las torres fueron variables: 10 entre 5 y 10 toesas, 19 entre 10 y 15 toesas y 11 entre 15 y 20 toesas. Las últimas señales, con más de 15 toesas, se localizaron al Sur de la región, próximas a Belin. La altura media de las mismas fue de 12.8 toesas, la más pequeña se elevó sólo 5.9 toesas y la que más 19. La altitud media de la zona reseñada por Struve fue de 99 toesas, casi 19 más que la del arco báltico. Jakschti, el extremo meridional de la base ampliada de Ponedeli, presentó la altitud mínima, 48 toesas. Los 98 lados de los 49 triángulos, desde Bristen-Arbidäni hasta Belin-Schläpan, tuvieron una longitud media de 13583 toesas, alrededor de 26.5 km. El avance producido en sentido latitudinal fue de  $4^{\circ}37'$ , lo que equivalió a un progreso lineal medio, para cada triángulo, de 5380 toesas. Las claves de la forma de los triángulos proporcionadas por Struve fueron:  $[\text{C}] = 20772$ , con un promedio de  $\text{C} = 423.9$  y un peso medio dado por la relación  $\rho = 295.5/423.9 \approx 0.697$ .

El tercer tramo del arco ruso se extendía desde el río Pripiat al Dniéster, entre los paralelos  $51^{\circ}53'$  y  $48^{\circ}28'$ , con un desarrollo próximo a los 380 km. Las zonas pantanosas anteriores continuaban al Sur de Belin, esto es al Norte de Volinia, aunque pronto cambiaría la configuración del terreno. Ciertamente, desaparecidos en gran parte los pantanos aumentó la solidez del suelo, cuyo nivel iba ascendiendo para alcanzar, cerca de Kremenetz, una altitud mayor de 200 toesas. Más adelante, el nivel medio de los 20 vértices meridionales de esa región coincidió, en la práctica, con la del Dniéster. Struve señalaba que todos los puntos dominantes de la región estaban cubiertos de bosques, con lo que no pudieron medirse los ángulos a ras de suelo. Fue en esta parte de la triangulación en donde tuvo que vencer Tenner las mayores dificultades.

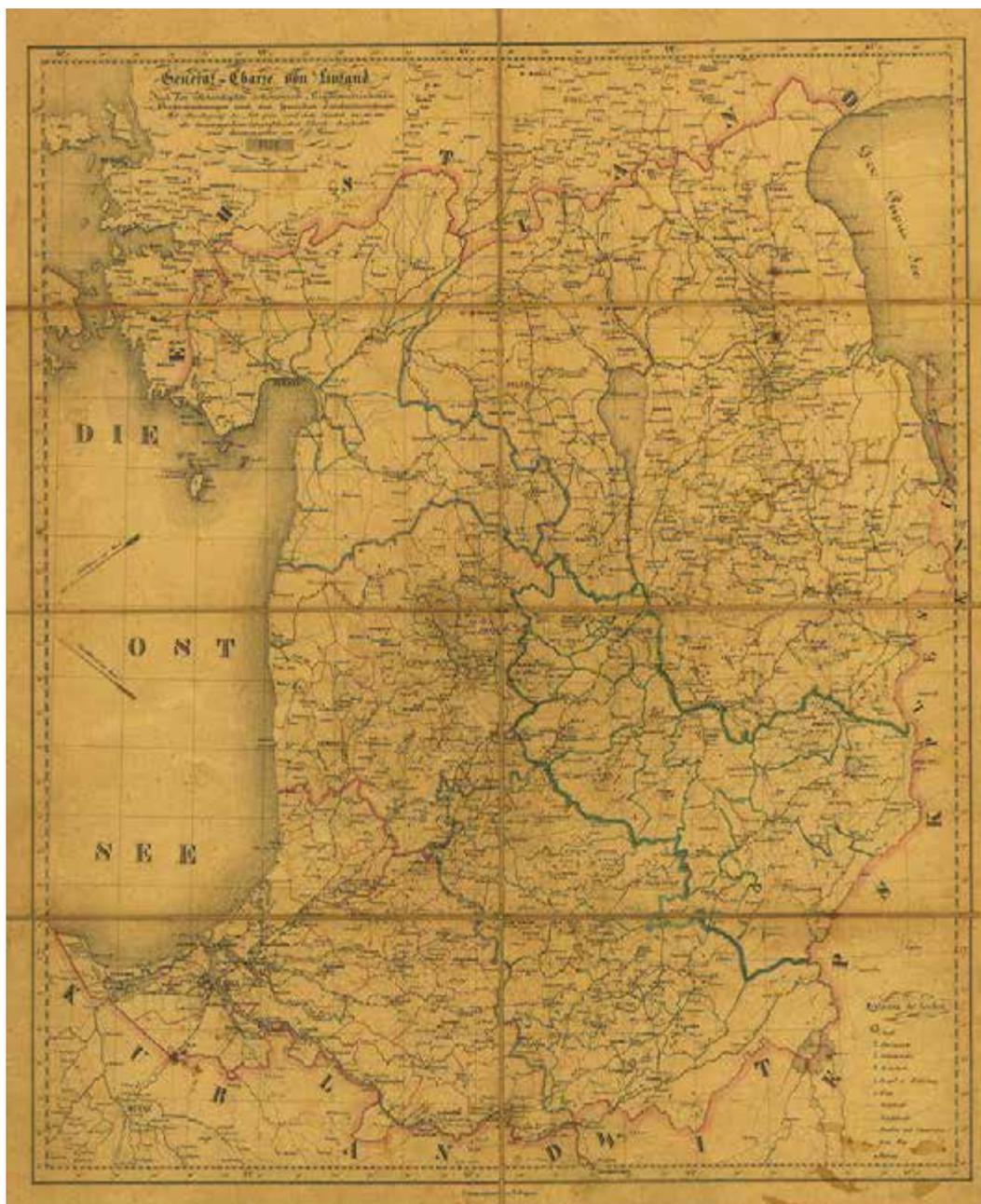
De los 34 vértices, sólo hubo uno, Turowka, en el que no se tuvieron que levantar torres más altas que las de Lituania: 6 de 10 a 15 toesas, 22 de 15 a 20 toesas y 5 de 20 a 23 toesas; la altura media de las 33 torres fue de 16.1 toesas, 3.3 toesas más que en el segmento previo. La altitud media de los vértices en estas provincias de Volinia y Podolia fue de 145.6 toesas, 46.6 mayor que su homóloga en Lituania y casi el doble de la que tenían los de las provincias bálticas. El vértice más bajo fue el de Bolschaja-Gluscha, con una altitud de 80 toesas, siendo el de Kremenetz el más elevado, con 208 toesas. Los 33 triángulos, limitados por los lados Belin-Schläpan y Ssuprun-kowzi-Sagorjane, tenían uno medio de 13975 toesas, 27 km aproximadamente. El progreso latitudinal medio para cada triángulo fue de 5423 toesas. La forma de los triángulos la juzgó Struve por la suma  $[\text{C}] = 12728$ , con un valor medio para  $\text{C}$  de 385.7 y para  $\rho$  de 0.766.

El segmento más meridional del arco ruso enlazó el río Dniester y el Danubio, a través de una cadena con una amplitud latitudinal mayor de  $3^{\circ}$ . El primero de ellos era la frontera natural entre Podolia y Besarabia<sup>192</sup>, estando los dos territorios a una altitud muy superior a la del río.

<sup>192</sup> Besarabia era la parte más meridional del Principado medieval de Moldavia, aunque en la actualidad coincide prácticamente con el territorio que ocupa la República de Moldavia.

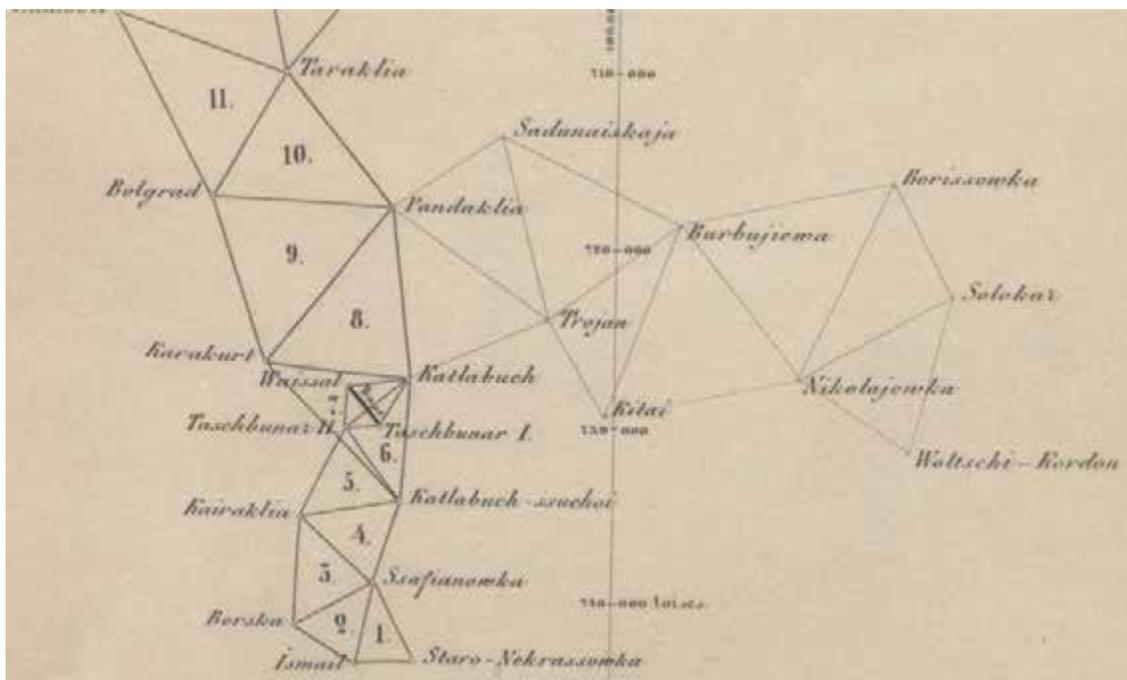


Segmento del arco de meridiano en Lituania, comprendido entre los ríos Duna y Pripiat. La base cartográfica es un mapa de Robert Kirkwood a escala 1/9.850.000. *Rusia en Europa* (1817).



Mapa de Lituania, a escala de 1:189000, dibujado por el topógrafo Carl Gottlieb Rücker en el año 1839. No obstante, Struve había finalizado los trabajos de campo correspondientes, con la ayuda de estudiantes en las vacaciones de verano, en el periodo comprendido entre 1816 y 1819.

No obstante su valor medio, para los 18 vértices más septentrionales de la segunda, fue sólo de 151 toesas, 24 toesas menos que la que presentaban los vértices meridionales del segmento anterior, hasta alcanzar casi la capital Kischenew. Pero la diferencia esencial entre Podolia y esa zona de Besarabia, fue la falta de bosques que se observaba al abandonar el río para dirigirse hacia el Sur. Otra de las ventajas que ofrecía era la de un relieve ondulado, y descendente a partir de dicha ciudad, que llegaba al delta del Danubio.



Los últimos triángulos de Besarabia, con la ampliación de la base (método rómbico) Waissal-Taschbunar I.

Tales características facilitaron la ejecución del proyecto de la triangulación, pues aunque se elevaron 13 plataformas, 9 se usaron sólo como punto de mira y el instrumento se estacionó por encima del suelo nada más que en cuatro ocasiones: tres a 5 toesas y una, en Ziganeschti, a 10 toesas. En otros 37 vértices se colocó el teodolito en el suelo, si bien en una de ellas se situó la estación en la galería del campanario de la iglesia de Izmail, a una altitud de 8 toesas. La altitud media de los vértices, sobre el nivel del mar Negro, fue de 107 toesas. Los de mayor altitud fueron Boksano (165 toesas) y Wodeni (166 toesas). Los lados de los 43 triángulos<sup>193</sup>, de esta parte de la cadena geodésica, tuvieron una longitud media de 11967 toesas  $\approx$  23.3 km, con un avance medio de 4505 toesas por triángulo. La forma de los mismos se valoró en función de la suma  $[\Theta] = 18960$ , por  $\Theta = 441.0$  y por  $\rho \approx 0.670$ .

Resumiendo los resultados de los cuatro apartados anteriores se pueden colegir interesantes conclusiones. La amplitud latitudinal del gran arco ruso fue de  $14^{\circ}44'26''$ , con un desarrollo de 841657 toesas, o lo que es lo mismo 1640.4 km. A todo lo largo del mismo se proyectaron un total de 153 triángulos de continuación<sup>194</sup>, de los que 125 fueron responsabilidad de Tenner y 28 de Struve. La longitud media de los lados, para toda la serie, fue de 13531 toesas ( $\approx$ 26.4 km), 1469 toesas menos que las 15000 previstas para el triángulo estándar. El avance medio, por triángulo, en la dirección del meridiano fue de 5501 toesas.

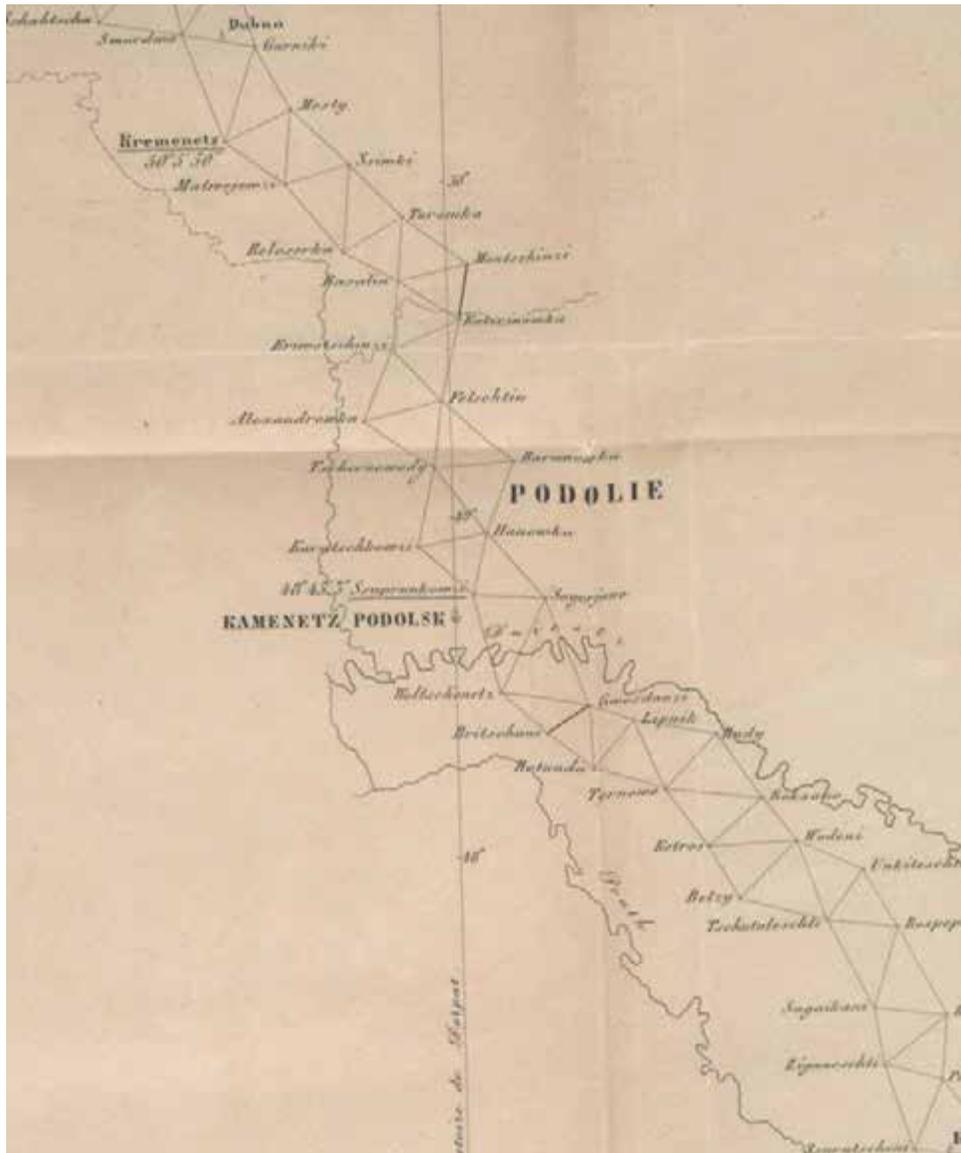
El tamaño de los triángulos fue análogo en los cuatro segmentos citados. Los del Báltico fueron en realidad los mayores, con un lado medio de 15318 toesas, 318 más del considerado

<sup>193</sup> Struve justificaba el tamaño tan pequeño de los últimos triángulos, entre la base de Taschbunar y el Danubio, por la propia ubicación de la base y la proximidad del extremo del arco que se pretendía medir.

<sup>194</sup> No se incluyeron ahí los triángulos con los que se ampliaron las bases ni los dos auxiliares que enlazaron la cadena geodésica con las estaciones astronómicas de Dorpat y Jacobstadt.

normal. En ese segmento se encontraba además el lado mayor, no sólo del arco ruso sino del arco total, formado por los vértices Halljall y Mäki-Päällys, con 41934 toesas ( $\approx 81.7$  km). Le seguían los de los segmentos de Volinia, Lituania y los de Besarabia. En este último el valor medio del lado fue de 11967 toesas, aunque contase también con el menor lado de todos los proyectados: Izmail-Staro-Nekrassowka, con 3371 toesas.

Los triángulos de la provincia de Volinia fueron los de mayor altitud sobre el nivel del mar, siendo el vértice Kremenetz, con 208 toesas, el más elevado entre el mar Báltico y el mar Negro, de la traza marcada por la cadena triangular. El mayor avance con un solo triángulo, en la dirección del meridiano, tuvo lugar en el segmento de las provincias bálticas, con un valor de 7315 toesas; el mínimo, por el contrario, se produjo en Besarabia, con sólo 4505 toesas.



Regularidad de los triángulos en la provincia de Podolia y en el Norte de Besarabia.

Teniendo en cuenta los llamados ángulos de continuación, comprobó Struve que los triángulos mejor formados fueron los de Volinia y Podolia, con un peso de  $\rho = 0.766$ . El segundo y el último tramo de este arco ruso tuvieron casi el mismo peso, 0.697 y 0.670 respectivamente. El menor peso lo presentaron los triángulos de las provincias bálticas,  $\rho = 0.400$ . No obstante si no hubiera intervenido en el cálculo el triángulo más septentrional, con su tercer vértice en la isla de Hogland, el valor de  $\rho$  habría aumentado un tanto,  $\rho = 0.459$ . Ese triángulo, con un ángulo demasiado agudo,  $16^\circ 20'$ , fue inevitable, por ser el único medio disponible para salvar la dificultad del golfo de Finlandia.

Debe destacarse por lo tanto la forma de los triángulos bálticos, máxime cuando el territorio sobre el que se proyectaron presentaba obstáculos permanentes y difíciles de superar. Un hecho paradójico que aclaró Struve de inmediato: en los otros tres segmentos la forma de los triángulos estuvo supeditada, en gran parte, a la geomorfología del terreno. En cambio tanto en Volinia como en Podolia, siendo la altitud mayor, apenas influyó al realizar el proyecto de la triangulación, pues resultaba insuperable la dificultad impuesta por las manchas boscosas tan extendidas. Tenner se vio así obligado al uso de grandes torres, cuya plataforma para estacionar el instrumento quedaba por encima de las copas de los árboles. Comentaba Struve que «una vez decidido ese medio heroico, eligió el terreno independientemente de su configuración, atendiendo exclusivamente a la forma geométrica más conveniente». Con semejante proceder, los triángulos entre Belin y Ssuprunkowzi forman una red con una regularidad sorprendente, que se mantuvo hasta adentrarse en la zona septentrional de Besarabia.

Concluidas esas reflexiones, Struve efectuó un estudio singular sobre la forma y dimensiones de los triángulos, añadiendo otra característica aún menos conocida: la forma y magnitud de sus avances en la dirección del meridiano; para ello introdujo tres nuevos pesos: geométrico, trigonométrico y general. Si los 153 triángulos, considerados hasta ahora, hubiesen sido equiláteros, con lados de 15000 toesas y dispuestos de manera que sus lados laterales, en los flancos de la cadena, formasen dos líneas rectas situadas en el meridiano, se habría logrado un avance en esa dirección mucho mayor que el realmente conseguido. El progreso medio, producido con un triángulo, habría sido de 7500 toesas, en lugar del progreso medio efectivo  $F = 5501$  toesas. Como para los triángulos equiláteros  $\rho = 1$ , se podría definir el peso geométrico medio de un triángulo, de cualquier sector, por la expresión  $\sigma = F\rho/7500$ . Determinándolo para el gran arco ruso resultarían los valores reflejados en la tabla adjunta:

*Pesos y formas de los triángulos en el gran arco ruso*

Clase	Arco total	P. bálticas	Lituania	Volinia	Besarabia
$\rho$	0.618	0.400	0.697	0.766	0.670
$F$	5501 toesas	7315 toesas	5380 toesas	5423 toesas	4505 toesas
$\sigma$	0.453	0.390	0.500	0.554	0.402

Del simple examen de su contenido se deduce que la triangulación de Volinia fue la mejor de las cuatro, desde el punto de vista geométrico, situándose a continuación Lituania, Besarabia y el arco del Báltico. Sin embargo la comparación debe hacerse extensiva también a otras cuestiones, para poder apreciar mejor el mérito de las otras series de triángulos. La exactitud en la medida de los ángulos, todavía no ha sido mencionada, cuando su toma en consideración es

fundamental para calificar el éxito final de la operación geodésica y no es igual en las cuatro series<sup>195</sup>; he aquí la tabla que incluyó Struve, a ese respecto:

*Peso medio trigonométrico o peso de la medida de los ángulos*

P. bálticas	Lituania	Volinia	Besarabia
$\tau = 3.040$	0.749	0.632	0.938
La unidad del peso se refiere aquí a un ángulo cuyo error medio es de 1".			

Relacionando después los pesos geométricos  $\sigma$  con los trigonométricos  $\tau$ , se obtendrían los pesos generales  $p = \sigma \tau$ , para los triángulos de los cuatro segmentos en que se dividió el arco ruso; contemplándose así la forma de los triángulos, el avance meridional conseguido y la exactitud estimada en la medida de los ángulos:

*Pesos generales de los triángulos*

P. bálticas	Lituania	Volinia	Besarabia
$P_1 = 1.186$	$P_2 = 0.374$	$P_3 = 0.350$	$P_4 = 0.378$
La unidad de peso se refiere ahora a un triángulo equilátero con 15000 toesas de lado, estando sujetas las medidas angulares a un error medio de 1".			

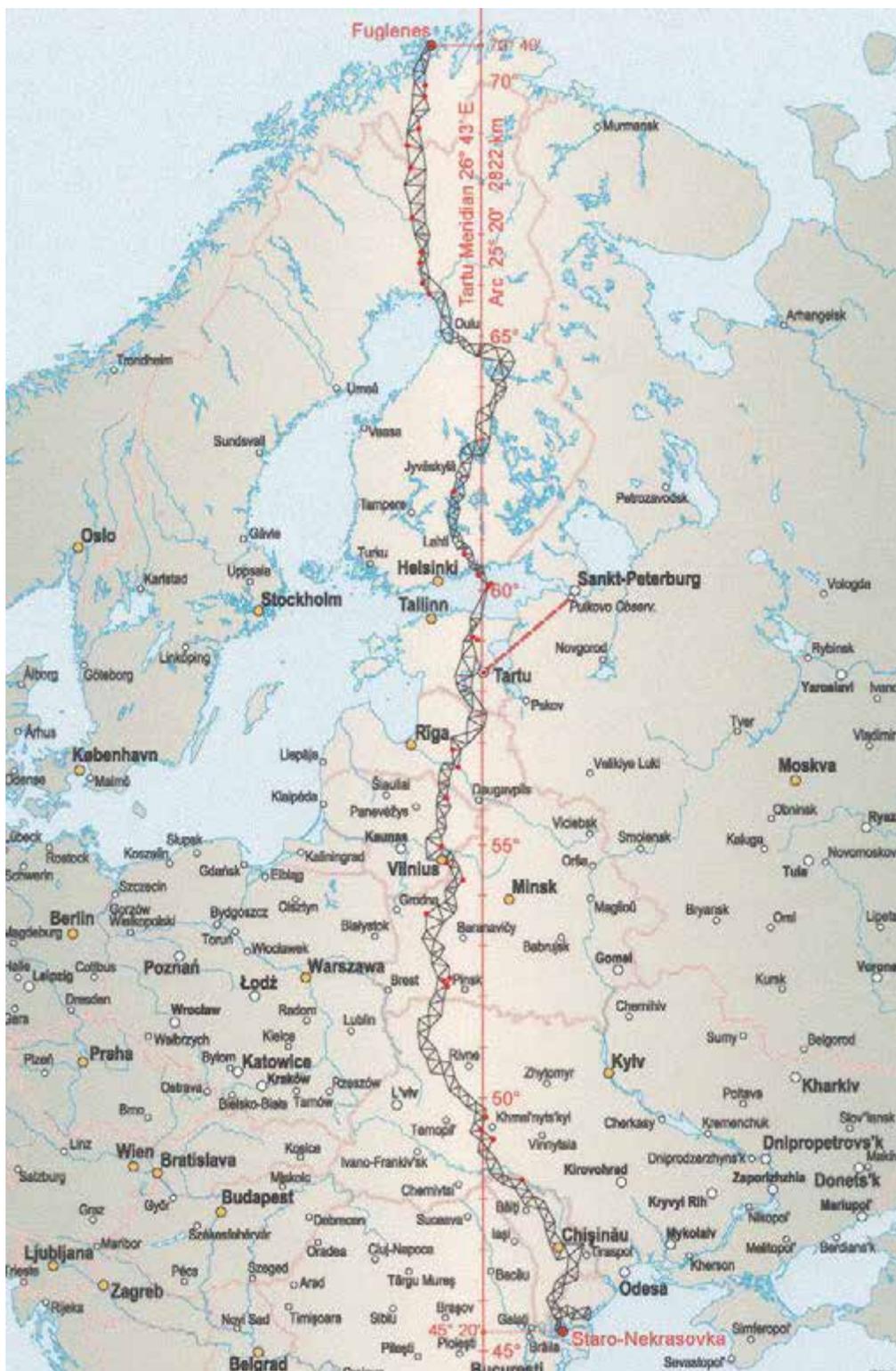
De nuevo se hace evidente la superioridad de los triángulos bálticos sobre el resto, pues siendo la media de  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ , 0.367, el cociente  $1.186/0.367 = 3.23$ , asignaría a ellos un peso general triple del adjudicado a los otros triángulos, o bien una precisión 1.8 veces mayor al determinar la distancia entre los paralelos extremos. Esa superioridad<sup>196</sup> era pues una consecuencia necesaria, en palabras de Struve, «de la preferencia del instrumento y del método de observación que he podido emplear, además de contar con la ventaja inapreciable de un suelo tan consistente como el de las provincias bálticas, en donde la estabilidad del instrumento estaba asegurada».

Struve comenzó el primer capítulo del segundo tomo, de su Memoria, recordando que el arco ruso fue prolongado por el escandinavo hasta llegar prácticamente a Cabo Norte, aunque al final se optó por situar el último vértice de la triangulación en la villa de Hammerfest, la más septentrional de la Tierra. La prolongación del arco estuvo definida por las estaciones localizadas en la isla de Hogland ( $\varphi = 60^{\circ}4'29''$ ) y en la de Kval-øe<sup>197</sup> ( $\varphi = 70^{\circ}40'11''$ ), en el mar Glacial, de manera que su amplitud fue de  $10^{\circ}35'42''$  y su desarrollo próximo a los 1186 km, unos 457 km

<sup>195</sup> A ella se referiría Struve en el capítulo X de su Memoria, aunque seleccionase para este momento los pesos relativos de la medida de los ángulos, a los que denominó trigonométricos. Nosotros trataremos de esa cuestión en el capítulo noveno, dedicado al cálculo y a la compensación de los triángulos.

<sup>196</sup> Para dejar a salvo el honor de Tenner añadía que aunque hubiese efectuado un proyecto irreprochable y conformado los mejores triángulos, no pudo contar con las inapreciables ventajas proporcionadas por los instrumentos más modernos, ni con los novedosos procedimientos de observación; no obstante había alcanzado casi la exactitud deseada.

<sup>197</sup> Su denominación actual es isla de Kvaløya.



Cadena geodésica extendida a lo largo del meridiano ruso-escandinavo. En el centro se observa el enlace entre los dos Observatorios (Dorpat y Púlkovo) que tan importante papel jugaron en su observación y cálculo.

menos que el gran arco ruso. Los comentarios siguientes fueron generalistas, procurando situar al lector ante la nueva aventura geodésica protagonizada por los geodestas suecos, finlandeses y noruegos. Un escenario novedoso, aunque pudiera resultar ya un tanto conocido por haber sido referido ocasionalmente en los capítulos anteriores.

Ya es sabido, por ejemplo, que ambos arcos se unían en el vértice Mäki-Päällys, aunque en un principio tuviesen únicamente ese punto en común. Hubo que esperar a que el almirante, de origen alemán, Ferdinand Friedrich Georg Ludwig von Wrangel realizase el levantamiento trigonométrico del golfo de Finlandia para que el enlace geodésico fuera efectivo, a través de triángulos que atravesándolo concurrían en un mismo centro, sito en la isla de Hogalnd. Struve lamentaba que el enlace entre las dos cadenas hubiese tenido que hacerse usando tantos triángulos, algunos con formas poco adecuadas, y en los que las medidas angulares presentaban numerosos inconvenientes ocasionados por la poca altitud de los vértices localizados en islotes<sup>198</sup>. Tres fueron las regiones por las que tendría que discurrir la triangulación de ese arco tan septentrional: Finlandia, Laponia y el Finmarken noruego.

Los triángulos de la primera unirían la isla de Hogland con Laponia, separadas por una distancia cercana a los 688 km. Los reconocimientos iniciales tuvieron lugar en el año 1830, aunque las observaciones angulares no llegasen a Tornio hasta 1845. El último de sus triángulos, con vértices en Tornio, Kivalo y Kaama-Vaara fue compensado seis años después para comenzar la cadena de Laponia a partir del lado común (Tornio-Kaama-Vaara). Struve revela que fue el quien dictó el pliego de condiciones y nombró a los operadores responsables: dos oficiales de Estado Mayor, Melan y Oberg, que habían realizado cursos de geodesia superior en el Observatorio de Dorpat. Más adelante serían sustituidos<sup>199</sup> por Woldstedt, discípulo de Argelander, el cual fue asistido por el geodesta Hällströn y otros. Finalmente recordó que las dos bases finlandesas se midieron en 1844 y en 1845, bajo la dirección de Sabler, astrónomo del Observatorio de Púlkovo, y del propio Woldstedt.

La triangulación de Laponia se extendió desde Tornio hasta Bäljatz-Vaara, en el Finmarken noruego, a lo largo de 358 km aproximadamente. La Academia de Ciencias de Suecia le encargó la dirección de la misma a Selander, entonces director del Observatorio de Estocolmo; el cual contó con la inestimable ayuda del marino real Skogman y de Argadh, que ejercía como profesor de astronomía en la Universidad de Lund. El reconocimiento del terreno ya lo habían efectuado los académicos Selander y Wrede en 1845. La medida de la base geodésica<sup>200</sup> se inició al año siguiente y se concluyó en 1852.

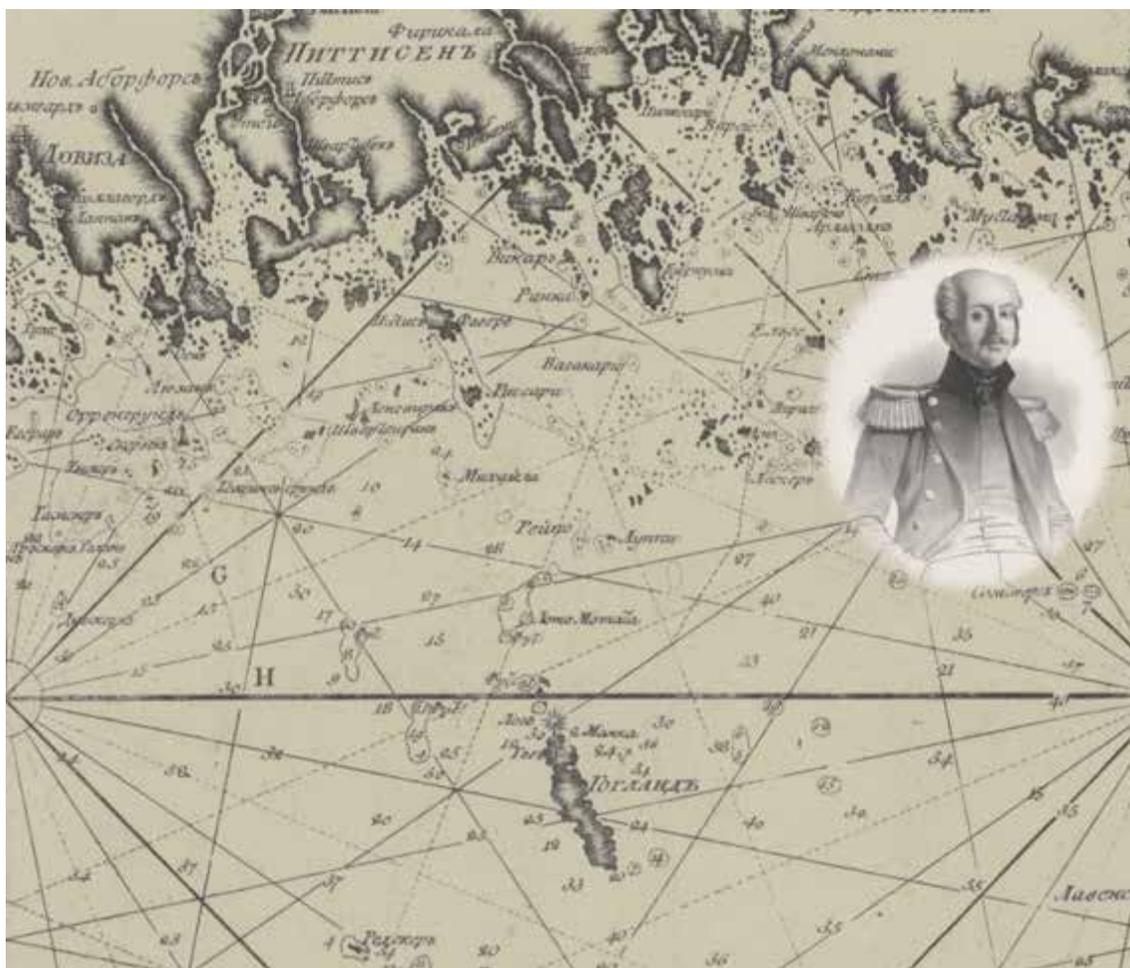
El último tramo de la triangulación escandinava se localizó en el Finmarken noruego, entre Atjik y Fuglenaes, con un desarrollo de poco más de 197 km. Ese último vértice, el más septentrional del arco del meridiano, se ubicó a unos 2 km al Noroeste de Hammerfest. El responsable de la triangulación fue Hansteen, que dirigía simultáneamente el Depósito Geográfico de Noruega y el Observatorio Real de Oslo, aunque delegase de inmediato en los oficiales del Cuerpo de

---

<sup>198</sup> Struve insistía en las penalidades que tuvieron que padecer los operadores, por los difíciles accesos y por estancias demasiado prolongadas en los mismos, solo superadas por la pericia del marino Wrangel, capaz de vencer cualquier dificultad con tal de alcanzar el objetivo hidrográfico.

<sup>199</sup> El motivo fue el haberles encargado otros trabajos geodésicos en el interior del imperio ruso.

<sup>200</sup> Realmente la midió Selander en 1851, usando el aparato conservado en el Observatorio de Púlkovo, participando en la misma los astrónomos Lindhagen y Wagner, comisionados a tal efecto por Struve.



Wrangel y la Isla de Hogland en una carta náutica del golfo de Finlandia.

Ingenieros: Klouman y Lundh. Recuérdese que fueron ellos los que reconocieron el territorio en 1845, a la vez que hacían lo propio los geodestas suecos en Laponia. Las observaciones angulares dieron comienzo en 1846, finalizando la medida de los triángulos principales al año siguiente. También se dijo ya que la base geodésica la midieron en 1850, Lindhagen y Klouman, y que se localizó en los bordes del fiordo Alten.

Struve recalcó la importancia de las medidas angulares en este arco septentrional, pues, al contrario de lo que sucedió en el meridional, en la mayoría de los vértices (salvo en cuatro<sup>201</sup>) se estacionó el teodolito directamente sobre el suelo. El proyecto se vio muy favorecido por el hecho de que los bosques ocupaban mayoritariamente las zonas de menor altitud, sin llegar a coronar las cumbres graníticas sobre las que se situarían los vértices. Por otra parte, al Norte de Tornio desaparecía la masa arbórea, una vez sobrepasado el círculo polar ( $\varphi \geq 66^{\circ}34'$ ). En el tramo finlandés hubo tres iglesias, cuyos campanarios fueron utilizados como puntos de mira, a

<sup>201</sup> Struve concretó las cuatro excepciones: dos continentales (Strömfors y Revonpesäma) y dos sobre islas bajas del golfo de Botnia (Ulkogrunni y Hyphenmäki) en las que hubo que situar la estación a 2 o a 6 toesas del suelo, mediante sólidas estructuras de madera rodeadas de una galería que aislaba al observador de la plataforma en que se colocó el teodolito.

saber: Kembele, Tornio y Kemi. Las dos primeras requirieron estaciones excéntricas en el suelo de su base. La tercera iglesia fue localizada solamente por intersección directa, divisándola desde varios vértices próximos pertenecientes a los triángulos de continuación<sup>202</sup>. En ese arco escandinavo hubo, como ya se comentó, cinco puntos astronómicos, en los que se determinó la latitud y el acimut. En resumen, este arco escandinavo fue dividido en tres tramos, según la exposición realizada por Struve:

1. Arco de Finlandia<sup>203</sup>.
2. Arco de Laponia.
3. Arco de Finmarken.

El primero con una amplitud de  $5^{\circ}45'16''$ , el segundo con  $2^{\circ}51'13''$  y el tercero con  $1^{\circ}59'13''$ .

La triangulación que se proyectó en Finlandia enlazó su golfo con el mar Glacial, atravesando un territorio sumamente variado. Al Norte del golfo se elevaba gradualmente el terreno, con la presencia de multitud de planicies en las que se intercalaban numerosos roquedos de gra-



Iglesia de Kemi, cuyo campanario fue localizado, por intersección directa, durante la campaña geodésica de Finlandia.

<sup>202</sup> Woldstedt no hizo por tanto observación alguna sobre ese vértice, el cual ya había sido usado también por Svanberg en 1802.

<sup>203</sup> Struve subdividió ese tramo en otros dos: Finlandia meridional (comprendido entre los paralelos  $60^{\circ}4'29''$  y  $62^{\circ}38'5''$ ) y Finlandia septentrional (limitada por las latitudes  $62^{\circ}38'5''$  y  $65^{\circ}49'45''$ ).

nito. Las llanuras de mayor extensión contenían muchas lagunas que cubrían, en gran parte, todas las depresiones; siendo esa una de las características principales que distinguen a Finlandia de otros países europeos, apostillaba Struve. Más adelante se tuvieron que sortear una serie ininterrumpida de lagos, prolongada en la dirección del meridiano, entre las latitudes de  $61^\circ$  y de  $63^\circ 40'$ ; de entre todos ellos destacaba por su extensión el de Päjjäne. Los vértices geodésicos se proyectaron en consecuencia sobre las rocas dominantes que surgían a ambos lados de tales lagos. Posteriormente, al Sur de la ciudad de Kajane, a una latitud de  $64^\circ 14'$ , discurrió la cadena triangular por una zona menos rica en agua. Más al Norte de nuevo tuvo que franquear la triangulación el gran lago de Uleträsk<sup>204</sup>, para poder alcanzar el vértice Teiri-Harju, con la mayor altitud (171 toesas)<sup>205</sup>. Struve subrayaba la importancia de que los triángulos entre dicho vértice y el primero de Mäki-Päällys siguiesen casi la dirección del meridiano de Dorpat, aunque se desviaran en un principio hacia el Oeste, para volver a cortarlo en las proximidades de Kilpi-Mäki, la estación astronómica central de Finlandia, con una latitud de  $62^\circ 38'$ .

A partir del vértice Teiri-Harju, concretamente desde el lado que formaba con su homólogo Kives-Vaara, los triángulos seguían una dirección con acimut medio de  $70^\circ$  a lo largo de más de cien kilómetros, hasta la mitad del lado Laton-Mäki  $\leftrightarrow$  Sarvi-Kangas; justo en el límite septentrional del golfo de Botnia, es decir al alcanzar el paralelo de  $65^\circ$  de latitud. Entre los vértices Teiri-Harju y Laton-Mäki, la pendiente del terreno era muy pronunciada, pues la altitud del primero fue de 171 toesas y el segundo sólo estaba 13 toesas por encima de las aguas del golfo. Struve destacó la dificultad de proyectar la triangulación en esa zona sin puntos dominantes y el mérito contraído, al ejecutarla, por Woldstedt, gracias al buen reconocimiento previo y a las talas ocasionales que abrían largas vías de penetración en los inmensos bosques que la cubrían. Los vértices se localizaron a ambos lados del río Ulea-elf, a través del cual se desaguaba el agua del gran lago al golfo de Botnia, aunque a partir de Laton-Mäki se ubicaron en las islas del golfo. Dos de ellas, Karl-öe y Ajos, tenían altitudes respectivas de 15 y 12 toesas, si bien las de los vértices Rontti y Ulkogrunni eran todavía más pequeñas, apenas se elevaban 1.2 y 3.2 toesas sobre el agua. Struve añadía, con toda razón, que esa falta de puntos, con altitud suficiente, significó un serio obstáculo para la medida de los ángulos, por la temible influencia de la refracción<sup>206</sup>. Esa fue una de las razones fundamentales por la que las observaciones geodésicas entre Uleaborg (la actual Oulu) y Tornio se tuvieron que realizar en varias campañas: entre 1840 y 1842, necesiándose inclusive parte del año 1844 para concluir las. Los setenta triángulos de continuación de Finlandia presentaban la ventaja de tener todos sus ángulos medidos, además de los de dos diagonales, con un lado medio de 25 km. El progreso promedio en la dirección del meridiano fue de  $F = 9.59$  km. En cuanto a la forma, resultó  $[G] = 32273$ , con un valor medio de 461 km y un peso de continuación medio dado por  $\rho = 295.5/461 \approx 0.641$ ; siendo  $\sigma = 4956 \rho/7500 \approx 0.424$ .

La cadena triangular de Laponia, formada por 19 triángulos, se proyectó a orillas de los ríos Tornio y Muonio, su mayor afluente, que por aquel entonces formaban la frontera natural entre Rusia y Suecia<sup>207</sup>, localizándose 14 vértices en la primera, 7 en Suecia y 2 en Noruega.

---

<sup>204</sup> Ese es el nombre sueco del lago Oulu, en finés Oulujärvi.

<sup>205</sup> La altitud media de los vértices finlandeses fue de 79.4 toesas, correspondiendo la mínima, 1.2 toesas, al vértice Rontti.

<sup>206</sup> Struve dio un ejemplo significativo: Wolstedt reflejó en su diario casos tan extraordinarios como el del vértice Ulkogrunni, para cuya observación debió permanecer dos meses en ese islote desierto.

<sup>207</sup> Sin embargo, los dos triángulos más septentrionales, que no cortaban al río, se encontraban ya en el Finmarken noruego.



La ciudad de Oulu en el golfo de Botnia. En ella desemboca el río Ulea que procede del lago con igual nombre. Obsérvese que la cadena de triángulos seguía sensiblemente el curso del río. La imagen fue obtenida por el satélite LANDSAT 7 el 25 de junio de 2001.

Struve aclaraba mejor la dirección principal de la triangulación: «la línea geodésica formada por Tornio y Bäljatz-Vaara cae completamente dentro de los triángulos y presenta en Tornio un ángulo de  $7^\circ$  con el meridiano, hacia el Oeste». Al mismo tiempo anunció que no se podía referir a la configuración geomorfológica de la región, ya que Selander se proponía hacerlo en una obra aparte que publicaría la Academia de Ciencias de Suecia. No obstante se aprecia «por la dirección uniforme de los triángulos y por sus tamaños» que la zona había ofrecido facilidades al contar con muchos puntos dominantes de altitud suficiente. La altitud media de Laponia era efectivamente mayor que la de los vértices de Finlandia. Así por ejemplo, los triángulos más al Norte de Laponia terminaron en los vértices Atjik y Bäljatz-Vaara, con altitudes respectivas de 310 y 290 toesas, sobre el nivel del mar Glacial; cuando el vértice del extremo meridional de la cadena (Tornio) sólo estaba a pocas toesas sobre el nivel del golfo de



El río Tornio y su afluente Muonio. Fragmento del mapa Suecia y Noruega confeccionado por C. F. Weiland, en 1856, para un atlas del Instituto Geográfico (Weimar. Alemania). Su escala fue de 1/3342000, siendo la isla de Hierro el origen de las longitudes.

Botnia<sup>208</sup>. El número de triángulos principales ascendió a 21, proyectados y observados por Selander, los cuales unieron los extremos de ese segmento del arco. Asimismo fueron 11 las diagonales que se observaron desde 7 vértices. Sin tenerlas en cuenta, resultó una longitud media de los lados igual a 17254 toesas, esto es 2254 toesas más de las recomendadas para el triángulo considerado normal. El progreso medio en la dirección del meridiano fue de  $F = 8721$  toesas. La forma vino definida por  $[G] = 11036$ , con un valor medio de 525.5, un peso de continuación medio dado por  $\rho = 0.562$  y otro geométrico de  $\sigma = 8721 \rho / 7500 \approx 0.653$ .

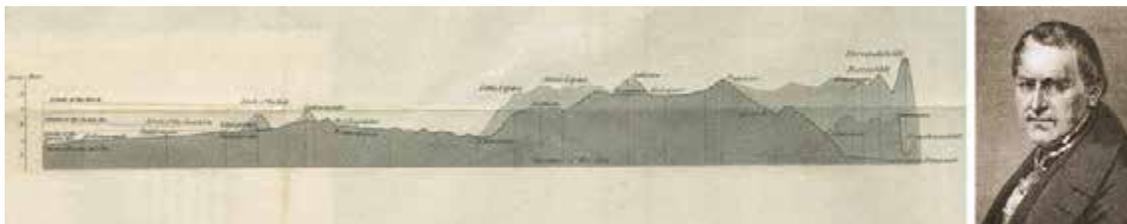
Struve continuó sus comentarios describiendo la región comprendida entre las iglesias Muonioniska, a  $68^\circ$  de latitud, y Kautokeino, a  $68^\circ 57'$ , un terreno que vertía aguas en dos sentidos opuestos<sup>209</sup>. A lo largo del río Muonio las aguas descendían hacia el Sur, para mezclarse con las

<sup>208</sup> De hecho la altitud media de los vértices de Laponia fue de 150 toesas aproximadamente, casi el doble de la que tuvieron en Finlandia.

<sup>209</sup> Se apoyó para ello en la primera lámina del gráfico de la triangulación, que figura en el capítulo 13 y con el que Struve ilustró su Memoria.



Iglesias de Muonioniska (superior) y de Kuotokeino (inferior). Fotografías tomadas por el astrónomo danés Sophus Tromholt en torno al año 1883.



Perfil longitudinal entre el golfo de Botnia y el mar Glacial. Las unidades de las altitudes son pies ingleses. Ilustración de la obra de Leopold von Buch (*Reise durch Norwegen und Lappland*. Academia de Ciencias de Berlín, 1810).

del río Tornio y desembocar luego en el golfo de Botnia. El río Alten, por el contrario, fluía por la vertiente Norte hasta vaciar sus aguas en el golfo del mar Glacial, concretamente en el fiordo al que daba nombre. Pues bien, los triángulos del último segmento del arco ruso-escandinavo seguían el curso de este segundo río, a través de todo el Finmarken noruego, hasta llegar a su desembocadura, a una latitud de  $69^{\circ}58'$ ; no obstante había después varios vértices antes de alcanzar el extremo de Fulgenaes, en el paralelo de  $70^{\circ}40'$  y con una altitud de 7 toesas, tres de tales vértices se localizaron en las islas Seiland, Kval-øe y Haajen.



Cuenca del río Alten (C. F. Weiland. 1856).

La cuenca hidrográfica del Alten presentaba una clara pendiente hacia el Norte, atravesando grandes llanuras pantanosas cubiertas de musgo, matorrales y algunos abedules enanos, aunque estuvieran casi desiertas y fuesen inhabitables. Por otro lado, había numerosos lagos en los lugares más bajos, comunicados con el fiordo a través de múltiples canales, que iban de un lago a otro y hasta el río principal. De entre todas aquellas planicies surgían de vez en cuando promontorios rocosos de gran altura, que fueron aprovechados por los geodestas al redactar el proyecto de la triangulación. Idéntica función cumplieron las montañas que se elevaban a orillas del fiordo y las islas situadas al Norte del mismo. Struve subrayó la dificultad que presentó la subida a todas ellas, máxime cuando su altitud se incrementaba en las proximidades del mar<sup>210</sup>. La altitud media de los 13 vértices al Sur de Fuglenaes fue de 369 toesas, 90 por debajo del límite de las nieves perpetuas, a una latitud de  $69^{\circ}45'$ ; un valor que fue determinado por el alemán Leopold von Buch<sup>211</sup> y el sueco Göran Wahlenberg. Tres de los vértices occidentales en esta región del Finmarken también estaban por encima de dicho límite: Haldi (464 toesas), Kaaven (490 toesas) y Jedki.

Por otro lado, había numerosos lagos en los lugares más bajos, comunicados con el fiordo a través de múltiples canales, que iban de un lago a otro y hasta el río principal. De entre todas aquellas planicies surgían de vez en cuando promontorios rocosos de gran altura, que fueron aprovechados por los geodestas al redactar el proyecto de la triangulación. Idéntica función cumplieron las montañas que se elevaban a orillas del fiordo y las islas situadas al Norte del mismo. Struve subrayó la dificultad que presentó la subida a todas ellas, máxime cuando su altitud se incrementaba en las proximidades del mar<sup>210</sup>. La altitud media de los 13 vértices al Sur de Fuglenaes fue de 369 toesas, 90 por debajo del límite de las nieves perpetuas, a una latitud de  $69^{\circ}45'$ ; un valor que fue determinado por el alemán Leopold von Buch<sup>211</sup> y el sueco Göran Wahlenberg. Tres de los vértices occidentales en esta región del Finmarken también estaban por encima de dicho límite: Haldi (464 toesas), Kaaven (490 toesas) y Jedki.

<sup>210</sup> Ponía el ejemplo del vértice Jedki, en la isla de Seiland, a 1800 toesas del litoral y con una altitud de 552 toesas y una inclinación media de  $17^{\circ}$ .

<sup>211</sup> Este miembro de la Academia de Berlín realizó una expedición científica a Noruega y a Laponia durante los años 1806, 1807 y 1808.

La configuración del terreno explica los problemas de transporte que se le plantearon constantemente a los operadores, hasta el punto de verse obligados a elegir un teodolito de menor tamaño que los empleados en los otros segmentos del arco de meridiano; esa decisión de Hansteen facilitó sustancialmente la misión de Klouman y Lundh. Struve llegó a manifestar que «la medida de los triángulos en Finmarken ha sido ciertamente una de las operaciones más difíciles que presentan los anales de la geodesia». En los 12 triángulos, que enlazaron directamente Atjik y Fuglenaes, se observaron 50 direcciones, incluyendo 14 diagonales y las 6 visuales relativas al vértice complementario de Haajen. La longitud media de un lado, sin contar los de esas 20 direcciones, fue de 31.3 km, es decir casi 2 km mayor que la del lado recomendado. El progreso medio por triángulo en la dirección del meridiano alcanzó el valor  $F = 8200$  toesas  $\approx 15982$  m. La forma de los triángulos se caracterizó por la suma  $[\text{G}] = 6703$ , con un  $\text{G}$  medio de 558.6 y un peso medio de continuación dado por  $\rho = 295.5/558.6 \approx 0.529$  y otro geométrico de  $\sigma = 8200 \rho/7500 \approx 0.578$ .

Siguiendo un proceso similar al de los otros apartados, resultó el peso trigonométrico medio (o peso de la medida de ángulos) que se indica, para los tres segmentos del arco escandinavo: Finlandia ( $\tau = 1.312$ ), Laponia ( $\tau = 0.639$ ) y Finmarken ( $\tau = 0.242$ ). Struve achacó el mayor peso de los triángulos finlandeses al hecho de haber tenido en cuenta la influencia ejercida por la observación de las diagonales. Relacionando  $\tau$  y  $\sigma$  se obtuvieron los pesos generales siguientes. Finlandia ( $P_5 = 0.556$ ), Laponia ( $P_6 = 0.417$ ) y Finmarken ( $P_7 = 0.140$ ).

A modo de conclusión resumió las características de la triangulación para las siete regiones en que se dividió el gran arco ruso-escandinavo, fijando los valores medios de los diferentes parámetros. Aunque Struve emplease como medidas lineales la toesa y la versta, se ha preferido transformar todas ellas en kilómetros o en metros:

*Características técnicas de los triángulos en el gran arco ruso escandinavo*

Región	Extensión	Número	Altitud	Lado	Avance	$\rho$	$\sigma$	$\tau$	$P_i$
Besarabia	357	43	209	23	9	0.670	0.402	0.938	0.378
Volinia	379	33	285	27	11	0.766	0.554	0.632	0.350
Lituania	514	49	193	26	10	0.697	0.500	0.749	0.374
P. Bálticas	409	28	156	30	14	0.400	0.390	3.040	1.186
Finlandia	688	70	154	25	10	0.641	0.424	1.312	0.556
Laponia	358	21	292 ( $\zeta$ )	34	17	0.562	0.653	0.639	0.417
Finmarken	195	12	669	31	16	0.529	0.578	0.242	0.140

La interpretación realizada por Struve fue de este tenor:  $\rho$  presentaba un máximo en Volinia y un mínimo en las provincias Bálticas, con  $\sigma$  sucedía lo mismo,  $\tau$  era máximo en tales provincias y mínimo en Finmarken, al igual que ocurría con los valores de  $P$ . Teniendo en cuenta el significado del peso total  $P$ , se podría evaluar la calidad media de todos los triángulos, de acuerdo con las cinco categorías siguientes:

1. Los triángulos bálticos.
2. Los de Finlandia.

3. Los de Laponia.
4. Los de Rusia meridional.
5. Los triángulos de Finmarken.

No obstante, Struve contaba con la validez parcial de sus conclusiones, puesto que él mismo añadía que para apreciar verdaderamente la exactitud de la operación geodésica habría que sopesar también otros muchos factores: la longitud de las geodésicas entre las estaciones astronómicas, las distancias entre paralelos, la fiabilidad media de las bases y la de sus enlaces con la cadena principal, además de su posición relativa en la propia red triangular. En cualquier caso la validez de sus resultados era obvia para el análisis de otros supuestos, como pretendió demostrar con este ejemplo: «supongamos que el enlace entre dos vértices alejados pudiera efectuarse con dos cadenas diferentes de triángulos y que se tuviera que optar por una de ellas. La cuestión no siempre se decidiría por la simple inspección de sus gráficos. Sin embargo la decisión sería simple, ya que de las dos posibles cadenas sería preferible aquella en que [Ø], es decir la suma de los diferentes cuadrados  $\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2$ , fuese mínima».



El astrónomo danés Sophus Tromholt junto a su estación de observación (un año permaneció en el Círculo Polar Ártico para estudiar y fotografiar las auroras boreales).



El astrónomo Sophus Tromholt posando ante la columna meridiana de Hammerfest (1882).



La medida de los ángulos en las triangulaciones era parte consustancial de las mismas, por resultar imprescindibles para la resolución de todos sus triángulos. La exactitud lograda en las primeras épocas no fue suficiente, debido sobre todo a las carencias instrumentales: la incorrecta división de los círculos (o arcos de círculo) que indicaban las lecturas angulares<sup>212</sup> y la falta de cruz filar con la que identificar sin ambigüedad el punto de mira, podrían ser dos buenos ejemplos. Otra de las dificultades que presentaban los instrumentos posteriores, del siglo XVIII, fue la de medir los ángulos en su propio plano, con la ineludible necesidad de reducir su valor al horizonte de la estación, haciendo uso de la trigonometría esférica. No obstante, todos esos inconvenientes quedaron superados con la fabricación de los teodolitos universales que proliferaron en el siglo siguiente. Aunque las medidas angulares efectuadas a lo largo de la triangulación se refirieran principalmente al aspecto planimétrico, no ha de olvidarse que generalmente iban acompañadas de la evaluación de las distancias cenitales<sup>213</sup>, o de las alturas sobre el horizonte, de las visuales entre vértices; pues de ese modo se podría efectuar, como tarea complementaria, la nivelación trigonométrica del territorio sobre el que se había proyectado la triangulación.

Ocho fueron los tipos de instrumentos empleados, entre los años 1818 y 1849, al observar los triángulos comprendidos entre la isla de Hogland y el delta del Danubio. En las medidas efectuadas al triangular el arco báltico, utilizó Struve un teodolito universal fabricado por Reichenbach en 1820, siguiendo las indicaciones dadas por el astrónomo y geodesta. El teodolito fue perfeccionado luego y usado por Struve hasta el año 1852, cuando se determinó el acimut en Kilpi-Mäki, el vértice central de Finlandia. Struve justificó<sup>214</sup> el calificativo de universal que había acuñado el constructor alemán, teniendo en cuenta su utilización en la medida de ángulos terrestres, horizontales y verticales, y en las observaciones astronómicas necesarias para la determinación del acimut, la hora y la latitud.

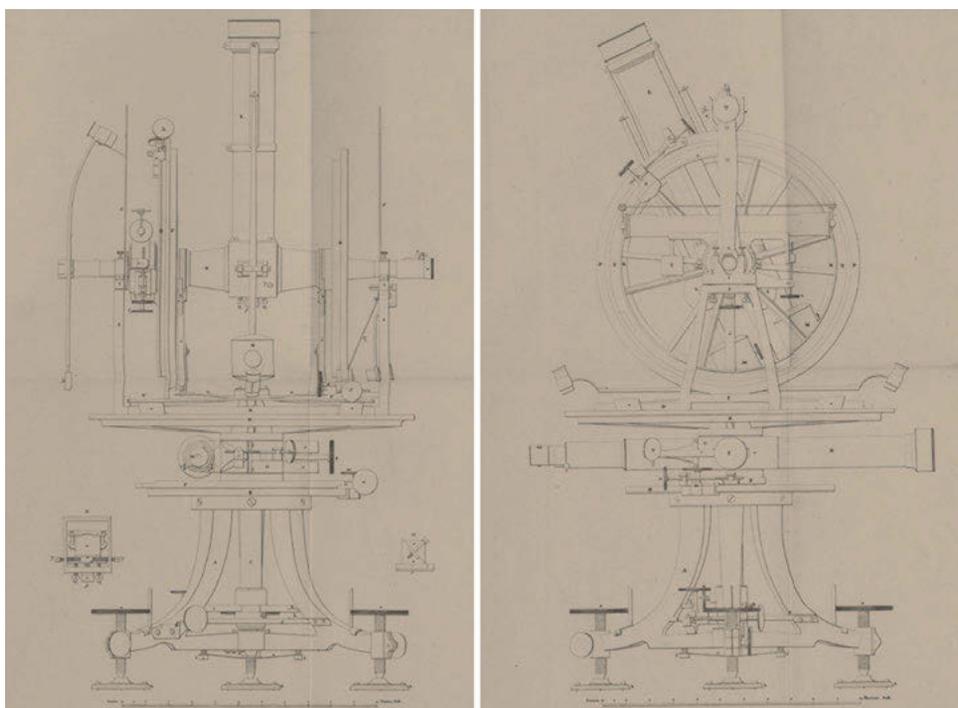
El general Tenner empleó durante sus campañas geodésicas numerosos instrumentos para medir los ángulos. En primer lugar un círculo repetidor construido por Baumann, siguiendo el

---

<sup>212</sup> El valor de un ángulo se obtenía como diferencia de las lecturas correspondientes a cada una de las visuales que lo formaban.

<sup>213</sup> La obtención de las distancias cenitales era, por otra parte, obligada cuando se medían los ángulos en planos inclinados y se tenía que proceder a su reducción.

<sup>214</sup> Struve subrayó las virtudes del aparato con estas palabras: «pero este instrumento, es por sus múltiples prestaciones, de una construcción complicada, aunque matemáticamente admirable en su totalidad y en sus partes, y requiere un observador racional que lo haya estudiado escrupulosamente. En manos de tal observador cumpliría a la perfección todas sus funciones».



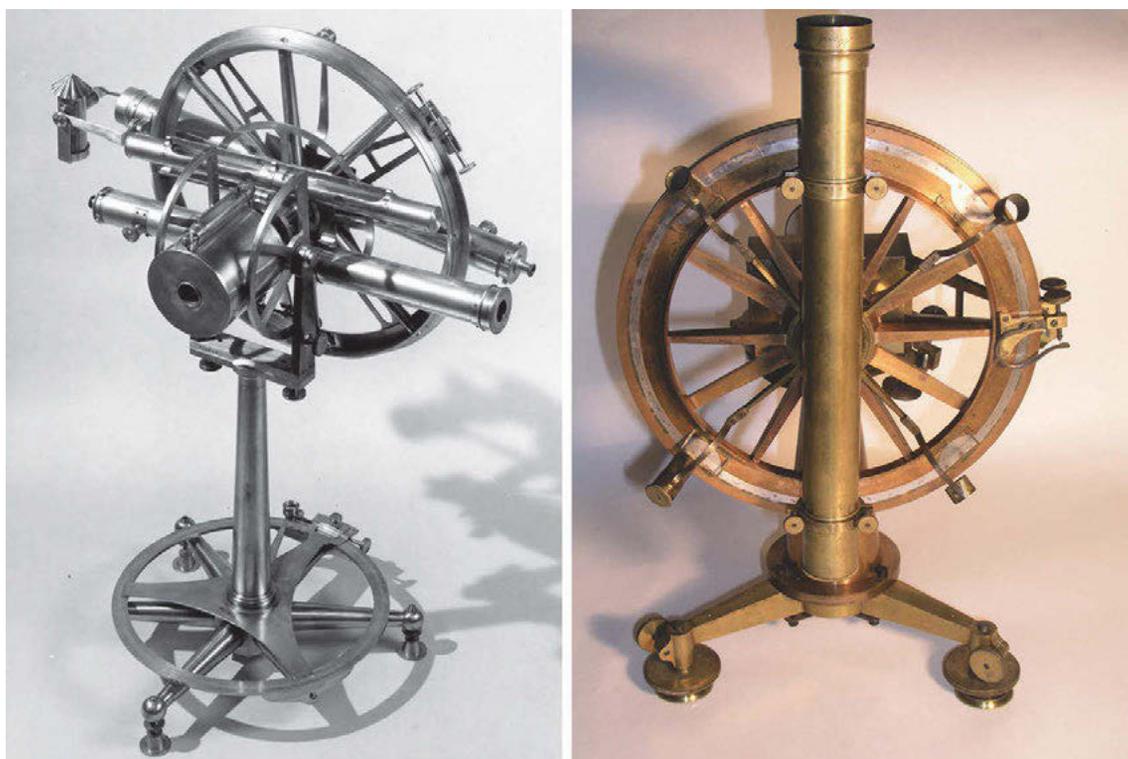
Dos vistas del instrumento universal fabricado por Reichenbach en sus talleres de Munich. Ilustraciones incluidas en la obra de Struve: *Beschreibung der Gradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands* (Dorpat. 1831)

modelo de Borda, empleado desde 1816. Después fue sustituido por otro de Troughton, fabricado con igual patrón, que utilizó entre 1818 y 1837. En los dos casos constaban de una cruz filar en ángulo recto, pero inclinada  $45^\circ$  para poder proporcionar análogos exactitudes en los dos sentidos, horizontal y vertical. El manejo de ese segundo círculo lo simultaneó, de 1828 a 1832, con el uso de un teodolito terrestre de repetición de Reichenbach, el cual pertenecía al Observatorio de Vilnius. A partir del año siguiente, 1833, se valió de otro teodolito de repetición que se fabricó en los talleres del Estado Mayor. En 1836 usó ya el teodolito astronómico de repetición, de la firma Ertel, con dos anteojos: de 30 aumentos el superior y de 20 aumentos el inferior. Los últimos instrumentos empleados por Tenner, a partir de 1844, fueron dos teodolitos universales de Ertel, análogos a los de Reichenbach ya citados.

Struve separó los instrumentos repetidores de todos los demás, en tanto que estos proporcionaban los valores de los ángulos inclinados, que requerían la medida de las distancias cenitales para su transformación en horizontales<sup>215</sup>. En cambio con los otros se medían directamente «los ángulos terrestres horizontales, proyectados, con la ayuda del antejo superior, por el movimiento sobre un eje horizontal». En los 58 triángulos de Lituania, el instrumento más usado fue el círculo repetidor de Troughton, al igual que sucedió con los 40 de que constó el segmento de Volinia. Finalmente, en Besarabia sólo se hizo uso de los dos instrumentos de Ertel para medir

---

<sup>215</sup> Sin embargo, añadió Struve que en territorios tan uniformes como los de Lituania y Volinia, la reducción de los ángulos inclinados al horizonte era tan pequeña que solo se requería un valor aproximado de las distancias cenitales; aunque realmente se midieron con todo el rigor instrumental pensando más en la nivelación trigonométrica.



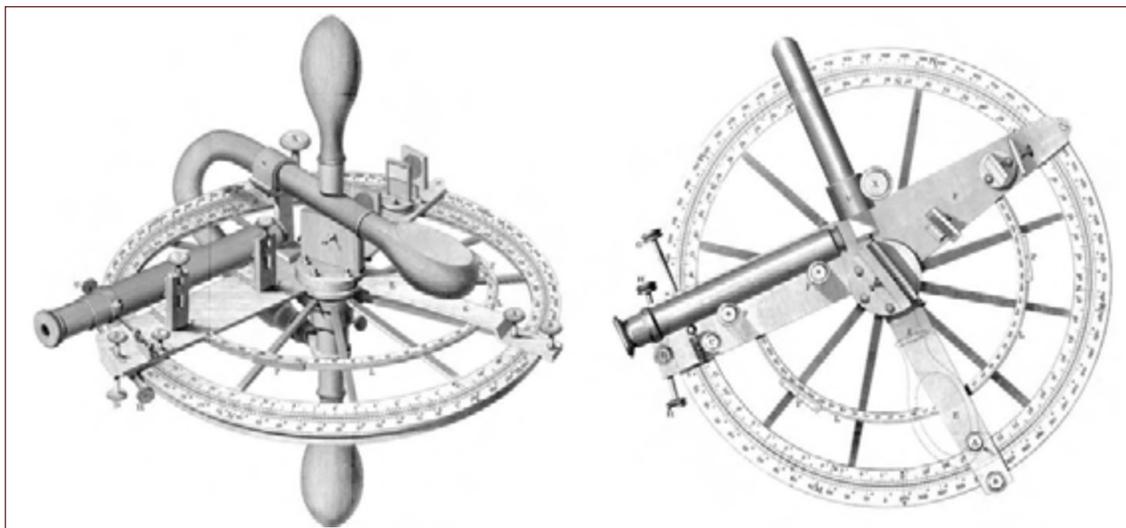
Círculo repetidor de Troughton (I) y círculo vertical de Reichenbach & Ertel (D).

los ángulos horizontales; no obstante el teodolito terrestre fue el principal<sup>216</sup>, ya que con él se observaron 46 vértices y con el otro sólo 5.

Siendo cierto que la magnitud de un ángulo, en general, es la diferencia de dos distancias angulares, también lo es que su obtención no es en absoluto trivial. Struve lo puso de manifiesto al dedicar a la cuestión todo un capítulo del primer tomo de la Memoria, el titulado *Métodos empleados en la medida de los ángulos terrestres*, aparte de otro en el que trató de la *exactitud de las medidas angulares*. En el segundo tomo abordó igualmente el asunto con el Anexo: *Estudios relativos a las medidas angulares horizontales del Finmarken*. El preámbulo de su primera contribución versó sobre el estado de la cuestión en su tiempo, sacando a la luz los orígenes del método de repetición, en recuerdo y homenaje a los geómetras franceses del final de la Ilustración, ya apuntado por el astrónomo, y cartógrafo alemán, Tobias Mayer<sup>217</sup> unos años antes. En él se dieron unas informaciones que no por sabidas dejan de ser relevantes para el estudio histórico de la geodesia y de la topografía.

<sup>216</sup> Struve matizaba esa información al señalar que algunos ángulos se habían medido con los dos instrumentos.

<sup>217</sup> La innovación fue introducida por T. Mayer en 1752 para mejorar las prestaciones del círculo de reflexión. Su difusión se produjo gracias a un artículo publicado por el excelente marino español, y geodesta, J. de Mendoza Ríos. Su título fue: *On an improved reflecting circle*, incluido en las *Transactions of the Royal Society* (1801): «...the celebrate Tobias Mayer contrived, however, a method to determine, at one Reading, instead of the simple angle observed, a multiple of the same angle; and, by this means, the instrument became, in practice, capable of any degree of accuracy, as far as regards the above mentioned errors. His invention is essentially different from the mere repetition of the observations». Mendoza defendió su trabajo ante la *Royal Society* el 4 de junio de 1801.



Dos vistas de la mejora introducida por Tobias Mayer en el círculo de reflexión, ilustraciones del artículo *On an Improved reflecting circle*, firmado por J. Mendoza de los Ríos.

Struve recordó el impacto causado en Europa por el círculo repetidor inventado por Borda y como no tardó en convertirse en el instrumento más usado en las operaciones geodésicas, con unos resultados que aparentaban ser fiables. La explicación del fenómeno estribó en la poca exactitud que proporcionaban los instrumentos portátiles con graduaciones nada rigurosas y en que la aplicación de la repetición obviaba, en gran parte, ese defecto tan evidente y hacía recomendable su empleo en tales operaciones. Sin embargo, resaltó inmediatamente sus limitaciones «...pero es evidente que este principio, por admirable que sea en la teoría, jamás podrá proporcionar medidas extremadamente exactas, ya que las condiciones ideales de partida no se cumplen, a saber: rigidez absoluta de los metales, ausencia completa de movimiento en diferentes partes del instrumento mientras que este gira en torno de su eje, así como el supuesto de que este no presente holgura alguna». En todo caso, la ventaja principal que presentaba la repetición, fue la de reducir considerablemente la imperfección de la división del limbo y el error cometido al efectuar las lecturas. Aunque resulte un tanto paradójico, una de dichas ventajas condujo a la superación del procedimiento, tal como subrayó Struve: «más la repetición tuvo que abandonarse a raíz del perfeccionamiento en la división del círculo, ya que el error cometido al efectuarla era mucho menor que el inherente al propio procedimiento de medida». Esa metodología de la repetición fue la empleada por el general Tenner cuando inició sus mediciones geodésicas en el año 1816, siendo sus dos primeros aparatos los círculos repetidores fabricados por Baumann y Troughton, copiando el modelo previo de Borda; ni que decir tiene que en aquellos primeros años utilizó ese procedimiento como único medio de mejorar los valores obtenidos para los ángulos de su triangulación.

A partir de 1804, Reichenbach construyó una serie de instrumentos de una perfección nunca vista, en los que destacaban las divisiones de exactitud matemática<sup>218</sup>. Con la excepción del

<sup>218</sup> Con independencia del mérito de Reichenbach, ha de recordarse la figura del inglés Jesse Ramsden, pionero en estas tareas. Su obra *Description of an Engine for dividing Mathematical Instruments*, publicada en 1777 contribuyó decisivamente al progreso de las observaciones.

círculo meridiano, todos ellos fueron aparatos repetidores, incluso sus grandes círculos verticales, con tres pies de diámetro, en muchos casos portátiles y destinados a las operaciones geodésicas. Struve refirió con más detalle el instrumento universal que llegó a Dorpat en la primavera de 1821, pues al año siguiente debería iniciar su campaña de observación en los siete vértices situados al Sur de la ciudad, siguiendo el método, al uso, de la repetición; no obstante intentó atenuar, en lo posible, los defectos propios del procedimiento. Para ello procedió a variar las direcciones del movimiento de las diferentes partes del instrumento de forma simétrica: «procurando cumplir sobre todo la regla de medir cada ángulo en dos series con 16 punterías, una girando el antejo superior en la dirección de la división, movimiento positivo, y otra haciéndolo en sentido opuesto, movimiento negativo». El resultado sorprendió a Struve, pues todos los ángulos en sentido positivo, P, fueron mayores que los N, medidos en sentido negativo. El cuadro que resumió su experimento angular, con la vuelta de horizonte en el vértice Lenard (junio 1822) no ofrece dudas al respecto:

*Experimento angular de Struve realizado en el año 1822*

Ángulos		$(P + N)/2$	$P - N$
P	N		
30°48'35".5	34".7	35".1	+0".8
64°27'25".2	23".0	24".1	+2".2
31°51'26".7	24".5	25".6	+2".2
73°22'38".1	34".2	36".15	+3".9
159°29'58".8	57".7	58".25	+1".1
360° 0' 4".3	359°59'54".1	359°59'59".2	Media +2".04

Struve comprobó que la suma de los ángulos positivos era 4".3 mayor de lo debido, mientras que la de los negativos fue 5".9 menor, en cambio la media de las semisumas sólo difería de los 360° en 0".8. Un resultado que se repitió en otros seis vértices sin excepción<sup>219</sup>. La honradez intelectual de Struve quedó patente cuando se lamentaba de contar únicamente con medidas empíricamente exactas, sin saber si cada uno de los ángulos así obtenidos estaba verdaderamente libre de error. Sin embargo su intuición fue buena: «he aquí el por qué me decidí a abandonar la repetición para sustituirla por el *método de observación reiterada de los ángulos simples*».

El siguiente apartado de este capítulo dedicado a la observación de los ángulos terrestres abordó la exactitud que cabría esperar al usar un instrumento de repetición. Struve concretaba muy bien el problema: «la exactitud de la medida simple de un ángulo depende de tres factores, la precisión de la puntería, la fiabilidad de la división del limbo y la certidumbre de las lecturas de sus divisiones». Para él no existían diferencias sustanciales entre la medida por repetición y la medida simple, pues bastaba efectuar esta el mismo número de veces que en la repetición, para

<sup>219</sup> Struve acompañó su comentario con una nota en la que calculaba las diferencias entre N y P, para las observaciones de Tenner (a partir del año 1826). Aunque lo destacable fuese su afirmación de que Gauss había efectuado cálculos similares a los suyos, durante la medida del arco de Hannover.

asegurar análoga incertidumbre óptica. Es más, la observación simple presentaba, a su juicio, la ventaja de obviar cualquier falta de precaución, un hecho involuntario que siempre suele estar presente al realizar numerosas observaciones definidas por un solo resultado. Struve recordó<sup>220</sup> que el error de puntería asociado al anteojo superior de su instrumento de 60 aumentos se podía fijar en unos  $0''.5$ .

Ahora bien, en la medida real de los ángulos resultaba más compleja la observación óptica, puesto que se combinaban los errores de las punterías hechas con el anteojo superior y con el inferior. Sin embargo, Struve redujo esa segunda componente del error al mínimo, recurriendo para ello a una mira localizada a una distancia de 200 a 800 toesas, dependiendo del lugar. La mira consistió básicamente en un pequeño paralelogramo, alargado en el sentido vertical, de papel blanco pegado sobre una tableta negra. El ancho de la mira era lo bastante pequeño como para que al ser bisecada por el hilo vertical del retículo sólo se viese un trazo blanco a los dos lados del mismo, asegurando así que la observación se efectuase con una exactitud de fracciones de segundo<sup>221</sup>.

Struve volvió a incidir después en la excelencia de los instrumentos fabricados en los talleres de Munich, haciendo especial énfasis en la máquina de dividir construida por Reichenbach; comentando concretamente las divisiones de los círculos meridianos examinadas en los observatorios de Königsberg, Dorpat, Helsinki y Púlkovo. El resultado de tales investigaciones, para la media de los cuatro nonios, era inferior a los  $0''.3$ , un valor que también se le podía asignar al valor probable del error accidental asociado al trazo de cualquier división; teniendo eso en cuenta dedujo que el error más probable para la media de tales nonios debería ser menor de  $0''.15$ . Como por otro lado, los errores accidentales eran achacables a los defectos propios de la misma división, a las inexactitudes cometidas al hacer la copia o a las desviaciones producidas al grabar, por la heterogeneidad del metal, sus valores aumentaban en los instrumentos más pequeños; si bien, en los demás casos, pensaba Struve que «la exactitud absoluta de las divisiones es la misma para los instrumentos grandes y pequeños. De donde se deduce que, abstracción hecha de la puntería, la exactitud relativa de la medida de ángulos simples, efectuada con el instrumento universal, dependería casi por completo del grado de seguridad, que admitía la lectura de las divisiones».

En el año 1823 contaba el observatorio de Dorpat con cuatro instrumentos procedentes de Mu-



Círculo meridiano de Reichenbach & Ertel (1822), expuesto en el Observatorio de Tartu.

<sup>220</sup> Struve ya lo había calculado en su momento, gracias a las múltiples observaciones que había hecho de la estrella polar.

<sup>221</sup> Struve había obtenido el error óptico más probable en el transcurso de todas sus observaciones, producido por el efecto combinado de los dos anteojos, resultando ser de tan solo  $0''.87$  para una sola puntería.

nich, de diferentes tamaños y provistos de nonios, los cuales le permitieron a Struve comparar lecturas idénticas realizadas por diversos operadores bien experimentados. Fruto de su estudio fue la tabla que incluyó en la Memoria y que se reproduce a continuación, incorporando en ella los segundos sexagesimales leídos por él, por Preuss<sup>222</sup> y por Argelander:

Instrumento	Diámetro de la división en pulgadas francesas	Segundos dados por los nonios	Posición del limbo	Error probable de la lectura del operador		
				Por un solo nonio	Para la media de 4 nonios	
					De cada instrumento	Reducida al diámetro de cuatro pulgadas
Círculo meridiano	36	2''	vertical	0''.60	0''.30	0''.90
Círculo vertical	18	4	vertical	0.84	0.42	0.63
Teodolito astronómico	8	10	vertical	2.00	1.00	0.67
Instrumento universal	13	4	horizontal	0.70	0.35	0.38

El cuadro evidencia la sorprendente fiabilidad de las lecturas efectuadas con la ayuda del nonio. En la última columna se presentan datos que dan, para la posición vertical del limbo, una media de 0''.73; todavía más exacta resultó la lectura de la división horizontal, lo que justificaba Struve por la «posición uniforme que adopta el ojo en esas lecturas». Esas investigaciones referidas al instrumento universal y previas al inicio de la campaña de 1823, le convencieron de que la medida simple de un ángulo, realizada sobre cualquier sector del limbo, debería tener una exactitud en torno a los 0''.7, abstracción hecha de la incertidumbre en la puntería. Por otra parte, afirmaba que si se hubiesen hecho seis medidas sobre diferentes sectores, con doce punterías para cada señal, el error probable de un ángulo debería ser próximo a los 0''.46.

Sin embargo, la práctica observacional no tardaría en probar que la realidad era muy diferente. Al medir cuidadosamente un ángulo, en repetidas ocasiones sobre el mismo sector del limbo, los resultados presentaban el acuerdo previsto, aunque junto a ellos aparecieron otros igualmente frecuentes pero con valores diferentes de los anteriores en unos 16''. La explicación del fenómeno sólo podía obedecer a una perturbación de origen desconocido, puesto que la serie de medidas aparecía nítidamente partida en dos clases: una con las diferencias próximas a 0'' y otra en torno a los 16'', «las diferencias intermedias no existían», tal como refería Struve. Inmediatamente aclaró la cuestión, haciendo gala de su gran sagacidad: «...descubrí pronto el origen en la flexión a que estaban sometidos los radios de los círculos horizontales. Los dos círculos, la alidada y el limbo, estaban colocados uno contra el otro, como en todo instrumento repetidor, por medio de un tornillo aplicado en las dos periferias». Dicho tornillo no puede producir un movimiento del eje en su parte central, más que después de haber vencido la fricción correspondiente, por la flexión opuesta de los radios de los dos círculos. Esta fricción era en nuestro instrumento mayor que en otros análogos, ya que el eje vertical de acero tenía una longitud considerable y un diámetro comparativamente elevado para poder soportar el peso de la parte superior del aparato».

<sup>222</sup> George Karl Ludwig Preuss fue un topógrafo y cartógrafo alemán que emigró a Estados Unidos en 1834 y trabajó en el *Coast Survey* y bajo la dirección de Ferdinand Rudolph Hassler.

Era necesario, en efecto, el movimiento relativo de los dos periféricos, generado por el tornillo, que alcanzaba los  $16''$  de la división, antes de que el eje comenzara a moverse en su centro. Sin embargo, el movimiento del anteojo superior se correspondía siempre con el de los nonios, pues los apoyos del eje horizontal estaban situados en los bordes de la alidada; con el movimiento del anteojo inferior ocurría lo contrario, por estar unido al centro del limbo y no a su borde. En el supuesto de que el eje óptico de este anteojo fuese paralelo a un diámetro cualquiera de la división, si no existiera flexión, el paralelismo se modificaría en  $f = 8''$ , al actuar sobre el repetido tornillo en uno u otro sentido. Struve continuaba con su razonamiento partiendo de que se hubiese medido el ángulo  $X$  entre dos objetos  $A$  y  $B$ , de manera que, al visar la mira con el anteojo de verificación, se hubiera realizado el último movimiento del tornillo en el mismo sentido de la observación de  $A$  y de  $B$ ; en tal caso el instrumento daría justamente el ángulo  $X$ . En cambio dos direcciones opuestas del último movimiento del tornillo darían  $X + 2f$  o  $X - 2f$ , es decir errores de  $16''$ .

El remedio para evitar el error producido por la flexión resultó obvio para Struve: bastaba visar dos veces seguidas cada objeto, empleando para las dos punterías los dos movimientos opuestos del repetido tornillo. La media de las lecturas sobre los nonios proporcionaría «el lugar de cada objeto sobre la división, libre del efecto de la flexión». Para él se trataba de la mejor solución, puesto que la flexión debería ser idéntica para el mismo estado del instrumento. Como mejor evidencia incluyó los resultados, indicados en el cuadro adjunto, que obtuvo durante el año 1823 en las observaciones efectuadas desde ocho vértices geodésicos:

*Evaluación de la flexión por W. von Struve*

Vértice	Periodo	$f''$
Lewala	18 junio-21 junio	8.07
Oberpahlen	22 junio- 26 junio	7.38
Sall	1 julio-2 julio	9.12
	Valor medio	8.19
Marien	20 julio-22 julio	7.10
Ebbafer	29 julio-30 julio	6.40
Warress-Mäggi	4 agosto-11 agosto	5.31
Lewala	13 agosto-14 agosto	5.94
Tammik	17 agosto- 18 agosto	5.93
	Valor medio	6.14

Las conclusiones de Struve parecían consecuentes, a saber:

1. Se comprueba que la limpieza y la mera lubricación han disminuido la flexión, al haber hecho lo propio con la fricción central.
2. Las pequeñas oscilaciones de  $f$  durante los dos periodos reflejan pequeños cambios en la fricción, producidos por el transporte del instrumento, de un vértice a otro, y por el efecto de la temperatura sobre el aceite empleado.

Sin embargo, Struve fue más allá: «aunque la eliminación del efecto de la flexión asegurase la exactitud de la medida de los ángulos, he preferido cambiar el anclaje periférico de los dos círculos por otro absoluto del centro del limbo al soporte metálico del instrumento, con el consiguiente movimiento simultáneo y absolutamente idéntico, bien del anteojo superior con los nonios de la alidada o bien del anteojo inferior con el limbo, los radios de los dos círculos no sufrirían así la menor tensión en operaciones sucesivas. Esta construcción del instrumento universal fue adoptada después por Ertel y desde hace treinta años ese aparato no permitió la repetición encadenada». Tal fue el convencimiento de Struve, que rechazó todas las medidas por repetición efectuadas en 1822, de manera que «los ángulos terrestres del Báltico se han obtenido con medidas simples, pero ejecutadas sobre varios sectores del limbo y en número suficiente para disminuir convenientemente la influencia de los errores accidentales. Parece correcto identificar ese procedimiento con el nombre de medida de los ángulos por *reiteración*, al contrario del antiguo método de la medida por repetición».

Con el fin de resaltar todavía más la bondad del nuevo procedimiento, efectuó después la comparación entre ambas metodologías. Si  $a$  fuese el error probable de una puntería,  $b$  el de la media de los cuatro nonios y  $c$  la corrección de la división, para el arco comprendido entre un punto  $A$  y otro  $A + X$  de la división, al designar con  $e$  la corrección de un ángulo, obtenido al apuntar sólo una vez a cada objeto, se cumpliría que  $e = c \pm [2(a^2 + b^2)]^{1/2}$ . Si la medida se efectuase entonces, siempre sobre el mismo arco del limbo, la corrección de la media se reduciría a  $f = c \pm [2(a^2 + b^2)/n]^{1/2}$ . Es decir que incrementando el número de medidas se tiende a lograr la exactitud correspondiente al error  $c$ , inherente a este sector del limbo. Por el contrario, la repetición proporcionaría, para un ángulo medido  $n$  veces, una corrección dada por la expresión  $f' = \lambda + c'/n \pm (b/n)\sqrt{2} \pm (2a^2/n)^{1/2}$ , siendo  $\lambda$  el error intrínseco que conlleva el uso de la repetición. Es inmediato que el límite de  $f'$  es  $\lambda$ , un valor muy difícil de evaluar ya que depende tanto de la construcción del instrumento como de su manejo. Aunque podría anularse si las diferentes perturbaciones se compensaran recíprocamente, el observador nunca estaría seguro de haberlo conseguido. Struve aseguraba que «la experiencia había probado que, en general, en la medida de los ángulos horizontales el valor de  $\lambda$  era del orden de los dos segundos, e incluso de sólo una fracción de segundo. En cambio, si se aplicaba la repetición a la medida de ángulos,  $\lambda$  alcanzaría un valor considerable, a causa del desplazamiento continuo del eje horizontal en su parte central, movimiento que tiene lugar por el efecto de la gravedad, cada vez que se cambia la posición de los dos círculos unidos a la periferia, para pasar de la observación par a la impar. En este caso la exactitud del resultado es destruida por la repetición, de modo que una distancia cenital determinada por la observación simplemente conjugada, en las dos posiciones del círculo, es para cualquier instrumento bien dividido, más ajustada que el resultado deducido a partir de una centena de repeticiones efectuadas con el mismo instrumento».

El estudio de Struve no ofreció más alternativas, máxime cuando la exactitud en la medida de un ángulo terrestre, sobre el mismo sector del limbo, estaba supeditada al error inherente a dicho arco. «Consiguientemente, para disminuir sus efectos se debería medir el ángulo sobre  $m$  arcos diferentes, contando en cada caso con  $n$  observaciones, llegando a un error probable del resultado fijado por la expresión  $\varepsilon = \pm [(2a^2 + 2b^2)/mn + c^2/m]^{1/2}$ . Ya que los errores de la división seguían una ley expresada por los senos y cosenos de los ángulos múltiples, resultaba obvio que con cuatro nonios, se atenuaría completamente el efecto de tales errores regulares, al medir sobre dos arcos cuyos trazos iniciales difirieran  $45^\circ$ . Ahora bien, teniendo en cuenta que la ley anterior sólo es una aproximación, convendría basar la medida de los ángulos sobre mayor número de arcos, distribuidos simétricamente sobre  $90^\circ$  del limbo. Así los errores regulares quedarían siempre perfectamente eliminados». Por otro lado, el efecto de los errores accidentales se atenuaría mucho mejor con el aumento del número de puntos iniciales (orígenes) para los diferentes arcos.

Struve detalló a continuación las líneas maestras de la medición:

«... partiendo de un punto inicial del limbo, para fijar la dirección de uno de los vértices, se observan sucesivamente todos ellos... lo que da como resultado no sólo los ángulos entre pares de visuales, sino en general las direcciones relativas de los mismos, comparándolas con la dirección del qué se tomó como origen. Todas las observaciones realizadas para una posición invariable del limbo forman una serie. En las operaciones de Livonia, desde 1824, se observaron las direcciones formando seis series, desplazando 15' la posición inicial del limbo en cada una de ellas... En cada serie he apuntado dos veces a cada vértice, empleando los dos movimientos opuestos de los dos tornillos, es decir desplazando aparentemente, las señales hacia el centro del retículo, una vez de izquierda a derecha y otra de derecha a izquierda... Al final de cada serie se volvía a visar la primera señal para constatar que no había cambiado nada en el instrumento durante la observación de la serie. Las seis series se subdividieron además en dos grupos. En tres de ellas se situó el círculo vertical a la derecha del anteojo y en las otras a la izquierda. Con tal proceder... se elimina el efecto del error de colimación, o el de la imperfección de la imagen que podría resultar afectada durante la observación por iluminaciones muy diferentes: desde el heliotropo a señales difusas por su alejamiento».

Si bien fue Struve quien dio nombre al nuevo método de medir ángulos horizontales, él mismo reconocía que sus principios ya habían sido enunciados con anterioridad por el geodesta inglés William Mudge, en su obra *An account of the operations carried out for accomplishing a trigonometrical survey of England and Wales*<sup>223</sup>, aunque no hiciese uso del mismo<sup>224</sup>. Aunque Struve no recordase en este momento la medida de cerca de 3° de un arco de meridiano efectuada por Mudge en Inglaterra, si es obligado reseñarla por la difusión que alcanzó y por su posterior repercusión. La operación fue analizada en profundidad por el sabio astrónomo español José Rodríguez González<sup>225</sup> en el artículo *Observations on the Measurements of three Degrees of the Meridian conducted in England by Lieut. Col. William Mudge*, el cual fue leído por J. Mendoza Rios ante la *Royal Society* el 4 de junio del año 1812. Rodríguez demostró que en la estación central de Arbury Hill se había cometido un error de 5'' al calcular su latitud, «a pesar de la buena calidad de los instrumentos empleados y de la destreza y celo del observador».

El éxito logrado por Struve en sus primeras experiencias favoreció la rápida difusión del procedimiento en las operaciones geodésicas emprendidas en Rusia<sup>226</sup>. El general Tenner utilizó la reiteración parcialmente en la triangulación del arco de meridiano que discurrió por la provincia de Volinia y de forma exclusiva en las mediciones de Besarabia. Bessel fue otro de los que se decidió por el nuevo procedimiento, durante los años 1832 y 1833, en las triangulaciones del arco de meridiano

---

<sup>223</sup> El título se completaba con la frase: *from the commencement, in the year 1784, to the end of the year 1796*. El principio del método fue incluido en el volumen núm. 7 de la obra (p. 137), publicado en el año 1799.

<sup>224</sup> Struve indicaba que si lo hizo en cambio el coronel Everest durante los levantamientos geodésicos de la India, a partir de 1823.

<sup>225</sup> Remito al lector interesado en este astrónomo al artículo *Los trabajos geodésicos de D. José Rodríguez González* (Topografía y Cartografía. V 17. Núm. 96 (pp. 2-13) y núm. 97 (pp. 6-21).

<sup>226</sup> En la triangulación del arco de meridiano que discurrió por Lituania se empleó solamente el método de repetición, en los años 1818, 19, 20, 26, 27 y 28. Struve comentó que el éxito alcanzado por Tenner no hubiera sido posible sin contar con la observación simultánea de dos operadores y sin haber tenido presente siempre el movimiento en los dos sentidos, al efectuar las medidas. A partir del año 1827 se midió cada ángulo 20 veces con movimiento positivo y otras 20 con el negativo. Esa regla se tuvo en cuenta con dos círculos repetidores: Troughton y Baumann, así como con el teodolito de Reichenbach.

de Prusia. Baeyer lo empleó igualmente en sus levantamientos del litoral prusiano, entre los años 1837 y 1846, usando el mismo teodolito de Bessel: uno de 15 pulgadas de diámetro, fabricado por Ertel, y provisto de microscopios. Struve recomendaba además la conveniencia que los instrumentos geodésicos contasen siempre con un anteojo de verificación, procurando la simultaneidad de las observaciones practicadas con los dos anteojos (superior y de verificación). Reichenbach siguió su consejo y dotó de ese anteojo a todos sus instrumentos destinados a las operaciones geodésicas. Para Struve: «en geodesia, como en astronomía práctica, debería prevalecer el principio de que la fiabilidad de los resultados está asociado más a un reducido grupo de observaciones precisas, en todos sus elementos, que a numerosas observaciones menos exactas. Los progresos posteriores de las ciencias de observación dependen en gran parte de la aplicación del principio, que, dejando aparte la ventaja de la precisión, conduce bien a un considerable ahorro de trabajo, o bien a una evidente disminución de los cálculos, esto es, a un aprovechamiento del objeto más preciso para el hombre, el tiempo».

Para Struve hubo una diferencia esencial entre las medidas angulares efectuadas en los cuatro segmentos del gran arco ruso, independientemente de la morfología del terreno, instrumentos y métodos de observación. En Livonia efectuaron todas las medidas Struve y Wrangell, usando exclusivamente el mismo instrumento, con la regularidad del procedimiento supeditado a las condiciones atmosféricas. Struve comentó que hizo las observaciones con el anteojo superior, «además de todas las lecturas de los limbos sin excepción, mientras que Wrangell observaba con el anteojo de verificación y anotaba las cifras que yo le dictaba tras su cuantificación». En Lituania hubo un total de 12 observadores y tres instrumentos, pero usando sólo el método de repetición. En Volinia operaron 10 observadores que midieron con 4 instrumentos, empleando los dos métodos de observación. En Besarabia hubo 4 operadores que trabajaron con dos instrumentos, no obstante uno de ellos efectuó las medidas, con el mismo teodolito terrestre de Ertel, sobre 43 vértices; los otros tres sólo midieron los ángulos horizontales en 14 vértices. De manera que según Struve hubo uniformidad absoluta, en cuanto a instrumental, metodología y observadores en Livonia. Besarabia se aproximó a dicha uniformidad, Lituania contó con la ventaja de haber usado un solo método, aunque presentase la rémora impuesta por la notable diversidad de los instrumentos y de los observadores. En Volinia la heterogeneidad fue aún mayor, puesto que a la de los individuos hubo que añadir la de los procedimientos de observación. «La uniformidad en la ejecución de las medidas tiene siempre una cierta importancia, sobre todo cuando se trata de someter la exactitud de los resultados, de una vasta operación, a los postulados impuestos por los principios del cálculo de probabilidades».

DORPAT. 18 de abril de 1825

Satz I.	Arrohof Signal	85	56	15,3
	Kessel Signal	179	59	36,7
	Dasselbe			37,2
	Arrohof Signal			12,5
Satz II.	Kessel Signal	195	5	29,6
	Arrohof Signal	99	7	5,3
	Dasselbe			3,9
	Kessel Signal	195	5	27,2
Satz III.	Arrohof Signal	204	23	19,9
	Kessel Signal	308	21	46,6
	Dasselbe			46,3
	Arrohof Signal			19,3
Satz IV.	Kessel Signal	315	32	37,1
	Arrohof Signal	219	19	8,7
	Dasselbe			9,3
	Kessel Signal			36,1

DORPAT. 20 de abril de 1825

Satz V.	Arrohof Signal	234	16	40,3
	Kessel Signal	330	45	8,1
	Dasselbe			9,0
	Arrohof Signal			43,0
Satz VI.	Kessel Signal	345	44	16,7
	Arrohof Signal	249	15	49,2
	Dasselbe			48,8
	Kessel Signal			15,0
	Dasselbe			13,9

Distancias angulares medidas por Struve en el vértice Dorpat. Kessel y Arrohof fueron los otros dos vértices que formaron triángulo con el situado en el observatorio astronómico.

La exactitud de las medidas angulares fue tratada en el capítulo X del primer tomo de la Memoria presentada por W. von Struve, el cual hizo ver desde su comienzo que se trataba de un asunto capital: «la apreciación de la exactitud de un resultado numérico cualquiera, deducido de una operación geodésica, reclama el conocimiento del grado de precisión, con el que se efectuaron la medida de las bases y la de los ángulos». La importancia era obvia por otra parte, ya que conocidos los errores probables de unas y otros, teniendo en cuenta después la forma de los triángulos y su concatenación, y haciendo intervenir la exactitud de los acimutes observados, se puede evaluar la exactitud de la distancia entre los paralelos extremos del arco del meridiano medido, o lo que es lo mismo, la de su desarrollo lineal. Una primera idea de la exactitud de los ángulos observados pudo tenerse tras sumar los ángulos de cada triángulo y comparar su valor con la suma de 180° y el exceso esférico correspondiente<sup>227</sup>.

*Ángulos observados, y compensados, de tres triángulos*

Vértices	Valor medido	Angulo esférico	Ángulo plano compensado	Exceso esférico	Error de cierre
Staro-Nekrassowka	63°6'7".13	63° 6' 8"	63° 6' 7".96		
Izmail	75°14'15".42	75°14'16".30	75°14'16".24	0".142	2".62
Ssafianowka	41°39'34".97	41°39'35".84	41°39'35".80		
Sumas	179°59'57".52	180°00'00".14	180°00'00"		
Dorpat	95°58'26".34	95°58'26".96	95°58'26".30		
Arrohof	51°41'50".79	51°41'51".39	51°41'50".74		
Kersel	32°19'43".01	32°19'43".61	32°19'42".96	1".956	1".82
Sumas	180°00'00".14	180°00'01".96	180°00'00"		
Fuglenaes	61°27'23".28	61°27'23".03	61°27'22".95		
Jedei	5°50'36".06	5°50'35".81	5°50'35".73	0".261	0".76
Tyven	112°42'1".68	112°42'1".42	112°42' 1".32		
Sumas	180°00'1".02	180°00'0".26	180°00'00"		

Se han seleccionado los dos de los extremos y el que enlazó el Observatorio de Dorpat con la cadena geodésica. Las compensaciones se efectuaron repartiendo el exceso esférico, y el error de cierre, a partes iguales entre los tres ángulos; en los casos en que no fuese múltiplo de tres se ajustó el ángulo mayor con el excedente correspondiente.

En la obra de Struve figuran todas las diferencias entre ambas cantidades, es decir los errores de cierre relativos a cada uno de los triángulos que formaron parte de la cadena geodésica.

<sup>227</sup> Una aproximación inicial, válida para poder evaluar el error de cierre de cada triángulo, del exceso esférico se obtiene dividiendo la superficie del mismo por el cuadrado del radio y transformando los radianes obtenidos en segundos.

Conservando la división del gran arco de meridiano en las cuatro zonas ya sabidas, incluyó Struve una tabla, reproducida a continuación, con los valores del error medio de un ángulo, de sus cuadrados y de los errores probables asociados<sup>228</sup>:

Regiones	E. m. del ángulo	(e. m.) <sup>2</sup>	E. probable
Báltico	0'' .574	0.320	0'' .387
Lituania	0'' .685	0.470	0'' .461
Volinia	0'' .734	0.539	0'' .495
Besarabia	0'' .611	0.373	0'' .412

No obstante, Struve hizo ver inmediatamente después que tales errores de cierre no eran siempre el mejor exponente de las exactitudes en la medida de los ángulos de la triangulación. Efectivamente, dichos errores no son fiel reflejo de los errores probables, salvo que las observaciones se efectuaran libres de sesgo y sin rechazar algunas de las medidas para reemplazarlas por otras nuevas, con el fin de lograr una suma de los ángulos más acorde con el valor real. De hecho denunciaba Struve que «la historia de la geodesia nos ofrece varios ejemplos de operaciones en las que el acuerdo de las sumas indica una exactitud casi imposible de alcanzar con los medios empleados para la medida de los ángulos». El sesgo a que hacía referencia era por otra parte muy difícil de evitar, sobre todo cuando el mismo operador medía los tres ángulos del triángulo. Sin embargo, manifestaba Struve que en las regiones de Lituania, Volinia y Besarabia se daba una circunstancia que, abstracción hecha del repetido sesgo, obligaba a estudiar la exactitud por un procedimiento distinto del deseado acuerdo de la suma de los tres ángulos con 180° más el exceso esférico.

El propio general Tenner dijo expresamente que «si la suma de los errores de las observaciones sobrepasaba los 3'' se volverían a medir los triángulos». Struve comentó que ese caso sólo había sido excepcional, por haber ocurrido únicamente en tres triángulos de Lituania; asimismo indicó que ignoraba el número de veces que se había dado tal situación en el tramo de Volinia. Aunque resultase obvio que tales medidas contribuyeron al aumento de la exactitud total de la operación, también lo era que el rechazo de ciertas observaciones imposibilitaba la correcta evaluación de los errores probables a través del error de cierre de los correspondientes triángulos. Fue así como Struve se vio obligado a optar en esas tres regiones por una vía completamente diferente y apoyada en datos que, en cierto modo, fueron independientes de la atención de los observadores.

Solamente eligió el error de cierre para el análisis de los triángulos del Báltico, atendiendo al *modus operandi*. En efecto, los ángulos en Livonia se midieron, a juicio de Struve, y agruparon para la formación de los triángulos, libres de cualquier preocupación del observador sobre ese particular, habida cuenta de que todas las estaciones fueron excéntricas<sup>229</sup>. Todos los errores de cierre de los 31 triángulos figuraron en la página 148 de su *Gradmessung I* y en los números 96, 113-116, 140, 141 y 143 del primer tomo de la Memoria (Capítulo X). La suma de todos sus cuadrados ascendió a 30.59, de ahí que el cuadrado del error medio de un triángulo fuese de 0.987 y de 0.329 el

<sup>228</sup> Los valores reflejados en la tabla procedían de todos los errores de cierre triangulares recogidos en las páginas comprendidas entre las número 96 y la 143, ambas inclusive.

<sup>229</sup> Con tal condicionamiento, el observador realizó la medida en cada vértice sin saber, antes de efectuar la reducción al centro, el valor del error de cierre; se comprende así que se desprecupase del citado error.

cuadrado del error medio de un ángulo. Consiguientemente, resultó un error medio para el ángulo de 0.574 y un error probable para el mismo de 0.387. Unos resultados tan ajustados, obtenidos a partir del error de cierre, fueron corroborados al comparar los valores de un mismo ángulo, obtenidos en series diferentes, con su media. Entre 1823 y 1827, midió Struve 104 ángulos, efectuando 607 series<sup>230</sup> y obteniendo los errores que se indican en la tabla siguiente:

Errores angulares calculados por Struve (1823-1827)	
Cuadrado del <i>e.m.</i> de un ángulo con una sola serie	1.971
Error medio del ángulo con una serie	1".404
Error probable del ángulo con una serie	0".948
Cuadrado del <i>e.m.</i> de un ángulo con 5.84 series	0.337
Error medio del ángulo con 5.84 series	0".581
Error probable del ángulo con 5.84 series	0".392

Struve comprobó que ese error probable de un ángulo medio, 0".392, sólo difería en 5 milésimas de segundo del valor, 0".387, previamente obtenido a partir del error de cierre triangular. No obstante, pudo reducir aún más esa cifra al combinar entre sí las series I y IV, II y V, y III y VI, llegando a un error probable de sólo 0".338. Para él se trató de una reducción completamente legítima, en tanto que había circunstancias externas, ajenas al instrumento y al observador, que influían sobre los ángulos medidos. Aunque los efectos de tales perturbaciones afectasen muy poco a las mediadas reiteradas de un mismo ángulo, al suponerlas casi idénticas para observaciones diferentes realizadas en condiciones similares, si alcanzaban un valor no despreciable, al referirse a la suma de los tres ángulos del triángulo<sup>231</sup>. Struve consideraba perturbaciones exteriores las fases de las señales visadas, originadas por una iluminación lateral, y la refracción horizontal, en caso de producirse<sup>232</sup>.

Al medir los ángulos de la triangulación que discurrió por Lituania se hicieron generalmente dos series, cada una de ellas con 20 repeticiones. En este caso, el valor probable del ángulo definitivo se consideró igual a la media aritmética de dos valores aislados. Ya se comentó que a partir del año 1827 se efectuaron las repeticiones por los dos movimientos opuestos, apareciendo ciertas diferencias entre los ángulos P, observados con el movimiento positivo, y los ángulos N del movimiento negativo, cuyo valor medio fue estimado por Struve en  $m = 0".61$ . Hallando después los cuadrados de los residuos  $v^2 = (N - P - m)^2$  y su suma, la dividió luego por  $n - 1$ , siendo  $n$  el número de ángulos, para obtener el cuadrado del error medio de la diferencia  $N - P$ , dado por  $\xi^2 = [v^2] / (n - 1)$ . A partir de dicho valor dedujo el cuadrado del error medio  $(N + P)/2 = \xi^2/2 = \theta^2$ . Todos esos cálculos fueron realizados separadamente para cada uno de los tres instrumentos señalados en el cuadro adjunto:

<sup>230</sup> Esto es, una media de 5.84 series por ángulo. En el año 1823 se observaron los ángulos haciendo cinco series con desfases de 18°, en cambio a partir de 1824, el número de series fue de 6 y el intervalo entre ellas de 15°.

<sup>231</sup> Struve cifró en 0".140 el efecto probable de las perturbaciones exteriores para cada una de las dos direcciones que formaban el ángulo.

<sup>232</sup> Struve creyó, por los resultados obtenidos, que el efecto de las fases se había reducido al mínimo, teniendo en cuenta «el diseño y la forma exacta de las señales empleadas. En cuanto a las refracciones laterales, nos atrevemos a decir, que en las operaciones del arco báltico no hay el menor rastro de las mismas».

Instrumentos	$\xi^2$	$\theta^2$	Ángulo $(N + P)/2$	
			Error medio	Error probable
Círculo repetidor de Troughton <i>T</i>	4.42	1.104	1".051	0".709
Círculo repetidor de Baumann <i>B</i>	3.46	0.865	0".930	0".628
Teodolito de Reichenbach <i>R</i>	3.11	0.778	0".882	0".595

Teniendo luego en cuenta el número de ángulos medidos con cada instrumento, a saber: 131(*T*), 9 (*B*), 12 (*R*), 6 (*T* y *B*) y 16 (*T* y *R*), así como que las repeticiones se hicieron con los tres, resultarían los valores siguientes, para los 174 ángulos considerados:

*Cuadrados del error medio*

Ángulos	Instrumentos	$\theta^2$
131	<i>T</i>	1.194
9	<i>B</i>	0.865
12	<i>R</i>	0.778
6	<i>T</i> y <i>B</i>	0.492
16	<i>T</i> y <i>R</i>	0.471

El valor de  $\theta^2$  para los dos instrumentos se obtuvo sumando los respectivos  $\xi^2$  y dividiendo el resultado por cuatro

La media ponderada de tales valores proporcionó los valores que se indican a continuación, correspondientes a los 174 ángulos del arco de Lituania:

Errores angulares en el arco de Lituania	
Cuadrado del error medio de un ángulo	0.990
Error medio de un ángulo	0".995
Error probable de un ángulo	0".672

Análogo procedimiento al seguido en Lituania se aplicó para los ángulos medidos en el arco de Volinia y Podolia, cuyos triángulos se observaron con cuatro instrumentos diferentes: un círculo repetidor de Troughton y tres teodolitos. Sus 90 ángulos se midieron según el método de repetición, aunque en 35 de ellos se empleó el de reiteración. El cuadro que se acompaña seguidamente resume los resultados obtenidos por Struve al evaluar la exactitud de los ángulos:

Instrumentos	$\xi^2$	$\theta^2$	Ángulo $(N + P)/2$	
			Error medio	Error probable
Círculo repetidor de Troughton <i>T</i>	7.45	1.862	1".365	0".921
Pequeño teodolito de Ertel <i>e</i>	3.27	0.818	0".904	0".61
Teodolito universal de Ertel <i>U</i>	1.44	0.359	0".599	0".404
Teodolito n.º 17 <i>M</i>	4.98	1.244	1".115	0".753

Sin embargo, al final optó por dividir los ángulos en siete clases con diferentes  $\theta^2$ , obteniendo los valores siguientes:

Errores angulares en el arco de Volinia y Podolia	
Cuadrado del error medio de un ángulo	1.238
Error medio de un ángulo	1".113
Error probable de un ángulo	0".751

Los ángulos de los triángulos en la provincia de Besarabia fueron medidos, según Struve, con dos de los instrumentos más perfectos fabricados en Munich. El procedimiento empleado fue exclusivamente el de reiteración, realizando 12 series espaciadas 7°.5. En cada serie se visaba el vértice en las dos posiciones del antejo, con el círculo vertical a la derecha o a la izquierda. Para calcular la exactitud de las medidas angulares procedió de la forma siguiente. Si *A* y *B* fueron las lecturas obtenidas para una dirección arbitraria en las dos posiciones, el valor de la colimación del eje óptico sería  $c = [A - (B + 180)]/2$ , en relación con el objeto visado. Para Struve la exactitud de las medidas resultaría de la comparación de los diferentes valores de *c*, dentro de la misma serie, obtenidos para los distintos vértices. El único inconveniente es que se trataba de un proceso simple pero largo y tedioso, «a causa del gran número, más de dos mil *c*, que se tenían que comparar con las respectivas medias». Los resultados obtenidos para los 151 ángulos de Besarabia se detallan en la tabla adjunta:

Errores angulares en la provincia de Besarabia	
Cuadrado del error medio de un ángulo	0.705
Error medio de un ángulo	0".840
Error probable de un ángulo	0".567

Struve modificó a posteriori los valores anteriores por la impericia del observador en dos de los triángulos<sup>233</sup>, así lo recordaba: «el examen del diario permite ver que, en estas medidas, el observador aún no estaba versado en el uso del instrumento, como lo estuvo después, y que la dificultad de las observaciones aumentó considerablemente a causa de la gran elevación del aparato sobre el suelo, para tres de sus cuatro vértices». Teniendo en cuenta las observaciones suplementarias efectuadas por el observador para aumentar la fiabilidad de sus medidas, obtuvo Struve los valores que seguidamente se indican:

Triángulos especiales de Besarabia (I)		
Errores	T 460	T 461
Cuadrado del error medio de un ángulo	1.348	2.435
Error medio de un ángulo	1".161	1".560
Error probable de un ángulo	0".784	1".053

Combinado esos últimos valores con los previamente deducidos pudo obtener Struve las cifras definitivas que se reflejan en el siguiente cuadro:

Errores angulares definitivos en Besarabia	
Cuadrado del error medio de un ángulo	0.721
Error medio de un ángulo	0".849
Error probable de un ángulo	0".573



Los dos triángulos especiales de Besarabia.

<sup>233</sup> Los triángulos, identificados con los números 460 y 461, los formaron los vértices siguientes: (460) Gwosdautzi, Woltschenetz, Sagorjane; (461) Woltschenetz, Sagorjane, Ssuprunkowzi.

Struve finalizó su análisis, sobre las exactitudes de los ángulos en el gran arco ruso, con las conclusiones siguientes.

1. Las nuevas investigaciones sobre las observaciones efectuadas por el general Tenner redujeron a la mitad el peso de los ángulos.
2. Los ángulos de Besarabia fueron más exactos que los de Lituania y Volinia, bien por la mayor calidad de los instrumentos empleados, por la observación más rigurosa o por un estacionamiento más adecuado del teodolito.
3. La inferioridad de los ángulos en Volinia, en comparación con los de Lituania, no fue considerable, debiendo atribuirse a la mayor dificultad inducida por la excesiva altura del instrumento.
4. La superioridad de la reiteración sobre la repetición se hizo aún más patente en el hecho que se cita. El gran teodolito de Reichenbach y el teodolito universal de Ertel, de igual tamaño, fueron usados el primero en Lituania, para medir 12 ángulos siguiendo el método de repetición, y el segundo en Volinia, para medir 8 ángulos siguiendo el método de reiteración. En todos los casos se estacionó el instrumento sobre el suelo, resultando, a juicio de Struve, que el cuadrado del error medio de un ángulo, para el primero fue de 0.778 y para el segundo de 0.359, es decir menos de la mitad.
5. Sin embargo, esa superioridad sólo se daba para instrumentos con limbos muy bien divididos. Struve ofreció el ejemplo opuesto para un teodolito reiterador de 10 pulgadas de diámetro, construido por el Estado Mayor y empleado en la provincia de Volinia. Los resultados obtenidos al medir 5 ángulos, y acordar las series, fueron tan poco satisfactorios que Tenner midió los otros 30 ángulos por repetición: «era evidente por lo tanto que la división del instrumento empleado fue del todo defectuosa».
6. Quedaba por saber si los ángulos de una misma serie eran, en su promedio, demasiado grandes o demasiado pequeños, por la influencia de la metodología empleada o a causa de las perturbaciones exteriores. Para ello calculó Struve la media aritmética de todos los errores de cierre, teniendo en cuenta el signo de los mismos, reflejando el resultado en una tabla análoga a la que aquí se acompaña:

*Errores de cierre en el gran arco ruso*

Región	Número de errores		Suma de los errores		Error medio de un ángulo $e$
	<0	>0	<0	>0	
Báltico	19	12	10.95	12.17	0".04 ± 0".
Lituania	39	19	42.55	13.61	0.50 ± 0.10
Volinia	18	22	11.66	27.20	0.39 ± 0.13
Besarabia	27	25	18.14	24.67	0.13 ± 0.10

La tabla probaba que en el arco báltico y en el de Besarabia, donde se usó la reiteración, apenas fue perceptible el error medio de los triángulos; en Lituania y Volinia, por el contrario, donde se empleó la repetición, los valores reales del mismo error fueron respectivamente el quintuplo y el triple del error probable. Unos resultados que le hicieron escribir a Struve:

«tenemos, en este punto, una nueva prueba de la superioridad de la medida de los ángulos simples por reiteración, sobre la repetición».

7. En la tabla siguiente figuran los cuadrados del error medio ( $\eta$ ) para los seis tipos de ángulos, en esta parte del arco de meridiano:

*I. Los errores medios de los ángulos en el gran arco ruso*

Segmento del Arco	$\eta^2$
Báltico	0.329
Lituania	0.990
Volinia	1.238
Besarabia	0.705
Triángulo 460	1.348
Triángulo 461	2.435

Sin embargo, tales valores no eran verdaderamente comparables, ya que en el arco del Báltico figuraban incluidos los efectos de las perturbaciones exteriores, al contrario de lo que sucedía en las otras clases de ángulos. Struve añadía que las fases de las señales era el principal agente perturbador y que era mayor su efecto en las clases (2) y (6) que en la (1), a causa de la forma piramidal de las que se habían empleado en los ríos Duna y Danubio. Al no poder evaluarlo con exactitud, lo hizo a estima y lo fijó en el doble del valor alcanzado en las medidas de Livonia, debiendo incrementarse en 0.345 los cuadrados de los errores medios; una vez efectuadas las sumas correspondientes construyó la nueva tabla que se acompaña:

*II. Los errores medios de los ángulos en el gran arco ruso*

Segmento del arco	$\Omega = \omega^2 = 0.345 + \eta^2$	Peso ( $\pi = 1/\omega^2$ )
Báltico	0.329	3.040
Lituania	1.335	0.749
Volinia	1.583	0.632
Besarabia	1.050	
Triángulo 460	1.693	0.938
Triángulo 461	2.780	
Totalidad	1.134	0.884

8. Finalmente incluyó otro cuadro resumen en el que vació los errores medios y probables, bien para los ángulos «primitivos u observados» o para los ángulos corregidos en cada triángulo, a partir del error de cierre respectivo. Los nuevos cuadrados de los ángulos así compensados fueron identificados por  $(\omega')^2 = 2\omega^2/3$ .

Ángulos	Primitivos u observados			Corregidos (180° + Exceso)		
	$\omega^2$	$\omega$	E. p.	$(\omega')^2$	$\omega'$	E. p.
Báltico	0.329	0".574	0".387	0.219	0".469	0".317
Lituania	1.335	1".155	0".779	0.890	0".943	0".636
Volinia	1.583	1".258	0".849	1.055	1".027	0".693
Besarabia	1.050	1".025	0".692	0.700	0".837	0".565
T 460	1.693	1".301	0".877	1.129	1".063	0".718
T 461	2.780	1".667	1".125	1.853	1".361	0".918

En las medidas angulares de la triangulación finlandesa se empleó el mismo teodolito universal que había usado Struve en las provincias bálticas, además de otros dos instrumentos universales que también fueron cons-truidos en los talleres munitenses. Para dar mayor impulso a la observación se mejoraron sustancialmente los medios y la metodología, a partir del año 1835. Efectivamente, Oberg y Melan<sup>234</sup> fueron encargados desde entonces de tareas separadas, manejando cada uno su propio instrumento. Más adelante, Woldstedt fue el único responsable de la medición de los ángulos<sup>235</sup>. En Finlandia se observaron un total de 83 vértices, incluidos los de las redes de enlace entre las bases y la triangulación fundamental. Los tres teodolitos, de igual tamaño y óptica, fueron fabricados con los mismos principios y apenas se diferenciaban de los anteriores en detalles secundarios para el éxito de la operación. Struve comentaba que los tres aparatos formaban parte de la colección de instrumentos geodésicos con que contaba el Observatorio Astronómico Central de Púlkovo<sup>236</sup>.



Teodolito con doble antejo expuesto en el observatorio de Helsinki. Fue construido hacia 1820.

En Laponia se midieron los ángulos con el teodolito que había construido Otto Littmann en Estocolmo,

<sup>234</sup> Ambos habían estado observando conjuntamente con un solo instrumento, el cual requería dos operadores, uno para el antejo superior y otro para el inferior.

<sup>235</sup> No obstante, apuntó Struve que en 1845 se midieron, en una sola ocasión, simultáneamente los ángulos en diferentes vértices, al contar con dos instrumentos. La excepción tuvo lugar al enlazar la base de Uleaborg con la triangulación geodésica principal, responsabilizándose Sabler de la observación del vértice Kembele.

<sup>236</sup> Es más, añadía que el teodolito de Reichenbach, adquirido por él en el año 1820, estaba tan bien conservado, a pesar de de su empleo ininterrumpido durante 35 años y de los numerosos transportes en posteriores expediciones, que «aún se podría usar en las observaciones geodésicas más exactas». Poco más adelante se vanagloriaba de las transformaciones que había introducido en el mismo para mejorar su conservación, destacando sobre todo un trípode especial de hierro y madera, en cuya plataforma superior se colocaba el teodolito. Mención aparte merece la tienda de observación con 6 pies de alto y dentro de la que permanecía estacionado el instrumento, hasta que se daban por concluidas todas las observaciones.

muy parecido al usado por Bessel durante sus medidas del arco de meridiano en Prusia<sup>237</sup>. Su limbo tenía un diámetro de 12 pulgadas, efectuándose las lecturas sobre el mismo con la ayuda de 4 nonios, provistos después de microscopios. Struve subrayaba la bondad del instrumento, al recordar que su constructor se había formado en Munich y que poseía una máquina para dividir el círculo similar a las fabricadas por Ertel y antes por Reichenbach.



Fachada principal del Observatorio astronómico de Púlkovo. Fotografía tomada, el 17 de noviembre de 2014, por A. Reutov.

En las observaciones angulares de Finmarken se empleó, por deseo expreso de Hansteen, el teodolito universal de Repsold, perteneciente al Observatorio de Oslo. El instrumento era completo, puesto que se podían medir ángulos horizontales y verticales, gracias a sus dos limbos, de 7 pulgadas de diámetro el primero y de 6 el segundo; aunque el valor de la división fuera de 10', los microscopios del micrómetro, diametralmente opuestos, con su tambor permitían apreciar los 10". El anteojo tenía un diámetro de 12.5 líneas y una distancia focal de 12 pulgadas, estando comprendidos sus aumentos entre 25 y 30. Aunque careciese del anteojo inferior, para verificar la invariabilidad del portamicroscopio durante el movimiento acimutal del anteojo superior, comentaba Struve que se trataba de un instrumento tan perfecto como todos los que construían los hermanos Repsold<sup>238</sup>.

Struve no pudo ser más concreto al afirmar que a todo lo largo del arco septentrional se habían medido los ángulos horizontales «por reiteración de los ángulos simples»; es más comentó:

*«la instrucción que yo había dado para los trabajos de Finlandia no contenía ningún cambio esencial en el método de observación».*

<sup>237</sup> Este instrumento, como el de Litmann, no tenía anteojo de verificación.

<sup>238</sup> El fundador de la dinastía fue Johann Georg Repsold, un prestigioso ingeniero que se dedicó después a la fabricación de instrumentos astronómicos, geodésicos y topográficos. Al fallecer en 1830, la firma continuó con sus hijos Georg y Adolf, y después con sus nietos Oscar y Johann Adolf, el cual contribuyó decisivamente al progreso de la astronomía moderna.

Solamente reemplazó las 6 series efectuadas en la triangulación del Báltico por 5, con orígenes separados  $18^\circ$  sobre el limbo, cada una de ellas se dividió en dos mitades: una con el círculo vertical al Este y otra al Oeste. Fue especialmente interesante su información añadida: «por esta disposición las observaciones de los vértices casi fueron simultáneas y consecuentemente independientes de los cambios del instrumento que son proporcionales al tiempo». De ese modo, las observaciones angulares en esta región ofrecían, sobre las del Báltico, la ventaja de que un vértice se visaba 4 veces en cada serie, esto es un total de 20 veces en lugar de 12.

Al observarse el vértice en las dos posiciones del eje horizontal, para cada serie, se eliminó, como en el otro caso, la imperfección de las imágenes derivada de un objetivo descentrado, un defecto que podía ser evidente en el ángulo formado por dos vértices con diferente iluminación: al materializarse por el heliotropo o por la propia señal. No obstante, la principal característica de ese tramo de la triangulación fue la de que todas sus estaciones fueron excéntricas, colocándose el teodolito, en el interior de su tienda, a algunos metros del vértice. Las claves de las operaciones consiguientes fueron tenidas en cuenta por Struve: «esta distancia, concienzudamente media, y la dirección del centro<sup>239</sup>, comparada con las direcciones de los vértices trigonométricos, proporcionaban todos los datos necesarios para hallar la reducción al centro relativa a cada dirección observada<sup>240</sup>». Con tal proceder, los observadores ignoraban durante sus campañas el valor del error de cierre de los triángulos afectados. El responsable final del trabajo fue Woldstedt quien «lo ejecutó con la precisión que caracteriza a todos sus cálculos», tal como manifestó Struve. Finalmente compuso una tabla en la que se indicaron los valores de los tres ángulos de cada uno de los 70 triángulos de que constó la triangulación de aquel segmento del arco de meridiano.

Para calcular la exactitud de las medidas angulares de Finlandia aplicó Struve el mismo criterio empleado en las provincias Bálticas, esto es el del error de cierre. Dado que la suma de los cuadrados de dichos errores fue de 160.03, dedujo los valores siguientes:

### *I. Errores angulares en Finlandia*

Cuadrado del error medio de un triángulo	2.286
Cuadrado del error medio del ángulo observado	0.762
Error medio del ángulo observado	0".873
Error probable del ángulo observado	0".589

No obstante, como cada ángulo fue determinado mediante 5 series, evaluó también la exactitud de todos ellos teniendo en cuenta los valores individuales obtenidos en tales series. Los 210 ángulos y las 5 series habían proporcionado 1050 datos susceptibles de comparar con 210 medias. De todos ellos seleccionó 965 y 193 medias, obviando los ángulos en los que no fue idéntico el

---

<sup>239</sup> El valor de la reducción llegó a ser en ciertos supuestos superior al minuto.

<sup>240</sup> Los cálculos definitivos de la reducción, que solo podían hacerse tras la medida de una de las bases, fueron postpuestas hasta el fin de los trabajos de campo en 1845. Calculadas las reducciones al centro, en 1846, las aplicó Woldstedt a las direcciones medias, obtenidas con las 5 series, obteniendo así la relación completa de los ángulos correspondientes, para entregársela a Struve. Este reconoció su importancia para los cálculos geodésicos posteriores que se desarrollaron en Finlandia.

punto de mira: ya que fueron visados el heliotropo y la propia señal, que materializaban el vértice. Struve calculó la suma de los cuadrados, de las diferencias respectivas entre las medidas aisladas y sus medias, la cual resultó ser igual a 1421.9. Seguidamente la dividió por 772, es decir por la diferencia 965-193, para obtener después los errores que figuran en la tabla siguiente:

### II. Errores angulares en Finlandia

Cuadrado del error medio de una serie aislada	1.842
Cuadrado del error medio para 5 series	0.368
Error medio del ángulo observado con una serie	1".357
Error probable para el ángulo observado con una serie	0".915
Error probable del ángulo observado con 5 series, o ángulo medio	0".409

Ese error probable del ángulo medio, 0".409, deducido para 5 series con 20 punterías, fue prácticamente el mismo que el obtenido antes en los triángulos bálticos, 0".390, para 6 series con 12 punterías. Struve, sin embargo, encontró una notable diferencia entre una y otra triangulación, reflejada en el cuadro adjunto:

### Error probable de un ángulo medio

Triángulos	Error de cierre	Acuerdo de series
Provincias bálticas	0".387	0".390
Finlandia	0".589	0".409

Struve reconocía que en los ángulos de Finlandia se había visto obligado a introducir un factor, independiente del observador y del instrumento, cuyo valor probable cifró en  $(0".589^2 - 0".409^2)^{1/2} \approx 0".424$ ; con lo que el error asociado a cada una de las direcciones, que formaron el ángulo, fue de  $0".424/\sqrt{2} \approx 0".300$ . Tal perturbación sólo pudo ser debida, en su opinión, a dos causas: inadecuada forma de las señales y el descentrado del instrumento que caracterizó a esta región. La comparación entre los ángulos del Báltico y de Finlandia fue realizada también bajo otro punto de vista: el de la amplitud de los ángulos. Para ello se valió de las medias relativas a los errores de cierre, cuyos valores reflejó en el cuadro siguiente:

### Comparación de los errores en el Báltico y en Finlandia

31 triángulos del arco báltico	
Error de cierre	0".062 ± 0".068
Corrección angular	0".021 ± 0".023
68 triángulos de Finlandia	
Error de cierre	0".053 ± 0".071
Corrección angular	0".018 ± 0".024

Se comprueba por tanto que las correcciones medias halladas fueron del todo insignificantes, ya que resultaron menores que los errores probables correspondientes. Struve coligió que el teodolito universal empleado en las medidas proporcionó ángulos libres de cualquier error sistemático.

Las informaciones proporcionadas sobre la triangulación de Laponia se basaron en sendos memorándum redactados por Selander. El primero, fechado el 27 de junio de 1853, le fue entregado en Estocolmo, ciudad a la que se había trasladado para comentar con Hansteen y Selander los detalles de la publicación en la que se debería dar cuenta de las operaciones geodésicas, con las que se pretendía medir el arco de meridiano comprendido entre el Danubio y el mar Glacial.

9. KITTIS-VAARA.		10. PALJUKKA-VAARA.	
Vértice	Lectura	Vértice	Lectura
NIEMI-VAARA.....	0° 0' 0,000	KERROJUPUKKA ...	0° 0' 0,000
PULLINKI.....	40 13 56,765	YLINEN-VAARA ...	54 29 36,824
PALJUKKA-VAARA..	133 46 31,188	OLLOS-VAARA ....	98 11 9,642
		KITTIS-VAARA....	130 25 6,600
		PULLINKI.....	161 20 56,739
11. OLLOS-VAARA.		12. YLINEN-VAARA.	
PULLINKI.....	0° 0' 0,000	OLLOS-VAARA ....	0° 0' 0,000
PALJUKKA-VAARA..	66 27 58,226	PALJUKKA-VAARA..	69 9 7,733
KERROJUPUKKA ...	107 55 57,410	KERROJUPUKKA ...	133 56 13,258
YLINEN-VAARA ...	133 37 18,464	KUIVASKERO.....	196 31 21,981
13. KERROJUPUKKA.		14. KUIVASKERO.	
LUMI-VAARA.....	0° 0' 0,000	LUMI-VAARA.....	0° 0' 0,000
KUIVASKERO.....	51 21 36,103	PESSINKI.....	41 52 2,389
YLINEN-VAARA ...	124 11 33,456	OLLOS-TUNTURI...	90 31 8,447
PALJUKKA-VAARA..	184 54 53,171	OUNAS-TUNTURI..	91 9 38,055
		YLINEN-VAARA ...	264 15 50,114
		KERROJUPUKKA ...	308 50 49,685
15. LUMI-VAARA.		16. OLLOS-TUNTURI.	
PESSINKI.....	0° 0' 0,000	PESSINKI.....	0° 0' 0,000
OLLOS-TUNTURI...	56 33 55,307	OUNAS-TUNTURI...	92 29 20,054
KUIVASKERO.....	108 39 45,517	KUIVASKERO.....	271 5 8,683
KERROJUPUKKA ...	186 9 1,049	LUMI-VAARA.....	308 28 13,626

Vueltas de horizonte en 8 vértices de la triangulación de Laponia (Selander: 27.07.1853).

Ese primer documento contenía un listado con las direcciones relativas medias observadas, tanto en los 9 vértices que enlazaban la base de Öfver-Tornio a la cadena principal, como en los 23 vértices de la misma<sup>241</sup>. La segunda comunicación de Selander fue recibida por Struve el 24 de agosto de 1855, detallándose en ella los cálculos de los triángulos anteriores. Este segmento del arco de meridiano discurría entre Tornio y el lado Bäljatz-Vaara-Atjik, común a los triángulos de Laponia y del Finmarken noruego. Dicha triangulación presentaba la particularidad de haber observado varias de sus diagonales, de manera que sumando las 86 direcciones de los 21 triángulos y las 14 de las diagonales, resultaron un total de 100 direcciones observadas.

Poco comentó Selander a propósito de las medidas angulares, salvo que todas las direcciones fueron observadas con un teodolito de 12 pulgadas, en el que las lecturas se realizaron con nonios, durante los primeros años, y más tarde con la ayuda de microscopios. No obstante, Struve aprovechó el momento para volver a incidir sobre la importancia que tenía la duración de la observación angular para evaluar la exactitud de la misma:

*«...el ángulo entre dos vértices visados en el intervalo de pocos minutos tiene necesariamente mayor exactitud que el formado por dos direcciones en cuya observación se invierta un tiempo mayor<sup>242</sup>».*

Como punto de partida consideró los errores de cierre obtenidos para los 21 triángulos de Laponia, basándose en los datos proporcionados por Selander, mostrados en el cuadro adjunto:

*Errores de cierre en los triángulos de Laponia*

Triángulo	Error	Triángulo	Error	Triángulo	Error
226	-0".74	233	4".62	240	1".56
227	2".09	234	-2".21	241	-3".19
228	0".72	235	-1".19	242	2".21
229	2".76	236	-0".32	243	-0".46
230	-2".12	237	2".67	244	-2".39
231	-3".00	238	-0".50	245	2".40
232	1".59	239	0".32	246	-2".26

Al ser la suma de sus cuadrados igual a 98.57, resultarían los errores siguientes:

*Errores angulares en Laponia*

Cuadrado del error medio de un triángulo	4.693
Cuadrado del error medio de un ángulo	1.564
Error medio del ángulo observado	1".250
Error probable del ángulo observado	0".843

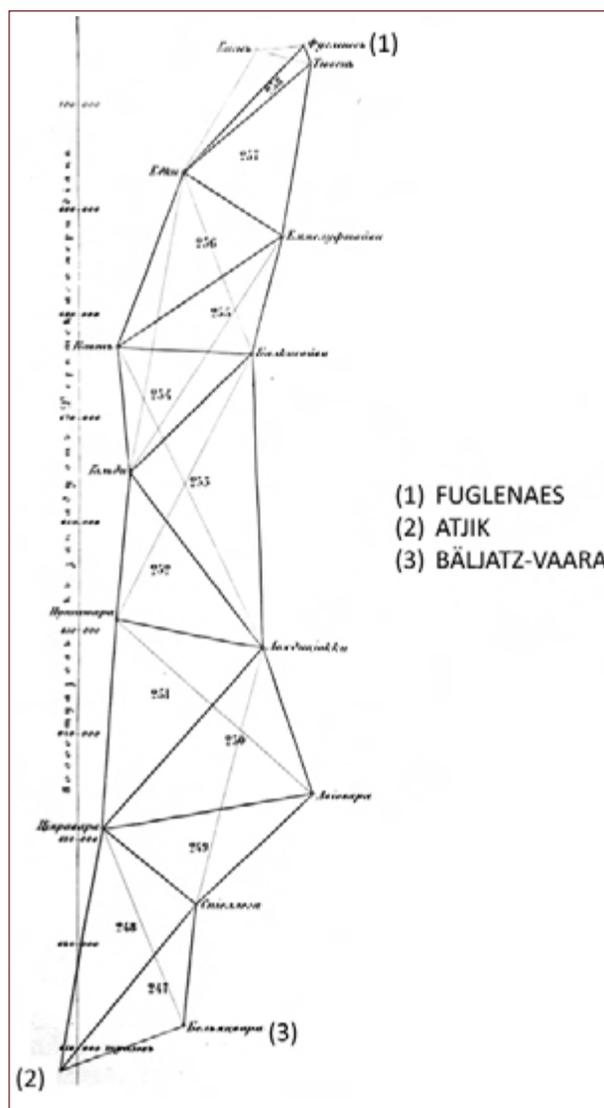
<sup>241</sup> Los triángulos comprendidos entre los números 226 y 246, ambos inclusive.

<sup>242</sup> Ese axioma le hizo elegir para su estudio, de las observaciones practicadas en la parte meridional del arco y en Finlandia, no las propias direcciones sino los ángulos entre vértices próximos o *los ángulos de mayor duración*, en función de los datos de partida.

Previamente había demostrado Struve que, supuestas dos direcciones cualesquiera de igual exactitud, el cuadrado del error medio de una dirección principal sería de 1.333, de manera que el cuadrado del error medio para un ángulo cualquiera, limitado por dos de tales direcciones, valdría 2.665. Un valor que comparado al de 1.564, correspondiente a un ángulo, deducido del examen de la suma de los ángulos de los 21 triángulos, evidenciaba que en lugar de las direcciones eran los ángulos entre los vértices próximos los que ofrecían mayores ventajas para formar los triángulos de Laponia. Struve continuó su razonamiento en estos términos:

*«en consecuencia me vi obligado a calcular definitivamente los triángulos partiendo de los ángulos formados entre dos direcciones principales próximas. Asimismo consideré necesaria la exclusión de las direcciones diagonales observadas, cuyo peso relativo era solamente 0.188 del peso medio de las direcciones principales.»*

El capítulo dedicado a Finmarken en el segundo tomo de la Memoria de Struve, es un resumen de la pormenorizada comunicación que le presentó Lindhagen<sup>243</sup> en la primavera del año 1854. En sus dos secciones discutió, en primer lugar, el enlace entre la base y el lado fundamental, dejando para la segunda el cálculo de las medidas angulares realizadas sobre los 15 vértices geodésicos principales, desde Atjik hasta Fuglenaes, es decir el extremo más septentrional del arco. Aunque este segmento de la cadena constara solamente de 12 triángulos (del número 247 al 258), en todos ellos (salvo en el número 257) se observaron diagonales; contando además con un vértice complementario, Haajen, que proporcionaba una segunda unión con el lado Jedki-Tyven. Si bien los tres ángulos de esos 12 triángulos requerían la observación de 50 direcciones en 14 vértices, finalmente se observaron 72, una vez incluida la estación de Haajen. Struve valoró la observación del gran número de diagonales:



Diagonales en el extremo más septentrional del arco escandinavo.

<sup>243</sup> Struve le había encargado que se ocupase del cálculo de esa parte de la triangulación. No obstante, contó con la ayuda del matemático Lorenz Leonard Lindelöf, el cual también efectuó independientemente los cálculos para un mayor control.

«un mérito singular de las operaciones de Finmarken, en tanto que era de suma importancia aumentar, en lo posible, la exactitud de unos resultados obtenidos con un instrumento de pequeñas dimensiones y usado en circunstancias muy poco favorables.»

En cuanto a la metodología empleada en esta región, afirmaba que allí se usó sobre todo la medida por reiteración, sin repetición, y que todas las estaciones fueron excéntricas; ofreciendo los diarios de la operación datos suficientes para efectuar la reducción correspondiente. El especial interés que mostró Struve por este último tramo de la triangulación hizo que incluyera, como anexo del segundo tomo de su obra, un capítulo titulado *Estudios relativos a las medidas angulares del Finmarken*<sup>244</sup>. Allí dividió los ángulos observados en 4 grupos distintos: I) los del año 1846, observados por Klouman y Lundh con un teodolito Repsold, II) los del año 1847, observados sólo por Klouman con idéntico instrumento, III) los de 1850, también medidos por Klouman con el aparato de Repsold y IV) los de 1850 que observó Lindhagen con un teodolito Ertel. Struve justificó esa división por el hecho de que los ingenieros noruegos no siempre trataran de igual forma sus observaciones, ni usaron el mismo procedimiento al efectuar las lecturas sobre el limbo. Para comparar entre sí esas medidas, partió Struve de que con un antejo de 30 aumentos, los que tenía el instrumento usado en Finmarken, el error probable de una sola puntería era según sus estudios próximo a los 1".50; con lo que para la media de 12 resultarían  $1".50/\sqrt{12} \approx 0".433$ . Usando ese valor y teniendo en cuenta los obtenidos con anterioridad, construyó Struve una tabla en la que mostró los errores probables y parciales siguientes<sup>245</sup>:

*Exactitud individual de las medidas hechas en Finmarken*

Error de lectura y accidental de una división	Error sistemático de una división	Error de puntería	Error probable e individual de una dirección media
0".261	0".300	0".433	0".59 (en 1846)
0".208	0".300	0".433	0".56 (en 1847)
0".149	0".300	0".433	0".55 (en 1850)
		Media	0".57

Como los tres valores obtenidos para el error probable fueron tan similares, resultaba evidente que, bajo los puntos de vista indicados, las observaciones de los tres años fueron de análoga precisión. Adoptando la media, 0".57, se llegaría a que el error probable de un ángulo dado, o para la diferencia de dos direcciones cualesquiera, determinada por 12 tomas, sería de 0".81. De igual modo el error probable de un ángulo cualquiera, con una sola toma, sería así de  $0".81 (12)^{1/2} \approx 2".80$  y el de una dirección cualquiera, determinada por una sola puntería  $0".57 (12)^{1/2}$ .

La medida de los ángulos verticales también fue contemplada en la obra de Struve, si bien de forma menos rigurosa, extensa y sistemática que la de sus homólogos horizontales. Dos fueron las ocasiones en que se abordó esta cuestión, la primera al determinar las latitudes geo-

<sup>244</sup> Aunque su interés histórico sea evidente, su contenido tan específico hace que no tenga cabida en la reivindicación que se realiza con este trabajo.

<sup>245</sup> En el próximo capítulo se volverá a incidir sobre la exactitud de las medidas angulares en el Finnmarken noruego.

gráficas, pues en su cálculo resultaba evidente la necesidad de medir las distancias cenitales de las estrellas<sup>246</sup>, tal como ya se comentó en el capítulo correspondiente. La segunda fue más geométrica que astronómica, ya que se incluyó en el anexo del segundo tomo de la memoria de Struve: *Ángulos horizontales y verticales observados en Finlandia*. Con la observación de dichos ángulos se pudo calcular el desnivel entre todos los vértices de aquel segmento de la triangulación y las altitudes respectivas. No obstante, hubo cuatro de ellos en los que estas se determinaron de manera directa, a saber: Lovisa<sup>247</sup>, Klemola, Ulkogrunni y Rontti.

El encargado de la primera fue un astrónomo adjunto del Observatorio de Helsinki, Johannes Henricus Eklöf, en el año 1846. El procedimiento elegido fue una doble nivelación geométrica entre el Golfo de Finlandia y el citado vértice. Las altitudes obtenidas fueron de 141.35 pies y de 141.07 pies, adoptándose al final la media de ambos valores: 141.21 pies suecos<sup>248</sup>. Como en aquella época la superficie del agua se hallaba 1.40 pies por debajo de su valor medio, la altitud del vértice resultó ser de  $141.21 - 1.40 = 139.81$  pies suecos, equivalentes a 21.297 toesas. Realmente, el valor medio era la altitud del suelo sobre el que se construyó la señal que materializó el vértice, de modo que sumándole las 1.564 toesas de su altura se obtuvo finalmente el valor de 22.861 toesas.

La altitud del vértice de Klemola, extremo Sur de la base de Uleaborg, también fue hallada por nivelación geométrica en el año 1845, resultando un valor de 2.422 toesas con relación al Golfo de Botnia. Como la altura de la señal colocada sobre el vértice fue de 1.83 toesas, la altitud efectiva del terreno ascendió sólo a 0.59 toesas. Ese mismo año obtuvo Woldstedt la altitud del vértice Ulkogrunni, igualmente referida al Golfo de Botnia. La altitud de la señal obtenida por este operador fue de 9.292 toesas, aunque, al ser su altura de 6.05 toesas, se dedujo para la del suelo el valor de 3.24 toesas. Woldstedt se responsabilizó igualmente del vértice Rontti, obteniendo 6.911 toesas para el extremo superior de la señal y 3.24 toesas para la altitud del terreno<sup>249</sup>. Las altitudes extremas de los vértices de este segmento de la triangulación fueron las de Klemola y la de Teiri-Harju (171 toesas), situado este último a 3 verstas ( $\approx 3.2$  km) de la localidad Latva-Mäki.

El apartado IV de su estudio lo dedicó Struve a la medida de los ángulos verticales, señalando en primer lugar que la exactitud de las distancias cenitales que se observaron dependió fundamentalmente de la calidad de los niveles y de la alidada vertical del instrumento. En estas observaciones de Finlandia, como en las de otros lugares, se leyeron siempre, y en cada puntería, los dos extremos de la burbuja; reduciendo las lecturas medias de los limbos a las que se hubiesen obtenido con la posición normal del nivel. En cada visual se apreciaron las décimas de sus divisiones, de una magnitud próxima a las fracciones de segundo. Struve incluyó, como muestra, una tabla con los valores de una división para cada uno de los instrumentos usados, la cual se reproduce junto a estas líneas:

---

<sup>246</sup> La distancia cenital de una estrella es el ángulo formado por la visual a la misma y la vertical física del lugar de observación.

<sup>247</sup> La estación de Lovisa fue en su momento referencia altimétrica de Finlandia.

<sup>248</sup> Antes de 1863, el pie de Estocolmo equivalía a 29.69 cm.

<sup>249</sup> En este caso se obtuvo el desnivel entre el vértice y una pértiga colocada verticalmente en las aguas del Golfo de Botnia.

## Valor de una división para los tres niveles empleados

I	II	III
2".11 (1832-1835)	2".32 (1835)	3".66 (1841-1843)
2".44 (1837 y 1838)		4".28 (1845)
1".83 (1839)		
0".69 (1843)		
2".90 (1844)		

Las distancias cenitales se redujeron al centro<sup>250</sup> en cada uno de los vértices, entendiéndose por tal el extremo superior de la señal<sup>251</sup>; en todos los casos se indicó la altura de la misma, expresada en toesas<sup>252</sup>. Las alturas de las señales estuvieron comprendidas, generalmente, entre 1.7 y 2 toesas, con las excepciones siguientes: en pocas ocasiones el intervalo fue de 2 a 3.25 toesas, además de 6.68 toesas, 6.95 toesas y 5.76 toesas, correspondientes respectivamente a los vértices Hypen-Mäki, Ulkogrunni y Rontti. También subrayó Struve que el extremo superior de la señal sólo fue visado muy excepcionalmente, indicando que el punto de mira coincidía de ordinario con el centro la mitad de la viga vertical colocada en el vértice, o con el lugar en que era sujeta por los contrafuertes.

En las reseñas de las observaciones efectuadas figuró en primer lugar la fecha y hora de las mismas, conteniendo las diferentes columnas todas las distancias cenitales ya reducidas. Struve aclaraba que «todas las distancias cenitales reseñadas en la misma línea horizontal correspondían a idéntico tiempo verdadero, señalado en la primera columna, pues las medidas de las distancias cenitales se realizaban, como las de las direcciones horizontales, en el orden de las punterías: con el círculo a la derecha sobre *A, B, C, D...*, y con el círculo a la izquierda sobre *...D, C, B, A*. El círculo vertical del teodolito universal estaba dividido a intervalos de 4'. De sus cuatro nonios sólo fueron leídos dos, colocados en los extremos de un diámetro horizontal, «puesto que así se obtenían lecturas más cómodas y por ende más exactas». Acto seguido reprodujo Struve la copia completa de las observaciones que se realizaron en la primera estación «para que su contenido fuese mucho más comprensible»:

<sup>250</sup> Cada reducción al centro se componía de dos elementos, uno relativo a la separación vertical entre el eje horizontal del instrumento y el centro del vértice sobre el que se efectuaba la observación, y otro que se correspondía con el segmento definido por el punto de mira y el centro estimado de la señal en cuestión.

<sup>251</sup> Hubo tres vértices: Mäki-Päällys, Svartvira y Ristisaari en los que las distancias cenitales fueron directamente reducidas al propio terreno.

<sup>252</sup> Struve puso como ejemplo el extremo más septentrional de la base de Elimä, en el que la altura de la señal fue de 1.88 toesas, «es decir que el borde superior de la señal estaba 1.88 toesas por encima del terreno, o bien sobre la superficie de mampostería, con base sustentada por ladrillos, y que contenía el final de la base».

*Extremo septentrional de la Base de Elimä (5 septiembre de 1844)*

Hora verdadera 3 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup>						
P. visado	Extremo Sur		Brefberg		Linnan-Kallio	
Círculo a la derecha						
Nivel	7 <sup>p</sup> .0	-11 <sup>p</sup> .1	8 <sup>p</sup> .7	-9 <sup>p</sup> .3	9 <sup>p</sup> .3	-8 <sup>p</sup> .8
Lecturas	Nonio I	90°59'25"		90° 27'27"		89°17'53"
Nonio II		42		37		71
Media		33.5		32.0		62.0
Círculo a la izquierda						
Nivel	8 <sup>p</sup> .3	-9 <sup>p</sup> .7	9 <sup>p</sup> .6	-8 <sup>p</sup> .4	9 <sup>p</sup> .1	-9 <sup>p</sup> .0
Lecturas	Nonio	I 270°51'14"		271° 20'14"		272° 29'47"
Nonio II		7		12		45
Media		10.5		13		46
Corrección		-1.4.1".45 = -2.0		1.2.1".45 = 1.7		0.1.1".45 = 0.1
Medias corregidas						
Círculo (D)		$a = 90^{\circ} 56'27''.6$		$90^{\circ} 27'31''.$		$89^{\circ}18' 2''.7$
Círculo(I)		$b = 270^{\circ}51'8''.5$		$271^{\circ}20'14''.7$		$272^{\circ}29'46''.1$
$(a - b)/2$		$90^{\circ}2'39''.5$		$89^{\circ}33'38''.2$		$88^{\circ}24'8''.3$
$(a + b)/2$		$0^{\circ}53'48''.0$		$0^{\circ}53'52''.9$		$0^{\circ}53'54''.4$
Reducción al centro de $(a - b)/2$						
2'0".2		1'36"		2'42".1		
Distancia cenital		$90^{\circ}4'39''.7$		$89^{\circ}34'41''.8$		$88^{\circ}26'50''.4$
Los valores de $(a + b)/2$ marcan la posición del cenit						

Obsérvese que Struve incluyó en el listado de estas medidas la posición del cenit,  $Z$ , calculada como media aritmética de las lecturas obtenidas con el círculo a la derecha ( $D$ ) y a la izquierda ( $I$ ), es decir que  $Z = (a + b)/2$ , dando por supuesto que las posiciones correspondientes a una misma serie deberían ser idénticas, siempre que las observaciones hubiesen sido exactas y si la variación de la refracción, durante las mismas, pudiera considerarse uniforme. De esa forma las diferencias entre las  $Z$  de una misma serie serían un buen indicativo de la exactitud de las distancias cenitales obtenidas, a las que añadió también su valor medio  $Z^*$ . Tales diferencias correspondientes le valieron además para controlar las medidas, ya que cada distancia cenital de una serie contaría al menos con dos valores de  $Z$ .

Sin embargo, la medida de los ángulos verticales en esta región no fue completa. Struve recordó que en los cuatro vértices del triángulo<sup>253</sup> 225, que sirvió de enlace entre las triangulaciones de Finlandia y de Laponia, no tuvieron lugar. Tampoco se efectuaron en los vértices Kembele y Linnunsilmä, los cuales formaban parte de la triangulación de enlace asociada a la base Uleaborg. Sobre el resto de las 84 estaciones si se midieron un total de 693 distancias cenitales relativas a 335 visuales. De ello se dedujo que cada visual fue repetida un promedio de 2.07 veces. Es decir las 695 Z le proporcionaron a Struve 213 Z\*, una para cada serie, de modo que el valor de Z\* se calculó a partir de  $n = 3.25 Z$  diferentes. La comparación de dichos valores aislados de Z con sus medias respectivas, Z\*, permitieron deducir el error probable de una medida aislada y fijarlo en torno a los 1".49; una exactitud casi sorprendente, si se piensa en que la señal sólo fue visada un par de veces y que la lectura de las distancias angulares sólo se hizo con dos nonios, tal como manifestaba Struve. El error probable del cenit medio Z\* que dedujo fue de  $1''.49/\sqrt{n}$ , siendo  $n$  el número de señales visadas en la serie: al partir de que  $n$  fuese 3.25, se obtuvo un error de 0".83. Finalmente, el error probable de una distancia incompleta Z, observada tan sólo en dos posiciones del instrumento fue de  $1''.49(1/n + 2)^{1/2}$ ; en el supuesto considerado de  $n \approx 3.25$ , resultará un error de 2".26, que ascendería a 2".56 cuando  $n$  fuese la unidad.

<b>Vértice Laton-Mäki</b>				
<i>Angulos verticales. Terreno - 2,12 toesas</i>				
	HYYPÄN-MÄKI	SARVI-KANGAS.	LINNUNSIIMÄ.	Z* MOTEN.
1844. Juill. 27. 21 <sup>a</sup> 7 <sup>m</sup>	90° 4' 10",4 (35",1)	90° 4' 19",7 (39",2)	90° 2' 51",1 (39",2)	0° 4' 44",5 ou 39",2
» 27. 21 28	4 23,0 (38,4)	4 23,5 (38,2)	2 55,1 (41,4)	0 4 45,0 » 39,8
Log. dist.	4,20681	4,18285	4,11830.	
-----				
<b>Vértice Ajos</b>				
<i>Angulos verticales. Terreno - 2,48 toesas</i>				
	KOOKO-MÄKI	TORNEA.	KALLIN-KANGAS.	KEMI.
1842. Sept. 2. 22 <sup>a</sup> 48 <sup>m</sup>	90° 5' 44",8 (31",0)	90° 2' 23",2 (31",0)	89° 57' 29",7 (31",8)	89° 57' 33",4 (34",2)
» 2. 23 25	5 45,3 (31,4)	2 26,5 (33,8)	57 21,2	57 31,6 (33,2)
» 14. 21 25			57 11,0 (30,2)	
» 15. 2 51				
Log. dist.	4,09886	4,11900	3,93690	3,91744
	KIVALO.	ULROGRUNNI.	Z* MOTEN.	
1842. Sept. 2. 22 <sup>a</sup> 48 <sup>m</sup>	89° 49' 31",9 (36",1)		1° 15' 32",8	
» 2. 23 25			1 15 32,8	
» 14. 21 25	49 9,0 (29,8)	90° 8' 14",4 (31",2)	1 15 30,4	
» 15. 2 51	49 13,9 (33,8)	8 44,3 (22,3)	1 15 26,0	
Log. dist.	4,14286	4,23847.		

Extracto de las fichas técnicas correspondientes a los vértices Ajos y Laton-Mäki.

<sup>253</sup> El triángulo lo formaron los vértices Kaama-Vaara, Tornio y Kivalo. También se consideró parte del triángulo a la estación astronómica situada entre Kooko-Mäki y la iglesia de Tornio.



La isla de Ulkogrunni al Noreste del golfo de Botnia y los lados de la triangulación que concurrían en su vértice.

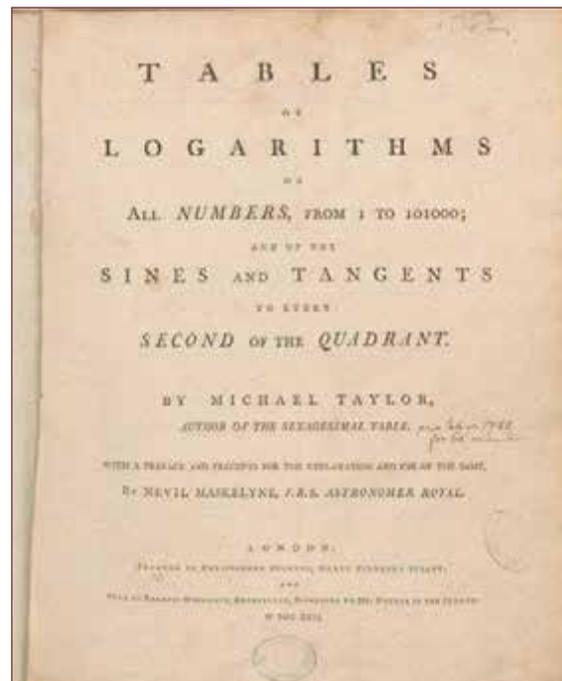
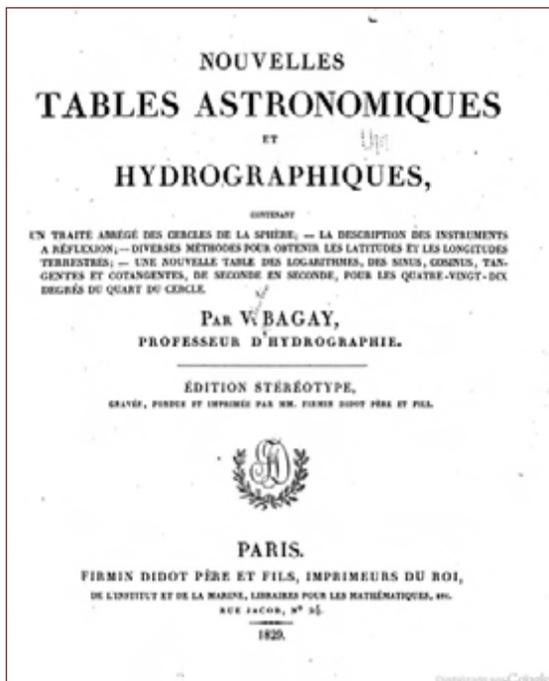
En el anexo se incluyó además un listado con las 90 fichas técnicas de cada estación, una por página. En todos los casos se identificó el vértice con su nombre propio, acompañado con la época en que se hizo la observación y con el nombre del operador responsable de la misma. A continuación figuraron dos apartados, uno dedicado a los ángulos horizontales y otro a los verticales. De ellas se han elegido las correspondientes a los vértices Laton-Mäki y Ajos, observados los dos por Woldstedt, por la clara incidencia que tuvo en los mismos la refracción atmosférica. En el primer caso se efectuó la medida el 27 de julio de 1844, evidenciando la diferencia de  $12''.6$  (vértice Hypän-Mäki) un cambio notable de la refracción en sólo 21 minutos<sup>254</sup>. En el segundo vértice se realizaron las medidas de los ángulos verticales en el mes de septiembre del año 1842. Lo más reseñable de las mismas fue que el vértice Ulkogrunni estuvo durante semanas por debajo del horizonte marino, aunque finalmente pudo ser visado por refracción «extraordinaria» los días 14 y 15; la explicación del fenómeno fue obvia, al estar el vértice localizado a muy poca altitud y en una isla alejada de la costa.

<sup>254</sup> La explicación radicó en el hecho de que la visual formada por ambos vértices pasaba, casi por completo, por encima del Golfo, mientras que en los otros dos casos discurrieron mayoritariamente por tierra firme.

# 9

## CÁLCULO Y COMPENSACIÓN

El desarrollo imparable de la informática y del cálculo numérico ha logrado, en nuestros días, progresos inimaginables en el primer tercio del pasado siglo y menos aún en el último del siglo XIX. Se comprende por tanto que el posible lector medio de este trabajo no valore, en su integridad, las grandes dificultades que hubieron de superar los geodestas, comandados por W. von Struve, cuando se efectuó el cálculo de la triangulación extendida por el gran arco de meridiano ruso-scandinavo y el posterior ajuste de la misma. No obstante, debe de recordarse que ya pudieron contar con un potente instrumento de cálculo, que hoy día pasa casi desapercibido, como fueron los logaritmos<sup>255</sup>, el avance introducido por sus aplicaciones no fue nada baladí: baste decir que transformaban los productos en sumas, los cocientes en restas y las potencias en productos. Su ventaja se hacía aún más patente cuando se trataba de operar con números que tenían muchas cifras deci-



Tablas de logaritmos empleadas por Struve en sus cálculos de la triangulación

<sup>255</sup> El logaritmo,  $L$ , en base  $B$ , de un número  $N$ , es el exponente a que habría de elevarse dicha base para obtener el número. De manera que si la base fuese 10, resultaría  $10^L = N$ , esto es, 1 es el logaritmo de 10, 2 sería el logaritmo de 100, puesto que  $100 = 10^2$ , asimismo el logaritmo decimal de 2 sería  $\approx 0.301030$ , ya que  $10^{0.301030} \approx 2$ .

males y no se disponía de las máquinas de calcular, con prestaciones análogas a las que ahora ofrecen. El impacto causado por la aparición de los logaritmos en la comunidad científica, y de manera especial en la matemática, se mantenía intacto muchos años después de su aparición<sup>256</sup>, a comienzos del siglo XVII, así lo prueba el comentario tan lúcido de Laplace:

«con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días, el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos.»

Con los primeros cálculos de la triangulación, se obtenían los valores de los ángulos de cada uno de los triángulos, como diferencia de las distancias angulares halladas al efectuar la vuelta de horizonte en el respectivo vértice; unos valores que estaban sujetos a ciertos condicionantes. En primer lugar ha de tenerse en cuenta que la suma de todos los ángulos en el vértice común debería ser de  $360^\circ$ , al mismo tiempo se debía cumplir que la suma de los tres ángulos de cada triángulo fuese igual a  $180^\circ$  más el exceso esférico; la tercera y última condición establecía que el valor de un cierto lado, en un polígono con vértice central, tenía que ser independiente del trayecto elegido para su cálculo. La segunda condición se cumplía de inmediato, una vez determinado el error de cierre y corregidos los tres ángulos con la tercera parte del error<sup>257</sup>. El cálculo del exceso esférico de cada triángulo era por tanto obligatorio y se obtenía con relativa facilidad,

---

<sup>256</sup> Los logaritmos aparecieron por primera vez en el año 1614, dentro de la obra del matemático escocés John Napier (Neper): *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, ejusque usus in utroque Trigonometría; ut etiam in omni logística mathematica, amplissimi, facillimi, et expeditissimi explicatio*. La simplificación inducida por los logaritmos de Napier aumentó todavía más con la modificación introducida por su compatriota Henry Briggs tres años después: *Logarithmorum Chilias Prima*, en la que incluyó su primera tabla de logaritmos decimales; sustituyendo la constante de Neper por el número 10. La base de los primeros o constante de Neper, introducida por este, fue identificada después por Leonhard Euler con la letra e, un número que se define como  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828$ .

Las tablas de logaritmos más celebradas del siglo XIX fueron las que Napoleón le encargó al matemático Gaspar Riche de Prony en el año 1792. La tarea fue ímproba, pues tuvo que coordinar un equipo con 70 u 80 colaboradores, entre los que se encontraban Legendre y Carnot. El voluminoso resultado, con 19 volúmenes manuscritos, fue presentado en el año 1801 con el título *Tables Logarithmiques et Trigonometriques*, aunque coloquialmente fueron más conocidas con el nombre de las Tablas del Catastro. El motivo resultaba obvio, fueron calculadas en las oficinas del Catastro dirigidas por Prony, el cual era también director de *L'École des Ponts et Chaussées*. La obra es considerada como el monumento por excelencia a los cálculos realizado por el hombre, no es de extrañar por tanto que Lagrange, Laplace y Delambre cantaran sus excelencias cuando las presentaron en el Instituto de Francia, en la sesión que tuvo lugar el día 11 germinal del año 9 (31 de marzo de 1802). Más tarde se resumieron en un solo volumen, usado con profusión en el Servicio Geográfico de la Armada (Francia), *Tables des logarithmes a huit decimales des nombres entiers de 1 a 120000 et des sinus et tangentes de dix secondes en dix secondes d'arc dans le systeme de la division centesimale du quadrant*. No obstante, Struve usó dos tablas diferentes, de siete cifras decimales, confeccionadas una por el francés Valentin Bagay Profesor de Hidrografía, y otra por el inglés Michael Taylor, calculista ocasional del *Board of Longitude*. La primera se publicó en el año 1829 con el título *Nouvelles Tables Astronomiques et Hydrographiques*. La segunda, publicada en el año 1792, se tituló *Tables of logarithms of all numbers, from 1 to 101000; and of the sines and tangents to every second of the quadrant*. Las tablas de logaritmos se usaban todavía en las primeras décadas de la segunda mitad del pasado siglo. En el Instituto Geográfico y Catastral de España y en la Escuela de Peritos Topógrafos, ubicada junto a su sede central, se manejaban con asiduidad las reediciones de la que preparó, en el siglo anterior, Heinrich Ludwig Schrön, Director del Observatorio de Jena: una tabla, con siete cifras decimales, de los números 1 al 108000, de senos, cosenos, tangentes y cotangentes, de diez en diez segundos, con una tabla de partes proporcionales. Recuerdo, con nostalgia, que en la referida Escuela, entre los años 1962 y 1966, resolví numerosos ejercicios de trigonometría haciendo uso de la citada tabla, incluyendo triangulaciones topográficas y determinaciones astronómicas del acimut, bien por observaciones al Sol o a la estrella polar, en un cierto instante o en alguna de sus máximas digresiones.

<sup>257</sup> El error debía ser inferior a una cierta tolerancia, dependiente del instrumental y metodología observacional empleada.

ya que la superficie del triángulo se podía evaluar, con la aproximación requerida, en función de los valores provisionales de los ángulos y de los lados. Únicamente ofrecía cierta dificultad la obtención del radio, cuando se optaba por la esfera media de Gauss, cuyo valor es la media geométrica de los dos radios de curvatura principales del elipsoide de revolución terrestre: el de la sección meridional,  $\rho$ , y el del primer vertical,  $N$ . Recuérdese que para un elipsoide dado ( $a, e^2$ ), ambos radios vienen dados por las ecuaciones siguientes:

$$N = a(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-0.5} \quad \text{y} \quad \rho = a(1 - e^2)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-1.5}$$

De manera que el radio de la esfera de Gauss sería

$$R = a(1 - e^2)^{0.5}(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-1}.$$

La mayor parte de la Memoria preparada por Struve estuvo precisamente dedicada al cálculo y compensación de la cadena geodésica principal y al de las triangulaciones que la enlazaron a las diferentes bases, doce fueron los capítulos correspondientes: VIII, IX, XI, XII y XIII del tomo primero y VIII (p), IX, X, XII, XIII, XIV y XV del tomo segundo. Aunque reconociera al comienzo del primer capítulo la importancia que venía teniendo la aplicación del teorema de Legendre<sup>258</sup> para facilitar el cálculo en las operaciones geodésicas, también hizo ver la necesidad de introducir términos correctores cuando se trataba de triángulos con dimensiones considerables o bien de triángulos cuyos lados fuesen líneas geodésicas del elipsoide. Si bien fue Karl Ignatz Buzengeiger quien dio en 1818 la relación entre las superficies de un triángulo esférico y la de otro análogo del plano, fue Gauss el que planteó y resolvió íntegramente el problema del exceso sobre la esfera y sobre el elipsoide, generalizándolo incluso para superficies más complicadas. Básicamente se trataba de sustituir el radio genérico de la esfera por el que tendría la de Gauss, asociada a la latitud media del triángulo considerado. Struve basó sus cálculos<sup>259</sup> en el elipsoide propuesto por Bessel en el año 1841: con un semieje mayor de 6377.397155 km y otro menor<sup>260</sup> de 6356.078962 km.

<sup>258</sup> Adrien Marie Legendre incluyó el enunciado de su teorema (sin demostración) en un artículo titulado *Memoire sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figura de la Terre* (1787). En resumen venía a decir lo siguiente: cualquier triángulo esférico, con lados insignificantes en relación con su radio, puede sustituirse por otro plano con las mismas longitudes de sus lados y con unos ángulos iguales a los del esférico disminuidos en un tercio del exceso. De modo que el triángulo esférico  $ABC$ , con lados  $a, b, c$  y exceso  $E$ , podría calcularse como uno plano de ángulos  $A_p, B_p$  y  $C_p$ , cuyos valores serían  $A_p = A - E/3, B_p = B - E/3$  y  $C_p = C - E/3$ . Si las dimensiones del triángulo esférico no fuesen despreciables, en comparación con el radio, habría que introducir unas correcciones para cada ángulo, cumpliéndose en tal caso las igualdades siguientes:

$$A_p = A - E/3 - (E/60R^2)(P^2 - a^2), \quad B_p = B - E/3 - (E/60R^2)(P^2 - b^2) \quad \text{y} \quad C_p = C - E/3 - E/60R^2)(P^2 - c^2),$$

siendo  $P^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/3$ ; el valor máximo de esa corrección para lados con un desarrollo de 200 km es de tan solo una milésima de segundo. En el supuesto de los triángulos situados sobre el elipsoide se podrían introducir tres nuevas correcciones dadas por  $-(E/12)(K_A - K)/K, -(E/12)(K_B - K)/K$  y  $-(E/12)(K_C - K)/K$ , siendo  $K_A, K_B$  y  $K_C$  las curvaturas de Gauss en los tres vértices;  $K$  sería la media aritmética de tales curvaturas. Sin embargo, el valor numérico de estas para los triángulos de lados próximos a los 200 km es menor de una milésima de segundo, de ahí que en tales casos no se incluyesen las citadas correcciones al calcular la triangulación.

<sup>259</sup> Struve hizo un triple uso del exceso, para la resolución de los triángulos de la cadena geodésica, para el cálculo de las coordenadas polares (en los arcos parciales definidos por dos estaciones astronómicas consecutivas) y para la resolución de triángulos rectángulos sobre el elipsoide terrestre, empleados al determinar las distancias entre los paralelos definidos por tales puntos de Laplace.

<sup>260</sup> Struve dio la relación entre los semiejes siguiente:  $b/a = 298.1528/299.1528$ . El valor del aplastamiento polar era justamente  $\alpha \approx 1/299.1528$ .

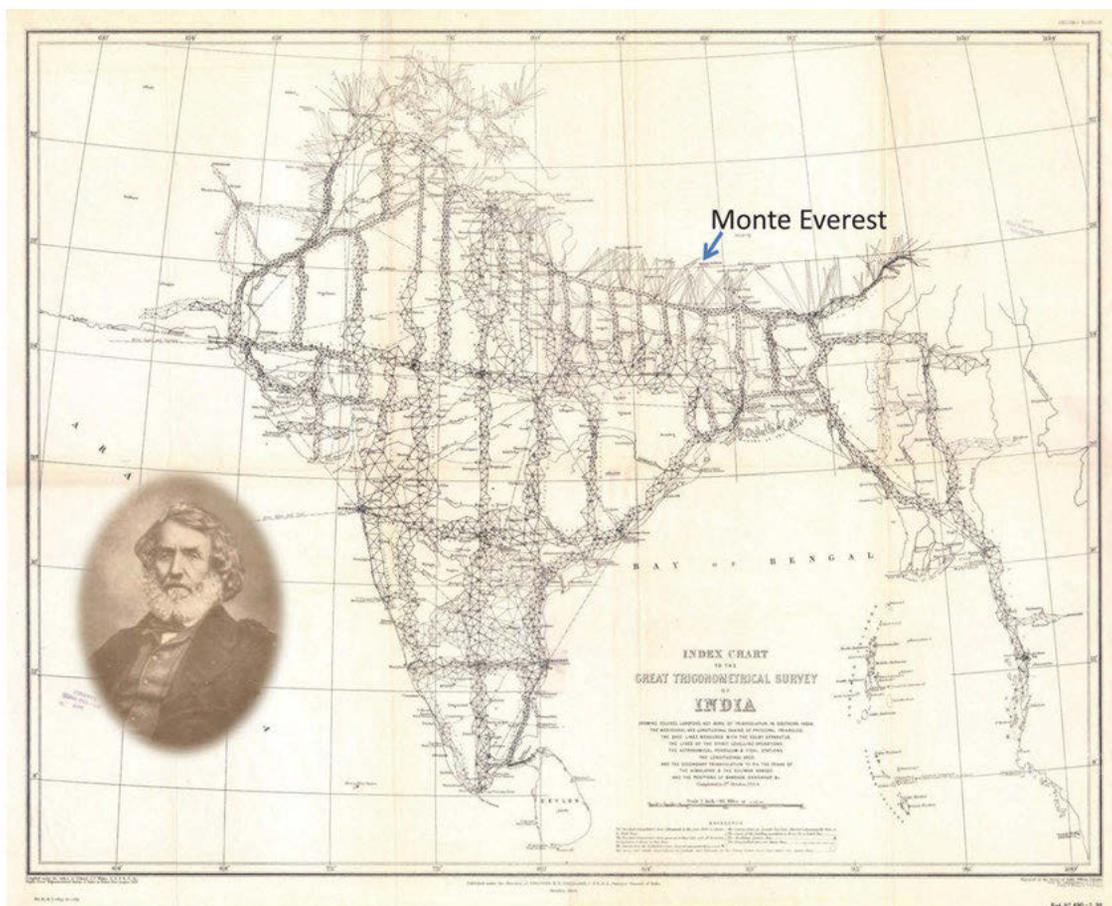


Gráfico con el levantamiento trigonométrico practicado en la india. Obsérvense las numerosas cadenas geodésicas a lo largo de sus meridianos. Se ha superpuesto la imagen de Sir George Everest, cuyo apellido quedó inmortalizado al identificar con él la cumbre himalaya de mayor altitud.

Fue en este capítulo donde incluyó Struve una contribución esencial para la geodesia geométrica, la definición del nuevo modelo elipsoidal basado en el arco ruso-escandinavo y en el arco de meridiano medido en la India, bajo la dirección del topógrafo y geodesta Sir George Everest<sup>261</sup>. Ciertamente, al analizar la exactitud de los parámetros elipsoidales propuestos por Bessel concluyó que sus incertidumbres eran mayores de lo que parecían indicar los errores probables asociados al desarrollo de un grado de meridiano y a la relación entre los dos semiejes del elipsoide. Para probarlo se basó en el arco de meridiano limitado por las latitudes  $45^{\circ}20' 2''.8$  y  $70^{\circ}40' 11''.3$ , obteniendo 1447792 toesas ( $\approx 2822$  km) para la distancia entre los paralelos respectivos, con una fiabilidad cifrada en torno a las 10 toesas. Después lo comparó con el gran arco de la India, que alcanzó finalmente una amplitud de  $21^{\circ}21'17''.0$ , desde los  $8^{\circ}9'31''.1$  hasta los  $29^{\circ}30'48''.1$ , siendo 1212880 toesas ( $\approx 2364$  km) la distancia entre tales paralelos.

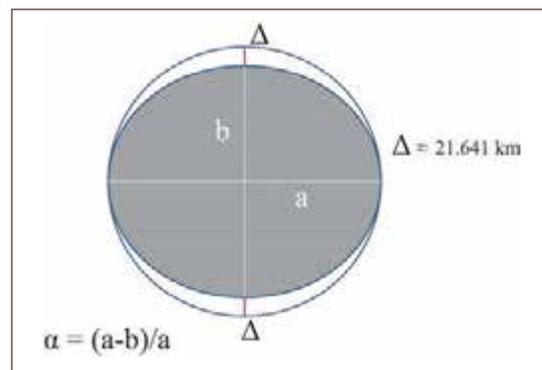
<sup>261</sup> Los trabajos geodésicos de los ingleses en la India los inició el coronel William Lambton en el año 1802. En 1808 empezó su colaboración el capitán Everest, responsable máximo de los mismos entre 1830 y 1843, con cuyo nombre se identificaría después al Pico XV, el de mayor altitud del Himalaya. Tanto Lambton como el coronel Everest fueron miembros de la *Royal Society*.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes: un desarrollo para el grado dado por  $g = 57023.52 \pm 1.44$  toesas, es decir alrededor de 111.14 km, con un error probable de 0.0000253, y una relación entre los semiejes definida por  $\rho = b/a = 290.97/291.97 \pm 2.42$  unidades ( $\approx 0.9965750$ ), con un error probable de 0.0000283. Teniendo en cuenta los valores análogos proporcionados por Bessel:  $g' = 0\ 57013.11$ , con un error probable de 0.0000536 y  $\rho' = 0.9966572$ , con 0.0000352 de error probable, concluyó Struve: «es evidente que la combinación de esos dos grandes arcos ha proporcionado valores aún más precisos para las dimensiones de la Tierra». La gran extensión de los dos resultó decisiva, según él, al poder contar desde entonces con datos más fidedignos que los obtenidos por Bessel, a partir de los 10 arcos en que basó sus investigaciones. Apoyándose en esos dos arcos dedujo por tanto su propio modelo elipsoidal, definido por los dos parámetros siguientes:

semieje mayor,  $a \approx 3272539$  toesas

achatamiento polar<sup>262</sup>,  $\alpha \approx 1/294.730$ .

El cálculo de la triangulación en el sector ruso fue laborioso pero nada complicado, en tanto que la cadena geodésica sólo fue una sencilla sucesión de triángulos simples, con ángulos consecutivos, en los que no se observaron diagonales. Struve justificó esa característica en la introducción del capítulo IX, recordando que el terreno sobre el que discurrió la cadena fue mayoritariamente boscoso y sin elevaciones que destacasen mucho en su entorno. Hasta tal punto llegó en su alegato, que escribió: «es la razón que ha forzado a que los geómetras rusos recurriesen a triángulos simples y contiguos. Sólo habría sido posible, y muy excepcionalmente, añadir a los tres ángulos de un triángulo la observación de una diagonal, materializada por un vértice y por otro perteneciente a un triángulo muy alejado». De hecho no hubo diagonales observadas en toda la cadena triangular que unió la isla de Hogland con el río Danubio. Es más, reconocía Struve que en sus campañas del arco báltico podría haber observado alguna, pero que al final creyó mejor no hacerlo, en aras de «la uniformidad de la operación y para ahorrar tiempo». La cuestión del tiempo resultaba evidente, puesto que en otro caso se hubiera requerido una mayor transparencia del aire, o bien la instalación de un heliotropo y contar con un Sol brillante. El general Tenner tampoco pudo observar diagonal alguna entre los ríos Duna y Prut, por la dificultad añadida que hubiese supuesto la construcción de plataformas con altura suficiente. Únicamente hubieran sido factibles las diagonales en la región de Besarabia, aunque también se decidiera evitarlas para mantener así la tónica general seguida en otras zonas.



Elipsoide de Struve. Sus parámetros característicos son los siguientes: semieje mayor de 6378.298 km y un achatamiento polar de 1/294.73. La diferencia entre sus dos semiejes es por tanto del orden de 21.641 km.

<sup>262</sup> En realidad Struve fijó el valor del cuadrado de la primera excentricidad,  $e^2 \approx 0.00677436$ . La relación entre  $e^2$  y  $\alpha$  es la siguiente:  $e^2 = 2\alpha - \alpha$ , o bien  $\alpha = 1 - (1 - e^2)^{1/2}$ .

Para sistematizar y facilitar la resolución de los triángulos, se dividieron los 180 que constituyeron el tramo meridional en cuatro clases distintas:

- a) *Triángulos de continuación*, formada por los 153 concatenados entre los vértices extremos Mäki-Päälys, sobre la isla de Hogland y Staro-Nekrassowka, junto al río Danubio. Todos ellos figuran en los gráficos de la triangulación que se han incluido en el penúltimo capítulo de este trabajo.
- b) *Triángulos de enlace*, con los que se unían las bases geodésicas a los lados más próximos de los triángulos de continuación. Entre la base de Simonis y el lado Ebbafer-Tammik, común a los triángulos 149 y 150, hubo tres de enlace. La base de Ponedeli fue a su vez lado del triángulo número 117. Las bases de Ossownitza, Staro-Konstantinov, Roman-kautzi y Taschbunar se unieron a la cadena principal con 2, 6, 4 y 2 triángulos de enlace, respectivamente. Por tanto hubo un total de 17 triángulos de la segunda clase en este sector del arco. La numeración crecía con la latitud.
- c) *Triángulos auxiliares*, sólo hubo dos de esta clase: los números 145 y 126. El primero unió el Observatorio de Dorpat con el triángulo de continuación número 144, sirviendo el segundo para ligar el punto astronómico de Jacobstadt al triángulo de continuación número 127.
- d) *Triángulos supernumerarios*, llamados así por no ser estrictamente necesarios para culminar la operación geodésica proyectada. El fin de los ocho triángulos de esta última clase fue el de poder controlar, en tres ocasiones, la bondad de los trabajos. Estos nuevos triángulos formaron con otros de continuación polígonos geodésicos centrados en los vértices de Dabors-Kalns, Dokudowo y Bronna; su compensación se realizó al margen de la que se usó para la cadena principal.

La denominación, adoptada por Struve, para los ángulos y los lados obedeció igualmente a una clasificación previa, tal como se comentó en el apartado de las observaciones angulares. Allí se distinguieron en un triángulo *ABC* dado, los *ángulos de continuación B y C*, así como el



Vista nocturna del Observatorio de Tartu, tomada el 17 de noviembre de 2011.

ángulo intermedio  $A$ ; en cuanto a los lados se contemplaron los *transversales*  $b$  y  $c$ , junto a *lateral*,  $a$ . A dicha clasificación añadiría después otra clase de lados, llamados *fundamentales* ( $L$ ), con los que designó a seis lados de los triángulos de continuación, en los que finalizaban las redes de enlace provenientes de las bases; la denominación fue la apropiada, puesto que sirvieron como longitudes de partida para el cálculo de los demás lados pertenecientes a los triángulos de continuación. Estos lados, que aparecieron representados en los gráficos de la triangulación general con un trazo más grueso, fueron los siguientes:

*Lados fundamentales en el gran arco ruso*

Tipo	Denominación	Triángulos	Base	Lámina
1. Transversal	Tammik-Ebbafer	149 y 150	Simonis	III
2. Lateral	Ponedeli-Jakschti	117	Medido	IV
3. Lateral	Ossownitza-Leskowitschi	79	Ossownitza	V
4. Lateral	Montschinzi-Katerinowka	53	Staro-Konstantinow	V y VI
5. Transversal	Gwosdautzi-Britschani	40 y 41	Romankautzi	VI
6. Lateral	Taschbunar II-Katlabuch	6	Taschbunar	VI

Esa nueva clasificación de los lados hizo que Struve subdividiese los triángulos de continuación en dos grupos:

- e) Los situados entre dos lados fundamentales consecutivos, que llamó *triángulos principales*. No obstante, cada uno de tales triángulos dependería evidentemente de los seis lados anteriores, una circunstancia que se hubo de tener en cuenta al efectuar su compensación. Resultaron un total de 142 triángulos de ese tipo.
- f) *Triángulos de continuación excedentes*, los seis comprendidos entre los números 150 y 155, localizados al Norte del lado fundamental más septentrional, Tammik-Ebbafer, y los otros seis, del 1 al 6, situados al Sur del lado fundamental más meridional, Taschbunar II- Katlabuch. El cálculo de estos triángulos sería más fácil, al depender solamente del valor definitivo adoptado para el lado fundamental más próximo, estando sólo sujeto al condicionamiento angular ya conocido: la suma de los ángulos en cada triángulo deben ser igual a  $180^\circ$  más el exceso esférico.

De acuerdo con las clasificaciones anteriores, formó Struve una serie de cuadros para presentar los resultados más relevantes de sus cálculos, a saber: I) triángulos de enlace, II) polígonos con vértice central, III) triángulos de continuación principales, IV) triángulos de continuación excedentes y V) triángulos auxiliares. Antes de proceder a ello explicó con detalle suficiente los pasos seguidos en cada caso. Como consideración general comentó que en los cuadros tendrían que figurar en primer lugar los valores primitivos de los ángulos, es decir los que se habían determinado como diferencia de las distancias angulares, de cada una de las direcciones, reseñadas en los cuadernos de observación y una vez reducidas al centro.

De nuevo recordó Struve la casuística de la observación, para hacer ver que todas las medidas de los ángulos, en el arco del Báltico, fueron excéntricas, con la ventaja ya sabida de no haber podido mediatizar, en absoluto, los errores de cierre triangulares. Estas fueron algunas de sus palabras al respecto: «...tuve la total convicción de que el acuerdo de la suma de los tres ángulos con  $180^\circ$  más el exceso, sería coherente con la perfección del instrumento y con la naturaleza de la operación, a la vez que su magnitud proporcionaría una idea incontestable del grado de precisión alcanzado en la medida de los ángulos». Struve explicó los pormenores de sus mediciones angulares, junto a los elementos necesarios para su reducción al centro, en el segundo volumen de su obra *Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen*, publicada en Dorpat (1831). En el primero (pp. 118-137) aparecieron los resultados de la reducción para todos los vértices, junto a los ángulos, ya reducidos, obtenidos en las diferentes series y al valor medio de cada uno de ellos. Tales medias las reflejó en las tablas que incluyó entre las páginas 140 y 146 de la referida obra, además de los valores primitivos de los ángulos, luego repetidos en la Memoria que se viene comentando.

Todo lo contrario ocurrió con las observaciones angulares dirigidas por Tenner, pues en su mayoría se hicieron desde el centro de la estación; aunque con sumo cuidado al controlar la posición del instrumento, sobre todo cuando se situaba sobre plataformas levantadas muy por encima del suelo. En tales supuestos se calcularon las correcciones oportunas, de manera que sus observaciones pudiesen suponerse exactas. Los detalles de sus trabajos los incluyó el general en varias memorias que entregó al Depósito Topográfico del Estado Mayor Imperial y que fueron posteriormente consultadas por Struve. Tanta confianza le inspiraron a este que adoptó directamente los valores de los ángulos primitivos consignados en las mismas. Sólo hubo unos cuantos ángulos, medidos en años diferentes, en los que si difirieron los valores adoptados por los dos geodestas, tal como queda reflejado en el cuadro adjunto:

Triángulo	Vértice	Tenner	Struve	Repeticiones por año	Diferencias
29	Lottzi	42".06	41".98	40-60	-0".08
30	Medniki	15".92	15".96	40-44	0".04
271	Ssiwki	42".38	42".36	40-60	-0".02
273	Ssiwki	10".59	10".56	80-100	-0".03

Si bien en el caso anterior se trató de diferencias insignificantes, hubo otros seis ángulos en los que se alcanzaron discrepancias más relevantes por motivos completamente diferentes a los del caso previo:

Triángulo	Vértice	Tenner	Struve	Diferencias
503	Borska	8".99	8".66	-0".33
504	Izmail	58".84	58".21	-0".63
	Ssofianowka	40".28	38".34	-1".94
	Borska	21".38	20".64	-0".74
505	Izmail	16".14	15".42	-0".72
	Ssofianowka	35".85	34".97	-0".88

**KERSEL. (Tagebuch Seite 1.)**

Dorpat,  $r = + 3'59,49$ ,  $s = 0,00$ ,  $h = -0,40$ ; Arrohof,  $r = + 9'55,78$ ,  $h = 0,00$ ; Oberpahlen,  $r = + 16'0,06$ ,  $hL = + 21,49$ ,  $hH = + 32,18$ ,  $s = + 3'56,48$ ; Sall,  $r = -7'17,22$ ,  $s = + 0,25$ .

**Winkel: Dorpat—Arrohof. Arrohof—Oberpahlen. Oberpahlen—Sall.**

32° 19' 44,48	+1,47	79° 31' 55,47	-0,37	77° 43' 7,51	-2,52
41,62	-1,39	56,99	+1,15	10,46	+0,43
42,96	-0,05	55,19	-0,65	9,61	-0,42
42,99	-0,02	56,05	+0,21	11,62	+1,59
43,02	0,01	55,49	-0,35	10,93	+0,90
<b>Mittel:</b> 32 19 43,01		79 31 55,84		77 43 10,03	

Anmerkung. Für Oberpahlen ist hL für das Abendheliotrop, hH für das Morgenheliotrop.

**DORPAT. 1825. (Tagebuch Seite 134.)**

Arrohof,  $r = -0,18$ ,  $s = -0,43$ ; Kersel,  $r = -0,44$ ,  $s = + 0,16$ .

**Winkel: Arrohof—Kersel.**

95° 58' 24,43	-1,91
24,68	-1,66
27,20	+0,86
27,90	+1,56
27,28	+0,94
26,56	+0,22
<b>Mittel:</b> 95 58 26,34	

Dreieck.	Standpunct.	Beobachtete Winkel.	Sphärische Winkel.	Ebene Winkel.	Seiten.
1	Katko	69° 1' 40,52	40,4873	40,46	l. WT = 3,5779945238 l. KT = 3,5949209988 WT = 3,784,57813 KT = 3,934,78492
	Woibifer	76 8 8,52	8,6773	8,65	
	Tammik	34 50 10,75	10,9173	10,89	
	Summe	179 59 59,58	0,0818		
	Corr. = +0,50				
2	Woibifer	27 29 29,92	29,4385	29,434	l. TR = 3,3919474092 l. WR = 3,7073305418 TR = 2405,74073 WR = 5097,18671
	Tammik	107 23 49,38	48,8985	48,894	
	Rakke	45 6 42,15	41,6685	41,664	
	Summe	180 0 1,45	0,0856		
	Corr. = -1,36				
3	Woibifer	100 31 0,65	0,4830	0,413	l. RE = 3,8615231271 l. WE = 3,6370882709 RE = 7269,81112 WE = 4335,98999
	Rakke	35 54 11,99	11,8230	11,754	
	Ebbafer	43 34 48,07	47,9030	47,834	
	Summe	180 0 0,71	0,2090		
	Corr. = -0,50				

Detalles de la obra *Breitengradmessung*: observaciones realizadas en los vértices KERSEL y DORPAT, indicándose los valores angulares y las correcciones por reducción al centro.

Struve aclaró perfectamente el por qué de esas discrepancias angulares en los tres triángulos más meridionales de Besarabia. Los ángulos se midieron con un magnífico teodolito de Reichenbach, realizando 12 series con intervalos de  $7^{\circ}30'$ . Al revisar los diarios de la observación comprobó que el operador de turno, Dorofejew, no había seguido la regla anterior, añadiendo por su cuenta un número considerable de series, sin especificar la razón de su proceder. No obstante, Struve descubrió el motivo: siendo el error de cierre en los triángulos 504 y 505 mucho mayor que en los otros, creyó necesario efectuar series complementarias para tratar de minimizarlo. A la vista de «tal acuerdo forzado, completamente ilusorio y en detrimento de la operación, rechacé todas esas nuevas series y adopté los ángulos resultantes de las 12 primitivas, observadas sin preocupación». Así los errores en la suma de los tres ángulos fueron  $2''.98$  y  $2''.62$ , nada extraordinarios, aunque resultasen mayores que los recogidos por Tenner,  $0''.33$  y  $1''.02$ .

El cálculo más repetido que realizó Struve fue el del exceso esférico y el del error de cierre. Eliminado este, la suma de los ángulos de cada triángulo fue de  $180^{\circ}$  más el exceso esférico, pudiendo aplicarse por tanto el teorema de Legendre. En otras palabras, si  $ABC$  es un triángulo esférico y  $A_p, B_p, C_p$ , son sus ángulos disminuidos en un tercio del exceso, los tres lados  $a, b$  y  $c$  cumplirían el teorema del seno, esto es la relación  $a/\text{sen } A_p = b/\text{sen } B_p = c/\text{sen } C_p$ ; consiguientemente, conocido uno de ellos podrían hallarse los otros dos. Si  $a$  fuese dado, resultaría pues que:  $b = a \text{ sen } B_p / \text{sen } A_p$  y  $c = a \text{ sen } C_p / \text{sen } A_p$ . La imposibilidad material de efectuar directamente los cálculos indicados, hizo que Struve los llevase a cabo de modo indirecto a través de los logaritmos decimales siguientes:

$$\log b = \log a + \log \text{sen } B_p - \log \text{sen } A_p \quad \text{y} \quad \log c = \log a + \log \text{sen } C_p - \log \text{sen } A_p.$$

Haciendo que  $\log b = L_b$  y  $\log c = L_c$ , resultarían los dos valores indicados:

$$b = \text{Antlog } (L_b) \text{ y } c = \text{Antlog } (L_c).$$

Como ya se dijo, Struve usó dos tablas para sus cálculos logarítmicos, las debidas a Taylor y a Bagay, comprobando el valor obtenido con una y otra<sup>263</sup>. Más tardé justificó el empleo de tablas con sólo siete cifras decimales, al considerar que otras con más hubiesen resultado superfluas. En efecto, el error probable de un logaritmo dado inmediatamente por las tablas o a través de la interpolación resultaba mucho menor que los inherentes a la operación geodésica: medida de las bases y de los ángulos. «Al proporcionar las tablas de siete cifras decimales resultados entre 20 y 30 veces más fiables que los otros elementos de cálculo, fruto de las observaciones, se contó con una garantía más que suficiente para su empleo en la resolución de los triángulos», concluyó Struve.

Los resultados de los cálculos efectuados por él, se presentaron en tablas con seis columnas y un variado número de filas, dependiente de los triángulos reseñados, reservando una fila para cada vértice. En la primera columna se indicaba una clave referida a la publicación previa en la que ya se habían presentado los elementos del triángulo en cuestión; destacan las que identificaban la obra *Gradmessung* (G) de Struve y las memorias redactadas por Tenner (T), otra de las

---

<sup>263</sup> Struve comentó que en sus 550  $\log \text{sen}$  había encontrado en seis ocasiones una diferencia de una unidad en el último lugar, comprobando con las tablas de diez decimales formadas por el matemático esloveno Jurij Vega (*Thesaurus Logarithmorum Completus*. Leipzig. 1794) que la última cifra dada por Taylor era la correcta. Gauss fue otro de los que usó frecuentemente las tablas de Vega.

que conviene recordar hacía mención a los diarios de las operaciones practicadas por el general en Besarabia (B). La segunda columna recogió los tres vértices de cada triángulo, en el orden siguiente: el primero era el opuesto al lado dado, bien fuese la base medida o el común al triángulo precedente, el tercero sería el opuesto al lado de partida para el triángulo siguiente. En la tercera columna se vaciarían los ángulos observados, en el vértice de su misma fila, ya reducidos al centro; en la misma columna se indicaría la suma de los tres ángulos y la corrección para que fuese igual a  $180^\circ$  más el exceso esférico. La cuarta contendría los ángulos planos del triángulo correspondiente, con sus ángulos transformados para que sumasen justamente  $180^\circ$ ; esos valores intervirían en los cálculos que aplicaban el teorema de Legendre, en esa misma columna figuró también el exceso esférico del triángulo de procedencia. En la quinta columna aparecerían los logaritmos de los lados opuestos a los ángulos situados en igual fila, entendiéndose que los lados se expresaron en toesas. Finalmente, en la sexta columna figurarían cantidades auxiliares como  $\mathcal{C} = [\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2]/3$  y  $\Omega$ , es decir el cuadrado del error medio de un ángulo primitivo, además del cuadrado del error medio asociado al  $\log(b/c)$ .

Referencia	Vértices	Ángulos		Longitud de los lados	Cantidades auxiliares
		Observados	Reducidos $180^\circ 0' 0''$		
St. 1. Gradm. I. p. 140.	TAMMIK .....	34° 50' 10,75	10,89	3,3645759.6	$\mathcal{C} = 816,7$ $\Omega = 0,329$ $\mathcal{L} = 268,7$
	WOIBIFER.....	76 8 8,51	8,65	3,5949208.6	
	KATKO .....	69 1 40,32	40,46	3,5779943.8	
	Suma	180 0 -0,42	0,00		
	Corr. + 0,50	0,082	Exceso		
St. 2. Gradm. I. p. 140.	RAKKE .....	45 6 42,15	41,67	3,5779943.8	Para las diagonales de los triángulos St. 2 y 3.
	WOIBIFER.....	27 29 29,92	29,44	3,3919472.7	
	TAMMIK .....	107 23 49,38	48,89	3,7073304.0	
	Suma	180 0 1,45	0,00		
	Corr. - 1,36	0,086	Exceso		
St. 3. Gradm. I. p. 140.	EBBAFER .....	43 34 48,07	47,83	3,7073304.0	$\mathcal{C} = 528,1$ $\Omega = 0,329$ $\mathcal{L} = 173,7$
	RAKKE .....	35 54 11,99	11,75	3,6370881.3	
	WOIBIFER.....	100 31 0,65	0,42	3,8615229.9	
	Suma	180 0 0,71	0,00		
	Corr. - 0,50	0,209	Exceso		

Base de Simonis: datos de la red de enlace.

Las primeras seis tablas se dedicaron a los triángulos de enlace entre las seis bases y los seis lados fundamentales de los triángulos de continuación, aportándose asimismo los valores de los mismos, expresados en toesas. En cada caso se indicó, como cabecera, el valor numérico de la base ( $K$ ) y el de su logaritmo ( $\log K$ ), amén de los errores probables y el cuadrado del error medio del  $\log K$ . En todos ellos acompañó Struve un gráfico con la triangulación de enlace. En la tabla anterior, correspondiente a la base de Simonis, definida por sus extremos Katko y Woibifer, resultó una longitud, ya reducida al nivel del mar, de  $2315.13307 \pm 0.00187$  toesas. Siendo el lado fundamental la diagonal del cuadrilátero formado por los triángulos 1 y 2, la cual formó dos trián-

gulos con los vértices Woibifer y Rakke, de excesos  $0''.124$  y  $0''.170$ . Con tales datos, la resolución de ambos desembocó en un valor idéntico: Tammik-Ebrafer =  $7302.7975 \pm 0.0246$  toesas. La base de Ponedeli fue a su vez lado fundamental de un triángulo de continuación. La base de Ossownitza, con extremos en Ossownitza y en Tschekuzk, se enlazó con el lado Ossownitza-Leskowitschi. La base de Staro-Konstantinov, con extremos en Kusmin y Pgarelaja, se unió al lado fundamental formado por los vértices Montschinzi y Katerinowka. La base de Romankautzi, definida por los puntos Romankautzi<sup>264</sup> y Sselischsche, permitió calcular el lado fundamental Gwosdautzi-Britschani. La sexta base de Taschbunar se enlazó con el lado fundamental formado por los vértices Taschbunar II y Katlabuch. Struve terminó este primer apartado incluyendo un cuadro resumen con los valores definitivos de los seis lados fundamentales pertenecientes a otros tantos triángulos de continuación.

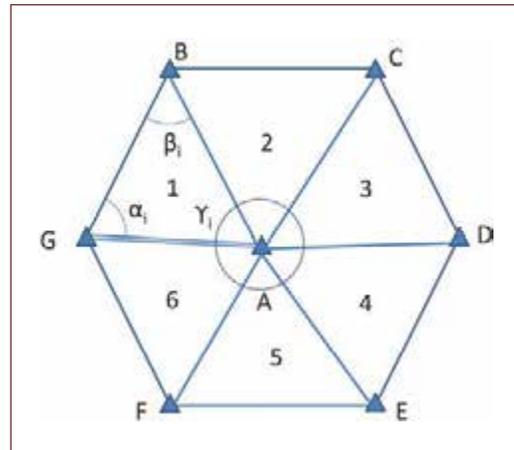
Triángulos	Lados fundamentales	Toesas	E.p.	Logaritmo	E.p.	Cuadrado del E.m. en log L.
No. 149 et 150	{ TAMMIK EBBAFER	$L^I = 7302,7975 \mp 0,0246$		$\lg L^I = 3,8634892.6 \mp 14.6$		$F^I = 469,3$
No. 117.	{ PONEDELI JAKSCHTI	$L^{II} = 6055,1623 \mp 0,0192$		$\lg L^{II} = 3,7821257.9 \mp 13.8$		$F^{II} = 418,7$
No. 79.	{ OSSOWNITZA LESKOWITSCHI	$L^{III} = 7847,7824 \mp 0,0509$		$\lg L^{III} = 3,8947469.5 \mp 28.2$		$F^{III} = 1742,0$
No. 53.	{ MONTSCHINZI KATERINOWKA	$L^{IV} = 9553,6440 \mp 0,0844$		$\lg L^{IV} = 3,9801690.5 \mp 38.5$		$F^{IV} = 3256,8$
No. 40 et 41.	{ GWOSDAUTZI BRITSCHANI	$L^V = 8768,3158 \mp 0,0417$		$\lg L^V = 3,9429161.8 \mp 20.6$		$F^V = 936,7$
No. 6.	{ TASHBUNAR II KATLABUCH	$L^{VI} = 4555,8509 \mp 0,0107$		$\lg L^{VI} = 3,6585695.0 \mp 10.2$		$F^{VI} = 225,8$

Los seis lados fundamentales del gran arco ruso.

Los siguientes resultados presentados por Struve se refirieron a los tres polígonos esféricos siguientes: un pentágono centrado en el vértice Dabors-Kalns, un hexágono cuyo vértice central fue Dokudowo y otro hexágono centrado en torno al vértice Bronna. El cálculo de cada uno de sus elementos, lados y ángulos, lo efectuó siguiendo el método de los mínimos cuadrados, tal como se explicaba entre las páginas 103 y 106, ambas inclusive, del primer tomo de su Memoria. La compensación fue por tanto mucho más laboriosa y exacta que la que se hizo para los triángulos aislados. Téngase en cuenta, por otra parte, que los condicionamientos geométricos de esas figuras

<sup>264</sup> Struve recordaba que el general Tenner no había observado diagonales en sus triángulos de continuación. Si lo hizo, sin embargo, en las redes de enlace entre las dos bases, medidas en Besarabia, y los triángulos de la cadena principal. Cada base fue la diagonal de un cuadrilátero, en el que su otra diagonal coincidía con el lado  $c$  del triángulo siguiente. En cada vértice del cuadrilátero se observaron las visuales correspondientes a los otros tres vértices, de modo que se contó con datos sobreabundantes para la resolución de la figura. Al deberlos tener todos en cuenta se aplicó el método de los mínimos cuadrados, en el cual se basó el ajuste, cuyos principios ya habían sido usados por Gauss y Bessel. Struve concluía sus comentarios afirmando: «daré para empezar las direcciones primitivamente observadas, que he obtenido de los diarios de las operaciones de Besarabia, y después los resultados del cálculo de compensación».

fueron mayores que los previstos para tales triángulos. Ciertamente, dando por supuesto que la suma de los tres ángulos de cada uno de los triángulos, que formase parte del polígono, debería ser igual a  $180^\circ$  más el exceso esférico, se tenía que cumplir al mismo tiempo que la suma de todos los ángulos centrales fuese igual a  $360^\circ$  (en la figura adjunta  $\sum \gamma_i = 360^\circ$ ). Finalmente se debería imponer una última condición: el cálculo de los lados radiales del polígono tenía que ser independiente del camino seguido. Esto es, si se supusiera conocido el lado  $AG$  y en función de él se fuesen calculando los lados  $AB, AC, Ad$ , etc., es evidente que al obtener como colofón el valor del lado  $AG$ , debería coincidir exactamente con el que sirvió de partida; en otras palabras, la figura poligonal siempre tendría que ser cerrada.



Polígono geodésico con vértice central.

Aunque la solución rigurosa del problema se apoyase en el empleo de los mínimos cuadrados, no viene mal recordar que en ciertos supuestos era de gran utilidad un procedimiento más expeditivo de compensación, con el que se conseguían resultados con precisiones análogas a las logradas con el primero. Partiendo de los ángulos esféricos corregidos, es obvio que la suma de los ángulos centrales sería distinta de  $360^\circ$  y aparecería un error  $\varepsilon$ , dado por  $\sum \gamma_i = 360^\circ + \varepsilon$ , error que se compensaría repartiéndolo a partes iguales entre los ángulos centrales<sup>265</sup>. Ahora bien, efectuado ese ajuste, se descorregiría la suma de los ángulos del triángulo, que ya no sería de  $180^\circ$  más el exceso esférico, sino  $180^\circ + Ex - \varepsilon/6$ , en el caso del hexágono. De manera que para que siguiera cumpliéndose que la suma de los ángulos fuese la correcta, sería obligado corregir los dos ángulos periféricos,  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , obteniendo los nuevos valores  $\alpha_i + \varepsilon/12$  y  $\beta_i + \varepsilon/12$ , con lo que la suma de los nuevos ángulos corregidos sería ahora

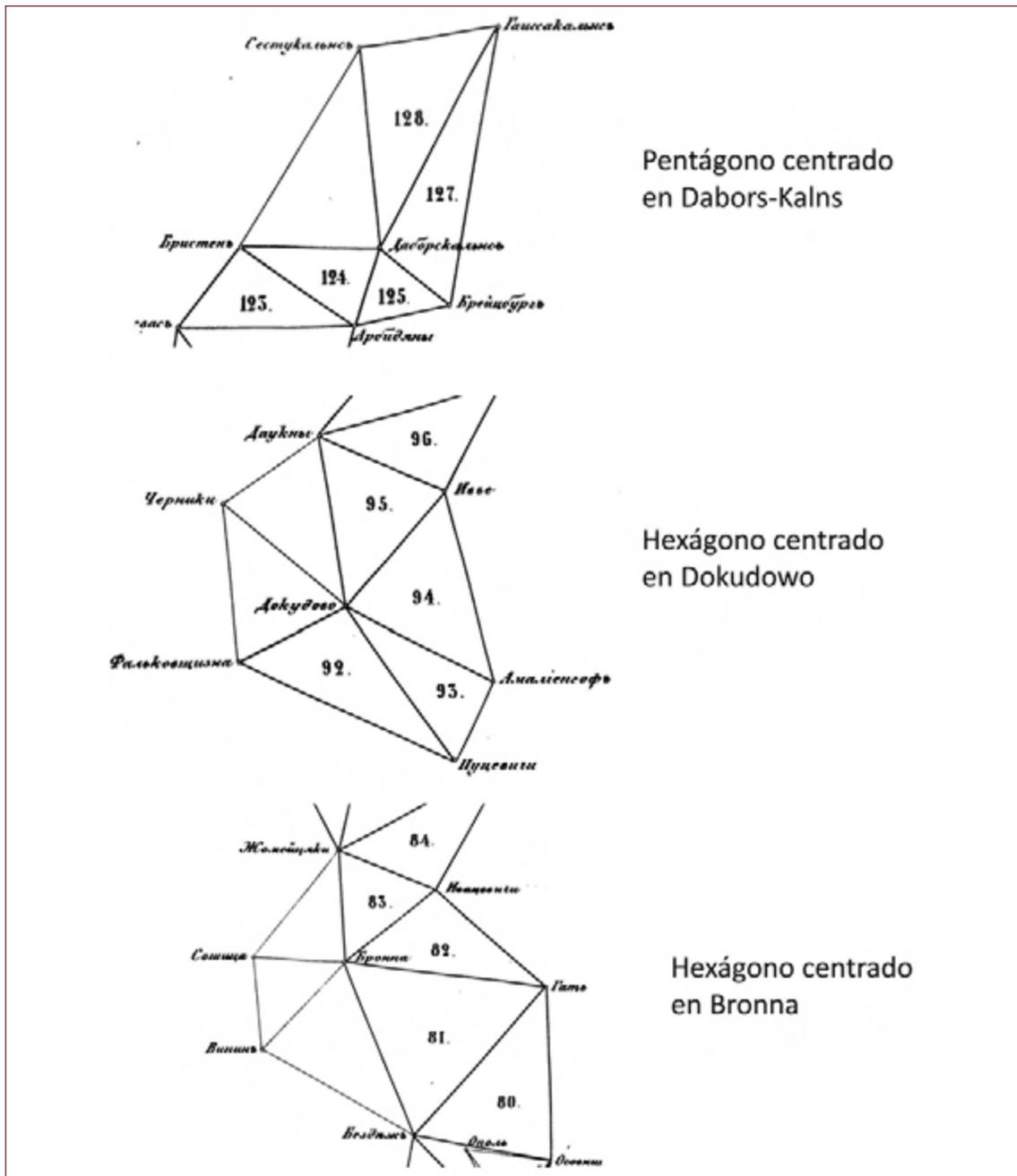
$$\alpha_i + \varepsilon/12 + \beta_i + \varepsilon/12 + \gamma_i - \varepsilon/6 = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 180^\circ + Ex,$$

a la vez que la suma de los nuevos ángulos  $\gamma_i$  seguiría siendo  $360^\circ$ .

No obstante, aunque los ángulos estuviesen compensados, para llegar a la misma longitud del lado de partida,  $AG$ , ha de cumplirse una última condición, llamada generalmente «ecuación de lado». Su versión analítica resulta de aplicar sucesivamente el teorema del seno a los triángulos 1, 2,...6, debiendo intervenir los ángulos ya corregidos. Así resultarían las expresiones:

$$\begin{aligned} \text{sen } AG/\text{sen } \beta_1 &= \text{sen } AB/\text{sen } \alpha_1, \text{ sen } AB/\text{sen } \beta_2 = \\ &= \text{sen } AC/\text{sen } \alpha_2, \dots, \text{ sen } AF/\text{sen } \beta_6 = \text{sen } AG/\text{sen } \alpha_6. \end{aligned}$$

<sup>265</sup> El número de triángulos que componían el polígono podía ser variable, aunque en raras ocasiones tuviese más de siete lados. Se comprende que el signo de la corrección sería opuesto al del error.



Polígonos geodésicos centrados en los vértices Dabors-Kalns, Dokudowo y Bronna.

Referencia	Vértices	Ángulos observados	Ángulos esféricos	Ángulos planos	Ángulos esféricos corre...	Cuadrado del error medio
T. 59. Jan. VIII p. 557.	DABORS-KALNS . . . . .	70° 39' 36,66	36,57	36,44	36,58	0,712
	ARRIDĀNI . . . . .	58 24 27,76	27,67	27,55	27,60	0,796
	KREUTZBURG . . . . .	50 55 56,22	56,13	56,01	56,19	0,785
	<b>Suma</b>	<b>180 0 0,64</b>	<b>0,37</b>	<b>0,00</b>	<b>0,37</b>	
		Corr. — 0,27	0,372	Exe.		
T. 60. Jan. VIII p. 558.	DABORS-KALNS . . . . .	101 11 55,64	55,50	55,11	55,44	0,641
	KREUTZBURG . . . . .	60 18 45,67	45,53	45,14	45,39	0,641
	GAISSA-KALNS . . . . .	18 29 20,28	20,14	19,75	20,33	0,284
	<b>Suma</b>	<b>180 0 1,59</b>	<b>1,17</b>	<b>0,000</b>	<b>1,16</b>	
		Corr. — 0,43	1,161	Exe.		
T. 61. Jan. VIII p. 558.	DABORS-KALNS . . . . .	33 49 48,15	47,93	47,45	47,98	0,705
	GAISSA-KALNS . . . . .	53 11 5,76	5,54	5,06	5,49	0,821
	SESTU-KALNS . . . . .	92 59 8,19	7,97	7,49	7,98	0,840
	<b>Suma</b>	<b>180 0 2,10</b>	<b>1,44</b>	<b>0,00</b>	<b>1,45</b>	
		Corr. — 0,65	1,446	Exe.		
T. 58. Jan. VIII p. 557.	DABORS-KALNS . . . . .	84 0 35,33	35,27	34,77	35,31	0,706
	SESTU-KALNS . . . . .	37 24 16,65	16,58	16,09	16,47	0,721
	BRISTEN . . . . .	58 35 9,70	9,63	9,14	9,70	0,768
	<b>Suma</b>	<b>180 0 1,68</b>	<b>1,48</b>	<b>0,00</b>	<b>1,48</b>	
		Corr. — 0,20	1,483	Exe.		
T. 57. Jan. VIII p. 557.	DABORS-KALNS . . . . .	70 18 4,47	4,63	4,43	4,69	0,704
	BRISTEN . . . . .	34 20 41,42	41,58	41,39	41,47	0,736
	ARRIDĀNI . . . . .	75 21 14,21	14,37	14,18	14,42	0,797
	<b>Suma</b>	<b>180 0 0,10</b>	<b>0,58</b>	<b>0,00</b>	<b>0,58</b>	
		Corr. + 0,48	0,579	Exe.		

Pentágono centrado en el vértice Dabors-Kalns.

Multiplicándolas miembro a miembro, se llegaría a la ecuación siguiente:

$$\text{sen } AG \text{ sen } AB \dots \text{sen } AF / \Pi \text{sen } \beta_i = \text{sen } AB \text{ sen } AC \dots \text{sen } AG / \Pi \text{sen } \alpha_i,$$

como los dos numeradores son iguales, es evidente que si se cumpliera la ecuación de lado se verificaría la igualdad entre los dos productos, es decir que

$$\Pi \text{sen } \beta_i / \Pi \text{sen } \alpha_i = 1,$$

o bien

$$\Sigma \log \text{sen } \beta_i - \Sigma \log \text{sen } \alpha_i = 0.$$

En la práctica sólo se cumplía esa condición si se modificaban nuevamente los ángulos<sup>266</sup> en una cierta cantidad  $\delta$ . Naturalmente, las propiedades angulares anteriores obligarían a que la corrección que sufrieran los ángulos del numerador fuese la opuesta de la que afectaría a los del denominador, ya que los ángulos centrales no intervendrán. Es decir que

$$\Sigma \log \operatorname{sen}(\beta_i - \delta) - \Sigma \log \operatorname{sen}(\alpha_i + \delta) = 0,$$

con lo que se podría calcular la corrección  $\delta$  mediante la expresión

$$\delta'' = [\Sigma \log \operatorname{sen} \beta_i - \Sigma \log \operatorname{sen} \alpha_i] / (\Sigma \Delta_i + \Sigma \Delta'_i),$$

siendo  $\Delta$  y  $\Delta'$  las diferencias tabulares relativas a los logaritmos considerados y correspondientes a la variación de un segundo<sup>267</sup>.

El listado con todos los elementos de los triángulos de continuación principales se dividió en los cinco grupos siguientes:

- I) 31 triángulos entre el lado Ebbafer-Tammik y Ponedeli-Jakschti,
- II) 39 triángulos entre Ponedeli-Jakschti y Ossownitza-Leskowitschi,
- III) 27 triángulos entre Ossownitza-Leskowitschi y Montschinzi-Katerinowka,
- IV) 13 triángulos entre Montschinzi-Katerinowka y Gwosdautzi-Britschani y
- V) 35 triángulos entre ese último lado y el formado por los vértices Taschbunar II y Katlabuch.

El total de triángulos diferentes de los cinco grupos fue de 145. De tales lados fundamentales, los primeros de los grupos II, III y IV fueron laterales, mientras que el primero del quinto grupo fue transversal. Cada listado se encabezó con el valor de su primer lado fundamental, expresado en toesas, puesto que en él se basó el cálculo de los demás lados en el resto de los triángulos del grupo; también se indicó el valor de su logaritmo y el cuadrado de su error medio. Al final de dichos listados incorporó Struve la comparación entre el valor calculado del último lado del grupo, inicial del siguiente, y su valor efectivo; junto a ella expresó la suma de los diferentes cuadrados del error medio,  $W^i$ , relativo a los lados fundamentales que limitaron el referido grupo o a la serie de triángulos que los unían.

Las diferencias,  $U^i$ , entre los valores calculados y los efectivos, indicaban en general la diferencia logarítmica entre los valores de un lado cualquiera del grupo, obtenidas al calcularlas una vez en función de la base precedente y otra de la base siguiente. Por tanto, los valores  $U^i$  expresaron también la diferencia logarítmica entre el valor de una base calculada a partir de la precedente y el valor obtenido por su medida directa. Es evidente que si la medida de las bases hubiese sido perfecta, al igual que la de los ángulos de la red de enlace, todos esos  $U^i$  habrían sido nulos; de manera que existe una relación entre ellos y los errores  $W^i$  cometidos en las mediciones. Pareció pues obligada la comparación de los cuadrados de tales errores  $(W^i)^2$  y los de los repetidos  $(U^i)^2$ , reflejada en la tabla adjunta:

---

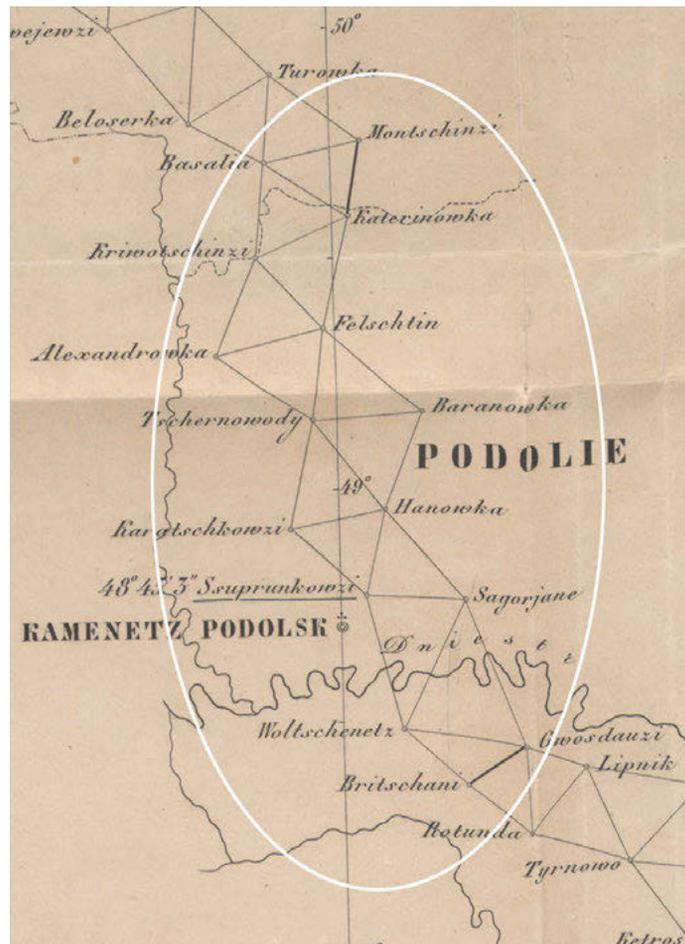
<sup>266</sup> Se supone que todos en la misma cantidad.

<sup>267</sup> En las triangulaciones más precisas se supone que el valor de esta última corrección sería del orden de  $0''.65$ .

Bases comparadas	Cuadrado efectivo $U^2$	Cuadrado esperado $W^2$
I. de SIMONIS et PONEDELI ..... p. 118	$(U^I)^2 = 5506$	$\Sigma^I = 10018$
II. » PONEDELI et OSSOWNITZA ..... p. 125	$(U^{II})^2 = 15302$	$\Sigma^{II} = 24902$
III. » OSSOWNITZA et STARO-KONSTANTINOW p. 130	$(U^{III})^2 = 27689$	$\Sigma^{III} = 22100$
IV. » STARO-KONSTANTINOW et ROMANKAUTZI p. 133	$(U^{IV})^2 = 23716$	$\Sigma^{IV} = 13700$
V. » ROMANKAUTZI et TASCHBUNAR ..... p. 140	$(U^V)^2 = 2581$	$\Sigma^V = 17525$
Sumas ...	74794	88245

Relación entre las bases, a través de las diferencias  $U$  y los errores  $W$ .

Al dividir la suma  $[U^2]$  por  $[W^2]$  resultaría  $\approx 0.847$ , es decir que  $U/W \approx 0.920$ , dos magnitudes inferiores a la unidad. La conclusión de Struve fue interesante: «el acuerdo de las bases calculadas y medidas resultó muy aceptable, tal como cabía esperar por la exactitud alcanzada al medir las bases y los ángulos. En cualquier caso las comparaciones no proporcionan índice alguno, salvo el hecho de que los errores medios adoptados fuesen demasiado pequeños». Asimismo hizo saber, al final de esta introducción, que los 9 triángulos pertenecientes a los tres polígonos ya compensados, y que forman parte de la serie de triángulos principales, figurarían como tales, junto a la clave que indicaría la obra en la que fueron previamente analizados; en tales triángulos compensados la suma de los tres ángulos esféricos era por supuesto de  $180^\circ$  más el exceso. El listado se recoge entre las páginas 113 y 139, ambas inclusive, del tomo I de la Memoria presentada por Struve a la Real Academia de Ciencias de San Petersburgo.



Los 13 triángulos de continuación principales entre los lados fundamentales de Montschinzi-Katerinowka y Gwosdautzi-Britschani (Grupo IV).

Referencia	Vértices	Ángulos observados	Ángulos planos	Log. de los lados	Cantidades auxiliares
I. 12. St. 22. <i>Gradm.</i> I. p. 144.	MARIO-MÄGGI. ....	36° 2' 43,71	42,65	4,0730949.0	$\ominus = 643,7$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{L} = 211,8$
	LENARD. ....	64 27 2,68	1,62	4,2587141.5	
	HUMMELSHOF. ....	79 30 16,79	15,73	4,2960775.1	
	Suma	180 0 3,18	0,00		
		Corr. — 1,15	2,028	Exc.	
I. 13. St. 23. <i>Gradm.</i> I. p. 144.	OPPEKALN. ....	38 6 34,84	34,21	4,2960775.1	$\ominus = 1943,8$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{L} = 639,5$
	MARIO-MÄGGI. ....	111 4 47,24	46,62	4,4755948.4	
	LENARD. ....	30 48 39,80	39,17	4,2151198.9	
	Suma	180 0 1,88	0,00		
		Corr. + 1,03	2,908	Exc.	
I. 14. St. 24. <i>Gradm.</i> I. p. 145.	PALZMAR. ....	46 20 54,97	53,98	4,2151198.9	$\ominus = 221,7$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{L} = 73,0$
	OPPEKALN. ....	31 22 57,90	56,91	4,0722796.1	
	MARIO-MÄGGI. ....	102 16 10,10	9,11	4,3456172.2	
	Suma	180 0 2,97	0,00		
		Corr. — 1,15	1,819	Exc.	
I. 15. St. 25. <i>Gradm.</i> I. p. 145.	KORTENHOF. ....	75 13 17,46	16,00	4,3456172.2	$\ominus = 145,6$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{L} = 47,9$
	PALZMAR. ....	42 46 59,39	57,94	4,1922386.1	
	OPPEKALN. ....	61 59 47,51	46,06	4,3061471.4	
	Suma	180 0 4,36	0,00		
		Corr. — 1,43	2,926	Exc.	
I. 16. St. 26. <i>Gradm.</i> I. p. 145.	RAMKAU. ....	65 38 22,94	21,87	4,3061471.4	$\ominus = 171,5$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{L} = 56,4$
	KORTENHOF. ....	47 28 47,03	45,96	4,2141322.0	
	PALZMAR. ....	66 52 53,24	52,17	4,3102868.3	
	Suma	180 0 3,21	0,00		
		Corr. — 0,28	2,927	Exc.	
I. 17. St. 27. <i>Gradm.</i> I. p. 145.	NESSAULE-KALNS. ...	49 28 47,42	47,11	4,3102868.3	$\ominus = 1835,3$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{L} = 603,8$
	RAMKAU. ....	103 23 59,86	59,54	4,4173854.6	
	KORTENHOF. ....	27 7 13,66	13,35	4,0882053.0	
	Suma	180 0 0,94	0,00		
		Corr. + 1,40	2,339	Exc.	

Seis triángulos de continuación principales del grupo I.

Struve completó sus listados del gran arco ruso con los datos más característicos de los dos triángulos de continuación excedentes y con los de los dos triángulos auxiliares. Los primeros se situaron al Norte del lado Tammik-Ebbafer, llegando a la isla de Hogland, y al Sur del lado Katlabuch-Ssuchoi-Taschbunar II, hasta alcanzar el extremo Staro-Nekrassowka junto al río Danubio. El sector septentrional<sup>268</sup> lo formaron seis triángulos, teniendo cinco el meridional. Los dos triángulos auxiliares unieron el observatorio de Dorpat y el punto astronómico de Jacobstadt con la cadena geodésica principal. Struve señaló una anomalía en el triángulo del segundo enlace, en tanto que no se midió el ángulo en el vértice Kreutburg y se dedujo su valor en función del de los otros dos<sup>269</sup>.

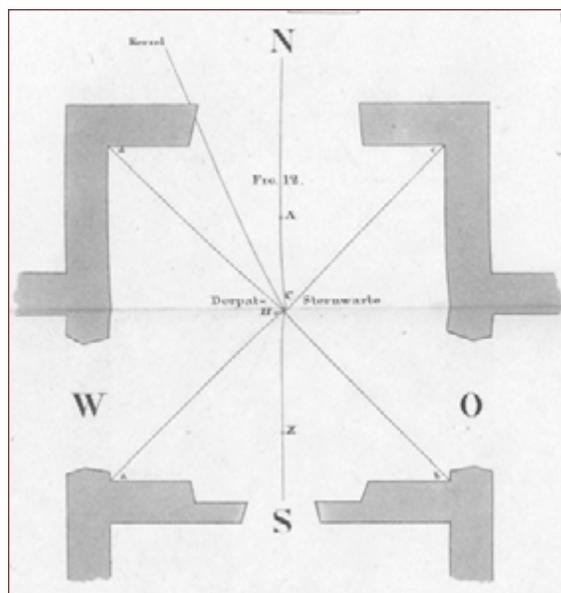
Referencia	Vértices	Ángulos observados	Ángulos planos	Log. de los lados	Cantidades auxiliares
7°. T. 501. Manusc. Bess.	KAIRAKLIA .....	54° 42' 31,87	31,62	3,7097678. 0	⊖ = 331,8
	KATLABUCH-SSUCHOI..	62 19 30,52	30,28	3,7451933. 8	Ω = 1,050
	TASCHBUNAR II .....	62 57 58,35	58,10	3,7477072. 8	ℵ = 348,4
	Suma	180 0 0,74	0,00		
		Corr. — 0,50	0,245 Exc.		
8°. T. 502. Manusc. Bess.	SSAFIANOWKA .....	63 24 44,24	43,80	3,7477072. 8	⊖ = 223,9
	KAIRAKLIA .....	53 20 27,80	27,36	3,7005326. 6	Ω = 1,050
	KATLABUCH-SSUCHOI..	63 14 49,28	48,84	3,7470780. 2	ℵ = 235,1
	Suma	180 0 1,32	0,00		
		Corr. — 1,08	0,241 Exc.		
9°. T. 503. Manusc. Bess.	BORSKA .....	58 38 8,66	8,51	3,7470780. 2	⊖ = 451,6
	SSAFIANOWKA .....	70 28 21,51	21,37	3,7899565. 7	Ω = 1,050
	KAIRAKLIA .....	50 53 30,27	30,12	3,7055202. 1	ℵ = 474,2
	Suma	180 0 0,44	0,00		
		Corr. — 0,18	0,257 Exc.		
10°. T. 504. Manusc. Bess.	ISMAIL .....	72 37 58,21	59,14	3,7055202. 1	⊖ = 199,4
	SSAFIANOWKA .....	49 6 38,34	39,28	3,6042931. 4	Ω = 1,050
	BORSKA .....	58 15 20,64	21,58	3,6554108. 6	ℵ = 209,4
	Suma	180 0 —2,81	0,00		
		Corr. + 2,98	0,167 Exc.		
11°. T. 505. Manusc. Bess.	STARO-NEKRASSOWKA.	63 6 7,13	7,96	3,6554108. 6	⊖ = 618,1
	ISMAIL .....	75 14 15,42	16,24	3,6905589. 4	Ω = 1,050
	SSAFIANOWKA .....	41 39 34,97	35,80	3,5277671. 4	ℵ = 649,0
	Suma	180 0 —2,48	0,00		
		Corr. + 2,62	0,142 Exc.		

Triángulos de continuación al Sur del lado Taschbunar II y Katlabuch.

<sup>268</sup> Struve subrayó que el exceso esférico se había repartido siempre a partes iguales, salvo en el triángulo Hohenkreutz-Halljall-Warres-Mäggi, ya que el ángulo en el vértice Halljall solo se observó con dos series, al contrario que los otros dos, donde se efectuaron seis. Ese fue el motivo de que el exceso esférico, 1".89, se distribuyera de acuerdo con los pesos 1, 1/3, 1, tal como explicó en su obra *Gradmessung I* (página 134).

<sup>269</sup> Realmente si se midió el citado ángulo con un teodolito menor que el usado en los otros dos vértices, para asegurar las cifras de los grados y minutos. En lugar de 122° 10'33".19, magnitud calculada, el valor medido fue de 122° 10'26".2.

Los capítulos XI, XII y XIII del tomo I de la Memoria presentada por Struve se dedicaron a la compensación propiamente dicha, de acuerdo con el programa siguiente: Capítulo XI (*Análisis de la compensación de una serie de triángulos en la que son conocidos varios de sus lados*), Capítulo XII (*Cálculo de la compensación para los 142 triángulos principales, dependiente de los seis lados fundamentales*) y Capítulo XIII (*Listado de los ángulos y lados definitivos de los 155 triángulos que enlazaron entre sí a los 9 puntos astronómicos del arco meridional, comprendido entre el Danubio y el golfo de Finlandia*). El desarrollo de esos dos primeros capítulos se realizó a través de los epígrafes que se citan a continuación: Capítulo XII (1. *Compensación de los triángulos situados entre dos lados dados*, 2. *Compensación de una serie de triángulos situados entre varios lados dados*), Capítulo XIII (1. *Formación y resolución de las 5 ecuaciones que proporcionan los coeficientes indeterminados  $x^I, \dots, x^{VI}$* , 2. *Compensación de los triángulos de los 5 grupos I, II, III, IV y V.*)



Estación en el Observatorio astronómico de Dorpat.

En todos los supuestos, Struve ajustó los observables, ángulos y distancias, apoyándose en el principio de los mínimos cuadrados, con las mismas notaciones que había empleado Gauss en su momento. Además de las ecuaciones de condición, reflejo de las propiedades geométricas de la figura, se contempló la necesidad de hacer mínima la suma de los cuadrados de los productos de los pesos y de los residuos correspondientes. Inmediatamente después procedió a diferenciar las ecuaciones anteriores, para igualar a cero esas primeras derivadas y poder así resolver el sistema de ecuaciones normales que proporcionaría finalmente el valor más probable de las correcciones previstas, con el que se deberían de modificar los datos de partida<sup>270</sup>. Struve incluyó un ejemplo para que el lector tuviera una idea más cabal de la marcha del cálculo: la compensación del segmento de triangulación número IV, comprendido entre los lados fundamentales Montschinzi-Katerinowka y Gwosdautzi-Britschani. De los 155 triángulos definitivos, ya compensados, que delimitaron el gran arco ruso, se han seleccionado como muestra del listado presentado por Struve, tres del extremo Sur y otros tres del extremo septentrional.

Struve no hizo ningún comentario añadido sobre el origen de tan singular método matemático, aunque indirectamente otorgara un mayor protagonismo a Gauss e incluso a Bessel. Partiendo de que fue Gauss el primero en aplicar con éxito ese procedimiento para predecir la aparición del asteroide Ceres (finales de 1801 y comienzos de 1802), ha de concederse también un papel impor-

<sup>270</sup> El carácter un tanto abstruso de este método estadístico, unido a que la intención del trabajo, que aquí se presenta, es solo reivindicativa y divulgativa, hizo que se obviara el tratamiento matemático efectuado por Struve, con el fin de facilitar las posibles consultas del lector medio. No obstante, se remite a las páginas 157-170, ambas inclusive, de la Memoria de Struve (Tomo I), en las que se explicitan las etapas fundamentales de los cálculos correspondientes.

Referencia	Vértices	Ángulos esféricos	Log. de los lados en toesas
No. 1. 11°. p. 142.	SSAFIANOWKA.....	41° 39' 35,84	3,5277623.3
	ISMAÏL.....	75 14 16,29	3,6905541.3
	STARO-NEKRASSOWKA.....	63 6 8,01	3,6554060.5
		180 0 0,14	
No. 2. 10°. p. 142.	BORSKA.....	58 15 21,63	3,6554060.5
	SSAFIANOWKA.....	49 6 39,34	3,6042883.3
	ISMAÏL.....	72 37 59,20	3,7055154.0
		180 0 0,17	
No. 3. 9°. p. 142.	KAIRAKLIA.....	50 53 30,21	3,7055154.0
	SSAFIANOWKA.....	70 28 21,45	3,7899517.6
	BORSKA.....	58 38 8,60	3,7470732.1
		180 0 0,26	
No. 153. 4°. p. 141.	HALLJALL.....	47 4 18,47	3,9215360.5
	WARRES-MÄGGL.....	57 48 12,26	3,9843876.6
	LEWALA.....	75 7 30,02	4,0420986.5
		180 0 0,75	
No. 154. 5°. p. 141.	HOHENBREUTZ.....	64 56 24,62	4,0420986.5
	HALLJALL.....	35 55 4,94	3,8533965.3
	WARRES-MÄGGL.....	79 8 31,19	4,0771892.4
		180 0 0,75	
No. 155. 6°. p. 141.	MÄNI-PÄÄLYS.....	16 20 16,96	4,0771892.4
	HALLJALL.....	64 36 5,27	4,5838766.4
	HOHENBREUTZ.....	99 3 42,12	4,6225699.2
		180 0 4,35	

Muestra de los triángulos definitivos, o compensados, del gran arco ruso. Los números 1, 2 y 3 corresponden al extremo meridional del arco; los números 153, 154 y 155 al extremo septentrional.

tante al geodesta francés Adrien Marie Legendre, puesto que fue él quien primero publicó un trabajo al respecto y quien acuñó la denominación del procedimiento. Su contribución estadística fue un anexo del libro *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes: avec un supplément contenant divers perfectionnements de ces méthodes et leur application aux deux comètes de 1805*. En efecto allí enunció su principio, sin demostrarlo, con estas palabras<sup>271</sup>:

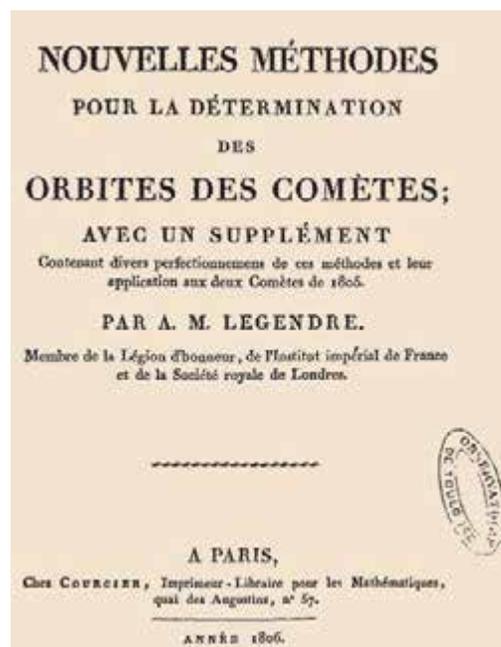
<sup>271</sup> «En la mayor parte de las cuestiones en que se pretenden conseguir, a partir de las medidas obtenidas por la observación, los resultados más exactos que pudiesen ofrecer, se desemboca casi siempre en un sistema de ecuaciones de la forma  $E = a + bx + cy + fz + \& c$ , en las que  $a, b, c, f, \& c$ , son coeficientes conocidos, que varían de una ecuación a otra, mientras que  $x, y, z, \& c$ , son las incógnitas que habría que determinar imponiendo la condición, para cada ecuación, de que el valor de  $E$  se reduzca a una cantidad nula o muy pequeña».

«Dans la plupart des questions où s'agit de tirer des mesurés données par l'observation, les résultats les plus exacts qu'elles peuvent offrir, on est presque toujours conduit à un système d'équations de la forme  $E = a + bx + cy + fz + \dots + c$ . dans lesquelles  $a, b, c, f, \dots$  sont des coefficients connus, qui varient d'une équation à l'autre, et  $x, y, z, \dots$  sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que la valeur de  $E$  se réduise, pour chaque équation, à une quantité ou nulle ou très-petite».

Más adelante continuaba su exposición así:

«De tous les principes qu'on peut proposer pour cet objet, je pensai qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui dont nous avons fait usage dans les recherches précédentes, et qui consiste à rendre **minimum** la Somme des carrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très-propre à faire connaître l'état du système le plus proche de la vérité... La règle par laquelle on prend le milieu entre les résultats de différentes observations, n'est qu'une conséquence très-simple de notre méthode générale, que nous appellerons **Méthode des moindres carrés**».

La pretensión de valorar más, en este aspecto, la contribución científica de Legendre obedece también a que se debió a él la primera aplicación del método que pretendió optimizar los parámetros asociados a la figura y al tamaño de la Tierra. Fue en el mismo anexo en donde desarrolló su trabajo, centrándolo en las medidas del arco de meridiano realizadas en Francia por los astrónomos y geodestas Delambre y Méchain. De hecho lo concluyó<sup>272</sup> con una interesante consideración en la que se refirió a las anomalías relacionadas con la desviación de la vertical y a su clara influencia sobre los resultados obtenidos a partir de las medidas del meridiano, con especial incidencia metroológica<sup>273</sup>: «Il résulte de l'existence bien constatée de ces anomalies, que la longueur des arcs du méridien est moins propre que celle du pendule, à la détermination d'une mesure universelle; et il n'est pas étonnant que des observateurs, d'ailleurs



Cubierta del libro, de Adrien Marie Legendre, en el que se enunció por vez primera el principio del Método de los Mínimos Cuadrados.

<sup>272</sup> El trabajo lo terminó en París el día 6 de marzo de 1805, aunque también indicara la fecha republicana: día 15 del mes ventoso y del año 13.

<sup>273</sup> Debe tenerse en cuenta que cuando se estaba gestando la implantación de un sistema metroológico internacional, una de las unidades lineales que se consideró fue la del péndulo que batía segundos, muy próxima al metro. En efecto, a partir de la fórmula  $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ , se deduce que  $L = T^2 g / 4 \pi^2$ . De modo que sustituyendo el valor de la intensidad de la gravedad ( $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ) y del periodo ( $T = 2\text{s}$ ), resultaría que la longitud del péndulo sería próxima a 0.99 m.

*très-exacts, ne se soient pas accordés dans les mesures qu'ils ont prises des degrés du méridien, puisqu'à raison des attractions locales, les latitudes de deux lieux également éloignés de l'équateur, pourroient différer entre elles de plusieurs secondes».*

Los detalles del cálculo y posteriores ajustes de la triangulación en el arco escandinavo fueron expuestos a lo largo de los capítulos comprendidos entre los números VI y XV ambos inclusive, del segundo tomo de la Memoria elaborada por el responsable máximo de tan relevante operación geodésica; Wilhelm von Struve se valió para ello de los informes que le presentaron sus diferentes colaboradores. El orden seguido en la presentación de los datos fue el ya sabido: Finlandia, Laponia y el Finmarken noruego.

Primeramente se refirió a la unión entre la base de Elimä y el lado fundamental formado por los vértices Mustila y Korsmalm, cuyo valor más probable fue necesario obtener; pudiéndose efectuar su cálculo de acuerdo con dos hipótesis. En uno de los supuestos se partiría de que el ángulo comprendido entre dos direcciones tendría siempre la misma precisión, en cuyo caso se resolvería el problema haciendo que la suma de los cuadrados de las correcciones, a realizar sobre las diversas direcciones primitivas, fuese mínima. Ahora bien, tal hipótesis no era del todo rigurosa, ya que el ángulo relativo a dos vértices, visados en el intervalo de pocos minutos, se mediría siempre con más fiabilidad que aquel en cuya observación se invirtiese mayor tiempo. Ese hecho cierto propició que Struve optase por elegir como datos primitivos los *ángulos de menor duración*. Con esa segunda hipótesis se obtendría la compensación a partir de una serie de correcciones sobre los ángulos, tales que la suma de sus cuadrados fuese mínima. Si las correcciones de las direcciones  $A, B, C, D, \dots$  fuesen  $a, b, c, d, \dots$  se debería verificar en el primer caso que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots$  fuese mínima, y en el segundo que fuera mínima la suma  $(b - a)^2 + (c - b)^2 + (d - c)^2 + \dots$

Sin embargo, ni una ni otra se corresponderían verdaderamente con las observaciones reales de campo, aunque en cualquier caso las compensaciones correspondientes se separasen en sentido opuesto del resultado proporcionado por una solución rigurosa del problema. Esa consideración fue suficiente para que se resolviese el problema con las dos hipótesis y se adoptara como magnitud definitiva del lado la media de los valores determinados en cada caso. Struve aclaró que la compensación que partió de las direcciones fue debida al astrónomo alemán Christian August Friedrich Peters<sup>274</sup> y que Woldstedt efectuó los cálculos relativos a los ángulos de menor duración. Los valores obtenidos para el lado fundamental fueron  $9304.2264 \pm 0.0526$  toesas y  $9304.2626 \pm 0.0520$  toesas, cuya media resultó ser igual a  $9304.2445 \pm 0.0529$  toesas. Peters y Woldstedt fueron también los encargados del cálculo y compensación de la red de enlace entre la base de Uleaborg y el lado fundamental formado por los vértices Sarvi-Kangas y Linnunsilmä. Siguiendo un procedimiento análogo al anterior obtuvieron los siguientes valores:  $8989.0112 \pm 0.0509$  toesas y  $8989.0379 \pm 0.0491$  toesas, resultando la media aritmética de  $8989.0245$  toesas, con un error probable de  $0.0505$  toesas.

Los 70 triángulos de continuación establecidos en Finlandia se dividieron en tres partes: en primer lugar los siete excedentes, entre los números 156 y 162, situados al Sur del lado fundamental Mustila-Korsmalm, hasta alcanzar el punto Mäki-Päällys; seguidamente figuraron los

<sup>274</sup> En el año 1839 se incorporó al Observatorio de Pulkovo. Años después, en 1854, fue nombrado director del Observatorio de Altona y editor de la revista científica *Astronomische Nachrichten*.



Referencia	Vértices	Á. observados	Á. planos	Log. lados	C. auxiliares
K. B. 1. No. 163.	PORLOM I. ....	59° 29' 48,56	49,04	3,9686811.2	$\odot = 205,0$ $\Omega = 0,762$ $\Sigma = 156,2$
	MUSTILA. ....	50 28 48,14	48,61	3,9206564.7	
	KORSMALM. ....	70 1 21,88	22,35	4,0064232.5	
	Suma	180 0 -1,42	0,00		
	Corr. + 2,12	0,699	Exc.		
K. B. 2. No. 164.	PORLOM II. ....	91 1 22,44	22,38	4,0064232.5	$\odot = 0,4$ $\Omega = 0,762$ $\Sigma = 0,3$
	MUSTILA. ....	1 23 22,42	22,35	2,3911988.3	
	PORLOM I. ....	87 35 15,33	15,27	4,0061073.8	
	Suma	180 0 0,19	0,00		
	Corr. - 0,17	0,024	Exc.		
K. B. 3. No. 165.	PERHENIEMI. ....	66 20 52,26	51,79	4,0061073.8	$\odot = 204,1$ $\Omega = 0,762$ $\Sigma = 155,5$
	PORLOM II. ....	51 8 39,18	38,72	3,9355980.1	
	MUSTILA. ....	62 30 29,96	29,49	3,9921745.3	
	Suma	180 0 1,40	0,00		
	Corr. - 0,65	0,745	Exc.		
K. B. 4. No. 166.	WILLIKKALA. ....	93 40 25,79	26,78	3,9921745.3	$\odot = 232,9$ $\Omega = 0,762$ $\Sigma = 177,5$
	PERHENIEMI. ....	38 53 14,17	15,17	3,7908851.5	
	PORLOM II. ....	47 26 17,05	18,05	3,8602702.9	
	Suma	180 0 -2,99	0,00		
	Corr. + 3,42	0,429	Exc.		
K. B. 5. No. 167.	HUTMAR. ....	65 59 47,19	46,92	3,8602702.9	$\odot = 332,1$ $\Omega = 0,762$ $\Sigma = 253,1$
	WILLIKKALA. ....	61 24 16,78	16,51	3,8430574.3	
	PERHENIEMI. ....	52 35 56,84	56,57	3,7995940.8	
	Suma	180 0 0,81	0,00		
	Corr. - 0,43	0,385	Exc.		

Cinco de los triángulos principales situados entre los lados Mustila-Korsmalm y Sarvi-Kangas - Linnunsilmä.

Struve prestó especial atención al triángulo número 224, determinado por los vértices principales siguientes: Ajos, Tornio y Kivalo, con unas connotaciones históricas que no pudo evitar. Recordaba el genial astrónomo que en aquellas latitudes había dos iglesias que respondían al mismo nombre de Tornio, una construida de madera, dentro del núcleo urbano, y otra construida de piedra, al Sur de la villa, en el distrito de Neder-Tornio. Esta segunda iglesia<sup>277</sup> fue el vértice elegido, en la última triangulación realizada, por la gran solidez de su torre; dándose la circunstancia de que también fue usado como tal tanto por Pierre de Maupertuis como por Jöns Svanberg.

Aunque se podría haber estacionado el teodolito en el suelo de la torre, como hizo Svanberg, Woldstedt prefirió hacerlo en la colina Kokko-Mäkki, un vértice auxiliar alejado de la iglesia ( $\approx 1$  versta), en donde mandó colocar una señal. Otros de los vértices auxiliares empleados fueron la iglesia de Kemi y la colina de Kallin-Kangas, cerca de la misma. Esas dos estaciones

<sup>277</sup> Su torre terminaba con una pirámide de madera, un excelente punto de mira que podía ser divisado desde otros vértices próximos o más alejados.

Referencia	Vértices	A. observados	A. planos	Log. de los lados	Cant. auxiliares
K. B. 15. No. 177. Tr. compensado	KAMMIO .....	90 48 34,31	34,10	4,0592670.4	$\ominus = 185,5$ $\Omega = 0,623$ $\mathcal{X} = 115,0$
	KYLÄ-KANGAS .....	37 49 43,56	43,36	3,8469854.2	
	WILJAMIN-VUORI .....	51 21 42,74	42,54	3,9520194.7	
	Suma	180 0 0,61	0,00		
		0,604 Exc.			
K. B. 16. No. 178. Tr. compensado	RAPPU-VUORI .....	51 49 45,32	45,05	3,9520194.7	$\ominus = 416,1$ $\Omega = 0,623$ $\mathcal{X} = 259,2$
	KAMMIO .....	68 14 56,06	55,80	4,0244252.3	
	KYLÄ-KANGAS .....	59 55 19,41	19,15	3,9936907.7	
	Suma	180 0 0,79	0,00		
		0,787 Exc.			
K. B. 17. No. 179. Tr. compensado	TAMMI-MÄKI .....	39 34 38,29	37,94	3,9936907.7	$\ominus = 408,1$ $\Omega = 0,623$ $\mathcal{X} = 254,2$
	RAPPU-VUORI .....	46 11 35,76	35,41	4,0478146.4	
	KAMMIO .....	94 13 47,00	46,65	4,1882868.9	
	Suma	180 0 1,05	0,00		
		1,053 Exc.			

Ficha técnica de los triángulos números, 177, 178 y 179.

fueron usadas por Svanberg, en 1802, aunque no se pudiera recuperar la estación de la colina anterior. Todo lo contrario sucedió con el lado Tornio-Kemi, común a la campaña de Svanberg y a las operaciones del arco escandinavo. Struve proporcionó los valores de los ángulos observados y las correcciones resultantes de la compensación, para el triángulo número 224, cuyo lado Ajos-Kivalo pertenecía asimismo al triángulo número 223; datos que se reproducen junto a estas líneas:

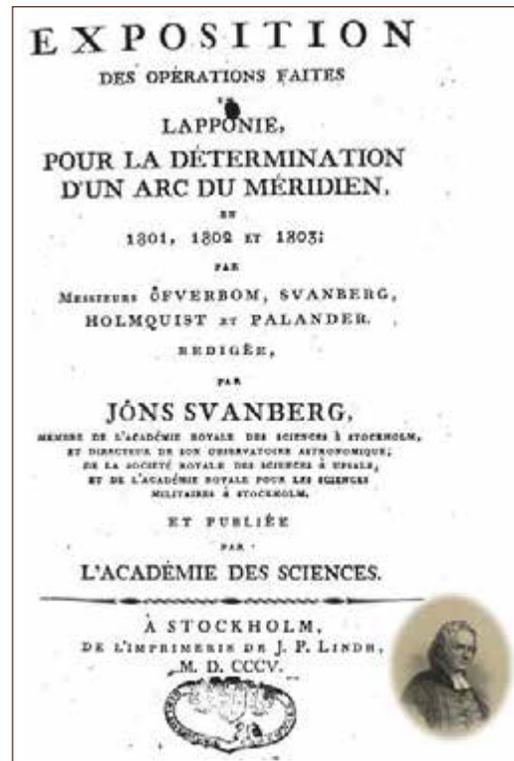
D. AJOS.			C. KIVALO.		
	Ángulos observados	Correcciones		Ángulos observados	Correcciones
<i>BDT</i>	0° 16' 19,896	+ 0,163	<i>DCF</i>	36° 28' 59,522	- 0,115
<i>TDE</i>	40 18 49,485	- 0,087	<i>FCE</i>	1 56 30,996	+ 0,383
<i>EDF</i>	3 26 54,411	- 0,367	<i>ECT</i>	2 40 30,724	- 0,487
<i>FDC</i>	51 9 2,336	- 0,106			
B. KOKKO-MÄKI.			E. KALLIN-KANGAS.		
<i>TBE</i>	130° 48' 9,205	+ 0,012	<i>CEF</i>	35° 20' 56,753	+ 0,078
<i>EBF</i>	2 12 34,790	- 0,134	<i>FED</i>	51 37 36,938	+ 0,110
<i>FBD</i>	41 0 3,877	- 0,100	<i>DEB</i>	96 12 12,679	+ 0,109
			<i>BET</i>	3 0 56,946	+ 0,200.

Ángulos observados y compensados del triángulo número 224.

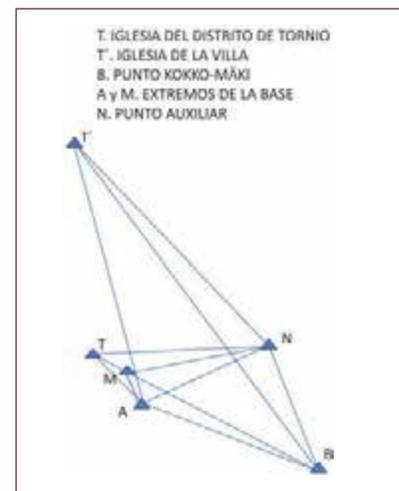
Al haber sido la iglesia de Kemi vértice de la triangulación efectuada por Svanberg, Struve decidió comparar entre sí los dos valores atribuidos al lado Tornio-Kemi. Siendo *F* otro punto auxiliar

relativamente próximo a  $E$  ( $\approx 634.384$  toesas), y partiendo de que el lado  $TD$  era del orden de 13152.0288 toesas, se resolvieron los tres triángulos  $DTE$ ,  $DEF$  y  $TEF$ , llegando finalmente a que el lado  $TF$  valía unas 9179.566 toesas, mientras que el valor obtenido por Svanberg fue de 9178.960 toesas<sup>278</sup>. Otra distancia que le pareció interesante a Struve fue la que separaba el vértice Tornio del Kokko-Mäki, es decir el valor del lado  $TB$ , que resultó ser de 599.153 toesas, de acuerdo con los datos proporcionados por Woldstedt. El triángulo número 225 fue observado por Lindhagen y Wagner en el año 1851. Lindhagen había elegido como vértice la colina de Kokko-Mäki, al igual que hizo antes (1842) Woldstedt, tanto para las medidas terrestres como para las astronómicas<sup>279</sup>. Sin embargo construyó una señal de mayor altura para poder visar los vértices de Kivalo y Kaakama-Vaara.

Lo más relevante, en relación con la colina anterior, fue que sobre ella se midió una pequeña base y se ejecutó una triangulación auxiliar, con objeto de hallar las distancias entre Tornio y los puntos de su entorno que se vienen comentando; los elementos de los triángulos correspondientes se midieron o calcularon independientemente de la cadena geodésica principal. No obstante el extremo  $A$  de la base fue al mismo tiempo el lugar en que Wagner estacionó el teodolito universal para efectuar las observaciones astronómicas. Dicha base,  $AM$  en la figura adjunta, fue medida en dos ocasiones (12 y 14 de julio del año 1851) con los resultados de 87.1657 toesas y 87.1617 toesas, con un valor medio de 86.1637 toesas; la corrección para reducirla al nivel del mar fue insignificante ( $\approx -0.0003$  toesas), ya que la altitud de  $A$  era de tan sólo 13 toesas. La medida de la base se realizó con reglas de 3.5 toesas, hechas de madera de abeto, debidamente contrastadas (antes y después de cada operación) con una regla metálica dividida de acuerdo con el patrón del Observatorio de Pulkovo. Los ángulos de la triangulación fueron observados, con el teodolito universal de Ertel, en  $A$ ,  $M$ ,  $N$  y  $B$ , de manera que se contó con datos más que suficientes para unir la base con los puntos  $N$ ,  $T$ ,  $B$  y  $T'$ . Struve propor-



Portada de la Memoria en la que se dio cuenta de la medida del arco de meridiano realizada por J. Svanberg



Croquis de la triangulación auxiliar realizada en los alrededores de Tornio.

<sup>278</sup> La medida de Svanberg en Laponia fue detallada en su obra: *Exposition des opérations faites en Laponie, pour la détermination d'un arc du méridien en 1801, 1802 et 1803* (Estocolmo.1805).

<sup>279</sup> Aunque la antigua señal ya no se conservara, si pudo recuperarse su centro. El cual se marcó sobre una piedra encastrada en el suelo.

cionó las direcciones angulares observadas, reducidas a los centros, así como las correcciones que se les deberían aplicar y las distancias entre los diferentes puntos involucrados; datos obtenidos de los cálculos realizados por Lindhagen.

Puntos	Dirección angular	Corrección	D. compensadas	Logaritmo de las Distancias.	Distancias en t.
<b>A. ESTACIÓN ASTRONÓMICA Y EXTREMO DE LA BASE</b>					
<i>T</i>	0° 0' 0,00		0° 0' 0,00	2,1559799	143,2122
<i>M</i>	1 58 18,08	0,00	1 58 18,08	1,9403359	87,1637
<i>T'</i>	5 16 16,83	- 0,04	5 16 16,79	3,1260035	1336,6062
<i>N</i>	79 21 1,95	+ 0,09	79 21 2,04	2,2755823	188,6177
<i>B</i>	156 25 6,83	- 0,34	156 25 6,49	2,6676140	465,1724
<b>M. EXTREMO DE LA BASE</b>					
<i>N</i>	0° 0' 0,00		0° 0' 0,00	2,2780878	189,7090
<i>A</i>	75 58 57,94	- 0,11	75 58 57,83	1,9403359	87,1637
<b>N. PUNTO AUXILIAR</b>					
<i>B</i>	0° 0' 0,00		0° 0' 0,00	2,6638739	461,1836
<i>A</i>	79 26 26,44	- 0,14	79 26 26,30	2,2755823	188,6177
<i>M</i>	106 4 44,52	- 0,02	106 4 44,50	2,2780878	189,7090
<i>T</i>	120 23 53,15	+ 0,08	120 23 53,23	2,3318628	214,7152
<i>T'</i>	177 19 33,86	+ 0,27	177 19 34,13	3,1131431	1297,6069
<b>B. KOKKO-MÄKI</b>					
<i>A</i>	0° 0' 0,00		0° 0' 0,00	2,6676140	465,1724
<i>T</i>	5 29 13,98	- 0,80	5 29 13,18	2,7775506	599,1707
<i>T'</i>	21 31 7,96	- 0,83	21 31 7,13	3,2451169	1758,3968
<i>N</i>	23 29 29,57	- 0,31	23 29 29,26	2,6638739	461,1836

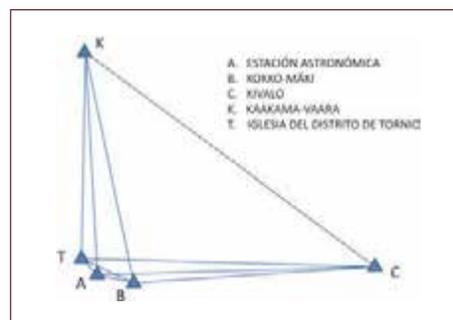
Elementos, observados y calculados, de la triangulación auxiliar de Tornio.

Al haberse calculado el acimut de la línea *AT* (338°31'2".0), gracias a las observaciones astronómicas practicadas en *A*, pudieron calcularse las coordenadas polares de los puntos que se incluyen en la tabla adjunta:

*Coordenadas polares en el entorno de Tornio*

Origen	Puntos	Distancias (toesas)	Acimutes
Estación <i>A</i>	<i>T</i>	143.212	338°31'2".0
	<i>T'</i>	1336.606	343°47'18".8
	<i>B</i>	465.172	134°56'8".
<i>T</i>	<i>T'</i>	1194.072	344°25'4".2
	<i>A</i>	143.212	158°30'54".6
	<i>B</i>	599.172	140°25'14".3

A la vista de esos resultados proclamó Struve que el acuerdo entre los resultados obtenidos, para el lado Tornio-Kokko-Mäki no podía ser más satisfactorio<sup>280</sup>, máxime cuando las medidas de las distancias y ángulos habían sido dos operaciones completamente independientes. En cambio, la distancia  $TT'$ , entre las dos iglesias, no pudo ser tan fiable como la anterior. La razón fundamental fue que el ángulo bajo el que se cortaban las rectas  $AT'$  y  $NT'$  resultó ser demasiado agudo ( $\approx 8^{\circ}2'7''$ ), no obstante el error al determinar el segmento  $TT'$  no fue mayor de 0.1 toesa.



Pentágono auxiliar para el triángulo 225.

Cerrado el paréntesis de la triangulación auxiliar, retomó Struve el cálculo del triángulo número 225. Para ello se valió de la figura anterior, que representa al pentágono  $A, B, C, K$  y  $T$ , en cuyos vértices, salvo en el último, se habían efectuado las oportunas observaciones. El triángulo en cuestión lo formaban los vértices  $C, K$  y  $T$  (Kivalo, Kaakama-Vaara, Iglesia del distrito) y ya se había obtenido, en el triángulo número 224, la distancia  $CT$ , cuyo logaritmo valió 4.29958567. Por otra parte era también conocida la distancia  $AT$ . Lindhagen fue el encargado del cálculo y compensación, a partir de las direcciones observadas y con la condición de que se considerase fijo el valor  $\log(AT/CT) = 7.8563942$ . En el transcurso de los mismos se dio un peso inferior a las direcciones con menor desarrollo:  $AB, BA, AT$  y  $BT$ , las cuales se habían dividido un número menor de veces, puesto que «una observación más precisa era casi imposible». He aquí los datos proporcionados por Struve:

C. KIVALO.			K. KAAKAMA-YAARA.		
Puntos	Direcciones observadas	Corr.	Puntos	Direcciones observadas	Corr.
B. KOKKO-MÄKI...	0° 0' 0,000	- 0,855	C. KIVALO.....	0° 0' 0,000	+ 0,239
T. TORNEA.....	1 20 20,284	+ 0,780	T. TORNEA.....	49 29 51,938	- 0,239
K. KAAKAMA-YAARA	44 8 57,053	- 0,245			
B. KOKKO-MÄKI.			A. ESTACIÓN ASTRONÓMICA		
K. KAAKAMA-YAARA	0° 0' 0,000	- 0,139	K. KAAKAMA-YAARA	0° 0' 0,000	+ 0,369
C. KIVALO.....	87 37 37,555	- 1,091	C. KIVALO.....	87 30 3,216	+ 0,484
A. ....	313 10 49,417	+ 1,535	B. KOKKO-MÄKI...	132 5 54,642	- 2,569
T. TORNEA.....	318 40 1,879	+ 0,925	T. TORNEA.....	335 40 47,812	- 0,845

Cálculos previos a la resolución del triángulo número 225.

A partir de las distancias angulares corregidas se obtuvieron los ángulos en  $K$  ( $49^{\circ}29'51''.460$ ) y en  $C$  ( $42^{\circ}48'35''.744$ ), de manera que se pudo deducir el valor del ángulo en  $T$  como diferencia entre la suma de los dos anteriores y la suma de  $180^{\circ}$  y el exceso esférico, dado por  $Ex = 3''.402$ , resultando que  $T \approx 87^{\circ}41'36''.198$ . Struve le atribuyó al triángulo un error

<sup>280</sup> Recuérdese que Woldstedt había obtenido 599.153 toesas y un acimut de  $140^{\circ}25'14''.4$ .

medio tal que su cuadrado venía dado por  $\Omega \approx 0.508 = (6/9)0.762$ , al comprobar que en lugar de las seis direcciones imprescindibles para los tres ángulos se contó con un total de nueve direcciones principales: dos observadas en *K*, tres en *C*, dos en *B* y otras dos en *A*. Struve efectuó una nueva comprobación a partir de las direcciones corregidas por Lindhagen, encontrando que la distancia *BT*, del triángulo *BCT*, valía 599.220 toesas en lugar de las 599.172 obtenidas a partir de la triangulación auxiliar anterior. Al mismo tiempo resolvió el triángulo número 225, suponiendo conocidos a la vez los lados *AT* y *BT*, compensándolo de acuerdo con ese condicionamiento. Los ángulos hallados por él y por Lindhagen apenas presentaron discrepancias, tal como refleja el cuadro adjunto, de ahí que Struve decidiese respetar los resultados proporcionados por su colaborador:

*Resoluciones del triángulo número 225*

Vértices	Ángulos		Discrepancias	Lados (toesas)
	Struve	Lindhagen		
Kaakama-Vaara	49°29'51".38	51".46	0".08	19933.644
Tornio	87°41'36".27	36".20	0".07	26194.221
Kivalo	42°48'35".75	35".74	0".01	17815.097

Al referirse a la triangulación de Laponia, ha de recordarse que el primer responsable de la misma fue el geómetra sueco Selander, el cual dio cuenta de los trabajos en sendos informes entregados a Struve, como ya se dijo. Ambos fueron ilustrados con gráficos para representar la red de enlace entre la base de Öfver-Tornio y el lado fundamental Avasaksa-Pullinki, y la cadena geodésica principal de 21 triángulos, que unió Tornio con el lado Bäljatz-Vaara-Atjik, común a las cadenas de Laponia y del Finmarken noruego. En ambos casos hubo datos sobreabundantes, debiendo destacar las ocho diagonales divisadas: desde la de Tornio-Huitaperi hasta la de Kersti-Vaara-Atjik<sup>281</sup>. En la primera de las comunicaciones de Selander se incluyeron las direcciones medias observadas, mientras que en la segunda figuraron los cálculos correspondientes; éste añadió una nota en la que comentó que fue él mismo el encargado de hacerlos, a excepción de los astronómicos, para la obtención de la latitud, efectuados por el profesor Agardh. A título de ejemplo, se acompañan aquí las direcciones medias para los dos extremos de la base y del lado fundamental, aparte de las halladas en los ocho primeros triángulos principales.

Aunque Selander manifestase que fue el autor de los cálculos, lo cierto es que intervino también Lindhagen, tal como se comentó en su momento, a propósito de la base anterior y de su reducción al nivel del mar. La participación de Lindhagen en los cálculos y compensación de la triangulación de Laponia fue muy relevante, por expreso deseo de Struve<sup>282</sup>: «en la primavera de 1854 encargué a Lindhagen, que había finalizado los cálculos relativos al Finmarken noruego, que se ocupase igualmente del cálculo de los triángulos de Laponia, partiendo de la longitud conocida de la base de Öfver-Tornio... y de las direcciones observadas desde los diferentes vértices de Laponia, que nos comunicó Selander en 1853». Parece pues evidente que los cálculos presentados por

<sup>281</sup> Aunque la determinación de los tres ángulos, de cada uno de los 21 triángulos, exigiera 86 direcciones, recordemos que al final se transformaron en 100, tras sumarle las 14 de las diagonales.

<sup>282</sup> También nombró calculador ayudante a Israel Hübner, un joven astrónomo supernumerario del Observatorio de Púlkovo.

B. KESKI-RAHTA,		A. IVARI,	
EXTREMO MERIDIONAL DE LA BASE		EXTREMO SEPTENTRIONAL DE LA BASE	
Vértice	Dirección	Vértice	Dirección
C. SÄRKÄ-VAARA..	0° 0' 1,766	I. AVASAKSA.....	0° 0' 3,964
D. HIIRI-VAARA...	24 37 32,963	B. KESKI-RAHTA...	30 54 16,415
A. IVARI.....	65 59 11,351	C. SÄRKÄ-VAARA..	66 28 38,242
E. LAMMI-VAARA..	66 42 56,505	D. HIIRI-VAARA...	142 26 45,454
I. AVASAKSA.....	156 1 42,040	E. LAMMI-VAARA..	212 1 44,400
		F. HIMO-VAARA...	270 23 21,227

I. AVASAKSA.	
Vértice	Dirección
B. KESKI-RAHTA...	0° 0' 19,847
C. SÄRKÄ-VAARA..	11 56 23,896
D. HIIRI-VAARA...	38 9 49,923
A. IVARI.....	59 3 35,340
G. KUORA-VAARA..	70 14 34,007
E. LAMMI-VAARA..	78 46 59,053
F. HIMO-VAARA...	117 9 15,491
H. PULLINKI.....	118 43 6,821

H. PULLINKI.	
Vértice	Dirección
I. AVASAKSA.....	0° 0' -3,955
F. HIMO-VAARA...	0 28 20,629
G. KUORA-VAARA..	30 36 6,024

Direcciones medias observadas en diferentes vértices de Laponia: red de enlace entre la base Öfver-Tornio y el lado Avasaksa-Pullinki.

Selander no le debieron parecer a Struve del todo satisfactorios. De hecho comentó, al referirse a la determinación del lado fundamental Avasaksa-Pullinki, que Selander no indicó el procedimiento seguido para deducirlo a partir de la base, ni fijado el error probable correspondiente, añadiendo: «el cálculo de la compensación realizado por Lindhagen, era por tanto necesario, pues se trataba de procurar nuevos datos, análogos a los que ya había empleado en el arco meridional, indispensables para fijar el grado de precisión».

Lindhagen cumplió el encargo recibido de Struve, entregándole en el otoño de 1854 una detallada memoria con dos apartados: el primero referido a la base Öfver-Tornio y al lado fundamental ya citado, centrandó el segundo en el cálculo de los triángulos principales, desde Tornio hasta Bäljatz-Vaara y Atjik, considerando común el mismo lado anterior. Struve reconoció el buen hacer de Lindhagen con estas palabras: «el vasto trabajo de Lindhagen es un cálculo riguroso de la compensación, siguiendo el método de los mínimos cuadrados, realizado en dos secciones, de acuerdo

1. TORNEÁ, LANDSKYRKAN.		2. PERRA-VAARA.	
Vértice	Dirección	Vértice	Dirección
PERRA-VAARA . . . .	0° 0' 0,000	HUITAPERI . . . . .	0° 0' 0,000
HUITAPERI . . . . .	7 4 3,087	KAAKAMA-VAARA . .	55 53 45,318
KAAKAMA-VAARA . .	29 54 30,691	TORNEÁ . . . . .	196 38 41,098
3. KAAKAMA-VAARA.		4. HUITAPERI.	
TORNEÁ . . . . .	0° 0' 0,000	AVASAKSA . . . . .	0° 0' 0,000
PERRA-VAARA . . . .	39 20 33,820	HORRILANKERO . . .	30 58 6,145
HUITAPERI . . . . .	119 46 34,187	KAAKAMA-VAARA . .	131 12 50,767
HORRILANKERO . . .	163 31 42,343	TORNEÁ . . . . .	168 35 50,068
NIEMI-VAARA . . . .	173 13 15,891	PERRA-VAARA . . . .	174 53 8,193
5. HORRILANKERO.		6. AVASAKSA.	
AVASAKSA . . . . .	0° 0' 0,000	PULLINKI . . . . .	0° 0' 0,000
PULLINKI . . . . .	94 56 51,623	HORRILANKERO . . .	53 42 34,239
NIEMI-VAARA . . . .	144 8 38,889	TORNEÁ . . . . .	157 30 8,077
KAAKAMA-VAARA . .	287 16 29,153	HUITAPERI . . . . .	166 1 9,958
HUITAPERI . . . . .	323 16 38,534		
7. PULLINKI.		8. NIEMI-VAARA.	
KITTIS-VAARA . . . .	0° 0' 0,000	HORRILANKERO . . .	0° 0' 0,000
NIEMI-VAARA . . . .	87 49 52,403	PULLINKI . . . . .	93 23 41,894
HORRILANKERO . . .	125 14 20,829	KITTIS-VAARA . . . .	145 19 55,211
AVASAKSA . . . . .	156 34 53,668	KAAKAMA-VAARA . .	332 49 19,640
PALJUKKA-VAARA . .	304 28 18,193		
OLLOS-VAARA . . . .	354 50 33,747		

Direcciones medias observadas en vértices de los triángulos principales de Laponia.

con los dos sistemas de direcciones ya indicadas<sup>283</sup>». En la primera sección se incluyeron por tanto los cálculos efectuados por Lindhagen para la red de enlace, señalando como principal novedad que se usara como unidad lineal la propia longitud de la base, que había medido y calculado junto a Selander; en función de ella obtuvo los excesos esféricos de cada triángulo y expresó las longitudes de sus lados. Struve modificó, muy acertadamente, la segunda decisión al incluir, en el listado de datos, los logaritmos de los distintos lados previamente expresados en toesas.

Más adelante explicó Struve el significado de cada columna de la tabla con el resumen de los cálculos: en la primera se incluirían los vértices visados, en la segunda figurarían las direcciones observadas<sup>284</sup>, la tercera presentaría las correcciones que deberían aplicarse<sup>285</sup>, finalmente aparece-

<sup>283</sup> Las de la red de enlace de la base con el lado Avasaksa-Pullinki y los de la cadena de los 21 triángulos principales.

<sup>284</sup> Estos nuevos valores se obtuvieron a partir de los proporcionados por Selander, tomando como origen la primera dirección observada.

<sup>285</sup> La suma de esas correcciones debería ser cero en cada estación, por haberse atribuido igual peso a todas las direcciones observadas.

rían en la cuarta columna los logaritmos de las distancias, identificadas con la nueva unidad. Struve aclaró que los logaritmos se habían aplicado a los datos procedentes de la resolución de triángulos compensados y formados sucesivamente entre las nueve estaciones diferentes de la red de enlace, añadiendo que el valor de cada logaritmo figuraría dos veces en la mencionada tabla.

V	Dirección observada	Corrección	Log. distancia en toesas	V	Dirección observada	Corrección	Log. distancia en toesas
<b>B. KESKIRANTA.</b>				<b>A. IVARI.</b>			
C	0° 0' 0,000	-0,2739	lg BC = 2,9554221.1	J	0° 0' 0,000	-1,0467	lg AJ = 3,2484834.5
D	24 37 31,197	-0,3206	lg BD = 3,4918559.1	B	30 54 12,451	-0,0542	lg AB = 3,1817974.8
A	65 59 9,585	+0,3483	lg BA = 3,1817974.8	C	66 28 34,278	+0,0751	lg AC = 3,1513793.2
E	66 42 54,739	+0,5357	lg BE = 3,6360653.5	D	142 26 41,490	+0,6233	lg AD = 3,3433717.0
J	156 140,274	-0,2896	lg BJ = 2,9591061.4	E	212 140,436	-0,8127	lg AE = 3,4481093.5
	Suma	-0,0001		F	270 23 17,263	+1,2152	lg AF = 3,4495895.6
					Suma	0,0000	
<b>J. AVASAKSA.</b>				<b>C. SÄIKKI-VAARA.</b>			
B	0° 0' 0,000	-0,4469	lg JB = 2,9591061.4	D	0° 0' 0,000	-0,4838	lg CD = 3,3643476.6
C	11 56 4,049	-0,3316	lg JC = 3,2487250.3	G	25 24 44,997	+0,6061	lg CG = 3,8223689.1
D	38 9 30,076	+0,3839	lg JD = 3,5760884.3	E	44 32 3,159	-0,2169	lg CE = 3,6079579.8
A	59 3 15,493	+0,5793	lg JA = 3,2484834.5	A	67 34 51,050	+0,0805	lg CA = 3,1513793.2
G	70 14 14,160	-1,4205	lg JG = 3,8692986.8	F	83 32 23,766	-0,9123	lg CF = 3,6181584.1
E	78 46 39,206	-0,2578	lg JE = 3,6444186.1	J	133 59 2,418	+0,9789	lg CJ = 3,2487250.3
F	117 8 55,644	+0,1942	lg JF = 3,5207129.6	B	146 1 19,032	-0,0526	lg CB = 2,9554221.1
H	118 42 46,974	+1,2993	lg JH = 4,1545707.0		Suma	-0,0001	
	Suma	-0,0001					
<b>D. HIIRI-VAARA.</b>				<b>E. LAMMI-VAARA.</b>			
E	0° 0' 0,000	-0,0429	lg DE = 3,4626268.4	F	0° 0' 0,000	-1,5841	lg EF = 3,4379110.4
F	35 34 43,382	+0,9980	lg DF = 3,6550708.6	J	48 41 18,641	+2,0178	lg EJ = 3,6444186.1
A	65 0 29,239	-0,6216	lg DA = 3,3433717.0	B	60 35 55,011	+1,5826	lg EB = 3,6360653.5
J	81 39 58,497	+1,3710	lg DJ = 3,5760884.3	A	60 59 37,842	+0,6383	lg EA = 3,4481093.5
B	92 6 21,772	-1,8974	lg DB = 3,4918559.1	C	72 23 45,252	-0,2090	lg EC = 3,6079579.8
C	101 27 29,079	+0,1928	lg DC = 3,3643476.6	D	106 24 14,191	-1,8259	lg ED = 3,4626268.4
	Suma	-0,0001		G	207 59 32,240	-0,6198	lg EG = 3,4927576.9
					Suma	-0,0001	
<b>F. HIMO-VAARA.</b>				<b>G. KUORA-VAARA.</b>			
J	0° 0' 0,000	-1,8721	lg FJ = 3,5207129.6	H	0° 0' 0,000	-0,7011	lg GH = 4,0368057.3
C	24 20 25,228	+0,2892	lg FC = 3,6181584.1	F	75 40 6,231	-0,2469	lg GF = 3,7541944.6
A	32 17 38,492	-0,5574	lg FA = 3,4495895.6	E	88 45 50,391	+0,3150	lg GE = 3,4927576.9
D	54 55 15,459	+1,9203	lg FD = 3,6550708.6	J	100 55 13,288	+0,2946	lg GC = 3,8692986.8
E	92 56 19,444	-0,3636	lg FE = 3,4379110.4	C	114 2 46,536	+0,3384	lg GJ = 3,8223689.1
G	107 50 6,667	+0,9355	lg FG = 3,7541944.6		Suma	0,0000	
H	182 2 15,266	-0,3522	lg FH = 4,0397979.1				
	Suma	-0,0003					
				<b>H. PULLINKI.</b>			
				J	0° 0' 0,000	-0,2467	lg HJ = 4,1545707.0
				F	0 28 24,584	-0,4676	lg HF = 4,0397979.1
				G	30 36 9,979	+0,7143	lg HG = 4,0368057.3
					Suma	0,0000	

Listado con los elementos de la red de enlace modificados por Struve.

Struve eligió como resultado principal del cuadro anterior el logaritmo del lado *HJ* (Pullinki-Avasaksa), el cual calculó una vez en función de los triángulos compensados *JAB*, *FJA*, *GJF* y *HJG*, y otra a través de los *CAB*, *DCA*, *FCD*, *GFC*, *HGF* y *JHG*. Estas dos series de triángulos proporcionaron los resultados más favorables para la unión entre *AB* y *HJ*, dado que en ellos se minimizaban los valores de  $\mathcal{G} = [(\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2)]$ , entre las diferentes combinaciones posibles. Así se llegó a dos valores idénticos del logaritmo, con  $HJ = 14274.8240$  toesas, considerándolo Struve como el resultado definitivo de la compensación realizada por Lindhagen; el cual había de-

dicado este primer apartado de su memoria a la exactitud del mismo. Siendo 41.866 la suma de los cuadrados de las correcciones que figuraban en la tabla, 54 las direcciones observadas y 23 las indispensables para los nueve vértices, resultó que el cuadrado del error medio de una dirección observada fue de 1.3505, cociente entre 41.866 y la diferencia 54 – 23, con lo que el error medio correspondiente fue de 1".1621 y el probable de 0".7838. A partir de ellas pudo deducirse para terminar la incertidumbre en la magnitud del lado, alrededor de 0.1322 toesas. Como el valor que le había proporcionado Selander fue ligeramente diferente, 14274.8973, Struve obtuvo la media de ambos<sup>286</sup> pero asignándole el error probable que se obtuvo en el Observatorio de Púlkovo, es decir que la longitud final del lado Avasaksa- Pullinki fue de 14274.8607 ± 0.1322 toesas.

Las modificaciones realizadas por Struve dieron lugar a otras todavía más relevantes, en tanto que afectaron al tramo de la cadena geodésica que unió Tornio con Atjik y Bäljatz-Vaara. En efecto, al calcular Selander los 21 triángulos, a partir de las 100 direcciones, observadas en sus 23 vértices, y del  $\log HJ = 4.15457299$ , Struve tuvo que cambiar todos los logaritmos de los lados para tener en cuenta el nuevo valor  $\log HJ = 4.15457188$ . Las razones del cambio se justificaron, en un primer momento, por considerarlas una mera continuación de los cálculos de Lindhagen en la cadena. Sin embargo, las más verosímiles fueron expuestas inmediatamente por Struve:

*«sentía un cierto temor de usar las comunicaciones precisas que esperaba del geómetra sueco, sin poder no controlarlas, pero si constatar, al menos, su exactitud genérica, lo cual parecía deseable ante la inmensidad de los cálculos de eliminación».*



Torre de 13 metros levantada en el año 1969 sobre el vértice Avasaksa. En su exterior figura una inscripción con las coordenadas geográficas del mismo: 66° 23'52" N y 23° 43'31" E, recordando además que el Arco Geodésico de Struve había sido inscrito por la UNESCO en la lista de lugares del mundo que debían ser protegidos.

<sup>286</sup> La diferencia entre los valores hallados por Selander y Lindhagen se explicó por que el segundo asignó a todas las direcciones observadas el mismo peso, mientras que Selander les atribuyó a cada una un peso acorde con el número de observaciones que la habían determinado. Struve pensaba que bajo ese punto de vista sería preferible el valor de Selander, aunque inmediatamente contestara la bondad del principio que fijaba un peso proporcional al número de observaciones, en tanto que para cada vértice habría una fuente de errores propia, de manera que el peso ideal estaría comprendido entre el igual y el proporcional, de ahí que optase por la media de las dos longitudes y por el error asignado por Lindhagen, ante la falta de datos proporcionados por Selander a ese respecto.

Por supuesto que la resolución de los triángulos principales, practicada por Lindhagen, se efectuó partiendo de que todas las direcciones tenían igual peso. No obstante, eran de esperar ciertas diferencias que Struve pensó eliminar promediando «los resultados obtenidos por los dos sabios». Los resultados obtenidos por ambos geodestas fueron incluidos en el segundo tomo de la Memoria de Struve, entre las páginas 82 y 87, ambas inclusive. En la primera columna del listado figuraron los vértices visados desde uno central (la estación), que aparece numerado; Struve añadió un asterisco a los que formaban diagonales con la estación, para distinguir así las direcciones diagonales de las principales. La segunda columna reflejó las direcciones observadas por Selander, en las tres siguientes se presentaron las correcciones calculadas por él (*s*) y por Lindhagen (*l*), así como la diferencia entre ambas cantidades; finalmente, la sexta, séptima y octava, mostraron los logaritmos de las distancias *S* y *L*, junto a sus diferencias, deducidas por los cálculos.

Vértices	D. observadas por Selander	C. de las direcciones		<i>s - l</i>	Log. de las distancias		lg <i>S</i> - lg <i>L</i>
		Selander <i>s</i> =	Lindhagen <i>l</i> =		Selander lg <i>S</i> =	Lindhagen lg <i>L</i> =	
<b>3. KAAKAMA-VAARA.</b>							
TORNEA . . . . .	0° 0' 0,000	+0,020	-0,022	+0,042	4,2507739,1	747.6	- 8.5
FERRA-VAARA . . . . .	39 20 33,820	+0,504	+0,626	-0,122	3,9776605.5	608.1	- 2.6
HUITAPERI . . . . .	119 46 34,187	+0,094	+0,171	-0,077	4,0565217.0	214.6	+ 2.4
HORRILANKERO . . . . .	163 31 42,343	+0,313	+0,388	-0,075	4,2802977.4	974.1	+ 3.3
* NIEMI-VAARA . . . . .	173 13 15,891	-1,260	-1,163	-0,097	4,3987692.0	690.8	+ 1.2
	<b>Sumas</b>	-0,329	0,000	-0,329			
<b>4. HUITAPERI.</b>							
AVASAKSA . . . . .	0° 0' 0,000	+0,894	+0,827	+0,067	3,9375420.1	416.4	+ 3.7
HORRILANKERO . . . . .	30 58 6,145	+0,470	+0,461	+0,009	4,1270961.9	958.3	+ 3.6
KAAKAMA-VAARA . . . . .	131 12 50,767	-0,046	-0,089	+0,043	4,0565217.0	214.6	+ 2.4
* TORNEA . . . . .	168 35 50,068	-1,202	-1,192	-0,010	4,4059947.2	952.4	- 5.2
FERRA-VAARA . . . . .	174 53 8,193	-0,113	-0,008	-0,105	4,1324011.1	010.0	+ 1.1
	<b>Sumas</b>	+0,003	-0,001	+0,004			
<b>5. HORRILANKERO.</b>							
AVASAKSA . . . . .	0° 0' 0,000	-0,790	-0,785	-0,005	3,8723230.9	228.5	+ 2.4
PULLINKI . . . . .	94 56 51,623	+0,088	+0,168	-0,080	4,0625439.0	438.7	+ 0.3
NIEMI-VAARA . . . . .	144 8 38,889	+0,867	+0,786	+0,081	3,8468445.6	447.7	- 2.1
KAAKAMA-VAARA . . . . .	287 16 29,153	+0,152	+0,108	+0,044	4,2802977.4	974.1	+ 3.3
HUITAPERI . . . . .	323 16 38,534	-0,269	-0,278	+0,009	4,1270961.9	958.3	+ 3.6
	<b>Sumas</b>	+0,048	-0,001	+0,049			
<b>6. AVASAKSA.</b>							
PULLINKI . . . . .	0° 0' 0,000	-0,341	-0,320	-0,021	4,1545718.8	718.8	0.0
HORRILANKERO . . . . .	53 42 34,239	+0,779	+0,789	-0,010	3,8723230.9	228.5	+ 2.4
* TORNEA . . . . .	157 30 8,077	+0,648	+0,626	+0,022	4,5314873.0	876.1	- 3.1
HUITAPERI . . . . .	166 1 9,958	-1,033	-1,095	+0,062	3,9375420.1	416.4	+ 3.7
	<b>Sumas</b>	+0,053	0,000	+0,053			

Vueltas de horizonte, observadas y calculadas por Selander y Lindhagen, en los vértices 3, 4, 5 y 6.

Struve hizo después una serie de consideraciones para que se comprendiese mejor el listado anterior:

1. En cada vértice debía ser cero la suma de las correcciones  $l$ , dado que se supuso igual peso para todas las direcciones.
2. En cambio la suma de las obtenidas por Selander,  $s$ , sólo se anuló en los vértices Perra-Vaara y Kittis-Vaara, siendo mayor su valor en los vértices en que se observaron diagonales.
3. Los valores de las sumas de los cuadrados de las correcciones fueron  $[s^2] = 72.86$  y  $[l^2] = 64.80$ . Sin embargo, Struve matizó esas cifras al separar las direcciones diagonales de las principales y obtener  $[s^{*2}] = 33.78$  y  $[l^{*2}] = 23.66$ . Restando esos valores de los previos se llegó a que  $[s'^2] = 39.08$  y  $[l'^2] = 41.14$ , concluyendo que, al ser aquí  $[l'^2] > [s'^2]$ , se tenía una prueba intrínseca de la exactitud de los cálculos efectuados por Selander y Lindhagen. Otra característica de esas compensaciones fue la gran diferencia existente entre las correcciones de las direcciones diagonales y las de las direcciones principales, evidencia clara de que Selander sólo observó excepcionalmente las primeras.
4. Examinando la octava columna de la tabla se comprueba que, generalmente, las distancias obtenidas por Selander fueron menores que las halladas por Lindhagen, a excepción de las 14 distancias diagonales. De entre las 43 diferencias  $\log S - \log L$ , hubo dos iguales a cero, correspondiendo una al lado fundamental, 12 positivas y 29 negativas. La media aritmética de todas esas diferencias equivalió aproximadamente a  $1/400000$  de la longitud.
5. Partiendo de los principios que informaron los cálculos de Selander y de Lindhagen, Struve se sintió más autorizado a suponer que las correcciones medias  $(s + l)/2$  y las diferencias medias  $(s - l)/2$  podían entenderse como los resultados definitivos en el cálculo de los triángulos principales de Laponia.

En el análisis efectuado por Struve hubo otro apartado que no conviene eludir, se trata de su cálculo para determinar la distancia entre los vértices, y puntos de Laplace, Tornio y Stuor-Oivi, y la orientación de la línea geodésica por ellos definida. Struve obtuvo la distancia por dos vías diferentes: una a través de los vértices occidentales (Tornio, Avasaksa, Pullinki, Paljukka-Vaara, etc) y otra por medio de los orientales (Tornio, Kaakama-Vaara, Niemi-Vaara, etc). En el primer caso obtuvo 166173.1199 toesas y en el segundo 166173.1180 toesas. En cuanto a la dirección obtuvo los dos valores siguientes para el ángulo Perra-Vaara-Tornio-Stuor-Oivi:  $16^\circ 41' 44'' .491$  (con los triángulos occidentales) y  $16^\circ 41' 44'' .465$  (con los triángulos orientales). El ángulo en el otro extremo, Pajtas-Vaara- Stuor-Oivi-Tornio, resultó ser  $0^\circ 7' 47'' .631$  (con los triángulos occidentales) y  $0^\circ 7' 47'' .625$  (con los triángulos orientales). Los valores medios obtenidos por los dos caminos fueron los siguientes: una distancia Tornio-Stuor-Oivi de 166173.119 toesas, ángulo en Tornio de  $16^\circ 41' 44'' .478$  y otro ángulo en Stuor-Oivi de  $0^\circ 7' 47'' .628$ . Struve se apoyó en ese valor de la distancia para volver al estudio de las diferencias  $\log S - \log L$ . Llamando  $D$  a la distancia dada, se tendría que  $\log D = 5.22056077$ . Se trataría por tanto de hallar el cambio en el logaritmo inducido por las diferencias  $l - s$  y  $\log L - \log S$  del listado anterior. Si  $D'$  fuera la distancia obtenida mediante el cálculo por Lindhagen, se obtendría con facilidad  $\log D' - \log D = 11.6$  y en consecuencia:

$$\log D = 5.22055966 \Rightarrow D = 166172.694 \text{ toesas, según Selander,}$$

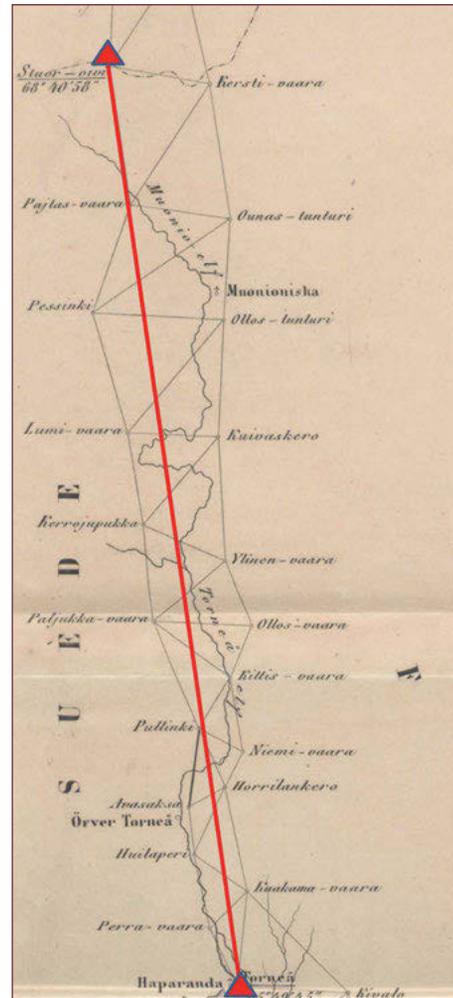
$$\log D' = 5.22056082 \Rightarrow D' = 166173.138 \text{ toesas, según Lindhagen;}$$

es decir que  $D' - D = 0.444$  toesas, un valor insignificante, si se compara con las incertidumbres propias del procedimiento de observación y cálculo, que viene a corroborar la bondad de los resultados obtenidos por ambos geodestas.

Finalizado el cálculo de las correcciones se pudieron ajustar todas las direcciones principales y obtener los valores definitivos de los ángulos en cada vértice, como diferencia de las que concurrían en el mismo. Es evidente que al ser cero la suma de las correcciones en el vértice, los ángulos de un triángulo dado seguirían sumando  $180^\circ$  más el exceso esférico, tal como figuran en los dos últimos listados que publicó Struve con relación a la triangulación de Laponia<sup>287</sup>. El primero de ellos contuvo los 5 triángulos de continuación limitados por el lado Tornio-Kaakama-Vaara, común a las redes de Finlandia y Laponia, y por el lado fundamental Avasaksa-Pullinki. En el segundo se incluyeron los 17 triángulos de Laponia, desde dicho lado fundamental hasta el lado Bäliatz-Vaara-Atjik, que perteneció tanto a la triangulación de Laponia como a la del Finmarken noruego. Tras el último listado, Struve terminó su reseña sobre la triangulación de Laponia repitiendo los tres valores de la distancia entre los vértices Tornio y Stuor-Oivi, obtenidos a partir del lado fundamental Avasaksa-Pullinki, obtenidos por él, Selander y Lindhagen.

Como es sabido, el último sector del arco de meridiano discurrió por la actual provincia noruega de Finnmark, que Struve llamó el Finmarken noruego. Recordaba este que al disponer en Púlkovo de toda la documentación necesaria, decidió que fuese Lindhagen el encargado del cálculo de las observaciones en ella recogidas<sup>288</sup>, dada su directa participación en las mismas. Lindhagen contó con la ayuda del astrónomo Lorenz Leonard Lindelöf, para los cálculos de eliminación<sup>289</sup>. Lindhagen entregó a Struve un detallado informe con todos los cálculos, en el año 1854, el cual dividió en dos secciones<sup>290</sup>: por una parte los referidos a la red de enlace entre la base y el lado fundamental, y por otra la que recogía las medidas angulares efectuadas desde los 15 vértices principales, entre Atjik y Fuglenaes, el extremo del arco localizado en la ciudad de Hammerfest.

El informe de Lindhagen se ilustró con dos gráficos muy relevantes, el de la cadena geodésica con los 12 triángulos principales, numerados del 247 al 258, y el de la red de enlace entre la base de



La geodésica formada por los vértices, y estaciones astronómicas, Tornio y Stuor-Oivi.

<sup>287</sup> Incluidos en las páginas 93 a la 97, ambas inclusive, del segundo tomo de su Memoria.

<sup>288</sup> La primera tarea de Lindhagen fue la de reducir al centro las observaciones realizadas, ya que todas las estaciones fueron excéntricas.

<sup>289</sup> Realmente fueron ejecutados por los dos de manera independiente, para asegurar así el necesario control.

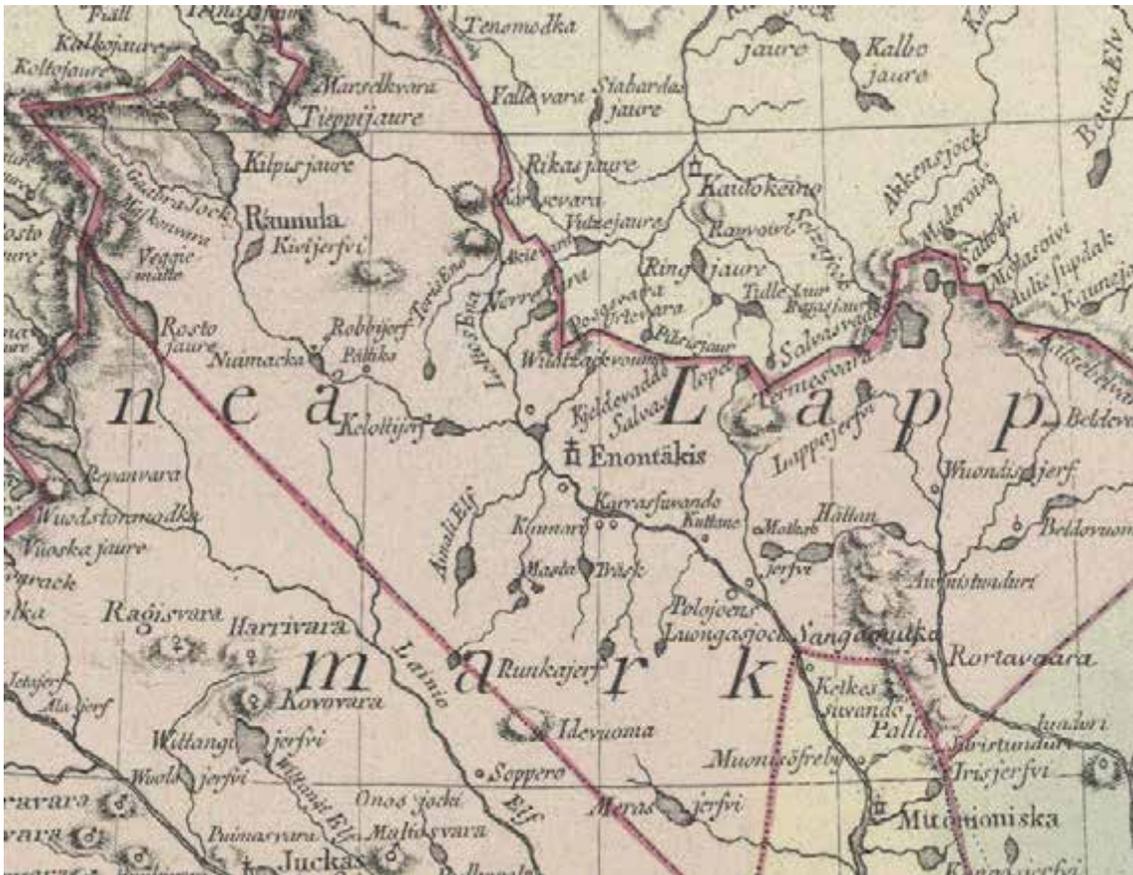
<sup>290</sup> El informe contenía también un importante apéndice dedicado a las determinaciones hipsométricas.

Referencia	Vértices	A. observados	A. planos	log. de los lados	Cant. auxiliares
L. B. 12. No. 241.	OUNAS-TUNTURI.....	51° 19' 42,36	42,09	4,3700812.9	Σ = 179,7 Ω = 1,564 ℑ = 281,0
	PESSINKI.....	36 10 58,38	58,12	4,2486945.0	
	OLLOS-TUNTURI.....	92 29 20,05	19,79	4,4771650.7	
	Suma	180 0 0,79	0,00		
		Corr. + 3,19	3,982 Exc.		
L. B. 13. No. 242.	PAJTAS-VAARA.....	102 39 19,71	17,83	4,4771650.7	Σ = 492,7 Ω = 1,564 ℑ = 770,6
	OUNAS-TUNTURI.....	41 34 46,94	45,06	4,3097876.3	
	PESSINKI.....	35 45 58,99	57,11	4,2546110.2	
	Suma	180 0 5,64	0,00		
		Corr. — 2,21	3,431 Exc.		
L. B. 14. No. 243.	KERSTI-VAARA.....	40 26 7,97	6,77	4,2546110.2	Σ = 477,2 Ω = 1,564 ℑ = 746,3
	PAJTAS-VAARA.....	59 35 24,19	22,99	4,3783624.9	
	OUNAS-TUNTURI.....	79 58 31,44	30,24	4,4359603.0	
	Suma	180 0 3,60	0,00		
		Corr. + 0,46	4,055 Exc.		
L. B. 15. No. 244.	STUOR-OIVI.....	73 26 55,51	54,76	4,4359603.0	Σ = 403,6 Ω = 1,564 ℑ = 631,2
	KERSTI-VAARA.....	61 17 16,96	16,21	4,3973604.9	
	PAJTAS-VAARA.....	45 15 49,78	49,03	4,3058131.0	
	Suma	180 0 2,25	0,00		
		Corr. + 2,39	4,639 Exc.		
L. B. 16. No. 245.	BÄLJATZ-VAARA.....	51 53 15,16	13,01	4,3058131.0	Σ = 374,8 Ω = 1,564 ℑ = 586,2
	STUOR-OIVI.....	64 56 29,79	27,65	4,3670187.3	
	KERSTI-VAARA.....	63 10 21,48	19,34	4,3604946.5	
	Suma	180 0 6,43	0,00		
		Corr. — 2,40	4,028 Exc.		
L. B. 17. No. 246.	ATJIE.....	113 42 39,45	39,66	4,3604946.5	Σ = 704,9 Ω = 1,564 ℑ = 1102,5
	BÄLJATZ-VAARA.....	36 3 53,60	53,81	4,1686912.9	
	STUOR-OIVI.....	30 13 26,32	26,53	4,1006939.5	
	Suma	180 0 —0,63	0,00		
		Corr. + 2,26	1,632 Exc.		

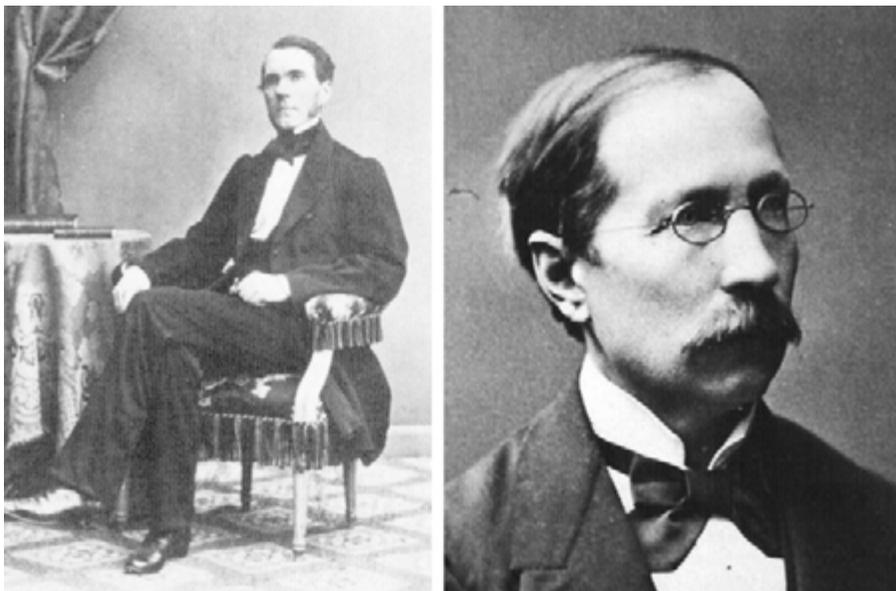
Los últimos triángulos principales en la triangulación de Laponia.

Alten y el lado fundamental formado por el vértice Lohdizhokki y el Nuppi-Vaara. La figura adjunta a la fotografía de la iglesia de Alten es copia de ese segundo gráfico, siendo *AB* la base y *LM* el lado fundamental. Obsérvese que a los 10 triángulos consecutivos se añadieron nada menos que 26 diagonales, de forma que se contó con datos sobreabundantes: las 42 direcciones asociadas a los ángulos se transformaron en 68. Todos los triángulos principales, salvo el número 257, contaron pues con diagonales; debiendo reseñarse igualmente el vértice complementario de Haajen, el cual proporcionó, con independencia del triángulo 258, una segunda unión del vértice Fuglenaes con el lado Jedei-Tyven.

Aunque para los tres ángulos de los 12 triángulos principales bastasen las 50 direcciones observadas desde los 14 vértices, Haajen incluido, el total se incrementó hasta alcanzar las 72. Como se emplearon, en la observación, dos instrumentos diferentes, un teodolito universal del Observatorio de Púlkovo y otro menor de Repsold, perteneciente al Observatorio de Oslo,



El límite septentrional entre Laponia y el Finmarken noruego. Fragmento de *Charta öfver Wästerbott och Svenske Lappmarcken*. Sus autores fueron Samuel Gustav Freiherr Hermelin, Anton Swab, Clas Wallman y Fridrick Akrel en 1795.



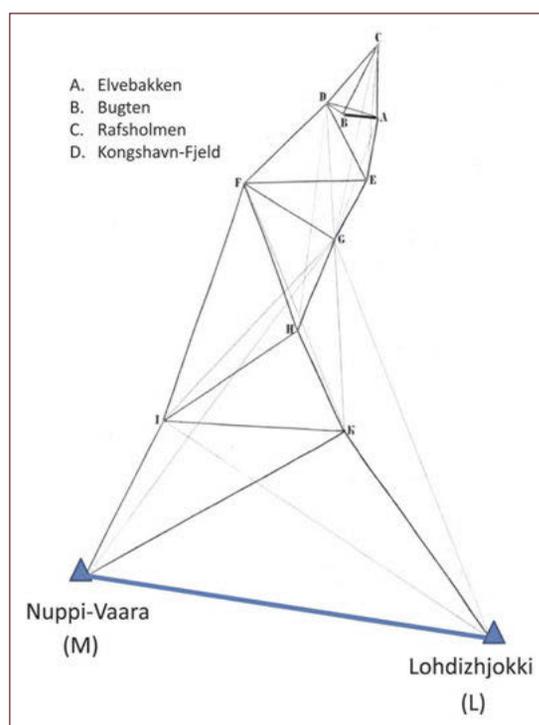
Georg Lindhagen, sentado, y su colaborador en los cálculos, Lorenz Leonard Lindelöf.

Lindhagen atribuyó distinto peso a las direcciones aisladas: 2.5 a las observadas con el primero y 1 a las del segundo, siendo esa asignación la que presidió la compensación. Struve presentó los resultados obtenidos por Lindhagen en cuatro cuadros, donde se consideraron como datos primitivos a las direcciones observadas. Sus pesos fueron proporcionales al número de punterías efectuadas, las cuales aparecían en la tercera columna de los listados. La cuarta recogía las correcciones de las direcciones observadas, unas correcciones tales que la suma de sus cuadrados, multiplicadas por sus respectivos pesos, fue mínima; al mismo tiempo se tuvieron que satisfacer los condicionamientos geométricos de la figura. La última columna de los cuadros contenía los logaritmos de las distancias, previamente expresadas en toesas, para cada uno de los vértices visados desde la estación que se indicaba en la cabecera; esos valores se obtuvieron a partir del logaritmo de la base de Alten,  $\log AB \approx 3.0624857$ , y de los ángulos obtenidos como diferencias de las direcciones corregidas que reflejaba la penúltima columna.

Lindhagen partió de  $\log AB = 3.0624857$  para el cálculo de todas las distancias involucradas en la resolución de los triángulos, usando para ello las tablas de Bagay, llegando a que  $\log LM = 4.1506537$ , o bien a que  $LM \approx 14146.653$  toesas. Struve quiso ratificar la fiabilidad del proceso seguido, tanto por las tablas de logaritmos como por el cálculo en sí. Ese fue el motivo de que dedujera un nuevo valor para el lado fundamental, en función de  $\log AB = 3.062488569$ , manifestando que había controlado siempre los valores de los logaritmos proporcionados por las tablas de Taylor y de Bagay, conservando por ello la octava cifra dada por la interpolación. Partiendo del lado  $AB$ , llegó al valor  $\log FG \approx 3.56445046$ , a través de los triángulos  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $DEF$  y  $EFG$ . A continuación se apoyó en los  $FGH$ ,  $FHI$ ,  $HIK$ ,  $IKM$  y  $LKM$ , para obtener  $\log LM \approx 4.15065346$ . Asimismo usó los triángulos  $FGI$ ,  $GIL$  e  $ILM$ , llegando a que  $\log LM \approx 4.15065345$ . La consecuencia resultó inmediata, el  $\log LM = 4.15065346$ , debería ser el resultado definitivo para el lado de la cadena, en función de



La iglesia de Alten en 1883. Fotografía de Sophus Tromholt.



Red de enlace entre la base de Alten y el lado fundamental Lohdizhjokki –Nuppi-Vaara.

Vértices	Dir. observadas	Punterías	Correcciones	Dir. compensadas	Log. de las distancias
<b>A. ELVEBAKKEN.</b>					
E	0° 0' 0,000	12	+ 0,435	0° 0' 0,435	lg AE = 3,3433104
G	9 30 15,261	12	— 0,895	9 30 14,366	lg AG = 3,6492789
B	77 54 45,463	12	+ 0,687	77 54 46,150	lg AB = 3,0624857
D	93 44 21,906	12	+ 0,082	93 44 21,988	lg AD = 3,2781633
C	168 22 16,937	12	— 0,308	168 22 16,629	lg AC = 3,3947218
	Suma		+ 0,001		
<b>B. BUGTEN.</b>					
D	0° 0' 0,000	16	+ 0,916	0° 0' 0,916	lg BD = 2,9279669
C	77 40 50,939	16	— 0,346	77 40 50,593	lg BC = 3,4386093
A	142 21 1,287	16	— 0,569	142 21 0,718	lg BA = 3,0624857
	Suma		+ 0,001		
<b>C. RAFSHOLMEN.</b>					
A	0° 0' 0,000	12	+ 0,155	0° 0' 0,155	lg CA = 3,3947218
E	5 28 10,617	12	— 0,310	5 28 10,307	lg CE = 3,6685742
G	13 36 32,279	12	+ 0,500	13 36 32,779	lg CG = 3,8346054
B	24 52 19,012	12	+ 0,568	24 52 19,580	lg CB = 3,4386093
D	42 45 28,748	12	— 0,915	42 45 27,833	lg CD = 3,4305444
	Suma		— 0,002		
<b>D. KONGSHAVN-FJELD.</b>					
C	0° 0' 0,000	12	+ 1,913	0° 0' 1,913	lg DC = 3,4305444
A	62 36 39,482	12	+ 0,155	62 36 39,637	lg DA = 3,2781633
B	84 26 7,180	12	— 3,176	84 26 4,004	lg DB = 2,9279669
E	109 45 9,758	12	+ 0,831	109 45 10,589	lg DE = 3,4772567
G	134 31 8,047	11	+ 0,311	134 31 8,358	lg DG = 3,6690980
H	144 50 2,934	12	— 0,270	144 50 2,664	lg DH = 3,8946596
F	184 21 33,586	10	+ 0,313	184 21 33,899	lg DF = 3,5871256
	Suma		+ 0,077		

Direcciones observadas y compensadas en los extremos de la base de Alten, AB, y en otros dos vértices, C y D, que formaban triángulos con la misma

la repetida base. La suma de los cuadrados de las correcciones, que figuran en los cuadros de los cálculos, multiplicados por sus respectivos pesos, fue de 1851.88. Al ser 68 el número de direcciones observadas, el montante de incógnitas para los 12 vértices sería de  $2(12 - 2) + 12 = 32$ , y como  $1851.88/(68 - 32) = 51.34$ , Lindhagen obtuvo los resultados siguientes:

Cuadrado del error medio de una dirección observada  
 $p$  veces, con el instrumento fabricado por Repsold =  $51.44/p$ .

error medio con el instrumento de Repsold =  $\pm 7''.172/\sqrt{p}$ ,

error probable con el instrumento de Repsold =  $\pm 4''.838/\sqrt{p}$ .

De igual modo obtuvo para el log  $LM$  un error probable de  $\pm 4.838 \sqrt{343} = \pm 89.6$ , llegando finalmente a que la longitud del lado fundamental, formado por los vértices Lohdizhjokki y Nuppi-Vaara, debería ser de  $14146.6453 \pm 0.2922$  toesas.

Lindhagen presentó en la segunda parte de su informe el cálculo de la triangulación entre los vértices Atjik y Fuglenaes, para el que se valió de los datos sobreaabundantes recopilados en la campaña de campo realizada entre 1846 y 1847, los cuales facilitaron a su vez la compensación de la misma. El procedimiento empleado para ello fue radicalmente distinto del que siguió en la primera parte, al compensar la red de enlace, ya que abandonó las direcciones y eligió como datos primitivos los ángulos entre vértices que habían sido observados invirtiendo poco tiempo, es decir visando uno inmediatamente después del otro, en otras palabras los *ángulos de menor duración*<sup>291</sup>, siguiendo muy probablemente los consejos de Struve. Al final consiguió medir 57 *ángulos fundamentales*, obtenidos mediante 683 punterías, a una media de 11.98. Struve reprodujo en su obra las 4 tablas incluidas por Lindhagen en su informe, recogiendo bajo el epígrafe de *ángulos observados* todos los de corta duración que fueron determinados. En la columna siguiente figuraron los *ángulos fundamentales*, deducidos para cada vértice a partir de todos los anteriores. A su derecha, en la quinta columna, aparecían las correcciones para cada ángulo fundamental, que se habían obtenido con la compensación. Finalmente, se ofrecían en la última de las columnas, los *ángulos fundamentales compensados*.

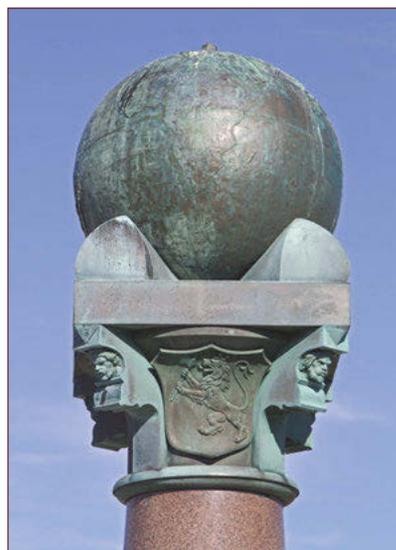
Aunque Lindhagen incluyese después otro listado con las distancias entre cada vértice y los que se pudieron visar desde él, decidió Struve que no convenía reproducirlo al tener previsto repetir la información más adelante, dentro de los cuadros que resumieron el cálculo relativo a los triángulos de continuación entre Atjik y Fuglenaes. En cambio sí lo hizo con los errores fijados por aquel:

Cuadrado del error medio de un ángulo  
con la menor duración observado  $p$  veces =  $56.58/p$ .

<sup>291</sup> Si desde una estación se divisaban  $n$  vértices, se formaban  $n - 1$  ángulos. Para los 15 vértices hubo un total de 57 de tales ángulos, realizando 653 punterías, con una media de 11.46 veces. No obstante, en 8 de ellos, se midieron 15 ángulos accesorios, entre vértices alejados, como de corta duración, pues no siempre fue posible la visibilidad requerida. Aunque las punterías en tales casos fue de 2 veces por ángulo, Lindhagen pensó que convenía tenerlos en cuenta al efectuar la compensación.



Una de las últimas fotografías de Wilhelm von Struve, conservada en los archivos del Observatorio de Pulkovo. La imagen delata que se trataba de un fumador empedernido.



Capitel de la columna meridiana colocada en Fuglenaes

Ángulos	Nº de obser.	Ángulos observados	Ángulos fundamentales	Correcciones	Ángulos. funda. compensados	Orden
<b>¶. FUGLENAES.</b>						
Ⓓ — ⑥	12	61° 27' 23,278	23,278	- 0,491	61° 27' 22,787	1
Ⓔ — Ⓓ	12	38 43 40,214	40,214	+ 1,017	38 43 41,231	2
<b>Ⓢ. HAAJEN.</b>						
⑥ — ¶	14	20° 32' 23,484	23,484	+ 0,997	20° 32' 24,481	3
Ⓓ — ⑥	14	108 37 54,332	54,332	+ 1,741	108 37 56,073	4
<b>⑤. TYVEN.</b>						
Ⓓ — ⑥	12	39° 43' 2,940	2,940	+ 1,152	39° 43' 4,092	5
Ⓔ — Ⓓ	12	53 25 29,524	29,524	+ 0,471	53 25 29,995	6
¶ — Ⓔ	12	59 16 32,161	32,161	- 0,582	59 16 31,579	7
<b>Ⓓ. JEDKI.</b>						
¶ — Ⓔ	9	12° 5' 56,674	56,674	+ 2,648	12° 5' 58,677	8
⑥ — ¶	9	5 50 36,703	36,703	- 0,170	5 50 35,889	9
Ⓔ — ⑥	9	73 38 29,630	29,626	+ 1,338	73 38 30,964	10
Ⓓ — Ⓔ	8	36 35 23,316	23,751	+ 0,439	36 35 24,190	11
⑤ — Ⓓ	8	30 36 48,955	50,018	- 0,245	30 36 49,773	12
Ⓔ — ⑤	8	10 16 46,045	46,686	+ 1,945	10 16 48,631	13
⑥ — Ⓓ	1	17 56 26,29				
Ⓔ — ⑥	1	110 13 53,34				
⑤ — ⑥	1	67 12 17,13				
Ⓔ — ⑤	1	40 53 41,83				

Ángulos fundamentales, observados y compensados, en los cuatro vértices más septentrionales de la cadena geodésica.

$$\text{error medio de dicho ángulo} = 7''.522/\sqrt{p},$$

$$\text{error probable de dicho ángulo} = 5''.073/\sqrt{p}.$$

Como el valor medio de  $p$ , para los 57 ángulos fundamentales, fue de  $p = 11.98$ , resultó:

$$\text{el cuadrado del error medio de un ángulo fundamental} = 4.723,$$

$$\text{el error medio de un ángulo fundamental} = 2''.173,$$

$$\text{el error probable de un ángulo fundamental} = 1''.466.$$

La fiabilidad de los triángulos fundamentales compensados, de los que se ofrecen los elementos de tres muy significativos<sup>292</sup>, fue tal que cualquier combinación de los que intervinieron en la unión de los dos vértices anteriores proporcionaría resultados idénticos para la relación entre esos puntos.

<sup>292</sup> Los tres últimos de los 7 triángulos de continuación excedentes localizados al Norte del lado fundamental formado por los vértices Nuppi-Vaara y Lohdizhokki.

Struve eligió, entre todos los posibles, los 12 triángulos ya representados con anterioridad en la página 238. Con ella se lograba la unión más directa, al tiempo que gozaba de una ventaja sobresaliente: la de hacer mínima la suma  $[\mathcal{E}] = [\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2]/2$ . Tales triángulos se dividieron en los dos grupos siguientes:

- a) los triángulos números 247-251, que partiendo del último lado de Laponía llegaban al lado fundamental Lohdizhjokki-Nuppi-Vaara de el Finnmarken,
- b) los 7 triángulos números 252-258, que partiendo del lado fundamental anterior alcanzaron el vértice Fuglenaes, «debiendo considerarse los últimos triángulos excedentes de nuestras operaciones, al no enlazar con ningún otro lado fundamental».

La disposición de los datos en los correspondientes listados fue análoga a la de otros triángulos de continuación ya expuestos, con la diferencia de situar junto a los ángulos observados los ángulos esféricos compensados, para deducir de ellos los ángulos planos correspondientes, que intervinieron en la resolución de los triángulos, esto es en el cálculo de todos sus lados. Esos ángulos observados se obtuvieron a partir de los *ángulos fundamentales* ya referidos, al igual que los ángulos esféricos se hallaron en función de los *ángulos fundamentales compensados*.

Struve concluyó el capítulo XIII del segundo tomo de su Memoria con una reflexión a propósito de la exactitud de las medidas angulares en esta región tan septentrional. Resultaba que la suma de los cuadrados de los errores de cierre triangulares en los 12 triángulos de continuación

Referencia	Vértices	Áng. observados	Á. esféricos compensados	Á. planos compensados	Log. de los lados	Cantidades auxiliares
No. 256.	JEDKI . . . . .	77° 29' 0,46	2,59	1,97	4,2741681.2	$\mathcal{E} = 698,5$ $\Omega = 4,126$ $\mathcal{X} = 2882,0$
	JEMMELUFT-OIVI..	67 15 7,73	8,41	7,80	4,2494461.7	
	KAAVEN . . . . .	35 15 51,59	50,84	50,23	4,0460484.2	
	Suma :	180 0 —0,22	1,84	0,00		
		Corr. + 2,06	1,847	Exc.		
No. 257.	TYVEN . . . . .	39 43 2,94	4,09	3,55	4,0460484.2	$\mathcal{E} = 636,7$ $\Omega = 4,126$ $\mathcal{X} = 2627,0$
	JEDKI . . . . .	73 38 29,62	30,96	30,41	4,2225980.9	
	JEMMELUFT-OIVI..	66 38 25,66	26,58	26,04	4,2034037.8	
	Suma	180 0 —1,78	1,63	0,00		
		Corr. + 3,41	1,633	Exc.		
No. 258.	FUGLENAES . . . . .	61 27 23,28	22,79	22,71	4,2034037.8	$\mathcal{E} = 71,9$ $\Omega = 4,126$ $\mathcal{X} = 296,6$
	JEDKI . . . . .	5 50 36,06	35,89	35,81	3,2674662.2	
	TYVEN . . . . .	112 42 1,68	1,57	1,48	4,2246682.0	
	Suma	120 0 1,02	0,25	0,00		
		Corr. — 0,77	0,261	Exc.		

Los tres últimos triángulos de continuación y excedentes en la red geodésica del gran arco ruso-escandinavo.



Vista de la antigua iglesia de Hammerfest en 1839 y panorámica de la ciudad a finales del siglo XIX.

fue de 284.0, de manera que el cuadrado del error medio de un triángulo fue de 23.67 y el de un ángulo 7.89; un valor que resultaba considerablemente mayor que el cuadrado, 4.723, obtenido para el ángulo de la menor duración. Esa diferencia la achacó Struve a que de los 36 ángulos, presentes en los 12 triángulos de continuación, sólo había 19 que fueran de corta duración, de forma tal que los 17 restantes se obtuvieron como unión de los otros ángulos de esta especie; resultando que el total de 36 ángulos exigiría 55 ángulos de la menor duración.

A partir de tales valores se pudieron obtener los siguientes:

cuadrado del error medio del ángulo de la menor duración,  $284.0/55 = 1.164$ ,

error medio del ángulo de la menor duración =  $2''.272$ ,

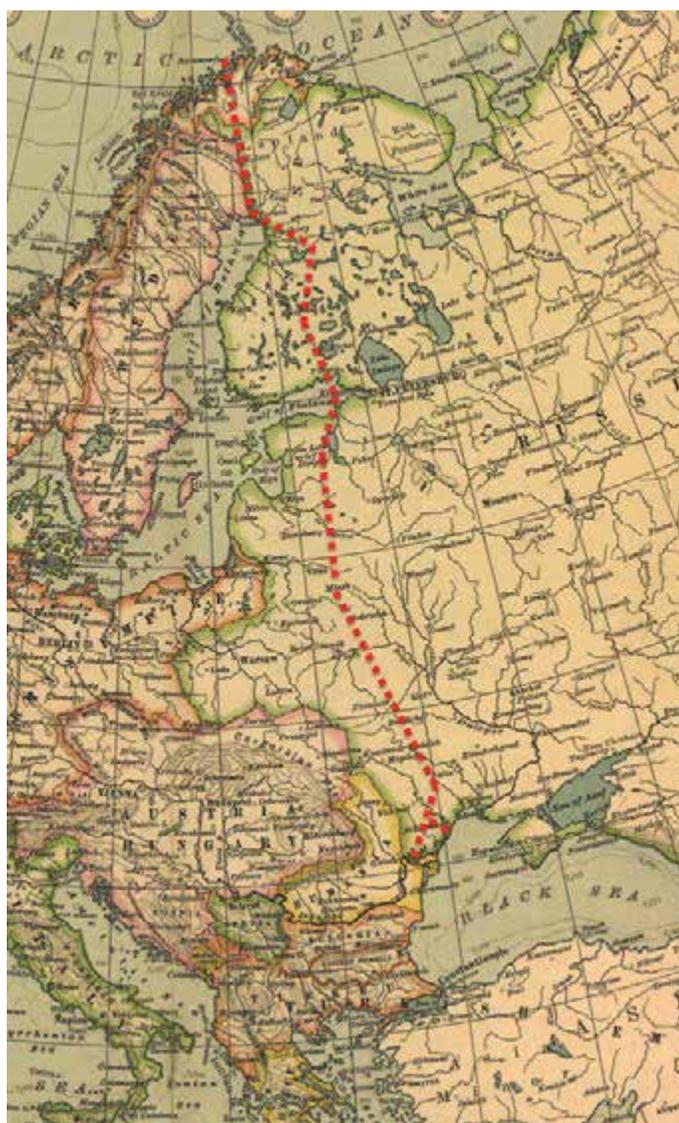
error probable del ángulo de la menor duración =  $1''.533$ .

Para fijar el error medio  $\Omega$  atribuido a esos 12 triángulos, una magnitud indispensable para el cálculo de la compensación relativa a la totalidad de las bases, ha de partirse de que necesariamente debería ser menor de 7.89, el propio del ángulo observado, ya que la abundancia de datos ya compensados permitiría contar con una exactitud más elevada. Por otra parte ha de tenerse en cuenta que si un ángulo, perteneciente a uno de los triángulos de continuación, es la combinación, por suma o resta, de ángulos de la menor duración, observados  $a, b, c$ , etc. veces, su peso vendría dado por la expresión  $abc/(ab + ac + bc)$ ; resultando así obvio el cálculo el peso de cada ángulo de continuación observado. De esa forma la suma de los pesos primitivos, para los 36 ángulos observados de los 12 triángulos de continuación, fue de 329.9, con una media de 9.16 por ángulo, correspondiendo ese peso al cuadrado del error medio 7.89. Ahora bien, Struve partió de que los ángulos compensados de los mismos 12 triángulos fueron sustentados por 683 observaciones de los ángulos de la menor duración y que fueron 13 los vértices que se pudieron localizar, Haaven incluido, unas circunstancias que le permitieron fijar el verdadero valor de  $\Omega$  en  $4.126 = 7.89 (329.9 / 683) (13/12)$ . Sin embargo creyó que su deducción no era del todo rigurosa, pero si suficientemente exacta para el uso que se pretendía hacer de  $\Omega$ ; visto que el efecto de la compensación entre dos lados fundamentales resultaba casi despreciable cuando se trataba de alteraciones poco significativas de los ángulos pertenecientes a los triángulos que configurasen el enlace entre los mismos.

Realmente Struve incluyó otros dos capítulos, los números XIV y XV del tomo segundo de su Memoria, para referirse a una especie de compensación global del arco escandinavo, como si



Vista tomada desde el interior del puerto de Hammerfest en el año 1839. Ilustración de la obra *Voyages de la Commission Scientifique du Nord en Scandinavie, Laponie, Suède, Finlande, Russie, Lithuanie, Pologne, etc.*, en la que se dió cuenta de la expedición comandada por el francés Joseph Paul Gaimard.



La cadena geodésica en que se apoyó la medida del gran arco del meridiano ruso-escandinavo.

los cálculos previos hubiesen sido más localistas. El título del número XIV fue: *Cálculo de compensación, para los 89 triángulos principales, números 163 a número 251, dependientes de los cuatro lados fundamentales  $L^{VII}$  a  $L^X$* . Tales lados fueron los siguientes:  $L^{VII}$ ) Mustila y Korsmalm,  $L^{VIII}$ ) Sarvi-Kangas y Linnunsilmä,  $L^X$ ) Avasaksa-Pullinki, y  $L^X$ ) Lohdizh Jokki y el Nuppi-Vaara. El listado con los resultados pertinentes fue presentado entre las páginas 121 y 132, ambas inclusive. El título del siguiente capítulo fue: *Tabla de los ángulos y lados definitivos de los 103 triángulos que sirvieron de unión entre los 5 puntos astronómicos del arco septentrional, comprendido entre el Golfo de Finlandia y el Mar Glacial*. El listado con los resultados apareció entre las páginas 134 y 148 ambas inclusive. Sin pretender subestimar esa información suplementaria, es obligado reseñar que los elementos de los triángulos así resueltos apenas difirieron de los ya calculados y compensados. El propio protagonista reconocía esa circunstancia al comparar el valor de los logaritmos implicados en el nuevo proceso: «las correcciones ascienden, todo lo más, a 1/15 del error probable inherente a la longitud definitiva de cada base. De donde se colige que habríamos podido, con más razón aún que en el arco meridional, considerar las bases como perfectamente exactas, sin causar un perjuicio sensible al cálculo de la compensación». Para hacerse mejor idea de los valores obtenidos se incluyen los resultados obtenidos para el triángulo más septentrional de la cadena geodésica.

*Compensación del triángulo más septentrional de la cadena geodésica*

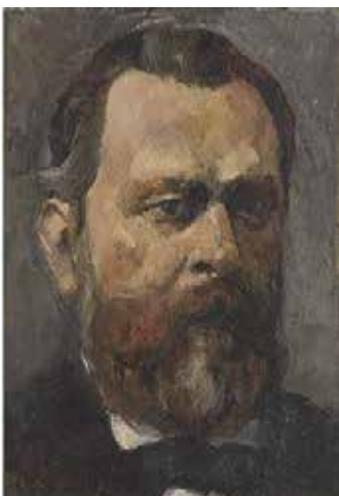
Vértices	Logaritmo de los lados		Longitud de los lados ( $t$ )		Diferencias
	Local	Global	Local	Gobal	
Fuglenaes	4.20340378	4.20341013	15973.636	15973.869	0.233
Jedki	3.26746622	3.26747257	1851.255	1851.282	0.027
Tyven	4.22466820	4.22467455	16775.219	16775.464	0.245

Expresando las diferencias anteriores en términos relativos se obtendrían los valores siguientes:  $6.260 E - 5$ ,  $1.458 E - 5$  y  $1.461 E - 5$ , unas cantidades acordes con el instrumental, metodología observacional y medios de cálculo<sup>293</sup>. Es más, resultarían insignificantes al comparlas con las discrepancias que se presentaron muchos años después, tras las primeras verificaciones efectuadas en el año 1994, cuando ya se pensaba que la operación geodésica de Struve debería formar parte del Patrimonio de la Humanidad. Una vez integrada en el mismo por la UNESCO<sup>294</sup> (2005) se repitieron las mediciones, volviéndose a evidenciar divergencias notables

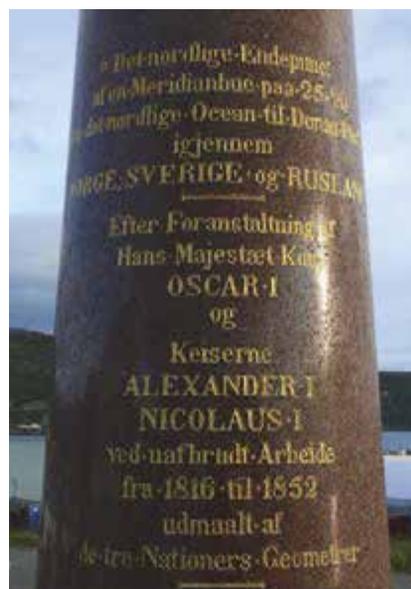
<sup>293</sup> No se debe de concluir esta reivindicación de la obra geodésica de Struve sin tratar de responder a la posible pregunta de un lector avisado. ¿Cómo es que no se localizaron los vértices de la triangulación mediante sus coordenadas geográficas, cuando si se obtuvieron las latitudes de algunos de ellos? Varias podrían ser las respuestas. Su intención principal fue más geométrica que cartográfica, pues pretendía en suma definir un modelo más ajustado del elipsoide terrestre. Por otra parte, no hubiese podido determinar la longitud geográfica con la incertidumbre necesaria. No debe olvidarse el periodo en que se efectuaron los trabajos de campo y el hecho de que la transmisión de las señales horarias era inviable antes de que se aplicase extensivamente el genial invento de la telegrafía sin hilos (Samuel Morse hizo la primera demostración de incipiente técnica en el año 1833, coincidiendo esos experimentos pioneros con las campañas geodésicas anteriores). Otro problema añadido al que hubiese tenido que hacer frente Struve habría sido el de la resolución del problema geodésico directo y del consiguiente transporte de coordenadas, una tarea casi inabordable con los medios que tenía a su alcance.

<sup>294</sup> *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization*, creada en 1945.

que incluso llegaron a achacarse a desplazamientos naturales producidos en el transcurso de los años, aunque hoy día haya quedado superada tal hipótesis<sup>295</sup> al achacarlas a errores residuales debidos a aspectos técnicos de las mediciones realizadas entre los años 1816 y 1855.



Boceto de la columna meridiana levantada en el vértice geodésico Fuglenaes (Hammerfest. Noruega). Andreas Friedrich Wilhelm von Hanno fue el arquitecto responsable de su proyecto y colocación en el año 1854.



Detalle de la columna meridiana levantada en Hammerfest (Noruega) para materializar el vértice Fuglenaes



Aurora boreal observada, en la ciudad de Hammerfest, el 15 de marzo de 2008.

---

<sup>295</sup> Remito al artículo *Geometry of «The Struve Arc» Compared with up-to-date Geodetic Data* (Vitali Kaptüg), en él se detallan los resultados de la segunda comparación del arco auspiciada por la Sociedad Topográfica y Cartográfica de San Petersburgo para conmemorar el 150 aniversario de la publicación de la Memoria de Struve.

El auge tan espectacular alcanzado por la geodesia en Finlandia, plenamente consolidado en la segunda mitad del siglo XX, tuvo un efímero antecedente en el astrónomo y geodesta Henrik Johan Walbeck<sup>296</sup>, primer observador del Observatorio Astronómico de Turku. En el año 1818, con sólo 25 años, publicó su celebrado trabajo *De forma et magnitudine telluris ex dimensis arcibus meridiani definiendis*<sup>297</sup>, en las que ya aplicó el método de los mínimos cuadrados para evaluar los parámetros geométricos del elipsoide de revolución terrestre. Así dedujo un semieje mayor de 6376.896 km y un achatamiento polar dado por  $1/302.8$ , valores que se mantuvieron vigentes en Rusia durante casi 100 años. Gracias a esta publicación contactó con Struve, el cual le pidió que formulase el anteproyecto de la triangulación que discurriría años después por el Sur de Finlandia, como parte de la cadena extendida a lo largo del gran arco ruso-escandinavo.

También fue en Finlandia donde se valoró, como correspondía, el trabajo coordinado por Struve y donde se realizaron las primeras investigaciones al respecto, por parte del profesor Alfred Petrelius, entre los años 1886 y 1889, el cual logró recuperar 51 vértices de los 71 que visitó. Casi un siglo después se retomó el interés por el reconocimiento de los vértices, por iniciativa de los topógrafos Seppo Härmälä y Aarne Veriö, entre los años 1968 y 1989. Este último preparó el trabajo *Later phases and utilizing of the Northern part of the Struvean chain*, con la intención de presentarlo en una Conferencia que se celebraría en Tartu (1993), aunque no pudo defenderlo por enfermedad y lo hizo S. Härmälä en su nombre. En él se planteó la idea de que algunos de los vértices de la cadena geodésica fuesen amparados por la UNESCO y declarados Patrimonio de la Humanidad. La Conferencia hizo suya la idea y aprobó el día 28 de agosto de ese mismo año la siguiente resolución:

*Considering the scientific, historical and practical importance of the measurement of the arc of meridian through Tartu, made by F.G.W. Struve.*

*Urge the governments of those countries that still possess relics of that enterprise to take all possible steps to preserve those relics, including an approach to UNESCO to declare them to be World Heritage sites.*

<sup>296</sup> Lamentablemente murió a la temprana edad de 29 años.

<sup>297</sup> Determinación de la forma y dimensiones de la Tierra a través de las medidas del arco de meridiano.



Logotipos de las tres corporaciones que contribuyeron a que el arco geodésico de Struve fuese declarado Patrimonio Científico de la Humanidad.

Se inició entonces una difícil, y prolongada, negociación con el organismo internacional que llegó a buen término<sup>298</sup>. Aunque el arco discurría en el siglo XIX por sólo tres países, en el momento de la petición lo hacía por los diez países siguientes: Bielorusia, Estonia, Federación Rusa, Finlandia, Letonia, Lituania, Moldavia, Noruega, Suecia y Ucrania; de manera que se comprenden las dificultades surgidas para poder lograr el acuerdo de todos ellos sobre una materia esencialmente científica. Por otro lado, fue decisivo el apoyo prestado siempre por tres asociaciones muy conocidas en el campo de la Geografía Astronómica, a saber: FIG (Fédération Internationale des Géomètres), IUA (International Astronomical Union) e IAG (International Association of Geodesy<sup>299</sup>). En el congreso que celebró la FIG en el año 1994, se aprobó una resolución muy concreta, sobre el particular, que rezaba así:

*Considering the great historical value of the measurement of the arc of the meridian, and that an inventory exists of land monuments marking the arc of the meridian, called Struve, which extends over 9 countries and 25° of latitude from the Black Sea to Hammerfest situated on the north coast of Norway, Commission I recommends that FIG should present a request to the United Nations that the remains of this arc of meridian be added to the World heritage List of Historical Monuments.*

En el mismo año de 1994, la Unión Astronómica Internacional celebró una Asamblea General en la Haya y adoptó una resolución análoga:

*Considering the scientific, historical and practical importance of the measurement of the arc of meridian made by F.G.W. Struve*

*Urges the Executive Committee of the IAU to approach the governments of the following countries: Norway, Sweden, Finland, Estonia, Latvia, Lithuania, Ukraine, Belarus, Poland and Moldova, which still possess relics of that enterprise, with a view to taking all possible steps to preserve those relics, including an approach to UNESCO to declare them to be world-heritage sites<sup>300</sup>.*

<sup>298</sup> Los pormenores de la misma figuraron en el trabajo *The Struve Geodetic Arc* (Septiembre.2005), cuyo autor fue James R. Smith, miembro de *Land Survey Division of the Royal Institution of Chartered Surveyors*, una asociación profesional creada en el año 1868.

<sup>299</sup> La IAG está integrada en una organización más amplia, llamada *The International Union of Geodesy and Geophysics* (IUGG).

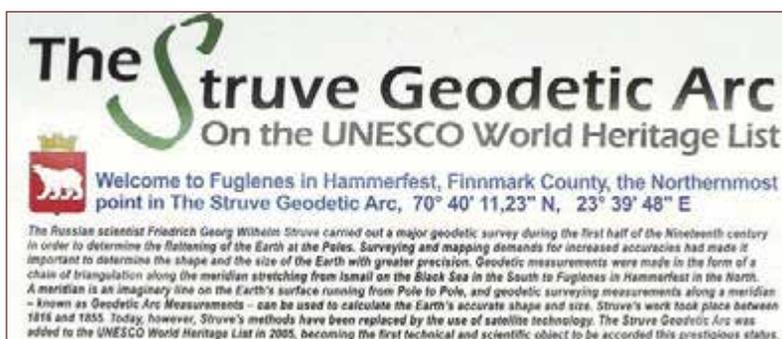
<sup>300</sup> En la resolución se incluyó por error a Polonia y se omitió a Rusia.

La Asociación internacional de Geodesia se sumó también a la propuesta que debió presentarle J. R. Smith, a tenor del e-mail que recibió en el mes de marzo del año 1996.

*Your letter dated March 13 1996 directed to the IUGG was transferred to IAG by the general secretary, Dr. Balbino.*

*I can inform you, that the issue of the preservation of the Struve arc was not brought up in Boulder. However, IAG, welcomes any effort to preserve the monument, and would very much like to support a proposal send to UNESCO<sup>301</sup>.*

Los gobiernos de los países afectados se fueron concienciando gracias al celo de la Federación Internacional de Geómetras y más concretamente al de su Institución permanente dedicada a la Historia de la Topografía y de la Medida (*International Institution for the History of Surveying & Measurement*). Fruto de ese proceso de concienciación debe entenderse la celebración en Tartu y Tallín, los días 25 y 28 de septiembre del año 2002, del congreso titulado STRUVE ARC 150, en clara referencia a los 150 años transcurridos desde que finalizaron los trabajos geodésicos del gran arco ruso-escandinavo. La efeméride se aprovechó para homenajear a Struve, reconociendo la trascendencia de sus aportaciones científicas, y fijar los vértices de la triangulación que convendría recuperar en los diferentes países, para que fuesen inventariados por la UNESCO como parte de los Monumentos Patrimonios de la Humanidad (*World Heritage Monument*).



Logotipo UNESCO Patrimonio de la Humanidad y cartel colocado en el vértice de Hammerfest, que hace mención a su inclusión en el Patrimonio de la Humanidad.

De las cutaro resoluciones aprobadas en esa Conferencia Internacional tuvo especial relevancia la siguiente:

Nº 1 ... *considering the scientific, historical and practical importance of the measurement of the arc of meridian through Tartu which stretches from near North Cape in Norway, through Sweden, Finland, Russia, Estonia, Latvia, Lithuania, Belarus, Ukraine and Moldova to the Danube Delta made under the guidance of F. G. W. Struve,*

*urge the authorities in the 10 countries through which the Struve arc passes, to complete the preservation of the arc of meridian and the documentation in their*

<sup>301</sup> El correo fue firmado por el Secretario General C. C. Tscherning.

*countries as soon as possible, so that in their turn the national representatives to UNESCO may be urged to put them on their national provisional list of World Heritage Monuments.*

Clausurada la Conferencia, la FIG continuó trabajando, de acuerdo con todos los gobiernos interesados<sup>302</sup>, para lograr que la UNESCO reconociese a los vértices elegidos. El interés permanente mostrado por Finlandia fue públicamente reconocido al asignarle a su Servicio Topográfico la redacción del preceptivo informe. En los meses siguientes (10 de enero de 2003), y de nuevo por iniciativa de Smith<sup>303</sup>, la IAU ratificó su resolución del año 1994, en estos términos<sup>304</sup>:

*... This is to confirm that at its 22<sup>nd</sup> General ASsembly in The Hague, August 1994, the International Astronomical Union passed a Resolution, proposed by Commission 41 for the History of Astronomy, in support of the efforts that are still under way to have a selection of points of Struve geodetic Arc recognized by UNESCO as World Heritage Monuments.*

Los negociadores ya estaban por entonces al tanto de que la UNESCO, antes de dar su consentimiento, tenía que estar convencida de que todos los vértices elegidos ya estaban siendo protegidos por cada país solicitante. El cumplir con su exigencia no fue tarea fácil: a las legislaciones medioambientales de cada país hubo que sumar los distintos idiomas imperantes, así como la necesidad de contar con el imprescindible soporte cartográfico, igualmente diverso. El número de vértices seleccionados fue de 34, correspondiendo 4 a Noruega, 4 a Suecia, 6 a Finlandia, 2 a Rusia, 3 a Estonia, 2 a Letonia, 3 a Lituania, 5 a Bielorrusia, 1 a Moldavia y 4 a Ucrania. Es obvio que el *National Land Survey of Finland* realizó un esfuerzo improbable<sup>305</sup> antes de presentar su informe final ante la UNESCO (*World Heritage Committee*) en el mes de enero de 2004. En sus más de 250 páginas se incluyeron las autorizaciones gubernamentales, numerosos planos y mapas, además de una interesante colección de fotografías de algunas de las señales primitivas que materializaron los vértices; por supuesto que se aportaron también las descripciones de todos ellos<sup>306</sup>. El informe fue prologado por el Ministro de Cultura de Finlandia Tanja Karpela.

---

<sup>302</sup> Realmente intervinieron las Agencias Geográficas de cada uno de los países: Bielorrusia (*The State Committee for Land Resources, Geodesy & Cartography*), Estonia (*The Estonian Land Board*), Finlandia (*The National Land Survey of Finland*), Letonia (*The State Land Survey of Latvia*), Lituania (*The National Land Survey*), Moldavia (*The State Agency for Land Relations & Cadastre*), Noruega (*The Norwegian Mapping Authority*), Rusia (*The Federal Service of Geodesy & Cartography of Russia*), Suecia (*The National Land Survey of Sweden*) y Ucrania (*The Main Administration of Geodesy, Cartography and Cadastre*).

<sup>303</sup> A la sazón Secretario Honorario de la *International Institution for the History of Surveying & Measurement*.

<sup>304</sup> El texto fue parte de la respuesta enviada a Smith, la cual fue firmada por el Secretario General de la Asociación astronómica.

<sup>305</sup> El lector interesado puede acceder a él con suma facilidad (*World Heritage Scanned Nomination. File Name 1187*). Su coordinación corrió a cargo de Pekka Tättä.

<sup>306</sup> Las señales fueron diferentes en cada caso: perforaciones en roca llenas de plomo, cruces grabadas sobre su superficie, piedras u obras de fábrica con una referencia, montículos con una piedra o ladrillo central marcado con un agujero, un solo ladrillo; aunque se añadiera también durante la gestión de la petición un vallado especialmente construido para facilitar la localización del vértice.

*Vértices geodésicos del gran arco ruso-escandinavo,  
declarados por la UNESCO Patrimonio Científico de la Humanidad*

Número	Nombre original (Denominación actual)	Localización
1	Fuglenaes (Fuglenes)	Noruega
2	Lille-Reipas (Raipas)	Noruega
3	Lohdizhjokki (Luvdiidcohkka)	Noruega
4	Bäljatz-Vaara (Baelljasvarri)	Noruega
5	Pajtas-Vaara (Tynnyrilaki)	Suecia
6	Kerrojupukka (Jupukka)	Suecia
7	Pullinki (Pullinki)	Suecia
8	Perra-Vaara (Perävaara)	Suecia
9	Stuor-Oivi (Stuorrahanoaivi)	Finlandia
10	Avasaksa (Aavasaksa)	Finlandia
11	Tornea (Alatornion kirkko)	Finlandia
12	Puolakka (Oravivuori)	Finlandia
13	Porlom II (Tornikallio)	Finlandia
14	Svartvira (Mustaviiri)	Finlandia
15	Mäki-Päällys (Mäkipällys)	Rusia
16	Hogland, Z (Gogland, Tochka Z)	Rusia
17	Woibifer (Võivere)	Estonia
18	Katko (Simuna)	Estonia
19	Dorpat (Tartu Observatory)	Estonia
20	Sestu-Kalns (Ziestu)	Letonia
21	Jacobstadt (Jekabpils)	Letonia
22	Karischki (Gireišiai)	Lituania
23	Meschkanzi (Meškonys)	Lituania
24	Beresnāki (Paliepiukai)	Lituania
25	Tupischki (Tupishki)	Bielorrusia
26	Lopati (Lopaty)	Bielorrusia
27	Ossownitza (Ossovnitsa)	Bielorrusia
28	Tchekutsk (Chekutsk)	Bielorrusia
29	Leskowitschi (Leskovichi)	Bielorrusia
30	Rudy (Rudi)	Moldavia
31	Katerinowka (Katerinowka)	Ucrania
32	Felschtin (Felschtin)	Ucrania
33	Baranowka (Baranowka))	Ucrania
34	Staro-Nekrassowka (Stara Nekrasivka)	Ucrania



Mapa de Europa con los vértices geodésicos declarados Patrimonio Científico de la Humanidad.

La documentación fue analizada durante 18 meses tanto por la UNESCO como por ICOMOS<sup>307</sup> (International Council On Monuments And Sites), esta última mandó incluso un representante a la Conferencia Internacional, sobre el futuro del arco geodésico de Struve, que se celebró en Chisinau (Moldavia) entre los días 27 y 29 de septiembre de 2004. Es muy destacable su resolución número 6, puesto que en ella los delegados de los diez países afectados agradecieron todo el trabajo preparatorio, previo a la Nominación, realizado por la *International Institution for the History of Surveying and Measurement*, y muy especialmente al personal de la misma: Jan de Graeve<sup>308</sup>, Jim Smith y Vitali Kaptjup. ICOMOS se pronunció al respecto el mes de abril de 2005, haciendo constar que el bien evaluado era sobresaliente:

<sup>307</sup> ICOMOS es una organización internacional, no gubernamental, dedicada a la conservación de monumentos y lugares emblemáticos del mundo. Creada en Varsovia (1965) es en la actualidad un Organismo asesor de la UNESCO.

<sup>308</sup> Director de la *International Institution for the History of Surveying and Measurement* y miembro honorario de la FIG.

*L'arc de Struve a sans aucun doute une valeur universelle exceptionnelle, basée sur sa contribution au développement des sciences et pour la collaboration qu'il suscita entre les scientifiques, les monarques et les nations.*

*L'ICOMOS pensé que cette proposition d'inscription possède une valeur supplémentaire car elle est basée sur des valeurs technologiques et scientifiques et elle est soumise par dix États parties.*

*Une extension de cette proposition pour inclure l'arc qui le relie à l'Afrique du Sud devrait être envisagée dans le futur.*

Tras haber estudiado toda la documentación remitida por la FIG, ICOMOS recomendó, en el mes de abril de 2005, que el Comité del Patrimonio Mundial adoptase la decisión siguiente:

1. Habiendo examinado el documento WHC-05/29.COM/8B,
2. Inscribir el bien en la lista del Patrimonio Mundial, atendiendo a los criterios II, IV y VI.

*Critère II: la première mesure précise d'un long segment d'un méridien qui a permis d'établir la taille et la forme exactes de la terre illustre une phase importante du développement des sciences de la Terre. C'est également un exemple remarquable d'un échange de valeurs humaines sous la forme d'une collaboration entre des scientifiques de différents pays. C'est aussi une illustration de la participation de monarques de différents puissances à une cause scientifique.*

*Critère IV: L'arc géodésique de Struve est sans aucun doute un exemple exceptionnel d'un ensemble technologique, illustrant les points de triangulation de la mesure d'un méridien et constituant la partie fixe et immatérielle des techniques de mesure.*

*Critère VI: La mesure de l'arc et ses résultats sont directement associés aux questionnements de l'homme sur la taille et la forme de la terre. Elle est liée à la théorie d'Isaac Newton qui déclarait que la terre n'est pas une sphère parfaite.*

Finalmente, el 15 de julio de ese mismo año 2005, la UNESCO hizo suyas las recomendaciones de ICOMOS e inscribió el arco geodésico de Struve como bien cultural en su listado del Patrimonio de la Humanidad<sup>309</sup>, dándose la circunstancia de ser el primero de carácter científico en ser inventariado,

*Criterion II: The first accurate measuring of a long segment of a meridian, helping in the establishment of the exact size and shape of the World, exhibits an important step in the development of earth sciences. It is also an extraordinary example for interchange of human values in the form of scientific collaboration among scientists from different countries. It is at the same time an example for collaboration between monarchs of different powers, for a scientific cause.*

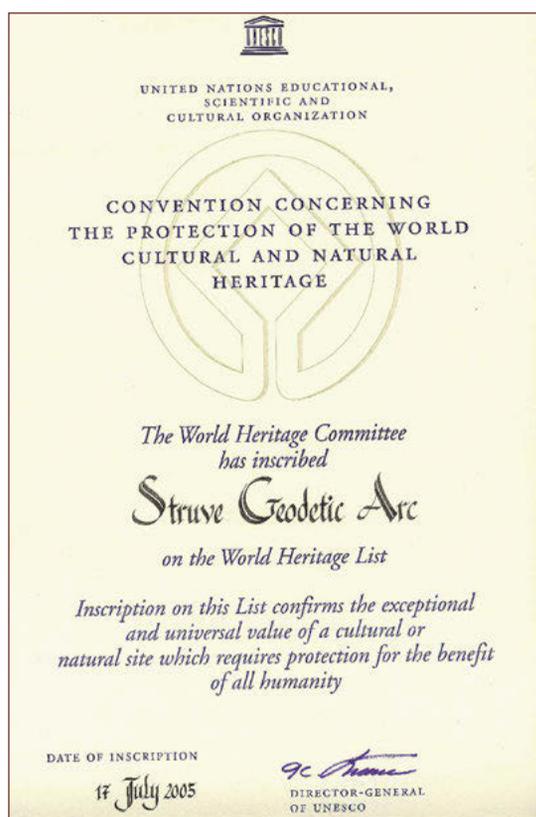
---

<sup>309</sup> La decisión se tomó en la sesión número 29 del Comité, celebrada en Durban (Sudáfrica) entre los días 10 y 17 de julio.

*Criterion IV: The Struve Geodetic Arc is undoubtedly an outstanding example of technological ensemble-presenting the triangulation points of measuring of the meridian, being the non movable and non tangible part of the measuring technology.*

*Criterion VI: The measuring of the arc and its results are directly associated with men wondering about his world, its shape and size. It is linked with Sir Isaac Newton's theory that the world is not an exact sphere.*

La UNESCO incluso mencionó la recomendación de ICOMOS con relación a la deseable extensión de la nominación a algunos de los vértices que prolongaban el arco hasta Sudafrica, animando a ello a todas las naciones que firmaron la primera petición. Con esa misma fecha se expidió el correspondiente título acreditativo, firmado por el Director General<sup>310</sup> de la UNESCO, que se reproduce aquí a título de curiosidad. Una vez incorporado el arco de Struve al Patrimonio de la Humanidad, todos los países procuraron acondicionar los vértices de su territorio para divulgar esa importante distinción: en ocasiones incorporaron vallas que rodeaban la señal primitiva, pilares o bloques paralelepíedicos coronados por la esfera terrestre; en otras, láminas conmemorativas para fijarlas en algún paramento o simplemente paneles, identificando el punto en cuestión con sus dos coordenadas geográficas<sup>311</sup>; tal como puede comprobarse en la muestra que se ofrece a continuación. Durante el verano del año 2015, está prevista la celebración de un congreso en el Observatorio de Púlkovo, centrado en el Arco de Struve para conmemorar el décimo aniversario de su inclusión en tan relevante lista<sup>312</sup>.



Título acreditativo de la UNESCO.

<sup>310</sup> El primer Director General fue Julian Huxley (1946-1948), el octavo fue el español Federico Mayor Zaragoza (1987-1999), el noveno, y firmante del título, fue Kōichirō Matsuura. Actualmente la dirige Irina Bokova.

<sup>311</sup> Cuando ya se sabía que la UNESCO estaba conforme con la propuesta, se decidió que todos los vértices seleccionados deberían localizarse mediante GPS, pues de esa forma se podía iniciar a la vez una línea de investigación interesante que aclarase la exactitud del trabajo original y contribuyera al estudio de los posibles movimientos de parte del territorio por el que discurrió la triangulación. También se pensó entonces en hacer una edición facsímil de la Memoria de Struve e incluso en traducirla al inglés para que su difusión fuese todavía mayor. De hecho ya está disponible dicha traducción, tal como se anuncia en el prólogo de este libro.

<sup>312</sup> Cuando había dado por ultimado el presente trabajo, en diciembre de 2014, J. Smith me hizo saber que él y el profesor Jan de Graeve, después de la declaración de la UNESCO, habían traducido al inglés la memoria presentada por Struve en la Academia de Ciencias de San Petersburgo.



Placa colocada en el Observatorio de Tartu, indicando que se trata de un punto inventariado por la UNESCO como Patrimonio de la Humanidad.



Monolito para identificar el vértice Tchekutsk (Chekutsk) en Bielorrusia.



Monolito identificador del vértice Ossownitza (Bielorrusia).



Placa colocada junto al vértice Bäljatz-Vaara (Baelljasvarri) en Noruega.



Cercado para proteger el vértice Beresnaki (Paliepiukai), en Lituania, y placa conmemorativa de su inscripción en el Patrimonio Científico de la Humanidad.



A pesar de la relevancia que tuvieron en su tiempo, y durante los años siguientes, las contribuciones geodésicas de F.G. Wilhelm von Struve, pasó a la posteridad por sus, no menos trascendentales, aportaciones astronómicas; no en vano fue por ejemplo uno de los primeros científicos en medir las distancias a las estrellas, cuando calculó la paralaje de la estrella Vega, localizada en la constelación de la Lira<sup>313</sup>. Una posible explicación podría ser que la sociedad culta, a esas alturas del siglo XIX, no encontrase nada novedoso en las medidas del meridiano terrestre, ni en la definición de un nuevo modelo elipsoidal para la Tierra. También es cierto que sus medidas no recibieron el imprescindible espaldarazo de una institución tan prestigiosa como la Academia de Ciencias de París<sup>314</sup>, aunque si contara con todo el apoyo de su homóloga de San Petersburgo. Esa penosa tendencia se instaló también en el colectivo de los geodestas, manteniéndose en la práctica hasta nuestros días, tal como se manifestaron a lo largo de la negociación con la UNESCO que se acaba de comentar.

El objetivo de este capítulo es, precisamente, hacer ver que España fue una verdadera excepción, pues aquí se adoptó el elipsoide de revolución propuesto por Struve a los veinte años de haber publicado el trabajo que se está reivindicando. El protagonista de tan importante decisión, para el devenir de la geodesia y de la cartografía española, no pudo ser otro que Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero, fundador y primer Director del Instituto Geográfico, un centro científico de primer orden creado por decreto del 12 de septiembre de 1870, el cual fue firmado por el noble José Echegaray y Eizaguirre. ¿Pero como es que Ibáñez propuso un elipsoide propuesto en latitudes tan alejadas? Aunque no sea fácil aventurar la respuesta, es obvio que Ibáñez, como excelente geodesta que ya había medido la Base de Madrಿದೆjos<sup>315</sup>, estaba al tanto de la labor geodésica de Struve y de los importantes avances metrológicos que había introducido al medir, con su propia regla, varias de las bases con que contó la triangulación del gran arco ruso. Ibáñez debía conocer igualmente la pu-

---

<sup>313</sup> Struve dedujo para la estrella,  $\alpha$  Lyr, una paralaje de  $0''.125$ , aunque luego la rectificó siguiendo las indicaciones de Bessel; no obstante se da la circunstancia de que el valor actual prácticamente coincide con el anterior ( $\approx 0''.1299$ , es decir unos 25 años luz). Esta estrella fue considerada en una época como la más importante del cielo, junto al Sol. En tiempos prehistóricos ( $\approx 12000$  a.C.) fue estrella polar, un hecho que se repetirá en el futuro ( $\approx 14000$  d.C.).

<sup>314</sup> No obstante ha de subrayarse que Struve era considerado por esa Academia un sabio relevante, incluso antes de que finalizasen las mediciones del gran arco ruso-escandinavo.

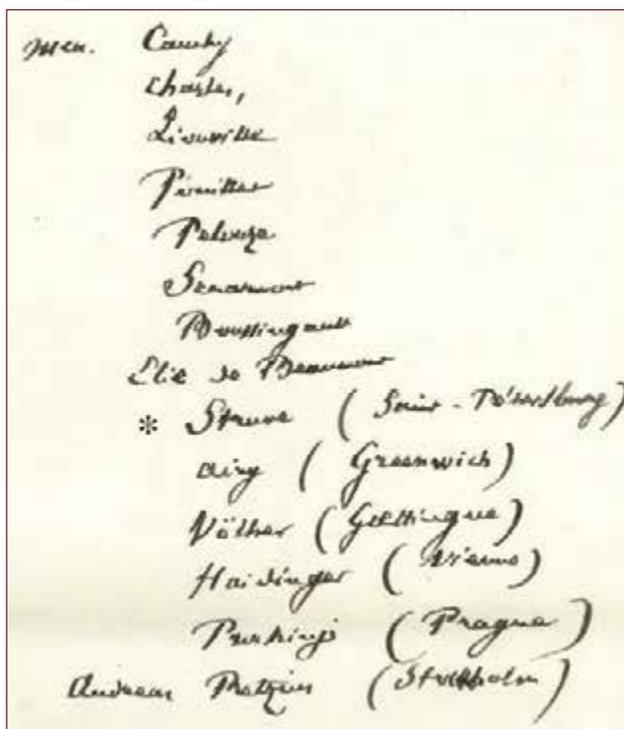
<sup>315</sup> Junto a Frutos Saavedra Meneses y otros oficiales del ejército. Esta base central fue completada con otras situadas en la periferia para así controlar la escala de la red: Lugo, Arcos de la Frontera, Vic, Cartagena y Olite; todas ellas fueron medidas con un nuevo aparato creado por Ibáñez.

blicación en la que dio cuenta de la observación y cálculo de la misma<sup>316</sup>.

Sin embargo hay otra respuesta que podría ser todavía más verosímil que las anteriores. Ibáñez, en su condición de miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, sabría que Struve fue uno de los primeros sabios extranjeros que se integró en esa corporación. En efecto, nada más crearse la Academia (25 de febrero de 1847), su Secretario pidió a la Academia de París una relación de posibles personajes susceptibles de ser nombrados Académicos Correspondientes Extranjeros, para que así naciese la madrileña con un plus de prestigio. Ese fue pues el origen de que Struve figurase desde el primer momento en la Sección de Ciencias Exactas, junto a colegas tan célebres como Gauss y Cauchy. La propuesta se realizó el 22 de mayo de 1848 y se hizo efectiva el 28 de junio del mismo año<sup>317</sup>.

Cuando el Instituto Geográfico eligió el modelo matemático de la Tierra que había propuesto Struve, se perseguía un doble objetivo: geodésico y cartográfico. La red de triangulación española, en que se apoyaría el Mapa Topográfico Nacional, se diseñó de acuerdo con el patrón fijado por el abate francés Jean Picard, es decir proyectando cadenas de triángulos a lo largo de meridianos y de paralelos<sup>318</sup>, separados entre sí alrededor de 2°, jugando los de Madrid el papel determinante. Su cálculo y compensación se realizó siguiendo un procedimiento similar al empleado en la cadena del gran arco ruso-escandinavo. La posición final de los vértices de los triángulos anteriores se consideró definitiva, de modo que al rellenar los cuadriláteros, comprendidos entre los meridianos y paralelos anteriores, con otros triángulos análogos se enlazaron estos con los previamente compensados.

El vértice Observatorio localizado en el Retiro fue pues el origen elegido para toda la triangulación de la España peninsular, siendos sus coordenadas astronómicas las del propio Observatorio:  $\varphi = 40^{\circ}24'30''$  y  $\lambda = 3^{\circ}41'16''$  W.G. La orientación de la red geodésica, el acimut de todos



Lista de posibles Académicos Correspondientes, recomendados por el Secretario perpetuo de la Academia de Ciencias de París, Marie Jean Pierre Flourens, a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. En el listado figuran sabios tan relevantes como Cauchy, Chasles, Liouville o Airy. El nombre de Struve se ha marcado con asterisco.

<sup>316</sup> La versión francesa de la Memoria de Struve se conserva en la biblioteca del Instituto Geográfico Nacional.

<sup>317</sup> Los firmantes del acuerdo fueron Mariano Lorente, Fernando García San Pedro, Jerónimo del Campo, Cipriano Segundo Montesino y José Solano de la Matalinares.

<sup>318</sup> Los meridianos elegidos fueron los de Salamanca, Madrid, Pamplona y Lérida, correspondiendo los paralelos a las ciudades de Palencia, Madrid y Badajoz.



La Red Geodésica de primer orden en el año 1877, antes de rellenar todos sus cuadriláteros. Se le ha superpuesto una fotografía de Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero, de la época en que midió la Base de Madridejos.

sus lados, se obtuvo a partir del formado por los vértices Observatorio y Cabeza de Hierro, la segunda cumbre más elevada en la Sierra de Guadarrama. Las coordenadas anteriores sirvieron para deducir las geodésicas del resto de los vértices de la red, convirtiéndose el Observatorio en el Datum de la misma. Aunque se efectuasen todos los cálculos sobre el elipsoide de Struve, el problema geodésico directo (transporte de coordenadas) se resolvió usando las fórmulas del matemático y geodesta Louis Puissant, truncando los desarrollos en serie para despreciar los términos de segundo orden.

La red citada, llamada también de primer orden, se observó con teodolitos de las firmas Ertel y Repsold, tal como sucedió en las últimas campañas del gran arco ruso-escandinavo, finalizando los trabajos de campo en el año 1892, dentro del cuadrilátero de Cáceres. Dado que los triángulos de la red tenían varias decenas de kilómetros, hubo que densificarla con otros<sup>319</sup> de lados menores para configurar así las de segundo orden (lados entre 10 y 20 km) y tercer orden (lados menores de 10 km). La insuficiencia de medios de cálculo, junto al gran número de observaciones a tratar, hizo que se fuese posponiendo la compensación hasta el año 1950, en el cual se realizó el ajuste global de toda la Red Europea<sup>320</sup>, sobre el elipsoide internacional de Hayford ( $a = 6378.388$  km,  $\alpha = 1/297$ ), tomando como Datum la torre de Helmert en la ciudad de Postdam.

<sup>319</sup> En la red geodésica de España se contabilizaron 573 vértices de primer orden (285 en las cadenas principales y 288 dentro de los cuadriláteros), 2000 de segundo orden y unos 10000 de tercero.

<sup>320</sup> Gracias a la inestimable ayuda del *Army Map Service*, integrado en el Cuerpo de Los Ingenieros Militares de los Estados Unidos de América.



Oficial y Soldado del A. M. S. levantando un plano de Francia (1917-1918) durante la primera guerra mundial. En la parte superior figura el anagrama del Cuerpo de Ingenieros.

Cuando se eligió como punto geodésico fundamental el Observatorio del Retiro, aún no se habían iniciado en España los trabajos de Nivelación de Precisión (1871), de manera que no se podía conocer con la certidumbre suficiente la altitud del mismo. Fue en el año 1872 cuando se colocó en el mismo la señal NP26, figurando en la misma una altitud de 655.361 m. «En previsión de un movimiento» se situaron otras en lugares tan emblemáticos de la capital como Puerta de Alcalá, Museo del Prado, Ayuntamiento y Palacio Real, formándose así el llamado Polígono de Madrid<sup>321</sup>.

El elipsoide de Struve estuvo ligado igualmente a los primeros pasos cartográficos del Instituto Geográfico, puesto que fue representado en el Mapa Topográfico Nacional, el producto más emblemático del centro. Tan sólo unos días después de que se crease el Instituto, el Regente del Reino, general Francisco Serrano Domínguez, firmó el Decreto (30 de septiembre de 1870) en el que figuraban las principales características del mapa. La primera concretaba la escala de la publicación 1/50000. La segunda marcaba el campo de cada una de sus hojas, al ordenar «*que el mapa*

<sup>321</sup> La señal de partida para toda la Red Española de Nivelación se localizó en el Ayuntamiento de Alicante: NP1 con una altitud de 3.409 m. Dicha señal se había enlazado previamente con la regla colocada en el puerto, determinándose así el nivel medio del mar por parte del Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, José María Jaúdenes, durante los años 1870, 1871 y 1872.

se divida en hojas de 20 minutos de base en sentido de los paralelos, por 10 minutos de altura en sentido de los meridianos». Finalmente, la tercera dejó sin fijar el tipo de sistema cartográfico que debería elegirse, sólo indicaba «que se considere como plana la parte de superficie terrestre representada en cada una de las hojas, sin sujetar el mapa a ningún sistema de proyección general». Puede afirmarse sin exageración que el proyecto cartográfico despertó la admiración y la expectación de toda la comunidad científica relacionada con la medición y representación de la Tierra<sup>322</sup>.

Las ambigüedades presentes en las dos últimas características del Mapa: modelo elipsoidal elegido y sistema cartográfico que lo transformase en el plano del mapa, fueron pronto resueltas. En primer lugar se decidió adoptar como modelo el elipsoide de revolución propuesto por W. Struve, tal como se acaba de comentar. En cuanto al modo de obtener el mapa, propiamente dicho, aparece bien detallado en el tomo primero de las Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico, brillantemente prologado por Carlos Ibáñez y publicado en el año 1875. En él se da cuenta de los trabajos cartográficos efectuados por los funcionarios del Instituto Miguel Muruve Galán<sup>323</sup> y Alberto Bosch Fustegueras<sup>324</sup>, los cuales aparecen resumidos entre las páginas 941 y 951 del citado volumen.



Alberto Bosch y Fustegueras, junto a la portada de su trabajo Estudios Trigonometricos (1875).

<sup>322</sup> Buena prueba de ello fue el juicio emitido por A. Hirsch, Secretario de la Asociación Geodésica Internacional, el cual consideraba a tan prometedor producto como uno de los ejemplos más perfectos de la cartografía moderna.

<sup>323</sup> Diputado a Cortes e Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Ingresó en el Instituto Geográfico en 1870.

<sup>324</sup> El 5 de diciembre de 1889 fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, tomando posesión el 23 de marzo de 1890 con el discurso *Aplicación de las Matemáticas a las Ciencias Morales y Políticas*. Allí consta el siguiente C.V. resumido: Doctor en Ciencias Exactas, Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos y Doctor en Derecho Civil y Canónico. Presidente de la Real Sociedad Económica Matritense de Amigos del País y de la Facultativa de Ciencias y Letras. Antiguo Profesor auxiliar de Física Matemática en la Universidad Central. Ministro de Fomento. Alcalde de Madrid. Diputado y Senador vitalicio del Reino. Autor de muchas y muy variadas producciones científicas, entre las que destacan Estudios trigonométricos, Manual de Astronomía popular, La agricultura española en el siglo XIX y Geometría aplicada a las Artes. Tesorero de esta Academia.

La imagen plana de cada uno de los trapecios curvilíneos definidos sobre la superficie del elipsoide de Struve se dibujaron independientemente, procurando que el desarrollo de los meridianos y paralelos del mapa coincidieran, en la medida de lo posible, con el de sus homólogos elipsoídicos. Es como si se asimilara la región delimitada por los trapecios anteriores a otra plana de la misma forma sobre los planos tangentes trazados por los centros de los mismos; dicho de otra manera, la región del elipsoide se transformaría cartográficamente en otra constituida por la superficie poliédrica limitada por los planos tangentes ya citados. Esa semejanza es precisamente la que da nombre a este sistema cartográfico, también conocido como proyección poliédrica.

Es sabido que este sistema no puede encuadrarse dentro de ninguna de las familias clásicas: equivalentes y conformes, aunque analizado a nivel local (en el campo de cada hoja) produce resultados muy satisfactorios por minimizarse las anamorfosis de todo tipo. Por el contrario, su mayor inconveniente se presenta cuando el análisis se efectúa desde un punto de vista global (involucrando varias hojas) y se pretenden representar en un mismo plano todas las hojas que representan a la región considerada. Efectivamente, el problema es en todo análogo al que se plantea cuando se desarrolla la superficie de un poliedro, de modo que han de aparecer discontinuidades, sin información geográfica, coincidentes con las desgarraduras existentes entre las distintas caras de la superficie poliédrica<sup>325</sup>.

Volviendo al trabajo efectuado por los dos ingenieros del Instituto Geográfico hay que subrayar la importancia del mismo, una buena lección de geodesia geométrica en la que hicieron uso de las propiedades de los dos radios de curvatura principales del elipsoide: el del primer vertical y el de la elipse meridiana; basándose en ellos determinaron los desarrollos de arcos de paralelo y de meridiano. Sin embargo, las dificultades surgidas con unos medios de cálculo tan rudimentarios impidieron el empleo directo de la fórmula que proporcionaba el segmento del meridiano. Las dificultades fueron de tal entidad que gran parte del texto del artículo de Muruve y Bosch se centra en tratar de buscar otra más asequible. La operación no fue en absoluto trivial, pues se trataba de calcular una integral elíptica y por tanto no inmediata. Tras diferentes transformaciones trigonométricas llegaron a las expresiones:

$$S_M^\varphi = a(1 - e^2) (M\varphi - N \operatorname{sen} 2\varphi + 1/2 P \operatorname{sen} 4\varphi),$$

$$M = 1 + (3/4)e^2 + (45/64)e^4, \quad N = (3/8)e^2 + (60/128)e^4,$$

$$P = (15/128)e^4.$$

Ecuaciones que permitían obtener el desarrollo de un arco de meridiano desde el ecuador hasta el paralelo de latitud  $\varphi$ . De modo que el arco comprendido entre los paralelos de latitudes  $\varphi_s$  y  $\varphi_i$  valdría:

$$S_M^{\varphi_s} - S_M^{\varphi_i} = a(1 - e^2) [M(\varphi_s - \varphi_i) - N(\operatorname{sen} 2\varphi_s - \operatorname{sen} 2\varphi_i) + (1/2) P(\operatorname{sen} 4\varphi_s - \operatorname{sen} 4\varphi_i)]$$

<sup>325</sup> La justificación geométrica es clara, imposibilidad de que en un vértice común a cuatro hojas valga cuatro rectos la suma de los cuatro ángulos. Como ejemplo muy singular se recuerdan los dos dodecaedros, posibles representaciones de la esfera, y el desarrollo plano de uno de ellos, dibujados por A. Durero en 1538. El dibujo lo realizó para ilustrar su intención de proyectar el globo terrestre sobre un poliedro, entendiéndolo como un compromiso entre la superficie esférica y el plano; esa novedosa transformación, introducida por él, cobró otra vez actualidad a comienzos del siglo XIX gracias a los mapas de C. G. Reichard y J. W. Woolgar.

fácilmente transformable en la siguiente:

$$S_M = a(1 - e^2) [M(\varphi_S - \varphi_1) - 2N \operatorname{sen}(\varphi_S - \varphi_1) \cos(\varphi_S - \varphi_1) + P \operatorname{sen} 2(\varphi_S - \varphi_1) \cos 2(\varphi_S - \varphi_1)]$$

Una vez adoptado el elipsoide de Struve, los valores constantes resultaron ser:

$$a(1 - e^2) \approx 6335089.411 \text{ m}; M \approx 1.00511303778; 2N \approx 0.00512379371 \text{ y } P \approx 0.00000537796,$$

de manera que finalmente pudieron completar la tabla adjunta. Sus valores son válidos para toda la zona peninsular comprendida entre las latitudes 36° y 43°50'. El haber sido designado el desarrollo con la letra *Y* no es casual, pues estaría directamente relacionado con la ordenada empleada en el dibujo del mapa.

**DESARROLLO DE LOS ARCOS DE MERIDIANO  
DE 10' DE EXTENSION, Á DIFERENTES LATITUDES.**

LATITUD DEL ORIGEN DEL ARCO.			DIFERENCIAS.	LATITUD DEL ORIGEN DEL ARCO.		
°	'	<i>Y<sub>l</sub></i> m		°	'	<i>Y<sub>l</sub></i> m
36	0	18495,174	522	40	0	18505,959
	10	3,696	523		10	6,480
	20	4,219	524		20	7,021
	30	4,743	525		30	7,563
	40	5,268	526		40	8,105
	50	5,794	526		50	8,648
37	0	6,320	528	41	0	9,192
	10	6,848	529		10	9,736
	20	7,377	550		20	18510,280
	30	7,907	550		30	0,824
	40	8,437	550		40	1,369
	50	8,967	552		50	1,914
38	0	9,499	554	42	0	2,460
	10	18500,053	554		10	3,006
	20	0,567	554		20	3,553
	30	1,101	555		30	4,100
	40	1,636	555		40	4,647
	50	2,171	556		50	5,195
39	0	2,707	557	45	0	5,743
	10	3,244	558		10	6,291
	20	3,782	558		20	6,839
	30	4,320	559		30	7,387
	40	4,859	559		40	7,935
	50	5,398	541		50	18518,484
40	0	18505,959				

Tabla confeccionada por Muruve y Bosch para calcular los desarrollos de los arcos del meridiano en el Mapa Topográfico Nacional (Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico).

Al ser circular el desarrollo del arco de paralelo no fue necesaria transformación alguna, únicamente es de resaltar en este caso la deducción clásica, que efectuaron, del valor del radio del paralelo

$$R_p = a \cos \varphi (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-1/2}.$$

Siendo por tanto inmediata la obtención de todos los desarrollos de arco de paralelo incluidos en la tabla correspondiente. Tampoco aquí resulta casual el empleo de la letra *X*, pues se trata de una magnitud que es directamente proporcional a la abscisa que habría de usarse en el plano del mapa.

**DESARROLLO DE LOS ARCOS DE PARALELO  
DE 20' DE EXTENSION, Á DIFERENTES LATITUDES.**

LATITUD.			DIFERENCIAS.	LATITUD.		
°	'	m		°	'	m
36	0	30053,739	65,366	40	0	28465,810
	10	29992,373	65,620		10	30°,466
	20	928,753	65,874		20	396,991
	30	864,879	64,127		30	257,114
	40	800,752	64,380		40	187,067
	50	736,372	64,633		50	116,780
37	0	671,759	64,885	41	0	046,253
	10	606,854	65,138		10	27975,499
	20	541,718	65,387		20	904,490
	30	476,531	65,636		30	853,259
	40	410,695	65,886		40	761,774
	50	344,809	66,136		50	690,062
38	0	278,673	66,385	42	0	618,115
	10	212,288	66,632		10	545,933
	20	145,656	66,880		20	473,316
	30	078,776	67,127		30	400,865
	40	011,619	67,373		40	327,981
	50	28944,276	67,619		50	254,865
39	0	876,657	67,864	43	0	181,317
	10	808,795	68,109		10	107,938
	20	740,684	68,354		20	634,128
	30	672,330	68,598		30	26960,087
	40	603,752	68,840		40	883,818
	50	534,892	69,082		50	811,317
40	0	28465,810		44	0	26736,591

Tabla confeccionada por Muruve y Bosch para calcular los desarrollos de los arcos de paralelo en el Mapa Topográfico Nacional (Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico).

Acto seguido explicaron el empleo de las dos tablas para obtener los lados de todos los trapecios curvilíneos del elipsoide, dando el ejemplo de los relativos a la hoja de Madrid, con una latitud inferior de 40°20'. De ese modo resulta que los lados no paralelos del trapecio valdrían 18507.021 m, en cuanto a las bases, de latitudes 40°20' y 40°30', vendrían dadas por 28326.921 m y 28257.114 m. La diferencia entre ambas, poco más de 19 cm, era por tanto despreciable a la escala prevista; en cambio resultaría muy significativa si se hubieran elegido las bases superiores de los dos trapecios extremos, situadas a latitudes de 36° y de 43°40', pues entonces alcanzaría un valor mayor de 63 cm. Asimismo hicieron ver que la discrepancia entre los lados meridionales, los no paralelos, resultaba insignificante dentro de la España peninsular, al ser inferior a las cinco décimas de milímetro.

Aunque en el penúltimo párrafo de su artículo manifiesten «*Terminado se encuentra el grabado en piedra y a cinco colores, de la hoja central, y vencidas quedan con su publicación todas las dificultades prácticas, relativas a la clara y exacta representación de cuantos detalles consiente la escala adoptada...*», lo cierto es que no dan plena cuenta del modo en que se ha de dibujar el mapa. Dado que el trabajo se incluyó, en el primer tomo de las Memorias del Instituto, bajo el epígrafe PUBLICACIÓN DEL MAPA DE ESPAÑA, PARTE PRIMERA y en los siguientes no figura su continuación, es razonable pensar que la segunda parte debe permanecer aún inédita, aunque se refiriese a una cuestión de tanto interés práctico. No obstante, los propios autores habían indicado indirectamente el procedimiento a seguir, toda vez que asociaron las letras Y y X a los respectivos desarrollos de los diez minutos de arco de meridiano y de los veinte minutos de arco de

paralelo, como ya quedó dicho<sup>326</sup>. Este sistema cartográfico ligado al elipsoide de Struve, estuvo en vigor<sup>327</sup> en el Instituto Geográfico hasta el año 1970; pues fue entonces cuando se adoptó el conocido con las siglas UTM (Universal Transverse Mercator), asociado al modelo elipsoidal de John Fillmore Hayford.

Por otro lado, el modelo elipsoidal de Struve no sólo fue útil para la geodesia geométrica y para la cartografía, sino que también lo fue para la geodesia física o para la gravimetría; en este caso la iniciativa la tomó el ingeniero geógrafo del Instituto Luis Lozano Calvo<sup>328</sup> en el trabajo *Determinación de una fórmula para la gravedad normal*<sup>329</sup> a partir del elipsoide terrestre de Struve, adecuada especialmente para España<sup>330</sup>. En la introducción efectuó un interesante paralelismo entre las dos ramas de la geodesia, al señalar que la exactitud en el conocimiento del tamaño de la Tierra fue aumentando con la proliferación de las medidas de sus meridianos y de la gravedad; coligiendo que cada nuevo elipsoide que fue apareciendo contribuía generalmente a perfeccionar las aproximaciones a la forma del geoide. No obstante reconocía que la elección del elipsoide «ni es muy importante para un país que, como España, no representa sino la milésima parte de la superficie del globo, ni determina por completo el problema, pues la gravedad no nos queda determinada por la forma de la Tierra; es preciso dar, además, la gravedad en un punto». La elección del elipsoide pareció por tanto obligada, visto que sobre él se había calculado la red geodésica nacional, evitándose al mismo tiempo tener que transformar las coordenadas geodésicas, a él referidas, para obtener sus homólogas con relación al otro elipsoide que se hubiese adoptado.

Para deducir la fórmula de la gravedad normal comenzó hallando la que resultaría al suponer que coincidían el geoide y el elipsoide de Struve. Como paso previo demostró la relación entre las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio y las coordenadas elípticas, aunque introdujera al final la simplificación de considerar cuadráticas de revolución. Por otro lado, el potencial de la gravedad, suma del de atracción y del centrífugo, debería cumplir las cuatro propiedades clásicas del elipsoide terrestre enunciadas por Friedrich Robert Helmert:

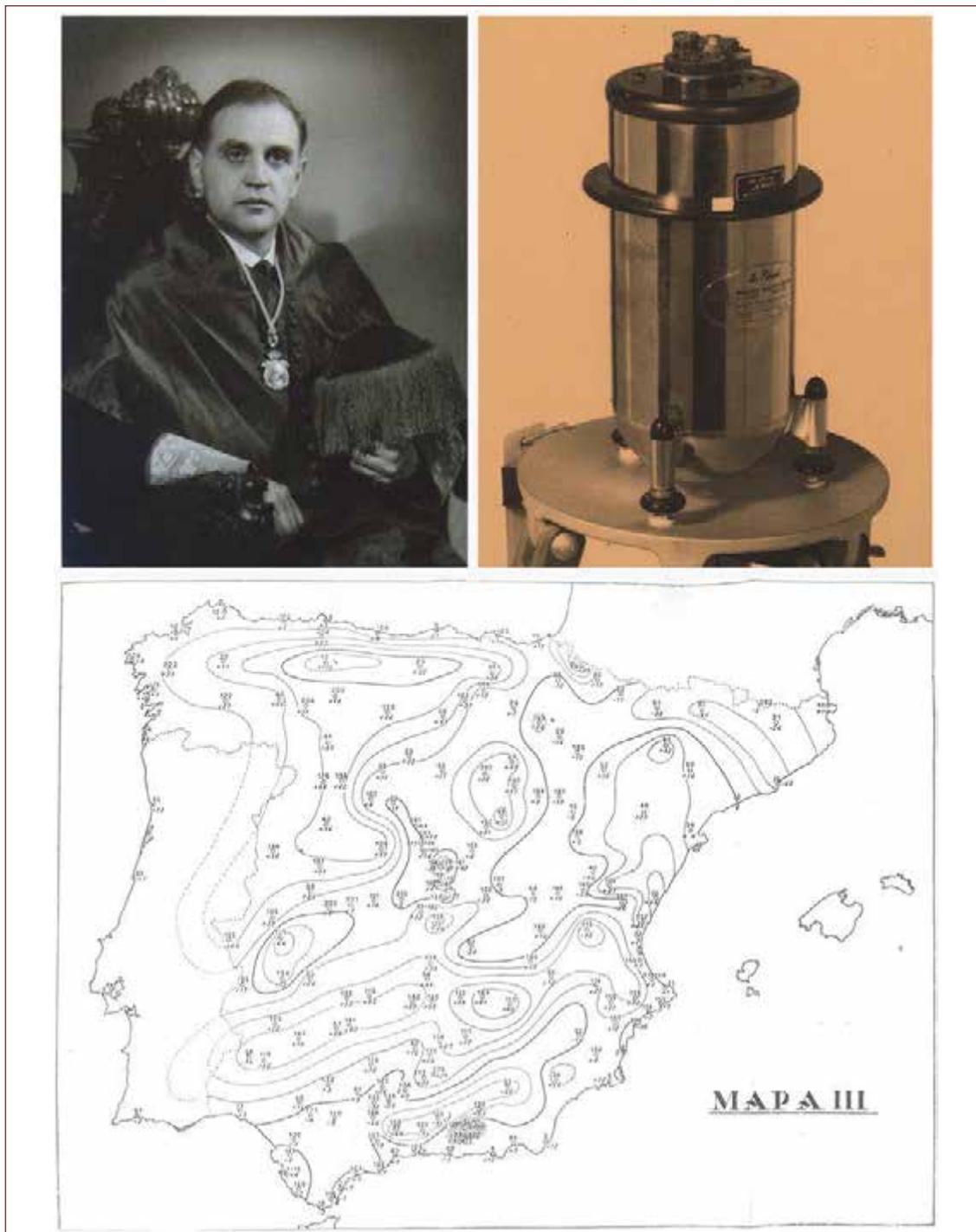
<sup>326</sup> El lector interesado en la materialización de esas coordenadas sobre el plano podría satisfacer su curiosidad con el artículo *El Primer Sistema Cartográfico del Mapa Topográfico Nacional de España*, publicado en la revista *Mapping* (2006. Núm. 109, pp. 52-62).

<sup>327</sup> Al haberse creado el Centro en el año 1870 y al no haber sido instantánea la implantación del modelo de Hayford, el elipsoide de Struve fue la referencia geodésica en España durante más de un siglo.

<sup>328</sup> Lozano Calvo fue además Catedrático de Geofísica en la Universidad de Madrid, desde el año 1948, y Profesor de Geofísica en la Escuela de Topografía, ubicada en los locales cedidos al efecto por el Instituto Geográfico.

<sup>329</sup> Si  $W$  fuese el geopotencial asociado a la Tierra, puede considerarse la suma de dos componentes: por una parte el potencial del campo gravitatorio  $V$  y por otra la debida a la rotación en torno a su eje,  $\Phi$ , de manera que  $W = V + \Phi$ . La gravedad real se define como el vector gradiente de ese potencial total, es decir  $g = \nabla W$ . Ahora bien, suponiendo que las superficies equipotenciales del campo gravitatorio se pudieran considerar elipsoidales y fuese  $U$  el potencial relacionado con ellas, se definiría la gravedad normal como el gradiente del mismo, esto es  $\gamma = \nabla U$ . Como el ajuste del elipsoide a la superficie equipotencial real no es perfecto, surgiría un potencial residual o perturbador,  $T$ , cuyo valor es ostensiblemente menor que el anterior; en todo caso  $W = U + T$ . Las irregularidades del geoide, superficie equipotencial sensiblemente coincidente con el nivel medio del mar, en relación con el elipsoide anterior, las denominadas ondulaciones del geoide o alturas del geoide,  $N$ , son por tanto las responsables de dicho potencial perturbador; de hecho la fórmula de Bruns liga a tales alturas con ese potencial y con la gravedad normal,  $N = T/\gamma$ . Las diferencias entre la gravedad real y la normal son las conocidas anomalías de la gravedad,  $\Delta g = g - \gamma$ . Esas anomalías están relacionadas con las ondulaciones del geoide a través de la fórmula de Stokes, posibilitándose así la representación del mismo sobre un elipsoide dado.

<sup>330</sup> Su trabajo fue incluido en la Revista de Geofísica editada por el Instituto Nacional de Geofísica. Año IX. Número 33. Enero-Marzo 1950. Dicho instituto pertenecía al Consejo Superior de Investigaciones Científicas.



Luis Lozano Calvo, Ingeniero Geógrafo del Instituto Geográfico y Catedrático de Geofísica en la Universidad de Madrid o Universidad Central, junto a uno de los gravímetros (Worden) que usó en sus medidas de la gravedad. Se incluye también uno de los mapas que confeccionó, en el que aparecen junto a cada estación gravimétrica la diferencia de los valores absolutos de las anomalías Faye y Bouguer en mgl. A cada diferencia se le afectó con el signo + cuando la primera era mayor que la segunda y a la inversa. La fotografía de Luis Lozano fue cedida por Elisa Buforn Peiró, Catedrática de Geofísica en la Facultad de Ciencias Físicas (Universidad Complutense de Madrid).

- a) Debería ser de revolución.
- b) Su superficie sería de nivel o equipotencial.
- c) Su masa coincidiría con la del geoide.
- d) La media cuadrática de las anomalías tendría que ser mínima<sup>331</sup>.

Una vez hallada la expresión del potencial, procedió formalmente al cálculo de la gravedad teórica, obteniendo las variaciones del mismo según la normal a la superficie, consiguiendo tras laboriosos desarrollos la fórmula siguiente:

$$\gamma = \gamma_E [1 - e \operatorname{sen}^2 \varphi + (e^2/8) \operatorname{sen}^2 2\varphi] + (5 \omega^2 \varphi/2 - 17 \omega^2 \varphi e/14) \operatorname{sen}^2 \varphi - (5/8) \omega^2 a e \operatorname{sen}^2 2\varphi.$$

Particularizándola para los valores de los parámetros que definían el elipsoide de Struve:  $e \approx 33871896 E - 10$  y  $a \approx 6378298$  m y considerando que la velocidad de rotación de la Tierra venía dada por  $\omega \approx 72921158 E - 10$  r/s, resultó:

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_E (1 - 33871896 E - 10 \operatorname{sen}^2 \varphi + 14341317 E - 13 \operatorname{sen}^2 2\varphi) + \\ + 8.4651926 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0.008569004 \operatorname{sen}^2 2\varphi, \end{aligned}$$

sustituyendo el primer miembro por el valor de la gravedad observada y reducida, correspondiente a un punto de latitud  $\varphi$ , se podría determinar el valor de  $\gamma_E$  para dicha observación. Procediendo de igual modo con todos los puntos de la red gravimétrica, calculó Lozano<sup>332</sup> la media aritmética de los diferentes  $\gamma_E$ , llegando a que el promedio de los 188 valores fue de 978.0223 gals. Teniendo luego en cuenta ese valor, llegó por fin a la fórmula que proporcionaría la gravedad teórica en el paralelo de latitud  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \gamma = 978.0223 (1 - 33871896 E - 10 \operatorname{sen}^2 \varphi + 14341317 E - 13 \operatorname{sen}^2 2\varphi) + \\ + 8.4651926 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0.008569004 \operatorname{sen}^2 2\varphi. \end{aligned}$$

Fácilmente transformable en la siguiente:

$$\gamma = 978.0223 (1 + 0.0052682 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0.00000 \operatorname{sen}^2 2\varphi).$$

Resulta obvio que el coeficiente del  $\operatorname{sen}^2 \varphi$  es igual al cociente siguiente  $\beta = (\gamma_P - \gamma_E)/\gamma_E$ , es decir que relaciona el valor de la gravedad normal en los polos y en el ecuador, de ahí que sea denominado en ocasiones como aplastamiento gravimétrico o dinámico. La denominación anterior también resulta justificada por su conexión con el achatamiento elipsoidal  $\alpha$ , a través de la tercera relación demostrada por Alexis Clairaut:  $\alpha + \beta = 5 \omega^2 a/2\gamma_E$ . La importancia de esa última ecuación es manifiesta, ya que prueba como el achatamiento geométrico puede deducirse a partir de los valores de la gravedad, relacionando así la geodesia geométrica con la física<sup>333</sup>.

<sup>331</sup> Esta cuarta propiedad la impuso Lozano para obtener el valor de la gravedad normal en el ecuador  $\gamma_E$ .

<sup>332</sup> En su artículo incluyó los cálculos correspondientes a todas las estaciones (pp. 14-19 del mismo).

<sup>333</sup> La relación  $\omega^2 a/\gamma_E$ , expresa la existente entre la aceleración centrífuga y la gravedad normal en el ecuador del elipsoide.

Lozano ilustró su trabajo con los mapas peninsulares correspondientes a las anomalías Faye y Bouguer, sobre los que se dibujaron las respectivas curvas isoanómalas. También añadió un tercero en el que se rotuló junto a cada estación gravimétrica la diferencia de los valores absolutos de tales anomalías, expresados en mgal. Dichos valores resultaron positivos, cuando la anomalía de Faye<sup>334</sup> fue mayor que la de Bouguer<sup>335</sup>, y negativos en caso contrario. Basándose en ellos dedujo las regiones en que era más o menos probable la existencia de una compensación isostática.

---

<sup>334</sup> También llamada anomalía de aire libre, lleva el nombre del astrónomo Hervé Auguste Étienne Albans Faye. Se corresponde esta anomalía con la diferencia entre la gravedad observada y la teórica del elipsoide transportada a la altitud de la estación de observación.

<sup>335</sup> Lleva el nombre del astrónomo y matemático Pierre Bouguer, uno de los académicos que participaron en la medición del grado de meridiano en el virreinato de Perú. La corrección asociada a esta anomalía pretende eliminar los efectos de las masas existentes entre el elipsoide y la superficie topográfica en que se localiza la estación.

**COMPTES RENDUS**  
HEBDOMADAIRES  
DES SÉANCES  
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PUBLIÉS

CONFORMÈMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE

En date du 23 Juillet 1857,

PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME QUARANTE-CINQUIÈME.

JUILLET — DÉCEMBRE 1857.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Quai des Augustins, n° 55.

1857



El Instituto de Francia fue creado por la ley del 25 de octubre de 1795 (día 3 del mes brumario, año IV). En él se integraron las cinco Academias: *l'Académie française*, fundada en el año 1635; *l'Académie des inscriptions et belles-lettres*, fundada en el año 1663; *l'Académie des sciences*, fundada en el año 1666; *l'Académie des beaux-arts*, fundada en el año 1816 y *l'Académie des sciences morales et politiques*, fundada en el año 1795, suprimida en 1803 y reestablecida en 1832. El grabado fue realizado por Sebastien Leclerc en 1698.

Sesión presidida por el zoólogo francés  
Isidore Geoffroy Saint-Hilaire el día lunes 12  
de octubre del año 1857

GÉODÉSIE. — *Note sur l'ouvrage relatif à l'arc du méridien de 25° 20' entre la Mer Glaciale et le Danube, publié par l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg ; par M. W. STRUVE.*

« C'est la France qui, au milieu du XVII<sup>e</sup> siècle, a pris l'initiative dans le problème de la détermination précise de la grandeur du globe terrestre. Depuis les travaux de Picard, elle a continué pendant près de deux cents ans les travaux relatifs à la recherche de la figure de la Terre, regardée comme sphéroïde. Les mesures exécutées par Bouguer et La Condamine au Pérou, par Maupertuis, Clairault et Celsius en Laponie, combinées avec celles de France, prouvèrent l'aplatissement de la Terre et constatèrent le résultat qu'avait déduit Newton de la théorie de la gravitation.

» A partir de cette époque, toutes les nations éclairées s'empressèrent de suivre l'exemple brillant donné par la France, en contribuant à la détermination des dimensions et de la figure du sphéroïde terrestre. Plusieurs gouvernements firent entreprendre des mesures d'arcs de méridien, mais dont la grandeur était souvent limitée par l'étendue du pays où elles furent accomplies. Le nouveau siècle donna à la science la grande méridienne de France, de 12° 22', entre Dunkerque et Formentera, exécutée par Méchain, Delambre, Arago et M. Biot : œuvre qui dépassait en étendue et en précision d'exécution tous les travaux analogues antérieurs.

» En 1837 et 1840, Bessel entreprit un nouveau calcul des dimensions du sphéroïde terrestre, dans lequel il partait de dix arcs mesurés avec l'exactitude suffisante. Par l'emploi de la méthode des moindres carrés, le calcul conduisit à un résultat qu'on pouvait regarder comme le plus probable qui pût être basé sur les matériaux existant alors. Ces dix arcs

C. R., 1857, 2<sup>me</sup> Semestre. (T. XLV, N° 15.)

sont :

		Latitudes moyennes.
1. L'arc du Pérou ou de l'équateur. . . . .	3° 7'	— 1° 31'
2. Le petit arc des Indes orientales. . . . .	1 35	+ 12 32
3. Le grand arc des Indes. . . . .	15 58	+ 16 8
4. L'arc de France. . . . .	12 22	+ 44 51
5. L'arc d'Angleterre. . . . .	2 50	+ 52 2
6. L'arc hanovrien. . . . .	2 1	+ 52 32
7. L'arc danois. . . . .	1 32	+ 54 8
8. L'arc de Prusse. . . . .	1 30	+ 54 58
9. L'arc de Russie. . . . .	8 2	+ 56 4
10. L'arc suédois ou du cercle polaire. . . . .	1 37	+ 66 20

» La somme des arcs employés par Bessel s'élève à 50° 34'. Ces arcs, situés sous des longitudes bien différentes, s'étendent en latitude depuis — 3° 5' jusqu'à 67° 9', avec les trois lacunes suivantes :

Depuis 0° 2'	jusqu'à 8° 9'	lacune de 8° 7'
» 24 7	» 38 40	» 14 33
» 60 5	» 65 31	» 5 26
Somme. . . . .		28 6

» Dans le tableau donné, il y a trois arcs qui ont été portés, pendant les dix-sept années écoulées depuis le calcul de Bessel, à des étendues plus considérables. Le grand arc des Indes, alors de 15° 58', comprend maintenant 21° 21' par suite des travaux de M. Everest. Au lieu du petit arc anglais de 2° 50', il y a maintenant deux arcs, qui s'étendent jusqu'à 10 degrés, des deux côtés de la Grande-Bretagne, depuis la Manche jusqu'aux îles de Shetland et les Hébrides. Remarquons ici que la méridienne occidentale d'Angleterre étant en liaison géodésique avec les triangles de la méridienne de France, il existe dès à présent un arc considérable de 22 degrés depuis Formentera jusqu'aux îles de Shetland. C'est une circonstance de haute importance; car ce sont surtout les arcs de méridien de grande étendue qui conduiront à une connaissance plus précise des dimensions du sphéroïde terrestre; dans ces grands arcs, l'influence des attractions locales diminue avec la grandeur de l'arc, attractions qui sont produites plutôt par la distribution non symétrique de la matière en dedans de la surface terrestre, que par la masse des montagnes.

» L'arc de Russie dont Bessel a pu faire usage, était de 8° 2' pour une latitude moyenne de 56° 4'. Aujourd'hui cet arc, compris entre le Danube

et la Mer Glaciale et qui devra être désigné par le nom d'arc *russe-scandinave*, a été prolongé jusqu'à l'étendue de  $25^{\circ} 20'$  avec la coopération des gouvernements et des géomètres de Suède et de Norvège, quant à sa partie la plus septentrionale comprise entre Fuglenaes sur la Mer Glaciale, latitude  $70^{\circ} 40'$ , et Tornea, latitude  $65^{\circ} 51'$ .

» Une Commission internationale, réunie en 1853 à Stockholm, m'ayant chargé de la rédaction de l'ouvrage détaillé qui va se publier sur la totalité de cette méridienne, je me suis mis à l'œuvre des calculs et de la rédaction depuis 1854, et j'ai l'honneur de mettre aujourd'hui sous les yeux de l'Académie les deux premiers volumes de l'ouvrage et les vingt-neuf planches qui l'accompagnent.

» L'ouvrage porte le titre suivant :

» *Arc du méridien de  $25^{\circ} 20'$  entre le Danube et la Mer Glaciale mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855, sous la direction de :*

» C. de Tenner, *Général de l'État-major Impérial de Russie,*

» Chr. Hansteen, *Directeur du département géographique de Norvège,*

» N. H. Selander, *Directeur de l'Observatoire royal de Stockholm,*

» F. G. W. Struve, *Directeur de l'Observatoire central de Russie ;*

» *Ouvrage composé sur les différents matériaux et rédigé par F. G. W. Struve, publié par l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.*

» Les deux volumes imprimés contiennent toutes les opérations géodésiques ; savoir : les 258 triangles principaux, les 10 bases mesurées avec les opérations qui lient les bases aux triangles principaux, les azimuts observés sur les 13 stations astronomiques et qui subdivisent l'arc total de  $25^{\circ} 20'$  en 12 arcs partiels, enfin les latitudes déterminées sur lesdites 13 stations. Ces latitudes ne sont cependant pas encore définitives, mais elles sont tellement approchées, que les corrections à y porter finalement ne monteront qu'à de petites fractions de seconde.

» Parmi les 258 triangles principaux, il y en a 225 mesurés par les géomètres russes, astronomes et ingénieurs-géographes ; car le travail russe, en son entier, est le résultat d'une coopération simultanée et pendant quarante années consécutives de l'État-major Impérial et des Observatoires de Dorpat et de Poulkova, ce dernier faisant partie de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.

» Vingt et un des triangles principaux ont été mesurés par M. Selander, de l'Académie de Stockholm ; les triangles principaux les plus boréaux sont dus à deux ingénieurs norvégiens qui travaillaient sous la direction de M. Hansteen.

» Sept des bases ont été mesurées par l'appareil de l'Observatoire de Poulkova, dont les règles sont pourvues à l'une des extrémités de leviers de touche; les 3 autres par l'appareil de M. de Tenner, analogue à celui de Borda. Mais les unités linéaires de ces deux appareils ont été comparées entre elles le plus soigneusement à Poulkova.

» Quant aux 13 azimuts, 12 ont été observés par les astronomes russes; un seul, celui de Stuor-Oiwi, a été fourni par M. Selander. Il en est de même pour les latitudes.

» Les opérations géodésiques ont eu pour résultat final la distance des parallèles des 13 points astronomiques. Pour l'arc total pris sur la méridienne de l'Observatoire de Dorpat, cette distance s'est trouvée égale à 1447787 toises, distance qui est sujette à une erreur probable de  $\pm 6,2$  toises. L'évaluation de cette erreur probable est basée sur l'examen de l'influence de toutes les sources d'inexactitude possibles dans les différentes parties des opérations, et je suis persuadé que le montant donné de  $\pm 6,2$  toises est plutôt trop fort que trop faible. C'est précisément dans les opérations géodésiques que la méthode des moindres carrés s'applique avec un succès éminent à la déduction des résultats, surtout quand on est en état de recourir aux observations primitives.

» Quant à ces observations primitives, elles ont été publiées, pour la partie de notre arc située entre le Danube et la Duna, ou depuis  $45^{\circ} 20'$  jusqu'à  $56^{\circ} 30'$ , dans les mémoires du Dépôt topographique de l'État-major Impérial, dont dix-huit volumes in-4°, rédigés en langue russe, ont paru.

» Les détails sur l'arc depuis  $56^{\circ} 30'$  jusqu'à  $60^{\circ} 5'$  se trouvent dans ma Description des opérations de l'arc baltique, publiée en deux volumes in-4°, en 1831. Les détails des opérations septentrionales, depuis le Golfe de Finlande jusqu'à la Mer Glaciale, ont été ajoutés, comme pièces justificatives, au second volume de l'ouvrage que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie. Ces pièces s'étendent sur les travaux russes en Finlande jusqu'au delà de Tornea et sur les travaux exécutés par les Norvégiens dans le Finmarken et sur les îles de l'Océan Glacial. Quant aux détails primitifs des opérations suédoises, nous attendons l'ouvrage séparé que prépare M. Selander, et qui sera publié par l'Académie de Stockholm.

» Le premier volume de mon ouvrage n'est cependant pas encore complet; il y manque l'exposé historique de nos opérations, et quelques additions relatives aux méthodes de calcul employées, et qu'il m'a paru convenable de séparer, pour ne pas interrompre la marche de l'exposé. Dès que ces additions auront été ajoutées à ce volume, j'aurai l'honneur de présenter un exemplaire complet à l'Académie.

» Le troisième volume contiendra en premier lieu la discussion détaillée des 12 latitudes, discussion qui sera basée sur une nouvelle détermination de toutes les étoiles employées, en faisant usage des constantes de l'aberration et de la nutation, déterminées à Poulkova.

» Ce dernier volume renfermera, en outre, le résultat pour la figure de la Terre, déduit de la combinaison de tous les arcs du méridien dignes de confiance, et qui ont été mesurés jusqu'à présent. Finalement on y trouvera le tableau des positions géographiques et des altitudes de tous les sommets de triangles entre le Danube et la Mer Glaciale, en partant de la longitude de Dorpat, qui a été déterminée par une jonction chronométrique entre Poulkova et Dorpat faite en 1855. Dans ce calcul des positions géographiques, j'aurai à faire usage des dimensions du sphéroïde terrestre, données par la recherche précédente.

» L'arc de 25° 20' entre la Mer Glaciale et le Danube ne doit toutefois être regardé que comme une importante partie d'une œuvre non encore terminée. En effet, rien n'empêche de continuer les triangles vers le sud, jusqu'à l'île de Candie, en traversant la Turquie continentale et les îles de l'Archipel. Entre Fuglenaes et l'île de Candie il y a au delà de 37 degrés de différence en latitude, qui constituent la méridienne européenne de la plus grande étendue possible. »

*Communication de M. Biot à l'occasion de la précédente lecture.*

« Quand nous avons établi, Arago et moi, la portion de notre triangulation d'Espagne, qui s'étend sur le royaume de Valence, nous avons bien reconnu qu'on pourrait un jour en profiter pour prolonger l'arc méridien de France jusqu'en Afrique, en traversant la Méditerranée vers son extrémité occidentale, et nous avons annoncé cette prévision dans les termes suivants :

« Enfin, notre opération aura peut-être, dans l'avenir, des conséquences » plus étendues. Si la civilisation européenne parvient à s'implanter un jour » sur les côtes de l'Afrique, rien ne sera plus facile que de traverser la » Méditerranée par quelques triangles, en prolongeant notre chaîne dans » l'ouest jusqu'à la hauteur du cap de Gate ; après quoi, remontant la côte » d'Afrique jusqu'à la ville d'Alger, qui se trouve sous le méridien de Paris, » on pourra mesurer la latitude et porter l'extrémité australe de notre méridienne sur le sommet de l'Atlas. »

» Ce passage se lit à la page XXIX de l'introduction à un ouvrage in-4°,

publié en 1821 sous ce titre : « *Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques, exécutées par ordre du Bureau des Longitudes de France, en Espagne, en France, en Angleterre et en Écosse, pour déterminer la variation de la pesanteur et des degrés terrestres sur le prolongement du méridien de Paris; faisant suite au troisième volume de la Base du système métrique. Rédigé par MM. Biot et Arago, Membres de l'Académie des Sciences, astronomes adjoints du Bureau des Longitudes* ».

» Les réflexions que l'importante communication de M. Struve m'a suggérées, m'ont paru ne pouvoir être rédigées avec utilité et convenance qu'après qu'elle aura été insérée au *Compte rendu* ».

« **M. LE MARÉCHAL VAILLANT** remercie M. de Struve pour le soin avec lequel il a rappelé les travaux séculaires de la France dans la grande question de la figure de la Terre. Ces travaux, exécutés dans l'origine par les Membres de l'Académie des Sciences, plus tard par le corps des Ingénieurs-géographes, enfin par le corps d'État-major, ont été poussés jusqu'à l'entier achèvement de l'important réseau géodésique qui couvre la France.

» Un arc de méridien, passant par Fontainebleau et se rattachant au méridien principal, a servi à dissiper quelques doutes soulevés par la forme de plusieurs triangles appartenant à la première opération. La chaîne de Brest à Strasbourg a été exécutée. L'arc du parallèle moyen passant par Bordeaux a été mesuré et étendu jusqu'à Fiume en Illyrie.

» Le grand arc de méridien, mesuré dans l'Empire russe, sous la direction de M. de Struve, constitue une magnifique et gigantesque opération qui contribuera de la manière la plus puissante et la plus décisive à la connaissance de la figure de notre planète, surtout en se combinant avec l'exécution d'un travail dont M. de Struve n'a point parlé dans son intéressante Notice, bien que la proposition de ce travail soit le principal objet de son voyage en France.

» Une chaîne non interrompue de triangles existe aujourd'hui depuis les bords de l'Océan Atlantique jusqu'aux rivages de la Mer Caspienne, de Brest jusqu'à Astrakhan, traversant la France, la Belgique, la Prusse et la Russie. Il importe qu'on utilise cette chaîne pour le calcul d'un arc de parallèle qui n'embrassera pas moins de 55 degrés en longitude. Car, en comparant les longueurs géodésiques des diverses parties de cet arc avec leurs amplitudes astronomiques, on arrivera de la manière la plus certaine à constater si la Terre est véritablement un corps de révolution, ou bien si elle s'écarte de la forme simple qu'on lui avait attribuée. Telle est l'entre-

prise que propose M. de Struve, et à laquelle il demande au Gouvernement français de vouloir bien concourir.

» Tous les matériaux nécessaires au calcul de la longueur géodésique de la portion française de cet arc ont été publiés dans leurs parties principales, et les minutes en sont conservées au Dépôt de la Guerre. Cet établissement s'empressera soit de mettre à la disposition des savants étrangers les documents qui pourraient être réclamés, soit de concourir pour sa part aux travaux de calcul et de discussion nécessaires à l'accomplissement de l'œuvre projetée par le savant Directeur de l'Observatoire central de Russie.

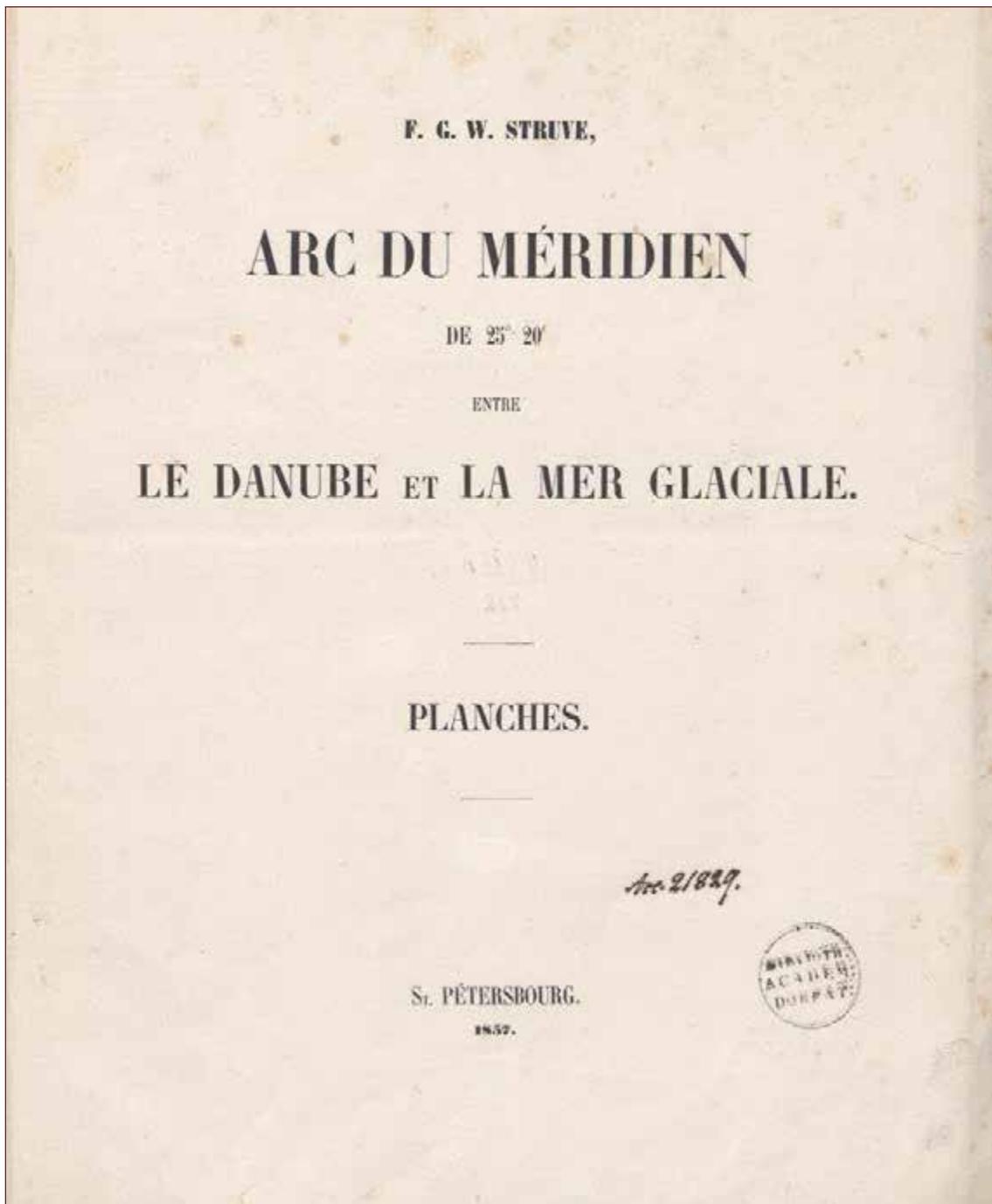
» Quant à la partie astronomique et aux observations nouvelles qui pourraient être nécessaires, il sera d'autant plus facile d'y pourvoir, que le travail de la révision des longitudes françaises a depuis trois années déjà été proposé par le Directeur de l'Observatoire Impérial de France, dans un but parfaitement concordant avec celui de M. de Struve.

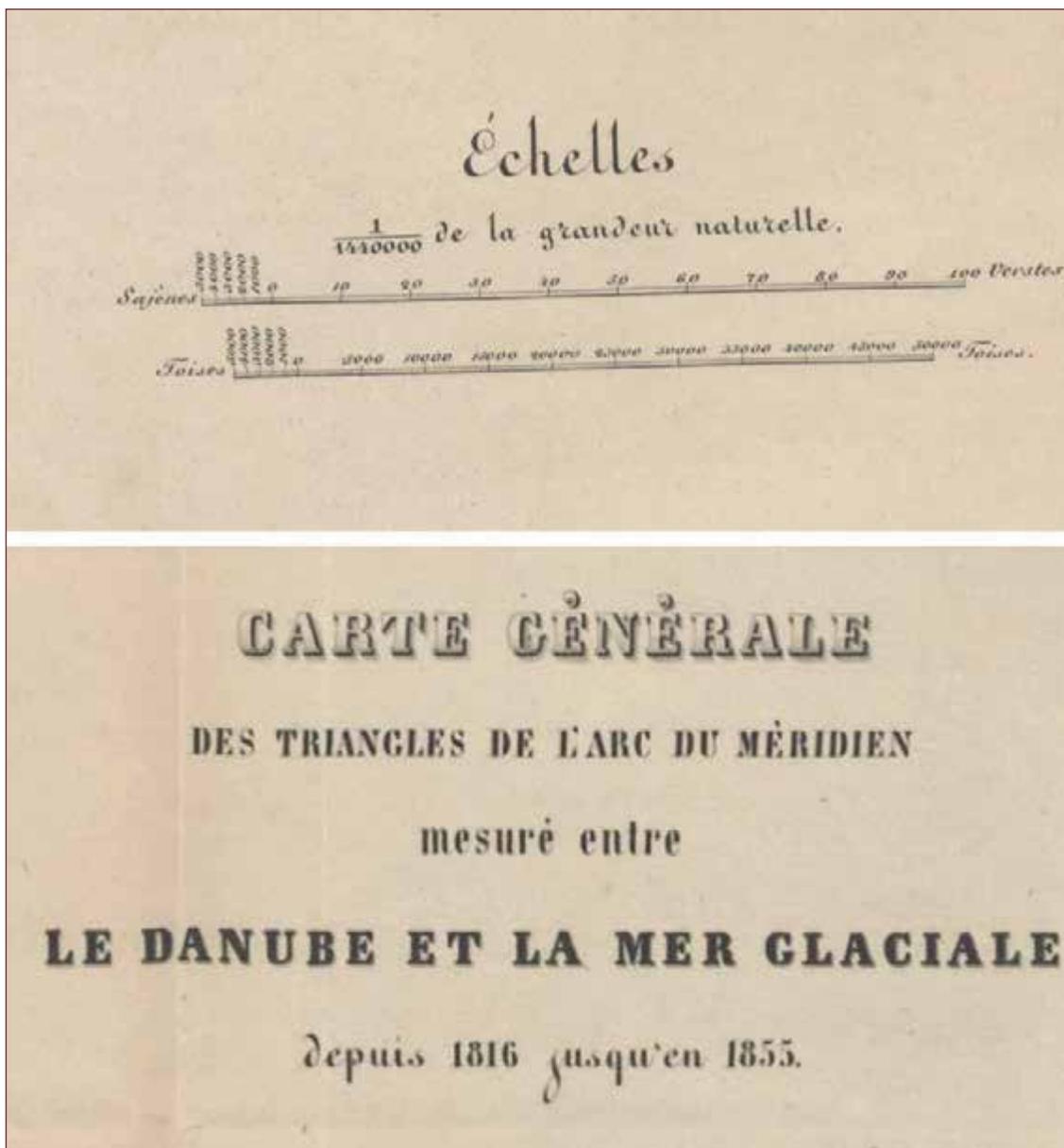
» Ce projet a même reçu un commencement d'exécution par la mesure de la longitude de Bourges, faite dans l'automne de l'année dernière par M. Le Verrier : et si le travail a dû être suspendu cette année sous l'empire de circonstances particulières, nul doute qu'il ne puisse être repris prochainement et étendu avec activité, non-seulement à la méridienne de France et à notre parallèle moyen, mais encore à la longitude de Brest. »

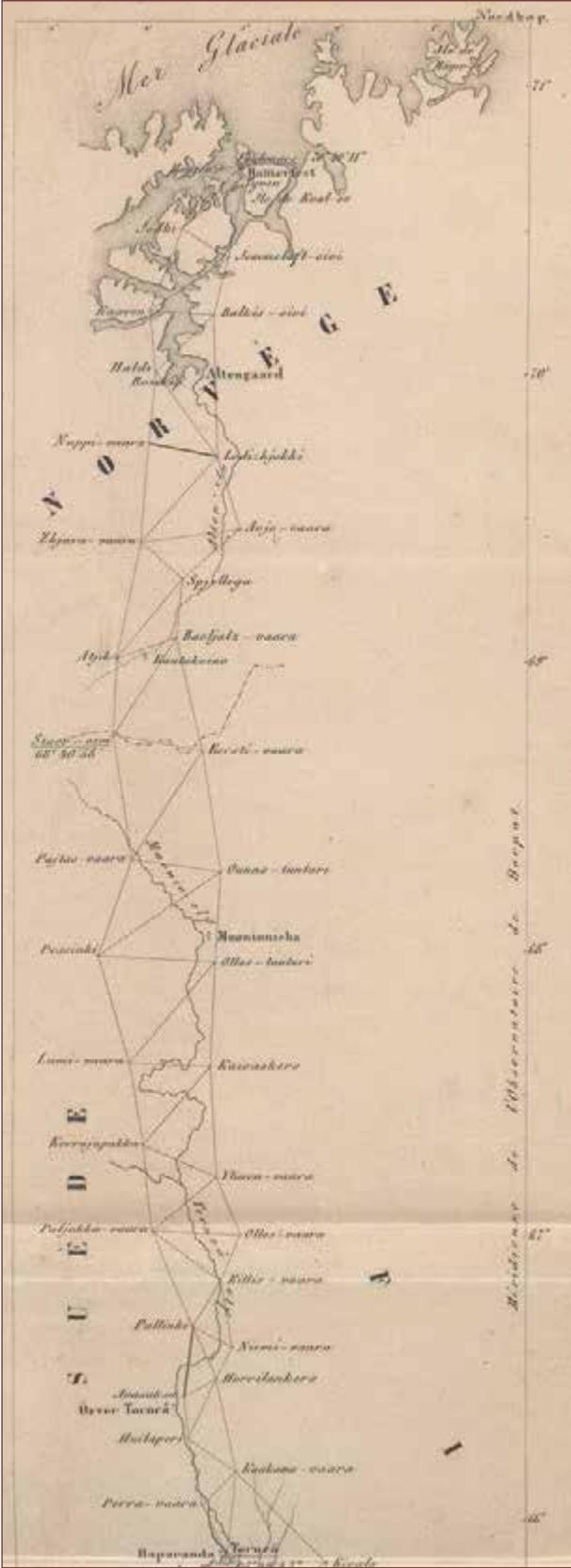
« M. DE STRUVE remercie M. le Maréchal Vaillant d'avoir bien voulu donner à l'Académie des détails précis sur l'opération internationale projetée par lui.

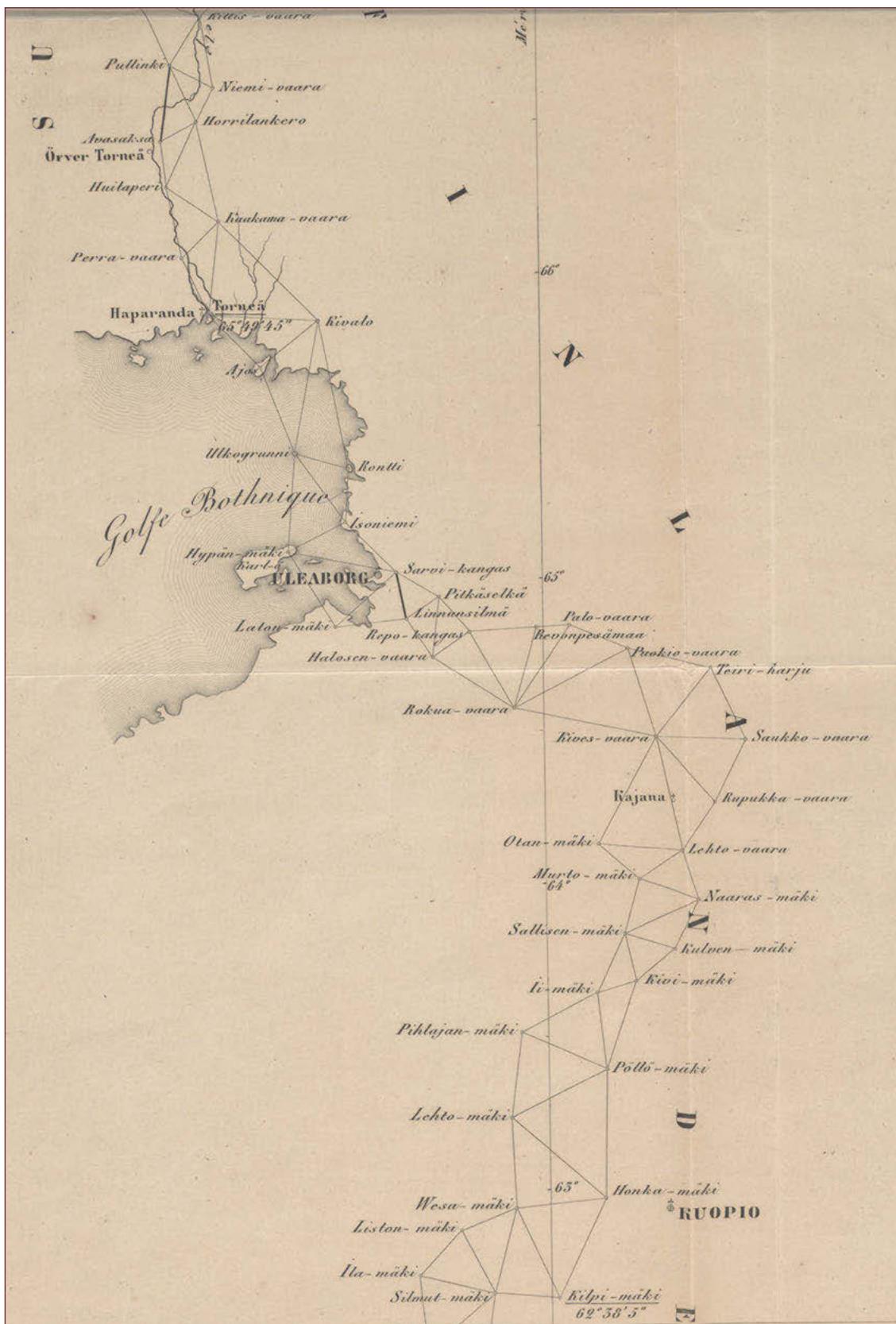
» Si dans sa Note il n'y avait fait aucune allusion, c'est que cette opération était en ce moment même l'objet d'une négociation avec l'Administration française; il lui avait paru convenable de réserver à Son Excellence M. le Ministre de la Guerre le droit de la produire en temps opportun. M. de Struve s'applaudit de sa réserve, puisqu'elle a eu pour double résultat que sa proposition soit présentée aujourd'hui sous les auspices de M. le Maréchal Vaillant, et qu'immédiatement elle ait reçu du Gouvernement français, par la bouche de Son Excellence, un appui qui en garantit désormais le succès. »



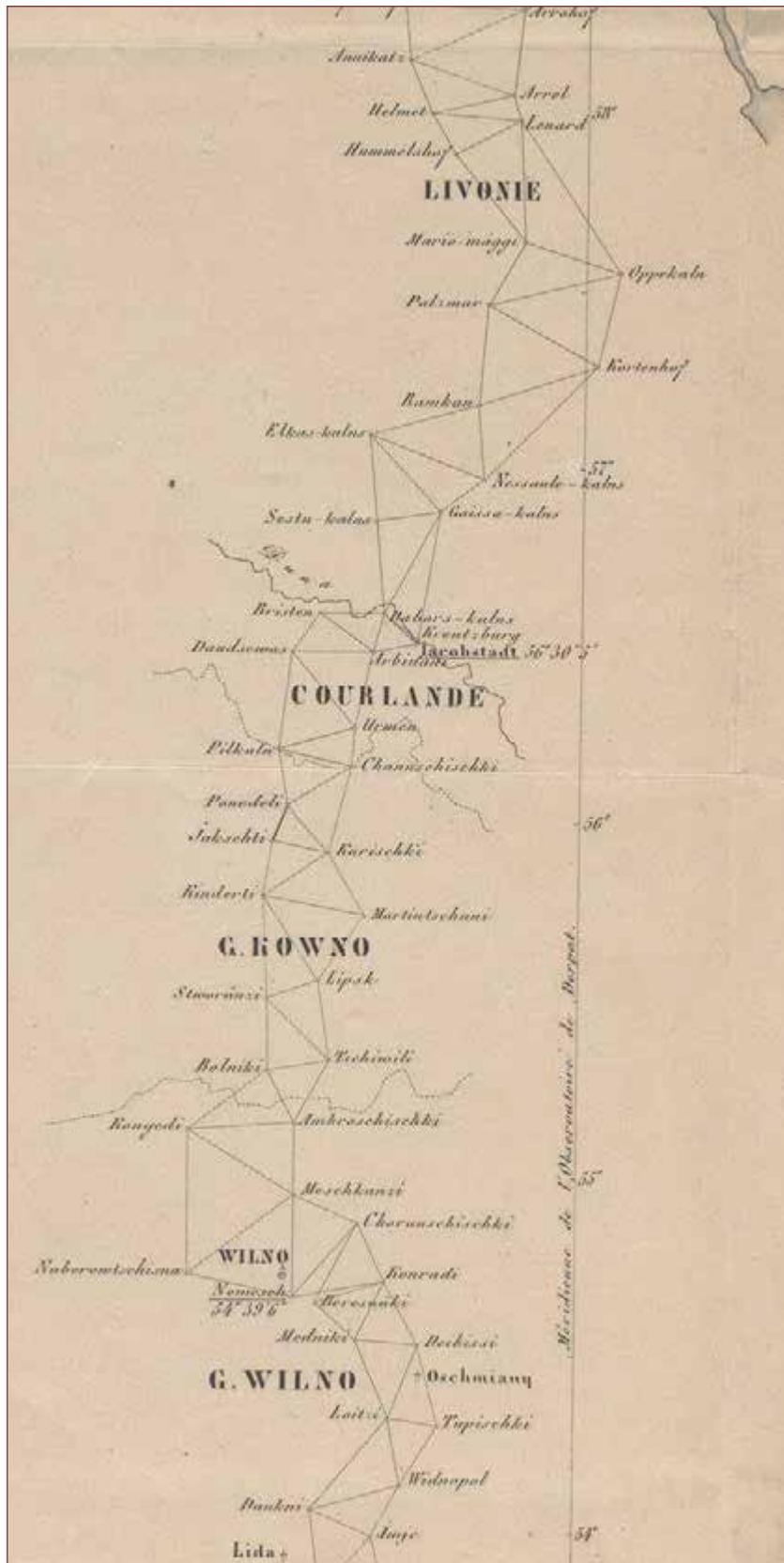


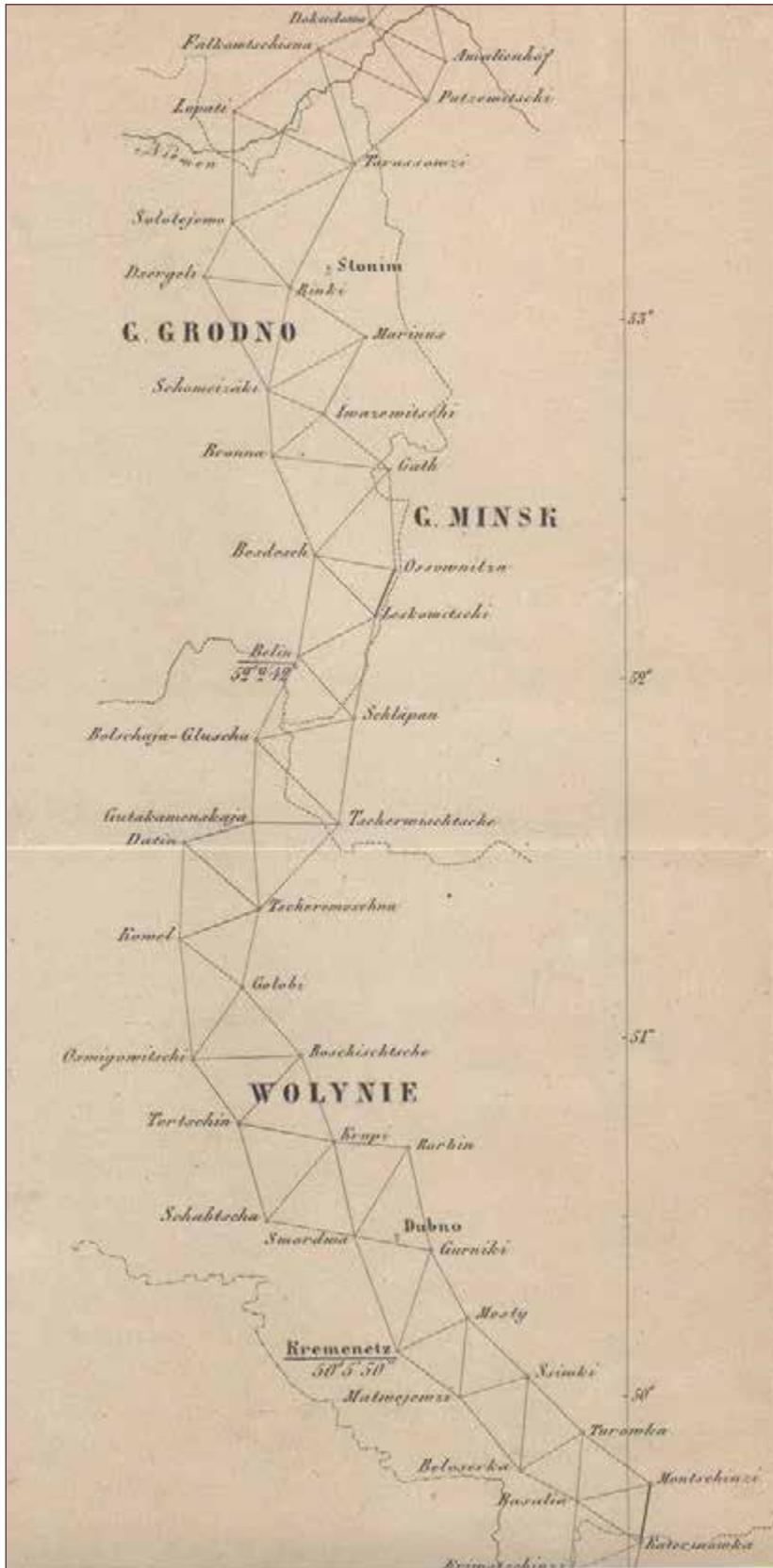












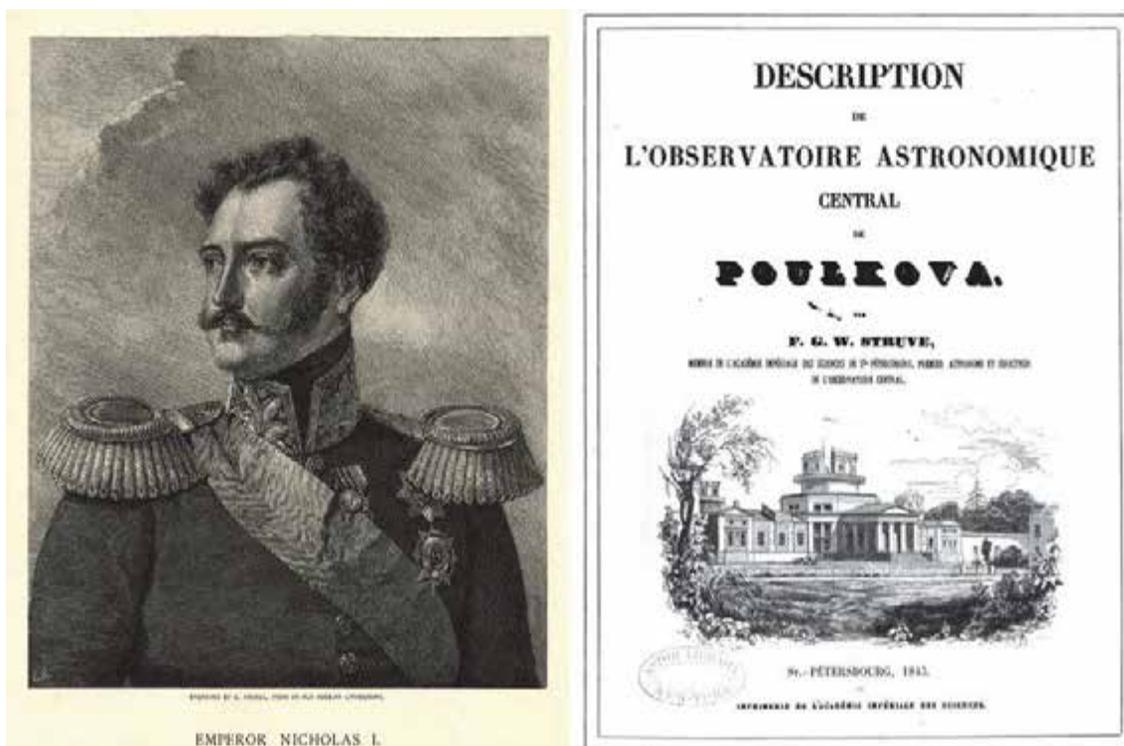


El meridiano del antiguo Observatorio astronómico de Dorpat, integrado en su Universidad, fue la línea maestra usada por W. von Struve para configurar su triangulación geodésica y efectuar la medida de la Tierra, la cual condujo a la definición de su propio modelo matemático para la misma. Allí fue también en donde comenzó a impartir sus lecciones de geodesia, tan básicas para la formación de los militares rusos y escandinavos. Toda su experiencia anterior la aprovechó para mediar en la construcción del futuro Observatorio de Púlkovo, localizado en las proximidades de la ciudad de San Petersburgo<sup>336</sup>, llamado a ser una referencia astronómica de primer orden y elemento consustancial del gran arco ruso-escandinavo, aunque físicamente no perteneciese al mismo. En efecto, fue en él donde adquirieron sus conocimientos astronómicos y geodésicos parte de los operadores que intervendrían en la operación, y suyos fueron igualmente muchos de los instrumentos matemáticos empleados en las mediciones correspondientes. Tampoco conviene olvidar que el Observatorio de Púlkovo fue además el centro metrológico en el que se contrastaron la mayoría de tales instrumentos, y muy especialmente las reglas usadas en las medidas de las bases, llegando a efectuarse alguna de prueba en los terrenos circundantes.

Dado que Struve fue el coordinador científico de tan ambicioso proyecto y que fue nombrado primer astrónomo del observatorio, prolongación experimental de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, mal se podría reivindicar la trascendencia de sus contribuciones astronómico-geodésicas sin incluir en esta publicación un amplio resumen que trate de sus orígenes y de las principales actividades geodésicas que se realizaron en sus comienzos. Su inclusión parece todavía más necesaria cuando se lee, con tanto detenimiento como interés, el libro titulado: *Description de L'Observatoire Astronomique Central de Poulkova*, cuyo autor fue precisamente F. G. Wilhelm von Struve, en su calidad de *Miembro de la Academia Imperial de Ciencias de San Petersburgo, Primer Astrónomo y Director del Observatorio Central*. El volumen, editado por dicha Academia en el año 1845, fue dedicado al emperador<sup>337</sup> Nicolás I y se dividió en las tres secciones siguientes: Historia (pp: 1-70), Descripción del Observatorio (pp. 71-246) y Actividad del Observatorio (pp. 247-292), aunque incluyese al final un apéndice bibliográfico especialmente interesante: *Catalogus librorum in biblioteca speculae Pulcovensis contentorum*, de obligada consulta para los interesados en la historia de las ciencias exactas.

<sup>336</sup> Su aeropuerto, situado junto al Observatorio, es conocido internacionalmente como *Púlkovo Airport*.

<sup>337</sup> El título de Zar se empleó entre 1546 y 1917, aunque desde el año 1721 la denominación oficial fuese la de emperador.



El zar Nicolas I junto a la portada del libro que le dedicó el astrónomo y geodesta F. G. Wilhelm von Struve, en el año 1845.

Recordaba Struve, en la presentación de su obra, que el progreso de la astronomía y el de las matemáticas habían sido prácticamente simultáneos, como si la historia de ambas disciplinas fuese inseparable. Al mismo tiempo subrayaba como se favoreció el desarrollo astronómico, gracias al mecenazgo de soberanos como los Tolomeos, propiciándose así la creación de la Biblioteca y Observatorio de Alejandría; una institución compleja y muy celebrada por las primeras observaciones, más o menos documentadas, de que se tienen noticias. El siguiente salto cualitativo no se produjo, según él, hasta el siglo xv, que vio nacer a Copérnico; cuando se estableció definitivamente la frontera entre la astronomía antigua y moderna, al postular este su nueva estructura del sistema solar. Aunque en esa época todavía era demasiado lento el desarrollo de la astronomía observacional, surgió entonces el astrónomo más sobresaliente de su tiempo, Tycho Brahe; cuya actividad se vio favorecida por el rey Federico II de Dinamarca. Ese monarca financió la construcción del gran Observatorio de Uraniburgo, un centro excepcional que sólo permaneció en activo durante 25 años<sup>338</sup>. Durante su estancia en Praga, bajo la protección del emperador Rodolfo, coincidió con Kepler y le entregó los registros de sus observaciones, con el resultado ya sabido de las leyes que inmortalizarían su nombre. También resaltó la importancia de la genial contribución de I. Newton, plasmada en las leyes generales de la gravitación y de la mecánica celeste.

<sup>338</sup> Struve afirmaba que a pesar de la calidad de sus trabajos, el Director «se vio perseguido por las cábalas y la envidia de sus compatriotas»; añadiendo que si bien la exactitud de sus observaciones fue extraordinariamente mayor que la de las previas, también era incontestable que resultaba todavía mayor la existente entre ellas y las contemporáneas, realizadas por los astrónomos europeos del siglo xix.

Llegados al siglo XVII rememoró la revolución que introdujo la aparición del telescopio en la astronomía observacional, aumentando sustancialmente la exactitud de las mediciones hasta alcanzar cotas impensables para los astrónomos antiguos. Tras las determinaciones tan sobresalientes de Galileo, se sucedieron una serie ininterrumpida de observaciones que afectaron profundamente al saber astronómico de la época. Así se refería Struve al gran golpe que recibió por entonces la astrología:

*«la astrología judiciaria, esta ciencia falsa que había nacido, como la mala hierba, en el suelo aún demasiado estéril, de la ciencia, desapareció de los conocimientos humanos ... siendo reemplazada por el interés puro y vivo, que todas las naciones sintieron por los nuevos descubrimientos brillantes y por el progreso real de la astronomía; sobre todo cuando dicho progreso augura una futura solución al difícil problema de las longitudes en el mar, cuya gran importancia se dejó sentir en las frecuentes y largas travesías alrededor del globo que se llevaron a cabo en el siglo XVII.»*

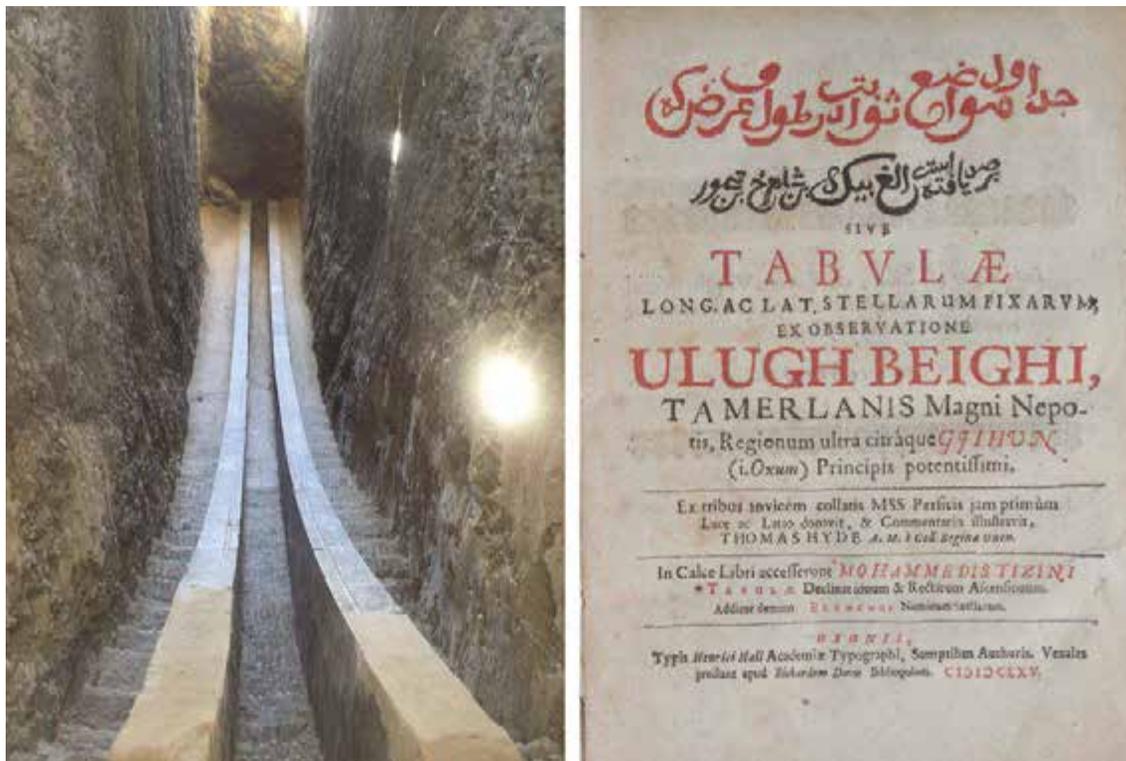
La atención prestada a la astronomía por los gobernantes, tuvo una consecuencia inmediata: la fundación de los correspondientes observatorios. Si bien reconocía el carácter de observatorio para el centro creado en Alejandría, dudaba de si algunas de las instalaciones medievales merecían tal nombre: «dudo si los observatorios orientales de la Edad Media son dignos de ser citados como tales<sup>339</sup>, puesto que se trataba de establecimientos destinados más al ejercicio de la astrología que al progreso de la ciencia exacta». La existencia de los observatorios se consolidó definitivamente cuando empezaron a ser instituciones públicas y, todavía más, a partir de que fuesen colocados bajo el patronazgo de las academias: «nuevamente creadas y destinadas al estudio sistemático de las ciencias naturales».

Otro hito astronómico marcado por Struve fue el establecimiento del primer observatorio permanente de Europa, esto es la torre astronómica de Copenhague construida durante el reinado de Christian IV, ya que por entonces sólo quedaban los restos del que había dirigido Brahe en la isla



Monumento a T. Brahe y a J. Kepler en la ciudad de Praga (1984). El primero sostiene un sector astronómico y el segundo un pergamino con sus famosas leyes.

<sup>339</sup> Ha de tenerse en cuenta que el Observatorio de Samarcanda no fue descubierto hasta el año 1908 por el arqueólogo V. L. Vyatkin. Su construcción fue realizada en el siglo XV durante el mandato del príncipe y astrónomo Ulugh Bek.



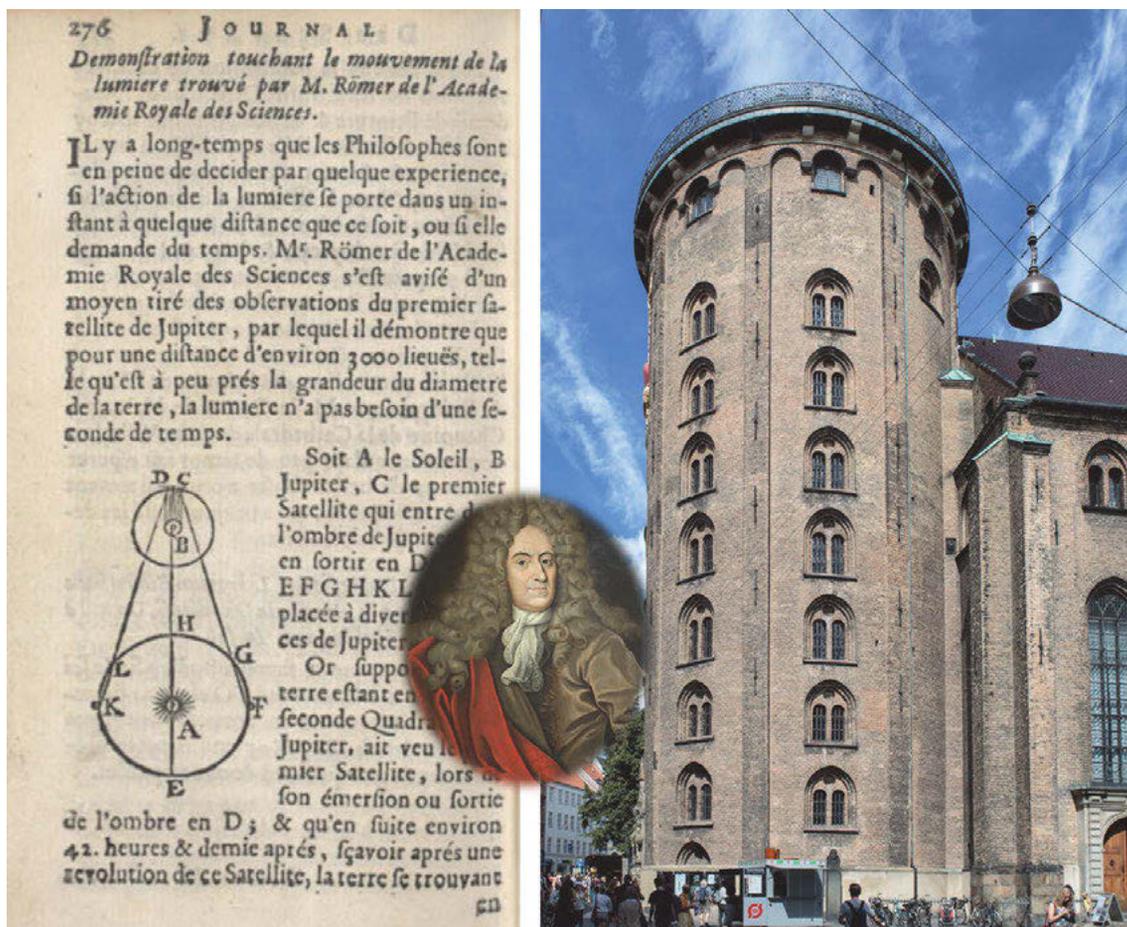
El sextante mural del Observatorio de Ulugh Beg en Samarcanda, cuyo radio era de poco más de 40 m. Fue descubierto en 1908 por el arqueólogo V. L. Vyatkin. Se presenta también la portada de su celebrado catálogo estelar.

de Ven. Sin embargo la influencia de este aún era latente en la sociedad de su tiempo, como demuestran las gestiones de su alumno Christen Sørensen Longomontanus<sup>340</sup> para que se levantase la citada torre. La primera piedra la colocó el rey el 7 de julio de 1637, finalizándose la construcción en 1656, reinando ya el rey Federico III. Esta torre pasó a la posteridad por las observaciones que efectuó en la misma el eminente astrónomo Oläus Römer<sup>341</sup>, el cual dirigió el Observatorio durante el periodo comprendido entre 1681 y 1710. A él se debió la primera transformación instrumental que reformó por completo la práctica de la astronomía, introduciendo novedosos aparatos muy diferentes de los antiguos<sup>342</sup>: el anteojo meridiano o de pasos, varios relojes y el micrómetro fueron los más significativos. Struve se lamentaba de que se hubiesen perdido todas sus observaciones, como sucedió con las de su sucesor, y discípulo más querido, Peder Nielsen Horrebow, a causa del gran incendio que asoló parte de la capital en 1728: «es una de las pérdidas más sensibles que ha tenido la astronomía, que sólo podrá ser reparada con el tiempo».

<sup>340</sup> Fue este quien realmente desarrolló el modelo geoheliocéntrico propuesto empíricamente por Brahe y procuró que se aceptasen las tablas astronómicas formadas por aquel en el año 1622.

<sup>341</sup> Durante su estancia en París fue alumno de Picard y tutor de un hijo de Luis XIV, además de Matemático Real y Profesor de Astronomía en la Universidad de Copenhague. Observando el movimiento de los satélites de Jupiter evaluó por primera vez, en el año 1676, la velocidad de la luz, fijándola en 600.000 veces la del sonido.

<sup>342</sup> Para Struve la incomparable perfección de las observaciones astronómicas de su tiempo se basaba en las ideas que tuvo este sabio astrónomo.



Primera página del artículo *Demonstration touchant le mouvement de la lumiere trouvé par M. Römer de l'Academie Royal des Sciences*, el cual fue publicado en la revista *Journal des Sçavants* (7 de diciembre de 1676, pp: 276-279). A la derecha aparece la Torre Astronómica de Copenhague.

Otros observatorios contemporáneos del danés fueron los de París y Greenwich, cuyos orígenes están indefectiblemente unidos a la creación de la Academia de Ciencias francesa y a la de la Real Sociedad de Londres. Aunque Struve ponderase la importancia del primero de ellos, no pudo evitar una fuerte crítica al señalar que Cassini I ya había hecho saber que tan colosal edificio no respondía satisfactoriamente al destino científico previsto. Para Struve no había duda: «de todos los observatorios de los siglos pasados, el de Greenwich ocupa, sin contestación, el primer lugar; los trabajos allí realizados hasta finales del siglo XVIII han sobrepasado, según el eminente historiador de la astronomía Lindenau, el conjunto de todos los ejecutados en los demás observatorios de Europa». Flamsteed observó en Greenwich durante 40 años, siendo sustituido por E. Halley en 1719, el cual estuvo al frente del Observatorio hasta el año 1742. El sucesor, James Bradley<sup>343</sup>, a quien se le debió el descubrimiento de la aberración y de la nutación, permaneció en su cargo hasta el 1792. El siguiente director del Centro fue el clérigo Nathaniel Bliss, con un mandato de tres años; el cual no debió de gozar de mucho prestigio, a tenor de las palabras de Struve: «un astrónomo absolutamente inferior a sus predecesores y a sus sucesores».

<sup>343</sup> Struve creía que se trataba del mayor astrónomo del siglo XVIII.

Nevil Maskelyne ocupó la dirección hasta el año 1811, es decir que estuvo observando el cielo durante 46 años. Fue reemplazado por John Pond, cuyo mandato finalizó en el año 1835, efectuándose entonces las observaciones más exactas, puesto que contaba ya con los nuevos instrumentos fabricados por Troughton. La relación de los directores finalizó con el celebrado Airy, «igualmente distinguido como astrónomo que como geómetra». Struve terminó sus comentarios sobre el Observatorio de Greenwich indicando que desde él «se había proporcionado a la ciencia una serie ininterrumpida de observaciones, que han alcanzado en la actualidad los 167 años, y que en relación con los movimientos del Sol, de la Luna y de los planetas, así como con la posición de las estrellas fijas, deben ser considerados como la base de nuestros conocimientos astronómicos, al menos para el transcurso de todo el siglo XVIII».

Cuando se decidió crear el Observatorio de Greenwich, el almirantazgo británico se preocupó de que figurase entre sus principales cometidos el cálculo exacto de la longitud geográfica en el mar. Esa inquietud quedó recogida en su reglamento, promulgado en 1675, ya que los astrónomos recibían al ingresar la instrucción que reprodujo Struve: *That they should apply themselves with utmost care and diligence to rectify the tables of the motions of the heavens, and the places of the fixed stars, in order to find out the so much desired longitude at sea, for the perfection of the art of navigation*<sup>344</sup>. Él mismo consideraba que gran parte del éxito logrado por los astrónomos de Greenwich radicaba precisamente en el cumplimiento de dicha orden. Por otra parte, le reconocía al observatorio el mérito de haber sido diseñado de acuerdo con las necesidades astronómicas previstas, hasta el extremo de pensar que había servido de modelo a todos los posteriores. Struve ponía como ejemplo la colocación de sus anteojos meridianos sobre bases bien aisladas de los muros exteriores y a poca altura del suelo, para garantizar de esa forma la mayor invariabilidad de su posición. A su juicio, esas precauciones no habían sido tenidas en cuenta al construir la mayoría de los observatorios en los últimos cien años, «una circunstancia que los alejaba de su principal objetivo».

La necesidad de ajustarse al guión previsto, hizo que Struve no se extendiera más en este apartado dedicado a la historia de los observatorios astronómicos<sup>345</sup>, públicos y privados, que contribuyeron, en todo caso, al progreso de la astronomía; máxime cuando la mayor parte de ellos era bien conocida por ser reciente su aparición:

---

<sup>344</sup> Que deberían procurar, con el mayor rigor y celo, perfeccionar las tablas de los movimientos de los cielos, así como la posición de las estrellas fijas, a fin de hallar la longitud en el mar, para perfeccionar el arte de la navegación.

<sup>345</sup> Esa limitación explica que Struve no se refiriese al enlace geodésico y astronómico entre los observatorios de París y de Greenwich, que figura como un hecho sobresaliente en los anales de la geodesia. El promotor de la idea fue el director del primero, Cesar François Cassini de Thury (también conocido como Cassini III, nieto de Cassini I), que convenció a los ingleses de la utilidad que tendría para las Ciencias de la Tierra el conocimiento de las diferencias entre las coordenadas geográficas de los dos centros astronómicos de referencia; incluso recomendó el procedimiento a seguir: una triangulación que uniera a los mismos. El general William Roy, creador del prestigioso *Ordnance Survey*, junto al Duque de Richmond, se responsabilizó de la que se efectuaría en la parte inglesa. Para superar el Paso de Calais, con las menores dificultades, se decidió que las observaciones fuesen nocturnas; así lo acordaron en Dover, tanto el Duque (*Master General of His Majesty's Ordnance*) como la delegación francesa compuesta por Jean Dominique, Conde de Cassini (Cassini IV), Mechain y Legendre. Los dos triángulos principales se observaron gracias a las señales colocadas a ambos lados del canal: Dover Castle, Fairlight Head, Cap Blanc Nez y Montlambert. Como era de esperar hubo ciertos desacuerdos en el resultado final: una diferencia de longitudes de 9<sup>m</sup> 19<sup>s</sup>, cuando Maskelyne la había fijado astronómicamente en 9<sup>m</sup> 30<sup>s</sup>.5, y un incremento de latitudes de 2° 11' 35'', valor que sería corregido después por Mudge al fijarlo en 2° 19' 51''. El caso es que concluido el enlace, en 1787, quedaron marcados sobre el terreno un total de 45 triángulos entre el meridiano de Greenwich y el

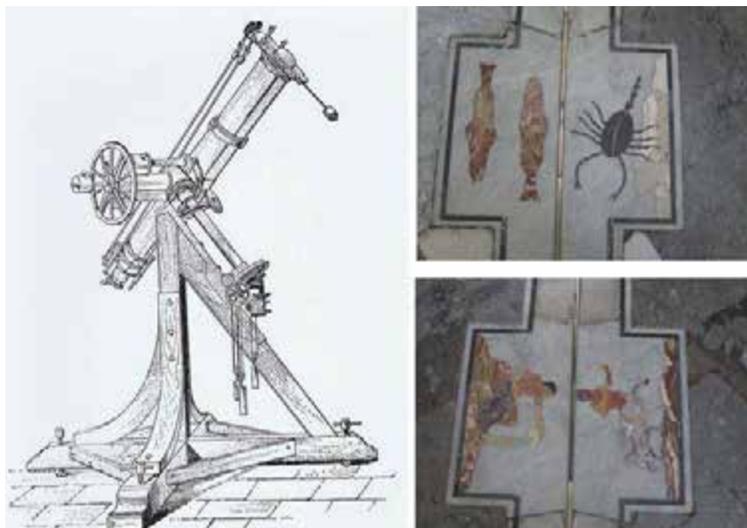
«Quien de nosotros ignora los brillantes descubrimientos de los Herschel, padre e hijo, la admirable actividad de los observatorios de Königsberg y de Palermo<sup>346</sup>, los establecimientos astronómicos permanentes que los ingleses han fundado en la India e incluso en el hemisferio austral, para que se extendiese el conocimiento de la bóveda celeste a las reiones invisibles desde Europa».



El enlace geodésico entre los Observatorios de Greenwich y de París (1787): Portada del informe presentado por la delegación francesa y el enlace entre las triangulaciones inglesa y francesa a través del Paso de Calais (fragmento de la ilustración incluida por William Roy en su Memoria *Plan of the triangles whereby the distance between the Royal Observatories of Greenwich and Paris has been determined*).

meridiano de París, una vez extendido hasta las costas del mar del Norte, en los alrededores de Dunkerque. Los pormenores del enlace fueron publicados por separado. La delegación francesa emitió su informe en el año 1789, con el título *Exposé des opérations faites en France en 1787, pour la jonction des Observatoires de Paris et Greenwich*. William Roy hizo lo propio en Inglaterra, apareciendo en el año 1790 su voluminoso trabajo *Plan of the triangles whereby the distance between the Royal Observatories of Greenwich and Paris has been determined*. Los ecos de la operación llegaron pronto a San Petersburgo, llegándose a editar el artículo *Recherches sur le degré du méridien entre Paris et Amiens et sur la jonction de l'Observatoire Royal de Gréenwich à celui de Paris* (J. Klostermann.1789).

<sup>346</sup> Ambos observatorios están ligados, respectivamente, a las figuras de sus directores más preclaros: Bessel y Giuseppe Piazzi, debiéndosele a este último la admirable meridiana, con signos del zodiaco incluidos, que adorna las inmediaciones del altar mayor en la Catedral de Palermo. En el año 1824 recibió Piazzi una carta del astrónomo Baron Franz Xaver Von Zach In 1824, en la que le decía: [...] *Dans toute l'Europe (Greenwich compté à part) je ne connaissais que trois observatoires vraiment utiles, celui de Palerme, de Königsberg et de Dorpat, ou pour miex dire de Piazzi, de Bessel et de Struve.*



Heliómetro de 6.2 pulgadas, construido por Fraunhofer para el Observatorio de Königsberg; con él realizó Bessel las observaciones que le permitieron calcular la paralaje de la estrella 61 Cygni. Se presentan también dos detalles de la meridiana de Piazzì en la catedral de Palermo (signos de Piscis, Escorpio, Acuario y Sagitario).

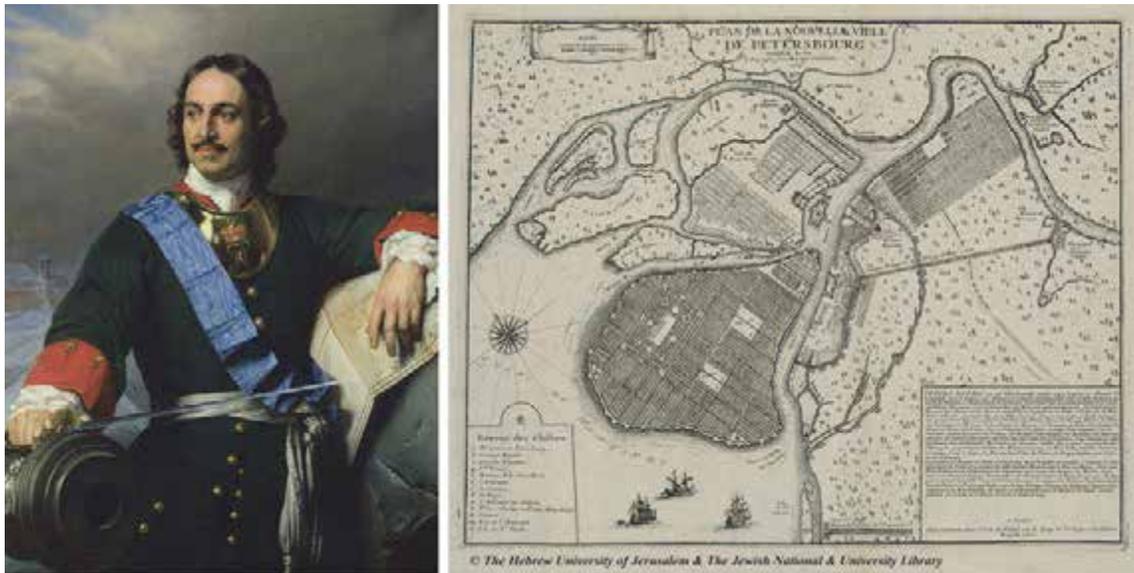
El fundador de la ciudad de San Petersburgo, Pedro I el Grande, fue también el principal defensor de la introducción de la ciencia en su imperio, pretendiendo así seguir el ejemplo de otros monarcas europeos. Es muy probable que su temprano interés por la astronomía se despertara cuando visitó los observatorios de Copenhague y de Greenwich, en el que llegó incluso a efectuar una observación; el propio director de este último fue el cronista de excepción, cuando resumía en su libro *Historia Coelestis Britannica*<sup>347</sup> tan singular acontecimiento. Antes de ello comentó su primera visita del 6 de febrero de 1698: *Serenissimus Petrus Moscoviae Czarus observatorium primum visum venit, lustrastisque Instrumentis habitu privato abiit. Aderant secum Bruceus, parentibus Scotis Moscoviae natus, Legatus Militaris; J. Wolfius et Stilcus Mercatores Angli*<sup>348</sup>. La observación la realizó el zar durante su segunda visita, del 8 de marzo, visando la culminación de Venus y midiendo su distancia cenital; en el registro de la misma se lee: *Observante Serenissimo PETRO MOSCOVIAE CZARO*.

Imbuido por el saber, el emperador decidió fundar en su país una Academia de Ciencias, que pudiese estar a la altura de sus homólogas europeas. La decisión la tomó en el año 1724, contemplando además la creación de un observatorio astronómico permanente anexo a la misma; su interés fue tan manifiesto que al año siguiente ya estaba construido el edificio que lo albergaría. Struve comentó que su localización primitiva coincidía con la que tenía en su tiempo el Observatorio de San Petersburgo, «en una torre de ladrillo de planta octogonal, en el centro de la antigua sede de la Academia, salvo los cambios realizados tras el incendio de 1747 y los posteriores para la instalación de nuevos instrumentos».

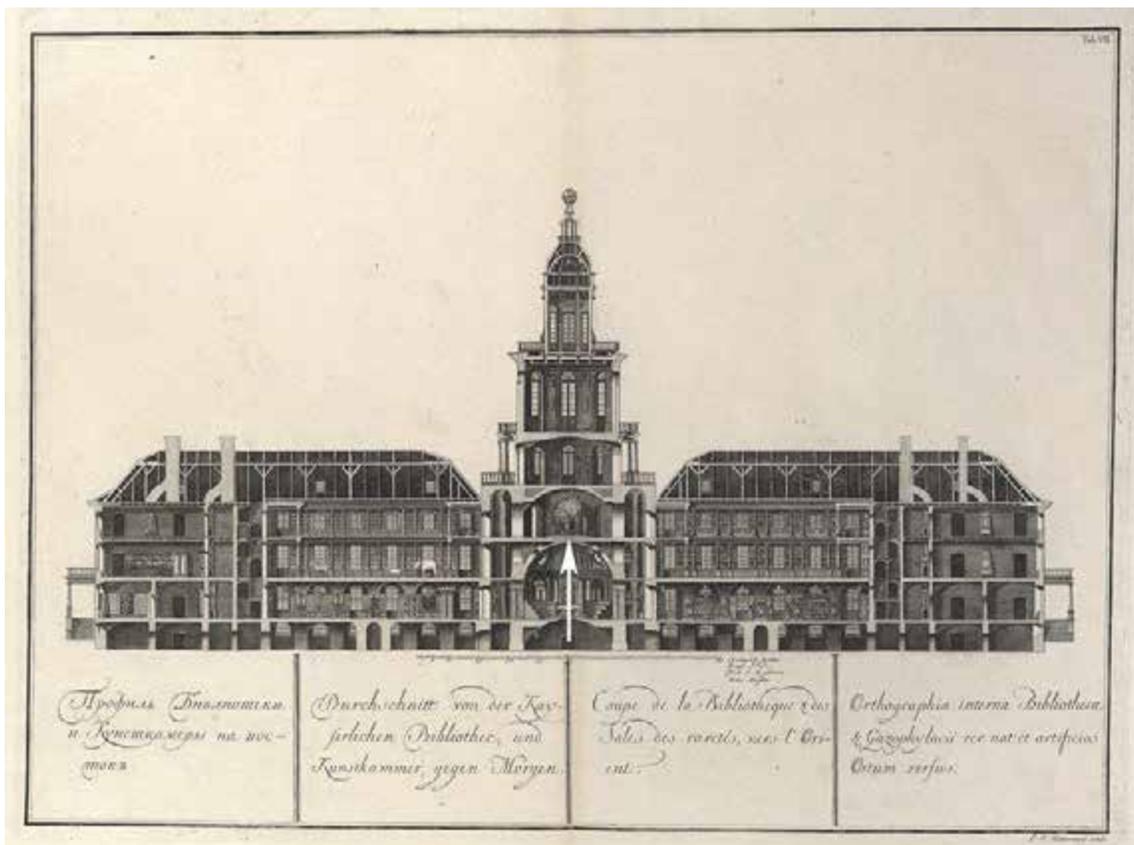
---

<sup>347</sup> Flamsteed incluyó en él las observaciones realizadas en Greenwich entre los años 1675 y 1719, añadiendo también un catálogo de casi 3000 estrellas.

<sup>348</sup> El Serenísimo Pedro, Zar de Moscú, visitó por primera vez este Observatorio y después de haber examinado sus instrumentos se fue de incógnito. Iba acompañado por el general Bruce, nacido en Moscú de padres escoceses, y por los negociantes ingleses, Wolf y Stilk.



Uno de los primeros planos de San Petersburgo (Nicolas de Fer. París. 1917), junto al retrato del zar que la fundó, Pedro el Grande.



Sección del edificio sede de la Academia de Ciencias y del Observatorio astronómico de San Petersburgo en 1741. Obsérvese en la parte inferior de la torre el globo de Gottorp, en el que se aprecia incluso la línea de la eclíptica.

Tan novedoso observatorio, levantado en San Petersburgo, nació con la intención de ser uno de los mejores de Europa, constando de tres pisos rodeados de galerías desde las que se efectuarían las observaciones astronómicas. Su altura era mayor de 40 m, dotado en su parte superior de una pequeña cúpula coronada por una esfera armilar, «como decoración y enseña», según Struve. Recordaba este que en la Historia de la Astronomía publicada por Johann Friedrich Weidler, se detallaba la disposición de los instrumentos en los tres pisos del observatorio, considerados entonces como los mejores de su tiempo. En el primero destacaba un sextante mural, tres telescopios newtonianos de reflexión, con distancias focales de 8, 6 y 3 pies, y dos globos con tres pies de diámetro. En el segundo figuraban dos anteojos de Giussepe Campani, de 15 y 25 pies de largo. El tercero albergaba una cámara oscura con un antejo de 5 pies y un reloj inglés. Los instrumentos meteorológicos se instalaron en el lado Norte de la galería externa del primer piso. Mención especial merece el gran globo de Gottorp<sup>349</sup> con que se adornó la sala inferior de la torre, el cual fue regalado a Pedro el Grande, en 1713, por Christian Augustus, nieto de Federico III, Duque de Holstein-Gottorp.

Desgraciadamente, apenas veinte años después de su construcción, fue destruida la torre astronómica, con todo su instrumental, por el incendio que devoró también el interior de la Acade-

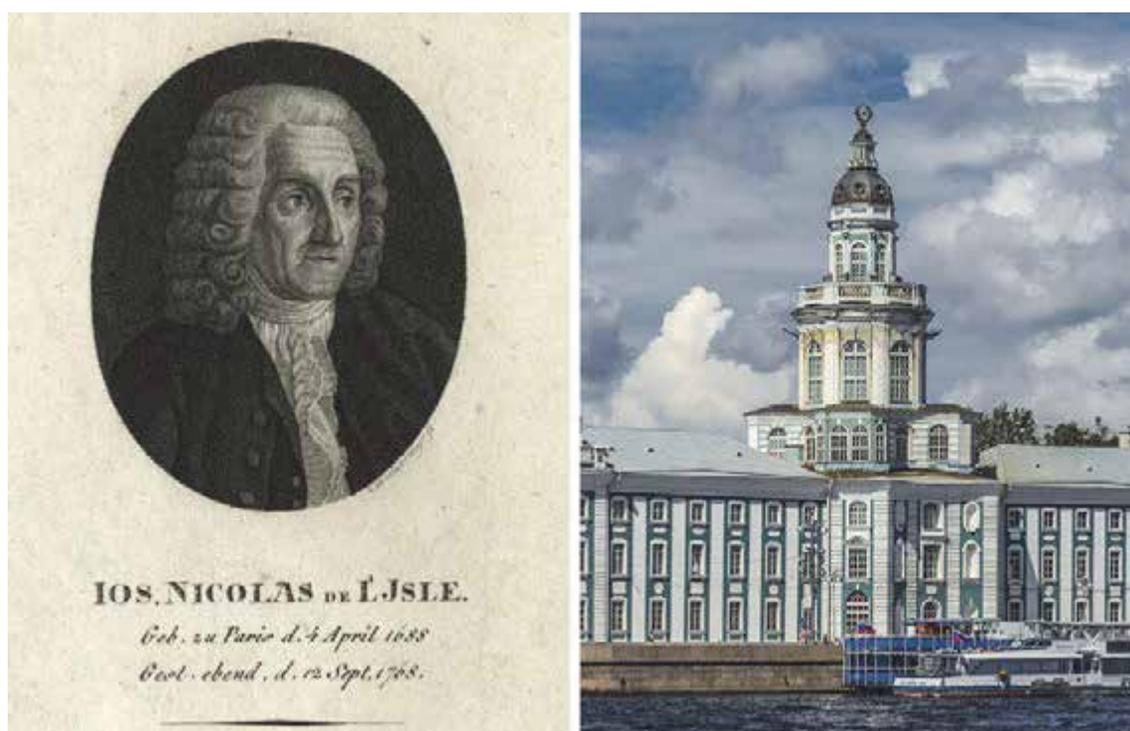


El gran globo de Gottorp y la imagen del matemático Adam Olearius, bajo cuya supervisión fue construido. Se expone en la sede del antiguo Observatorio Astronómico de San Petersburgo.

<sup>349</sup> El globo debe su nombre al de la ciudad en que se construyó, por deseo de Federico III, entre 1654 y 1664. Con un diámetro de 3 m fue el mayor del siglo XVII, hasta que se fabricaron los dos de Coronelli. Bellamente adornado, representa en su exterior la figura de la Tierra y en su interior la de la esfera celeste, iluminada con las figuras alegóricas de las constelaciones. Su movimiento permite considerarlo como uno de los antecedentes más directos de los modernos planetarios.

nia. Pero el interés del gobierno por la ciencia era tan acusado que al año siguiente (1748) inició nuevamente su actividad. Previamente se adquirió el instrumental más indispensable que necesitaban los astrónomos para observar los dos eclipses previstos para el mes de julio de ese mismo año. Struve comentó que el observatorio permaneció en ese estado provisional, aunque ocasionalmente recibiera nuevos instrumentos, hasta la época en que se produjo el primer tránsito de Venus por el Sol en 1761. El tiempo transcurrido desde su fundación, en 1725, hasta esa fecha marcó el primer periodo de la existencia del Observatorio de San Petersburgo.

Struve indicaba a continuación que fue el propio Pedro I el que requirió, en 1721, la presencia del astrónomo y cartógrafo francés Joseph Nicolas Delisle<sup>350</sup>, para ofrecerle la dirección del observatorio, un puesto que no quiso de inmediato aunque al final lo aceptase en el año 1726; fue precisamente bajo su mandato cuando se recibieron los instrumentos ya mencionados. Delisle permaneció en San Petersburgo hasta el año del incendio (1747). Su compatriota Joseph Lalande calificó sus observaciones de esos veinte años como verdaderamente prodigiosas, a la vista de los registros correspondientes<sup>351</sup>. Struve desveló en este libro que en los archivos de la Academia de Ciencias sólo se conservaban las observaciones que realizó Delisle de las ocultaciones de los satélites de Júpiter, con el fin de poder calcular las diferencias de longitudes.



Joseph-Nicolas Delisle, primer director del Observatorio Astronómico de San Petersburgo, cuya torre presenta ahora ese aspecto (obsérvese que se reconstruyó la esfera armilar que la coronaba).

<sup>350</sup> A Delisle le acompañó su hermano Nicolás y el constructor de instrumentos Vignon. Nicolás fue nombrado luego director del departamento de cartografía de la Academia de Ciencias. Su hermano Louis de la Croyère también viajó a Rusia, llamado por Nicolás, en 1727 y llegó a ingresar como astrónomo en dicha Academia.

<sup>351</sup> Al parecer Delisle se llevó consigo los registros, puesto que Lalande los examinó en el Depósito de la Marina y en el Observatorio de Paris.

Desde el año 1734, Delisle contó con la ayuda del astrónomo alemán Gottfried Heinsius<sup>352</sup>, que tanto destacaría después en el estudio de la constitución física del cometa aparecido en el año 1744. Doce años después Heinsius volvió a su Leipzig natal, siendo sustituido por S. A. Braun y N. Popov, los cuales iniciaron sus observaciones en 1748, una vez subsanados parcialmente los desperfectos producidos durante el incendio.

El siguiente director del Observatorio de la Academia fue August Nathanael Grischow, un astrónomo alemán que se había formado en Berlín y Londres; por su indicación se adquirieron, hacia 1760, dos instrumentos meridianos y un cuarto de círculo mural de 8 pies de radio. Todos ellos fueron construidos por el matemático e instrumentista inglés John Bird, siendo análogos a los instalados en el Observatorio de Greenwich, puesto que la Academia de Ciencias pretendía que el suyo pudiese competir con los mejores de Europa. Sin embargo no tardó en surgir una dificultad insalvable planteada por Grischow: el emplazamiento de los instrumentos era inadecuado para la observación. La considerable altura de la torre astronómica, aunque estuviese sustentada por muros sólidos, no contribuía a la necesaria inmutabilidad de la posición y suponía además un esfuerzo innecesario para los observadores, los cuales tenían que subir 120 escalones para llegar hasta los instrumentos. Otro inconveniente relevante se derivaba de la propia ubicación de la Academia, a orillas del río Deva, en un barrio tan poblado que durante el invierno se contaminaba permanentemente el horizonte.

El problema era tan acuciante que Grischow planteó separar físicamente al observatorio de la Academia y edificarlo en otro lugar que reuniese mejores condiciones: aislamiento, elevación adecuada del suelo, solidez de la estación y comodidad para los astrónomos. En esta ocasión no se contó con el apoyo necesario y se pospuso el proyecto, hasta el extremo de que los grandes instrumentos de Bird permanecieron embalados cerca de cuarenta años, tal como se lamentaba Struve. Poco antes de su fallecimiento propuso Grischow al joven Stepan Yakovlevitch Rumovsky<sup>353</sup> como astrónomo adjunto, con la clara intención de que le sucediera al frente del observatorio, el cual había cursado sus estudios en Berlín, referencia matemática obligada por la presencia de Euler. La etapa fundacional del Observatorio de San Petersburgo culminó con la observación del primer tránsito de Venus en 1761, un fenómeno que fue observado tanto en su sede central como en Seleginsk y Nertchinsk, en la primera, junto al lago Baikal, lo hizo Rumovsky<sup>354</sup> y en la segunda, cerca de la frontera con China, Nikolai Gavrilovitch Kourganow.

El segundo periodo del Observatorio Astronómico de San Petersburgo fue el comprendido entre los años 1762 y 1802, caracterizándose por dos sucesos extraordinarios para la historia de su Academia de Ciencias, la vuelta a la misma del sabio L. Euler<sup>355</sup> y la observación del segundo tránsito del planeta Venus, por el disco solar, en el año 1768. El retorno de Euler significó, tal como recogía Struve, un nuevo impulso para el estudio de las matemáticas y de la astronomía en Rusia. En 1763 se le confió la dirección del observatorio al astrónomo Rumovsky, el cual fijó su residencia en un apartamento habilitado al efecto en la sede de la Academia, para así estar más pendiente de la misma. Su buena gestión hizo que todo estuviese dispuesto para proceder al estudio y observación de Venus, tanto en San Petersburgo como en otros lugares del imperio. Varios

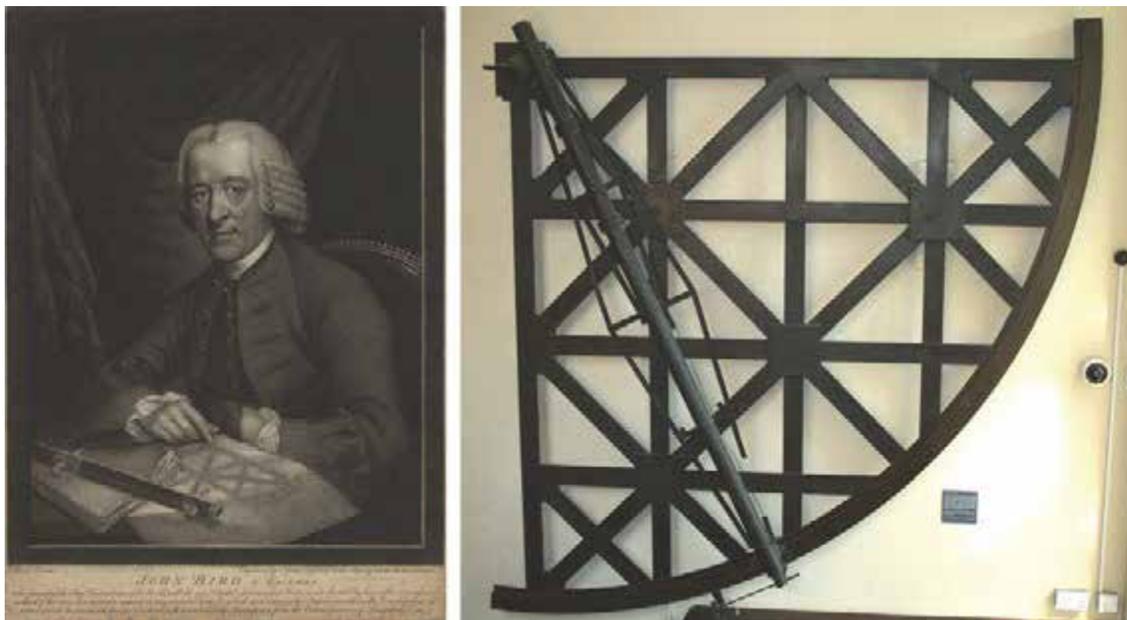
---

<sup>352</sup> Probablemente fuese él quien predijo por primera vez la vuelta del cometa Halley en 1759. Entre los años 1736 y 1743 enseñó geografía astronómica en San Petersburgo, junto a Euler, siendo elegido, como este, miembro de su Academia de Ciencias.

<sup>353</sup> Considerado como el primer astrónomo ruso de renombre.

<sup>354</sup> *Brevis expositio observationum transitus Veneris in urbe Seleginsk institutarum* (San Petersburgo 1762).

<sup>355</sup> Euler ya había estado desde los inicios de la Academia hasta el año 1741. Junto a él se trasladaron en la segunda ocasión sus hijos Jean Albert y Charles, llegando el primero a ser Secretario de la misma.



El matemático John Bird junto a uno de los cuadrantes murales que construyó para el Observatorio de la Universidad de Oxford, similar a los que hizo para los de Greenwich y San Petersburgo.

astrónomos extranjeros fueron invitados, a lo largo de los años 1767 y 1768, para que tomaran parte en las observaciones, debiendo destacar la presencia de Christian Mayer, astrónomo y geodesta del Observatorio de Manheim, y del sueco Anders Johan Lexell<sup>356</sup>, a los que se le confió la observación de la capital junto a Euler y a su hijo Jean Albert. Entre los expedicionarios elegidos, para trasladarse a diferentes lugares, se encontraron Rumovsky (península de Kola), Christophe Euler (Orsk, en los Urales) y el geodesta Tschernoi, que se desplazó hasta Iakoutsk en Siberia.

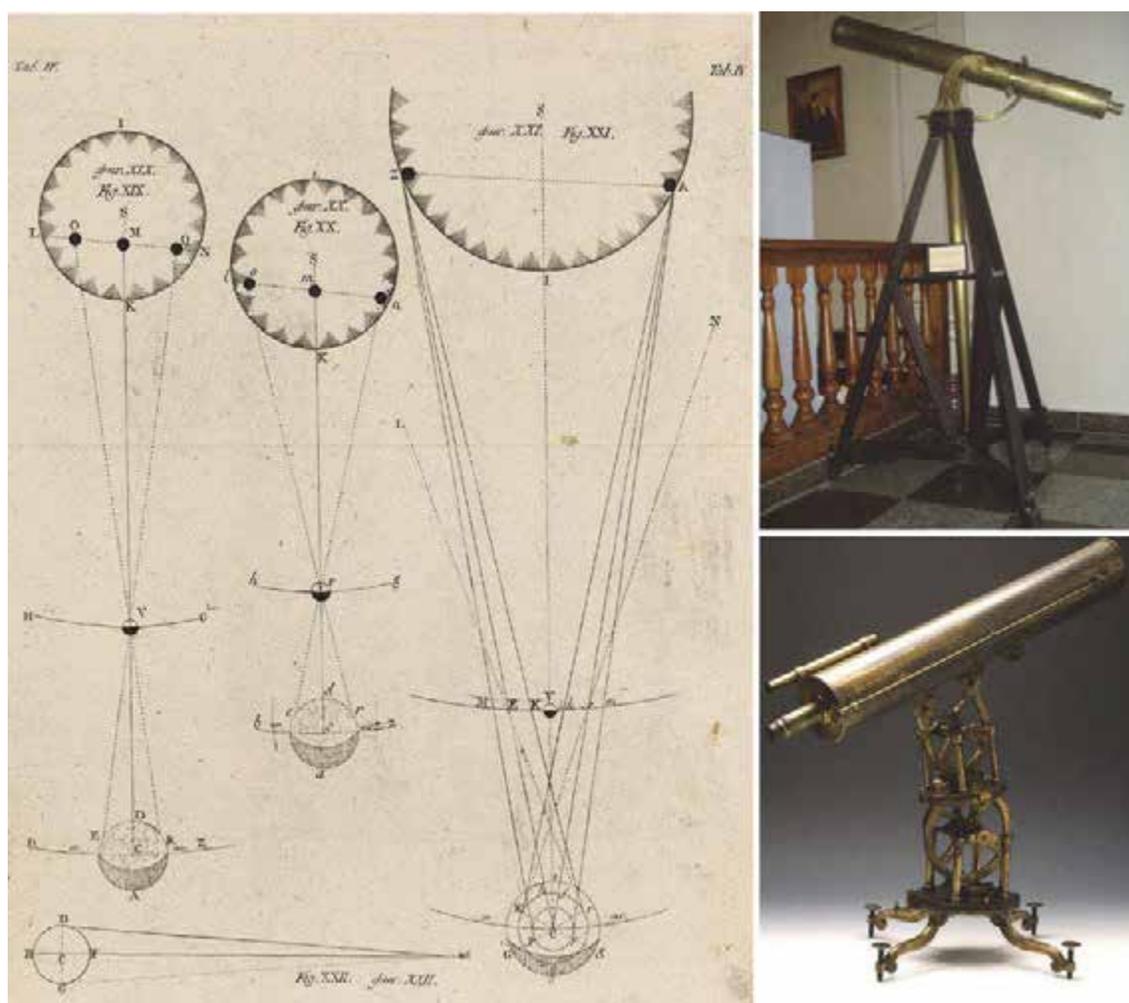
Todos los observadores llevaron prácticamente el mismo equipo instrumental, compuesto por dos cuartos de círculo portátiles de Jonathan Sisson, de 2.5 pies de radio, dos anteojos acromáticos de John Dollond, uno de 12 pies de longitud y otro de tres, un telescopio de James Short, provisto de heliómetro, y hasta un péndulo para la medida de la gravedad. Struve añadió que las expediciones no hubiesen sido posibles sin contar con el decisivo apoyo que había prestado a todos los preparativos la emperatriz Catalina II, quien había entrado por méritos propios en la historia de la astronomía. El resultado de las observaciones del fenómeno, en el primer semestre del año 1769, se publicó en diferentes foros y por supuesto en las actas de la Academia de Ciencias de San Petersburgo<sup>357</sup> y en forma de separata (1770). Buena parte de la colección de instru-

<sup>356</sup> Lexell fue elegido después miembro de la Academia de Ciencias, en donde se convirtió en estrecho colaborador de Euler.

<sup>357</sup> Se han seleccionado las aportaciones siguientes: las dos de Euler (1. *Expositio methodorum cum pro determinanda parallaxi Solis, ex observato transitu Veneris per Solem, tum pro inveniendis longitudinibus locorum super Terra ex observationibus eclipsium Solis, una cum calculis et conclusionibus inde deductis*, 2. *Collectio omnium observationem quae occasione transitus Veneris per Solem a. MDCCLXIX per Imperium Russicum institutae fuerunt*), otra de C. Mayer (*Expositio utriusque observationes et Veneris et eclipsis Solaris*», *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 13 (1768)) y una de Rumovsky (*Observationes transitum Veneris per discum Solis et eclipsin Solarem spectantes anno 1769. Kolae in Lapponia institutae, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*).

mentos empleados con ocasión del paso de Venus, se empleó después en las observaciones esencialmente geográficas que efectuaron los expedicionarios extranjeros, quedando los demás en las dependencias del Observatorio. Cuando Rumovsky volvió de su viaje se reunió con Lexell para acordar el programa astronómico de la Academia, limitado al final a la observación de toda clase de eclipses y de ocultaciones de estrellas por la Luna, cuyos resultados se podrían comparar con los obtenidos durante las expediciones científicas para obtener la diferencia de longitud entre San Petersburgo y los diferentes destinos elegidos.

Aunque primasen en esa época las observaciones anteriores, no se había olvidado la necesidad de construir un observatorio alejado de la Academia. Rumovsky seguía insistiendo en la utilidad del proyecto de Grischow y consiguió que Lexell fuese comisionado, en 1780, para visitar los observatorios de Berlín, París, Londres y Estocolmo. Durante su gira analizaría las construcciones y procuraría obtener los planos de todos ellos, debiendo informar a su vuelta de los instru-



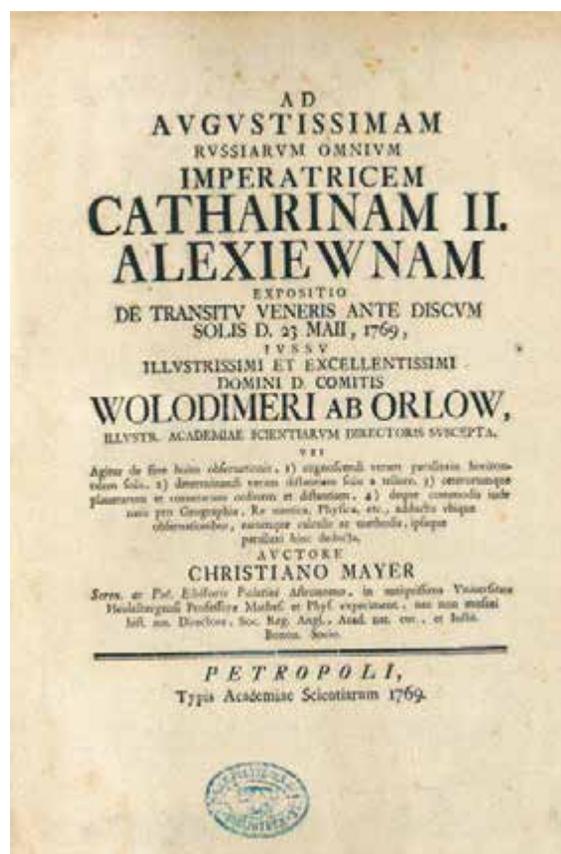
Imágenes del tránsito de Venus (1769), desde distintos puntos de la Tierra, en un dibujo del jesuita Christian Mayer (*Ad augustissimam Russiarum omnium imperatricem Catharinam II. Alexiewnam expositio de transitu Veneris ante discum Solis d. 23 Maii, 1769. Petropoli : typis Academiae Scientiarum, 1769*). Junto a él se presentan dos de los instrumentos empleados para su observación: antejo acromático de Dollond (sup.) y telescopio de Short (inf.).

mentos más adecuados y acerca del medio de adquirirlos. Struve reconoció la importancia de esa instrucción, pues fue firmada oficialmente por el Presidente de la Academia y presagiaba que el nuevo observatorio estaría cada vez más cerca.

En 1783 falleció Euler, una pérdida irreparable que fue recordada por Struve así: «después de una carrera eminentemente gloriosa en los anales de la ciencia y de nuestra patria». Lexell lo sustituyó como primer matemático de la Academia, aunque desgraciadamente murió al año siguiente. Por entonces ingresó en la institución como asistente el geógrafo y astrónomo Friedrich Theodor von Schubert, siendo declarado miembro de pleno derecho en 1789. Mientras tanto Rumovsky, secundado por Petr Inokhodtsov y Tschernoi, continuaba observando eclipses y ocultaciones estelares; sin abandonar el proyecto de nuevo observatorio. Por fin, tras una espera de más de 36 años, parecía vislumbrarse la solución. Efectivamente, el rey George III de Inglaterra había enseñado a la emperatriz un telescopio Herschell, con una distancia focal de 10 pies, y esta decidió comprarlo para observar con él la bóveda celeste. Atendiendo su deseo, fue requerida la presencia de Rumovsky en la villa real de Tsárskoye Selo<sup>358</sup>.

Allí permaneció el astrónomo ocho días enseñando a Catalina II el manejo del instrumento y observando tanto la Luna como las estrellas. Evidentemente aprovechó su estancia para defender la construcción del nuevo observatorio, una propuesta que fue aceptada de muy buen grado por su anfitriona. Sin embargo, la muerte de la emperatriz paralizó otra vez el proyecto. Para entonces los dos astrónomos Rumovsky e Inokhodtsov, ya tenían una edad avanzada, hasta el punto de que el segundo no estaba en condiciones de subir las escaleras de la torre y mandó que le hiciesen un pequeño observatorio en el jardín botánico de la Academia, prosiguiendo en él las observaciones astronómicas. Rumovsky, fue nombrado Vicepresidente de la Academia de Ciencias como reconocimiento a sus numerosos servicios, no obstante continuó observando; en el último trabajo que publicó se mostraron los resultados de sus estudios sobre el eclipse solar ocurrido en el mes de agosto del año 1802.

La permanente insistencia de Rumovsky no consiguió que se instalasen los instrumentos meridianos de Bird, aunque si logró que se construyera el muro sobre el que se debería colocar el cuadrante astronómico. Por su parte, Schubert estaba más preocupado por ultimar su libro de as-



Una de las obras en las que Mayer dio cuenta de sus observaciones del tránsito de Venus, dedicada a Catalina II, se imprimió en la Academia de Ciencias de San Petersburgo (1769).

<sup>358</sup> Actual Pushkin, en las proximidades de San Petersburgo.



El palacio de Catalina la Grande en el complejo Tsárskoye Seló. Figura también su profesor de astronomía Stepan Rumovsky, junto a un telescopio fabricado por William Herschel, similar al que ella compró.

tronomía<sup>359</sup>, publicado en 1798, y centrado en sus investigaciones sobre el cálculo de perturbaciones. La situación era tan precaria, en 1796, que la Academia contrató los servicios de un nuevo astrónomo eminentemente práctico, el abate Henry procedente del observatorio de Manhein. Su principal aportación fue la instalación de los dos instrumentos de Bird, las primeras observaciones efectuadas con ellos en 1798, así como la colocación de un bello péndulo fabricado por John Arnold. No obstante, el tiempo transcurrido desde la compra de los mismos los había hecho casi inservibles, al haberse fabricado antes del descubrimiento de los objetivos acromáticos. Struve lo reflejaba claramente cuando afirmó que las observaciones de ese astrónomo eran del todo irrelevantes. En ese mismo año Henry entregó a la Academia un listado con las declinaciones de 40 estrellas principales, basado en las numerosas observaciones que había hecho con el cuadrante mural. El trabajo no fue valorado en absoluto por Struve, pues partía de una latitud equivocada en unos 8 segundos ( $59^{\circ}56'23''$ ) y no había tenido en cuenta el error de colimación del anteojito. El veredicto de Struve fue por tanto acorde con una manifestación demasiado cáustica: «felizmente Henry no permaneció mucho tiempo en San Petersburgo, pues pidió y obtuvo su dimisión en 1800».

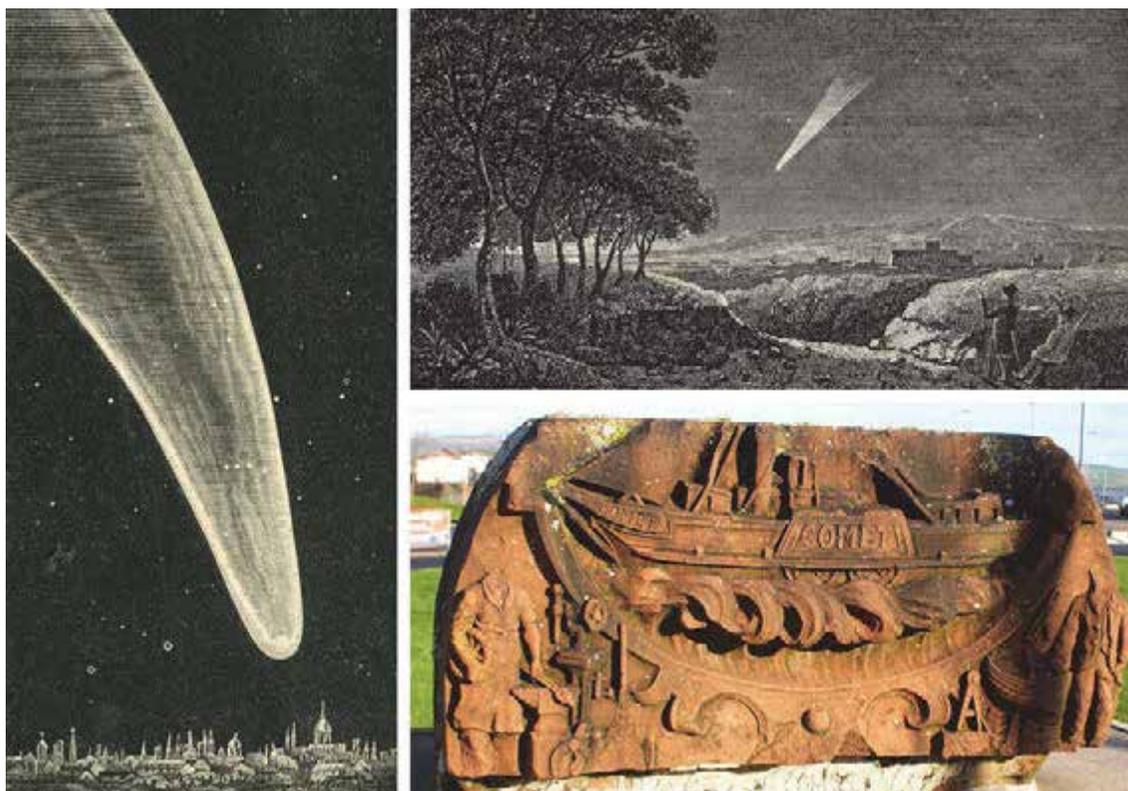
El último periodo del Observatorio de San Petersburgo se inició con el siglo XIX y terminó con la puesta en funcionamiento del construido en Púlkovo. En el año 1803 se hizo cargo de la dirección Schubert, contratando de inmediato a Vincent Wisniewsky, el cual ingresó en la Academia al año siguiente; en esta etapa el observatorio experimentó un claro desarrollo, favorecido por una mejor disposición de los instrumentos. El mural se colocó más exactamente en el meridiano, las ventanas se ampliaron para poder observar en las proximidades del cenit y se cambió el objetivo de Bird por otro acromático. Su antiguo anteojito meridiano fue sustituido por un anteojito de pasos de Ramsden, adquirido a propósito por el Presidente de la Academia. Todos esos arreglos finalizaron en ese mismo año de 1803.

Poco después se enriqueció la colección instrumental con la compra de un péndulo de William Brockbanks, dos cronómetros, dos sextantes, etc., aparte de un gran telescopio de Herschel, aunque no pudiese colocarse en estación por falta de espacio, tal como denunció Struve. En los dos años siguientes, 1804 y 1805, se efectuaron buenas series de observaciones planetarias con

<sup>359</sup> *Theoretische Astronomie* (tres volúmenes, San Petersburgo.1798). En el año 1834 fue traducido al francés con el título de *Traité d'astronomie theorique*.

los instrumentos meridianos<sup>360</sup>, incluidos los asteroides Ceres y Juno. A partir de 1805 comenzaron las grandes expediciones geográficas de Schubert y de Wisniewsky. El primero volvió en 1806 pero las del segundo fueron mucho más prolongadas, de manera que el astrónomo no pudo participar en las tareas del observatorio, más que durante el tiempo que permanecía en la capital durante el invierno. Wisniewsky poseía una visión tan extraordinaria que incluso pudo observar el gran cometa de 1807 en el mes de marzo de 1808, cuando ya lo habían perdido de vista todos los astrónomos de Europa, desde hacía cuatro semanas. En 1807 se había adquirido un anteojo meridiano más grande, fabricado por Troughton, que reemplazó al de Ramsden, además de un círculo repetidor de 18 pulgadas de diámetro. También contabilizó Struve el telescopio de Herschel, que había pertenecido a Catalina II, donado al observatorio por su nieto el zar Alejandro.

Mientras que Wisniewsky continuaba con sus trabajos de campo, Schubert siguió con las observaciones rutinarias de eclipses y ocultaciones de planetas, sin olvidar las de los cometas. La observación más relevante fue la del gran cometa de 1811, continuada luego por Wisniewsky que lo visó por segunda vez<sup>361</sup> en 1812. En relación con este cometa surgió una controversia científica al afirmar Bessel, que había estudiado su órbita, que se podría ver una tercera vez, al



El gran cometa de 1811 fue descubierto por el astrónomo Honoré Flaugergues el día 25 de marzo. Su visión a simple vista causó un gran impacto en la sociedad y dio pábulo a los agoreros oportunistas. Se representó en numerosos grabados, e incluso dio nombre a un barco a vapor inglés, como acredita el monumento en piedra de la imagen.

<sup>360</sup> Para Struve se trató de unas de las mejores que se hicieron por aquel entonces.

<sup>361</sup> La mayoría de los astrónomos habían divisado el cometa desde el 25 de marzo de 1811 hasta que lo perdieron de vista el 11 de enero de 1812.

modificarse su trayectoria por el movimiento más rápido de la Tierra, en los meses de julio y agosto. No obstante, indicaba Struve que ni Johann Elert Bode, en Berlín, ni Bessel lograron verlo, a pesar de haberlo intentado el segundo con los poderosos telescopios del observatorio de Lillienthal, construido por iniciativa del astrónomo Johann Hieronymus Schröter. También reprochaba a los astrónomos italianos y franceses que no hubiesen seguido buscando en un cielo tan favorable, por haber despreciado la predicción del sabio alemán. Para su sorpresa, Wisniewsky lo divisó en Novocherkassk, con un pequeño telescopio, desde el 31 de julio al 17 de agosto, mientras que se ocupaba de misiones más geográficas que astronómicas. En el año 1816, este mismo astrónomo fijó definitivamente el valor de la latitud del Observatorio de San Petersburgo en  $59^{\circ}56'31''{,}08$ , mediante el círculo repetidor de Troughton, un valor 8 segundos mayor que el supuesto hasta entonces. Shubert y Wishiewsky volvieron a observar «un bello cometa que iluminó algún tiempo el cielo boreal en el año 1819».

Struve interrumpió su relato cronológico para sintetizar magistralmente los cometidos geodésicos del Observatorio de San Petersburgo, básicamente referidos a la determinación de las coordenadas geográficas de numerosos lugares del imperio. De esa forma se contribuyó no sólo a la localización de los mismos, sino que también se propició el necesario control astronómico de las posteriores representaciones cartográficas; una tarea imprescindible para la Academia de Ciencias, concretamente para sus investigaciones en los campos de la geografía descriptiva y física, o en los de la etnografía y la estadística. Struve detalló las múltiples expediciones efectuadas al efecto, indicando la metodología y los instrumentos empleados para la obtención de las longitudes<sup>362</sup>, a la vez que nombraba a los principales protagonistas.

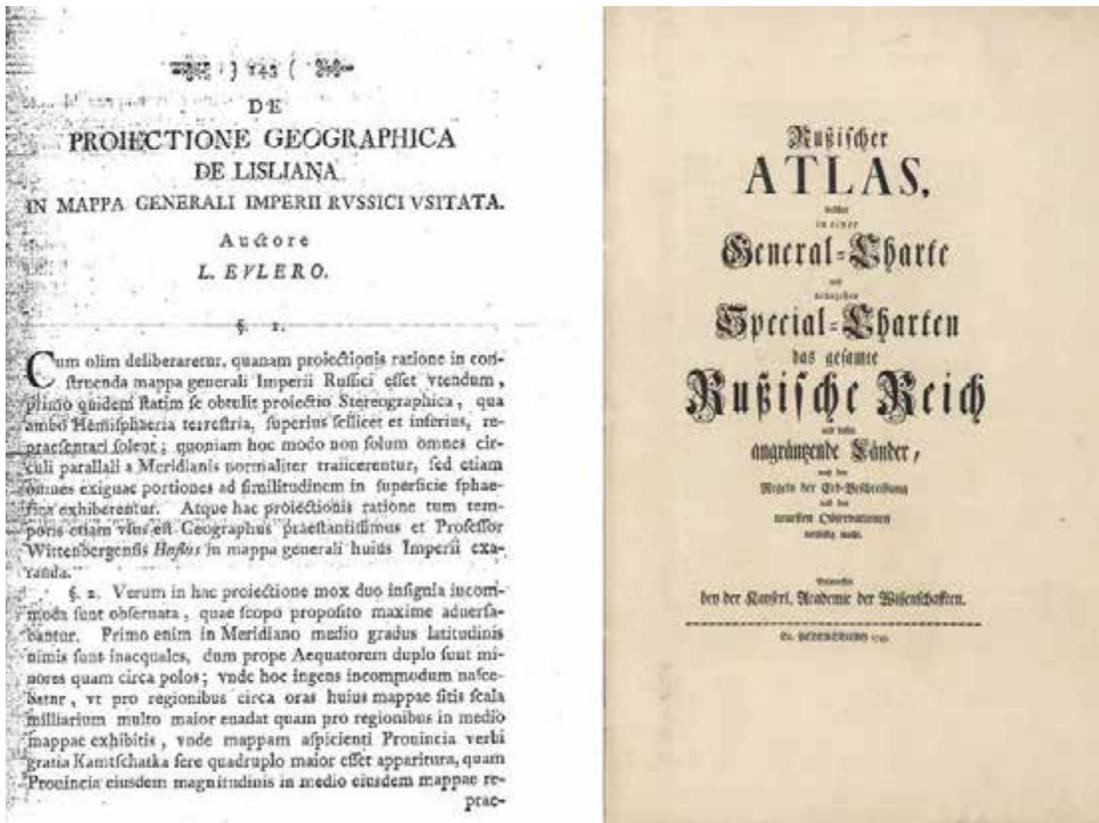
El impulsor de la geografía astronómica en Rusia fue sin lugar a dudas J. Delisle, como primer astrónomo de la Academia. Suya fue la iniciativa de 1737, ya citada, de medir la Tierra a partir de arcos de meridiano y de paralelo. Su hermano Louis participó con éxito desigual en las expediciones geográficas, así se desprende de las siguientes palabras de Struve: «no es a la insuficiencia de medios a la que deben de atribuirse sus graves errores, ha de admitirse que La Croÿère despreció casi por completo el verdadero objeto de su viaje». Las aportaciones cartográficas realizadas por J. Delisle fueron reconocidas por L. Euler en su trabajo *De projectione geographica Deslisiana in mappa generali imperii russici usitata*<sup>363</sup>. Aunque Struve no lo pudiese mencionar, si parece conveniente señalar en este momento que a Delisle se le debió el primer Atlas de Rusia, publicado por la Academia de Ciencias de San Petersburgo, basado en los trabajos topográficos previos de Ivan K. Kirilov<sup>364</sup>.

---

<sup>362</sup> Ocultación de los satélites de Júpiter, ocultación de estrellas por la Luna, distancias lunares y a través de medidas cronométricas.

<sup>363</sup> *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae* (1777, 1778)

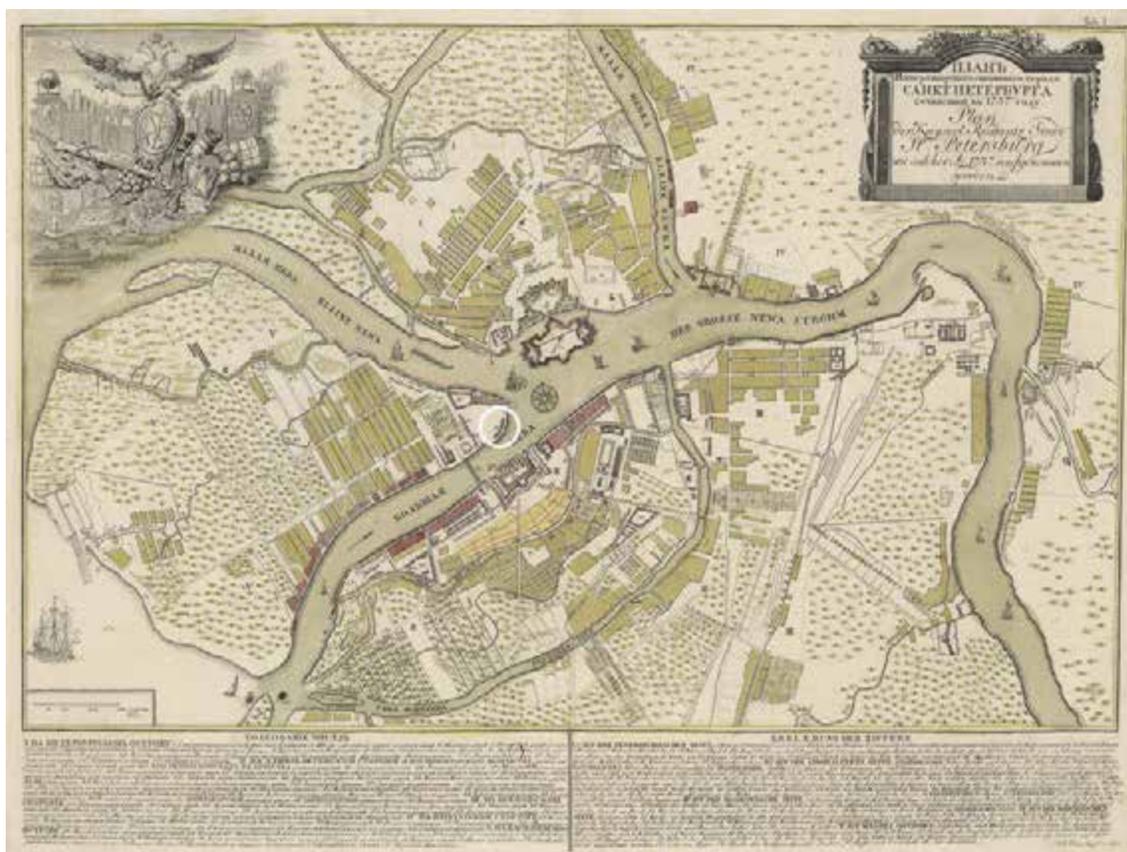
<sup>364</sup> De ahí que a veces se le conozca con el nombre de Atlas Kirilov. El atlas incluyó 20 mapas: uno general del imperio, 13 de la Rusia europea (a escala 1/1470000) y 6 de Siberia (a escala 1/3 444000). Destacan también los dos planos que lo acompañan, uno de San Petersburgo (1/13440) y otro de Moscú (1/22260). Los títulos se escribieron en ruso y en latín. El atlas incorporó además un texto para describir y explicar los mapas, así como el significado de los topónimos. Aunque no se puedan detallar aquí las imágenes cartográficas de San Petersburgo, si parece obligado citar el plano encargado por La Academia Imperial de las Ciencias y las Artes, en 1753: *Plan de la Ville de St. Petersbourg avec les principales vues*, el cual fue levantado y grabado bajo su dirección. El plano, a escala 1/5500, se compuso de 9 hojas (53 × 39 cm) en las que se rotularon las calles y se identificaron sus principales edificios, usando el ruso y el francés. El grabado de las planchas alcanzó un grado de perfección difícilmente superable, como se aprecia en las representaciones alegóricas que recoge.



Portada del estudio realizado por Euler sobre el sistema cartográfico empedado por J. Delisle en su Atlas del Imperio Ruso, publicado por la Academia de Ciencias en el año 1745.



Mapa General del Imperio Ruso incluido en el Atlas formado por Joseph Nicolas Delisle.



Plano de San Petersburgo (1737) incluido en el Atlas formado por Delisle. Para facilitar la lectura del plano no se rotularon sus principales edificios, aunque si se localizaron con un número; la equivalencia alfanumérica se aclara en la información marginal (ruso y alemán). Se ha encerrado con un círculo la Academia de Ciencias y el Observatorio de San Petersburgo, localizados en el plano con el número 85.



Grabados con los que se adornaron los planos de San Petersburgo y de Moscú.

Struve reseñó con admiración los trabajos del geodesta Andrei Krassilnikov<sup>365</sup>, cuyas observaciones entre los años 1736 y 1745, proporcionaron por vez primera la posición de varios puntos de Siberia, con la exactitud debida. A su vuelta se incorporó a la Academia como adjunto, continuando con sus mediciones astronómicas en Moscú y en diversos puertos de las costas bálticas. También valoró Struve las memorias publicadas por la Academia en 1750 y en 1760, la primera por Ivanovich Nikita Popov y la segunda por Grischow, considerando que en ellas quedaba reflejado el verdadero estado de la geografía astronómica en Rusia. Los dos tránsitos de Venus, ya mencionados, se utilizaron también para obtener la posición de varios enclaves del territorio. En su relato figuró la trágica aventura protagonizada por Georg Moritz Lowitz y P. Inokhodtsov en el año 1776. Cuando había finalizado el primero las observaciones para calcular las coordenadas geográficas y empezado la nivelación entre los ríos Duna y Volga, fue asesinado en una emboscada tendida por cosacos rebeldes. Inokhodtsov pudo salvar su vida, pero a costa de la mayoría de los instrumentos y documentos, con lo que apenas se aprovechó su información para situar solamente tres lugares.

Mucho más gratificantes resultaron los trabajos de Ivan Ivanovich Isléniev y de Ch. Euler<sup>366</sup>. El primero, alumno de L. Euler y de Lexell, observó ocultaciones de estrellas por la Luna, para poder calcular las diferencias de longitudes, así como algunos otros eclipses. Durante sus expediciones determinó las coordenadas geográficas en decenas de puntos, empleando para obtener la latitud un cuarto de círculo portátil de Sisson, con el que consiguió unos resultados sorprendentemente en opinión de Struve<sup>367</sup>. Ch. Euler, que ya había participado en la observación del tránsito en Venus desde Orsk, fijó por su parte la posición de diez lugares, tanto al Este como al Oeste de la región más meridional del Imperio. La emperatriz Catalina la Grande ordenó una nueva expedición astronómico-geodésica en 1779, la cual duró hasta el año 1785. El director de la misma fue Inokhodtsov, secundado por el antiguo colaborador de Isléniev, Theodor Tschernoï. Los instrumentos fueron parte de los empleados en la observación de Venus, ponderando Struve que se transportasen, a pesar de de las grandes dificultades del viaje, dos cuartos de círculo de Sisson, dos péndulos, dos telescopios acromáticos, otro telescopio de Short, etc. Todos ellos se usaron para determinar la posición de 14 puntos.

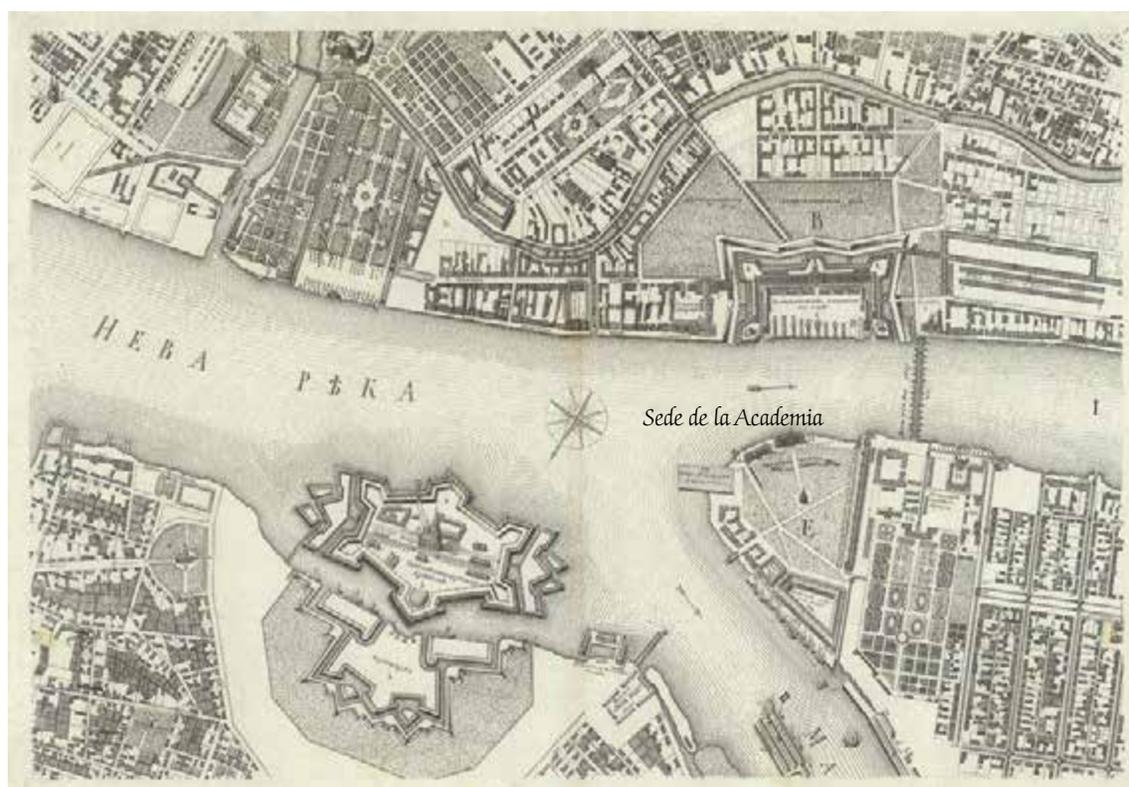
Al finalizar los trabajos, la Academia decidió que Tschernoï volviese a Táurica para efectuar una operación análoga. Con ese objetivo siguió la línea caucásica, acompañado de su alumno Arnoldi. Otra vez se cebó la desgracia con los expedicionarios, ya que llegados a Mozdok, fueron sorprendidos por los lezguinos en el camino que unía esa localidad con Stavropol. Todos los instrumentos y la documentación correspondiente fueron destruidos, aunque lo más grave fue el rapto de Arnoldi que no volvió a aparecer pese a los esfuerzos del gobierno por rescatarlo. Con esa expedición se cerró el capítulo de las expediciones astronómicas rusas del siglo XVIII. No obstante, añadía Struve que el ya general Ch. Euler, se trasladó en 1790 a Finlandia, comisionado por la Academia de Ciencias, con los instrumentos necesarios para determinar los puntos más notables del país; también se trató en este caso de otro intento fallido, ya que tuvo que suspender los trabajos y devolver los instrumentos a la Academia a causa de la guerra entre Rusia y Suecia.

---

<sup>365</sup> Participante señalado del grupo académico presente en la célebre expedición a Kamchatka.

<sup>366</sup> Hijo menor de Leonard Euler que llegó a ser general del ejército ruso.

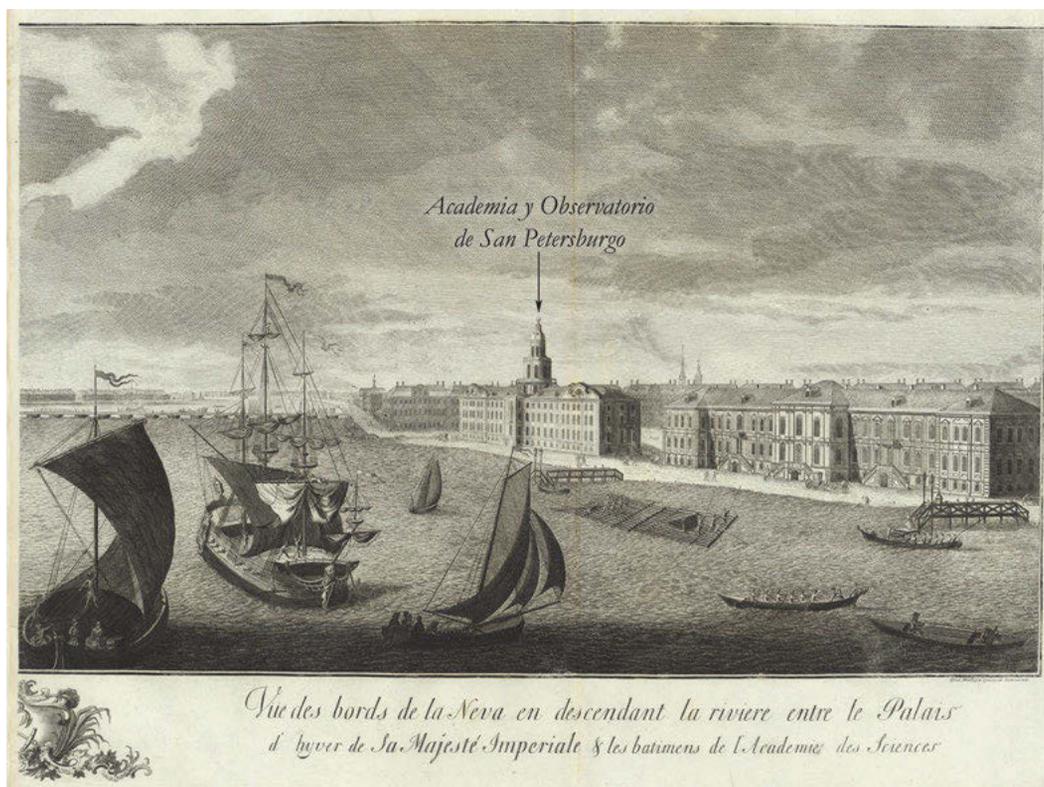
<sup>367</sup> Struve creía que con las posiciones modernas, y más exactas, de las estrellas se hubiesen obtenido latitudes todavía más fiables, con incertidumbres de algunos segundos.



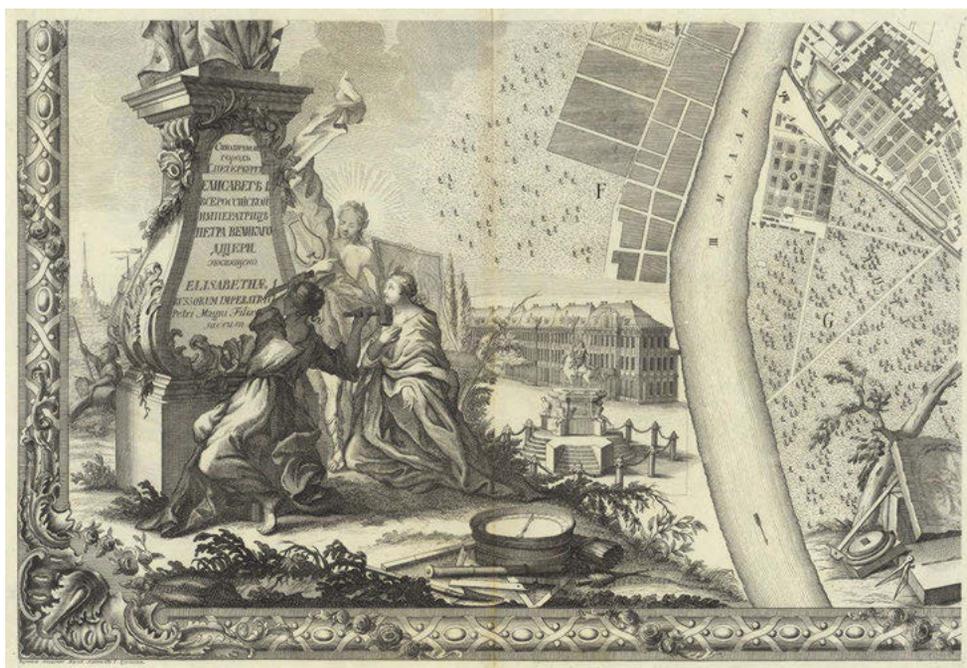
Hoja número 5 del Plano de San Petersburgo, levantado por orden de la Academia Imperial de las Ciencias y las Artes en 1753.



Una de las vistas incluidas en el Plano de San Petersburgo encargado por la Academia Imperial de las Ciencias y las Artes en 1753.



Vista de las orillas del río Neva, entre el Palacio de Invierno de Su Majestad Imperial y los edificios de la Academia de Ciencias.



Hoja número 1 con la representación alegórica que dedicó el plano a la emperatriz Isabel I, segunda hija de Pedro el Grande y Catalina I.

Los astrónomos del Observatorio, Rumovsky, Lexell e Inokhodtsov, así como el matemático y físico Georg Wolfgang Krafft, se habían dedicado, desde que se observó el primer tránsito de Venus (1761), al cálculo de todas las posiciones. Para hallar las longitudes geográficas compararon las observaciones de los expedicionarios con las correspondientes, realizadas en San Petersburgo y en otros lugares. El resultado principal de esos cálculos fue una tabla con las posiciones geográficas de Rusia, confeccionada por Rumovsky en 1786 e incluida en la prestigiosa publicación *Connaissance des Temps* (año 1789), por las gestiones de Méchain. Struve comentaba que se trató del primer cuadro completo de ese tipo, resumen definitivo de los trabajos astronómicos y geodésicos efectuados en Rusia durante el siglo XVIII, puesto que ese cometido se suspendería en el siglo siguiente. El listado contuvo 57 localizaciones completas de Rusia, y 5 más Moldavia y de Valaquia; aunque Struve fuese partidario de incluir también 5 más omitidas por Rumovsky, que fueron recogidas en las Memorias de la Academia<sup>368</sup>. Struve hizo entonces una aclaración muy pertinente:

*«el número de 67 posiciones, obtenidas a lo largo de un trabajo de sesenta años, podría parecer muy pequeño. Sin embargo es considerable cundo se parte de que, muy probablemente, en 1786, ni Alemania, Inglaterra, Francia e Italia, podrían citar dentro de sus fronteras igual número de posiciones geográficas, determinadas mediante las correspondientes observaciones astronómicas. Consiguientemente, Rusia puede enorgullecerse de haber superado, en el transcurso del siglo XVIII, a las otras naciones de Europa, por sus esfuerzos y sus éxitos en la aplicación de la astronomía a la geografía del país.»*

Constatada la escasa formación astronómica de los marinos, el gobierno ruso propuso a la Academia que se encargase de proporcionársela. El responsable elegido fue Inokodtsov, siendo entonces cuando se iniciaron los Cursos para Oficiales que acabaron por ser reglados en el Observatorio. A partir del año 1800, las enseñanzas fueron impartidas por Schubert durante veinte años consecutivos, usando como apoyo didáctico su tratado sobre la determinación astronómica de lugares<sup>369</sup>, editada tres veces en alemán y dos en ruso. Struve afirmaba que tales cursos contribuyeron al perfeccionamiento y a la generalización de las observaciones de campo con la exactitud debida. No obstante añadió que fue sólo a partir de la circunnavegación, comandada por Adam Johann von Krusenstern<sup>370</sup>, cuando las medidas efectuadas por los marinos, para reconocer los mares y las costas de Rusia, pudieron calificarse verdaderamente de exactas. En esos inicios del siglo XIX tomó Scubert una decisión trascendental para el progreso de «la astronomía de

---

<sup>368</sup> Para valorar la importancia de aquellos trabajos de campo y de los resultados obtenidos tras los cálculos de gabinete, efectuó Struve el siguiente análisis: «...yo los he comparado con las determinaciones más recientes y exactas, para 47 lugares. En cuanto a las latitudes, el acuerdo es tal que las diferencias se deben principalmente a las incertidumbres con relación al verdadero lugar de la observación en el interior de la ciudad, pues las posiciones antiguas no comentaban nada sobre el particular. Para las longitudes, después de rechazar la de Arkhanguelsk (Arcángel), obtenida por La Croyère, por considerarla completamente falsa, y la de Mozdok, que probablemente fuese mal calculada, he hallado que el error probable de las antiguas longitudes fue del orden de los 8' de arco o 32<sup>s</sup> de tiempo. Ese límite pareció muy satisfactorio, pensando en la insuficiencia de medios y en la metodología usada... La mayor parte de las longitudes se basaron en los eclipses de los satélites de Júpiter, aunque al no contar siempre con las observaciones correspondientes se tuviese que efectuar la comprobación de los resultados de campo con los datos de los eclipses proporcionados por las tablas».

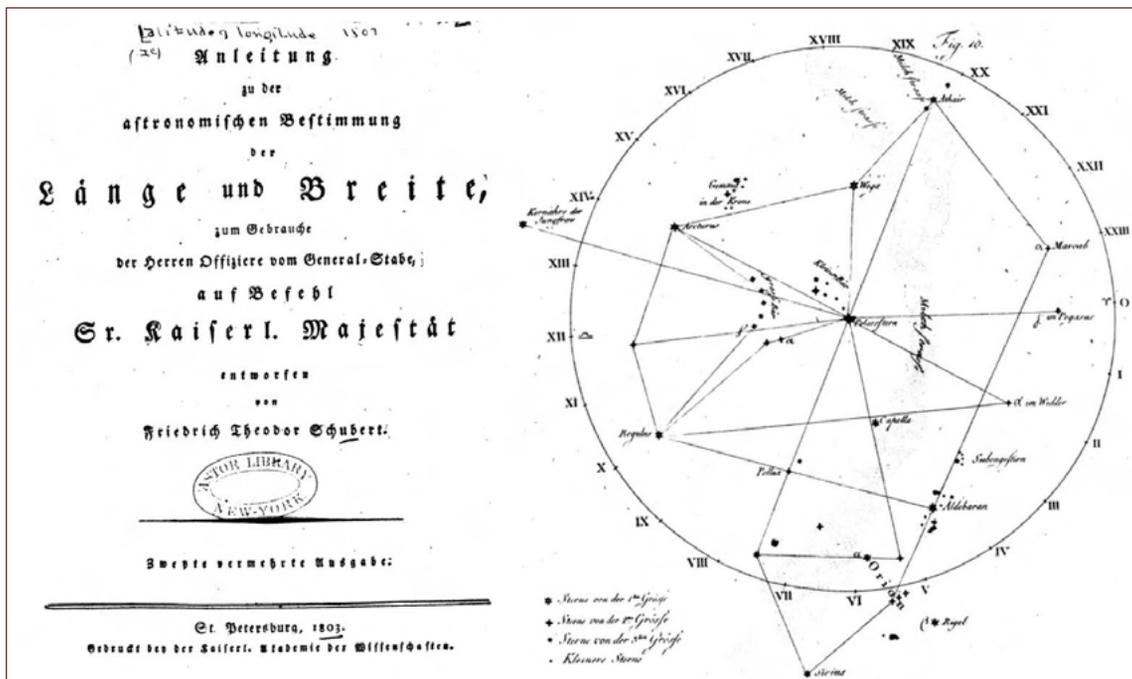
<sup>369</sup> *Astronomische Bestimmung der Längen und Breiten, zum Gebrauche der Hn. Officiers von General-Stabe.*

<sup>370</sup> Durante la vuelta al mundo recaló en Santa Cruz de Tenerife y obtuvo su longitud con relación al Observatorio de Greenwich, 16°12'45" W.

viajes». Por su expreso deseo las futuras expediciones tendrían que ser tan simples como fuera posible, de modo que se sustituyeron los clásicos instrumentos de grandes dimensiones por un sextante de reflexión, un buen cronómetro de bolsillo y un antejo acromático de 3.5 pies. La metodología también resultaría afectada, en tanto que se abandonó, por completo, la observación de los satélites de Júpiter, en favor de las distancias lunares.

La primera expedición, cumpliendo tales requisitos, fue encomendada por el emperador Alejandro a un hijo de Schubert y a Alexander Amatus Thesleff, en el año 1804; su objetivo principal sería determinar la posición geográfica de Polotsk. Finalizada la operación, partieron hacia el Norte, en el mes de marzo, para continuar con sus observaciones en otros siete puntos importantes. Los cálculos fueron presentados a la Academia en septiembre de ese mismo año, pudiendo rectificar por fin la longitud de Arcángel. Al año siguiente viajó hasta Irkutsk, como astrónomo de la proyectada embajada a China. Con la ayuda de diez oficiales determinó la posición de diez lugares desde Rusia a Siberia, sin contar los otros diez que localizó más allá del lago Baikal, en 1805 y 1806, con los instrumentos que le había proporcionado Schubert en Irkutsk. Después de haber calculado todas sus observaciones presentó los resultados a la Academia, los cuales fueron publicados en sus Memorias de 1811.

Finalizada la expedición de Schubert a Siberia, se emprendió una nueva aventura astronómica por encargo de la Academia; el elegido fue en esta ocasión Wisniewsky. Struve creyó que este miembro de la Academia realizó en ese viaje el trabajo astronómico-geodesico más vasto y sobresaliente del siglo XIX. Como se trataba de fijar, con la mayor exactitud posible, la posición de los puntos más importantes del imperio ruso en Europa, se tuvo que abandonar el método de las distancias lunares en favor de otro más fidedigno que fuese al mismo tiempo expeditivo.



Portada del libro de texto preparado por Friedrich Theodor von Schubert y mapa del cielo, centrado en la estrella Polar, con que lo ilustró.

El viaje comenzó en 1806 y duró hasta el año 1815, empelando para las latitudes y para el cálculo de la hora, un sextante de Troughton, con 10 pulgadas de radio, y dos cronómetros de bolsillo. Las longitudes las obtuvo exclusivamente observando las ocultaciones de estrellas por la Luna y algunos eclipses de Sol. El transporte cronométrico de la hora le permitió fijar las longitudes intermedias entre los puntos fundamentales, «por una especie de interpolación cronométrica», como tan acertadamente escribió Struve. Suya fue también la descripción geográfica de la zona levantada por el astrónomo Wisniewsky: desde el lugar más occidental, la ciudad de Libava, hasta Ekaterinburgo, esto es con una extensión de  $40^{\circ}$  en el sentido de los paralelos. A lo largo de los meridianos alcanzó los  $22^{\circ}30'$ , desde el monte Elbrús del Cáucaso, hasta el río Mezén. Sin embargo no sólo debían destacarse, a su juicio, los 250 puntos determinados en tan gran superficie, sino que quizás fuese todavía más relevante la habilidad con que se obtuvieron las longitudes<sup>371</sup>.



El imperio ruso-europeo, zona en la que Wisniewsky localizó astronómicamente 250 puntos. El mapa, del matemático y cartógrafo Friedrich Wilhelm Streit, fue publicado en Leipzig (1826) a escala 1/500000.

<sup>371</sup> Struve contrastó la bondad del trabajo de Wisniewsky en varias regiones del territorio ruso, determinando las longitudes de ciertos puntos con procedimientos todavía más fiables; declarando que el acuerdo entre los resultados superaba todas las expectativas y que por tanto no había duda de que se alcanzó entonces un nivel considerable en la historia de la geografía. La Academia podía enorgullecerse de haber alcanzado, casi por completo, las metas establecidas con relación a la geografía astronómica en la Rusia europea.

Struve recordó a continuación la nueva etapa que comenzó para la geografía rusa en 1810, justamente cuando se iniciaron los grandes levantamientos geodésicos, siguiendo las instrucciones del Depósito Topográfico del Estado Mayor Imperial<sup>372</sup>. El territorio afectado se extendió desde las orillas del río Neva, en dirección Sur, a lo largo de la frontera occidental del Imperio, hasta el Mar Negro, ramificándose ocasionalmente en varias cadenas que llegaban a sus zonas centrales. Otras operaciones análogas fueron efectuadas por los astrónomos del Observatorio de Dorpat y de la Academia de Ciencias, extendidas en sentido opuesto, desde el río Duna hasta el

LUGAR	Latitud Norte	Longitud al E. de Greenwich.		Diferencias entre N. A. y C. de T.
		En tiempo	En grados, etc.	
Altona, Meridian Circle . . .	53° 32' 45" 00	h. m. s. 0 39 46.600	9° 56' 39" 0	+0' 1" 5
Lubeck, Transit Instrument of temp. Observatory . . .	53 51 29.87	0 42 45.764	10 41 26.46	+0 35.03
The Nor. Tower of the Church of St. Mary's . . .	53 52 5.58	0 42 44.798	10 41 11.97	
Centre of the Navigation School . . .	53 51 29.98	0 42 45.654	10 41 24.81	
Old Observatory . . .	..	0 42 47.298	10 40 19.47	
Travemünde, the Steeple . . .	53 57 25.67	0 43 28.085	10 52 1.275	
Lighthouse . . .	53 57 39.51	0 43 31.551	10 52 53.265	+1 41.235
Copenhagen, Observatory, Bastion of Holken. . .	..	0 50 18.983	12 34 44.745	
Observatory of the University, or Round Tower . . .	55 40 53.39	0 50 19.553	12 34 53.295	+0 3.705* -0 10.795
Ankona, temp. Observatory, Lighthouse . . .	54 40 50.60 54 40 48.80	0 53 46.183 0 53 45.903	13 26 32.745 13 26 28.545	
Swinemünde, temporary Observatory . . .	53 54 46.9	0 57 3.561	14 15 53.415	
Old Tower of the Pilots . . .	53 54 47.6	0 57 3.452	14 15 51.78	
Christiansö, temporary Observatory . . .	55 19 23.00	1 0 47.404	15 11 51.06	-0 5.28
Conductor of Lighthouse Pavilion of the Gt. Tower . . .	55 19 18.68 55 19 18.90	1 00 46.652 1 0 46.603	15 11 39.78 15 11 39.045	
Small Tower at Fredriksholm . . .	55 19 21.00	1 0 45.865	15 11 27.975	
Karlscrona, temporary Observatory at Gertskär . . .	55 8 51.3	1 2 24.528	15 36 7.92	
Tower of the Clock . . .	56 9 30.96	1 2 20.879	15 35 13.185	
German Church . . .	56 9 32.11	1 2 20.795	15 35 11.925	
Admiralty Church . . .	56 9 25.47	1 2 21.995	15 35 29.925	
Humbold Church . . .	56 9 40.80	1 2 23.669	15 35 55.035	-1 59.537
Pavilion at Drottningkär . . .	56 6 30.55	1 2 15.843	15 33 57.645	
Letskik at Aupo . . .	56 6 29.96	1 2 13.878	15 33 28.17	
Oland, temporary Observatory Lighthouse . . .	56 11 47.65 56 11 49.66	1 5 39.515 1 5 39.446	16 24 52.725 16 24 51.69	
Stockholm, transit Instrument of Observatory . . .	59 20 34.80	1 12 16.564	18 4 7.56	-0 25.06
Church of St. Katherine . . .	59 19 7.06	1 12 22.137	18 5 32.055	
Arholma, Lighthouse . . .	59 50 58.20	1 16 29.486	19 7 22.29	
Söderarna, Lighthouse . . .	59 45 15.16	1 17 40.954	19 25 14.31	+1 23.19
Westerkär, Signal . . .	59 35 34.91	1 16 38.730	19 9 40.95	-0 39.225
Lands-Ört, Lighthouse . . .	58 44 27.93	1 11 31.118	17 52 46.725	
Dantzic, Observatory of the Naval School . . .	54 21 19.5	1 14 41.056	18 40 15.84	-0 40.345
Tower of Parish Church . . .	54 21 4.0	1 14 39.103	18 39 46.545	
Old Observatory on the Bischof-berg . . .	54 20 47.5	1 14 35.523	18 38 52.845	
Lighthouse at Neufahrwasser . . .	54 24 15.9	1 14 41.923	18 40 27.345	
Steeple at Weichselmünde . . .	54 23 49.5	1 14 45.529	18 41 22.935	
Gothland, temporary Observatory at Kattbarna . . .	57 25 52.93	1 15 26.685	18 51 40.275	
Grogara Lighthouse . . .	57 26 29.47	1 15 0.755	18 45 11.325	
Koenigsberg, Observatory . . .	54 42 50.38	1 22 0.685	20 30 13.275	-0 5.775* -0 8.775
Swalferort, Lighthouse . . .	57 54 35.37	1 28 20.987	22 5 14.805	
Dagerort, do. . .	58 54 59.13	1 28 47.571	22 11 53.565	
Abo, Old Observatory of the University . . .	60 26 58.00	1 29 10.045	23 17 30.675	-0 18.675* -0 23.175

<sup>372</sup> Suyo fue el grabado de uno de los planos de San Petersburgo más llamativos, a escala 1/21000 y publicado en 1823. La singularidad estriba en que se incluyó la triangulación urbana en que se apoyaron los levantamientos topográficos correspondientes (1821). El director de los trabajos fue el General Mayor de Vitzthum, siguiendo las instrucciones del Estado Mayor de su Majestad el Emperador. El plano se dividió en secciones, identificándose los edificios más singulares de la ciudad y todos sus puentes. Los topónimos, en ruso y francés, no figuraron en el mapa sino en documentos aparte.

LUGAR	Latitud Norte	Longitud al E. de Greenwich		Diferencias entre N. A. y C. de T.
		En tiempo	En grados, etc.	
Odenholm, Lighthouse . . .	59 18 19.31	h. m. s.	23 21 58.785	" "
Surop, do. . .	59 27 55.00	1 37 32.609	24 23 9.135	
Torkala Udd, do. . .	59 56 10.32	1 37 35.284	24 23 49.26	+2 53.24
Norgou, do. . .	59 36 22.23	1 38 4.251	24 31 3.765	
Reval, Transit Instrument of the Observatory	59 26 7.48	1 39 11.539	24 47 53.085	-1 30.585
Cathedral . . . . .	59 26 19.77	1 38 58.676	24 44 40.14	
Church of St. Nicolas . . .	59 26 15.64	1 38 59.534	24 44 53.01	
Church of St. Olav . . .	59 26 35.08	1 39 0.908	24 45 13.620	
Korskär, Lighthouse . . .	59 41 59.64	1 40 6.846	25 1 42.69	
Helsingfors, Observatory of the University . . .	60 9 41.97	1 39 49.911	24 57 28.665	+4 18.835
Klok Hapel, Tower of the Town Hall . . .	60 10 10.12	1 39 50.541	24 57 38.115	
Church of Holy Trinity	60 10 15.14	1 39 49.646	24 57 24.69	
Lutheran Church in the new suburbs . . .	60 9 58.14	1 39 46.811	24 56 42.165	
Socaborg, Windmill of Westersoart . . . . .	60 8 54.05	1 39 55.184	24 58 47.76	
Pavilion at Gustafs-Vård	60 8 22.60	1 39 58.558	24 59 38.37	
Grätebarn, Lighthouse . . .	60 6 18.48	1 39 55.317	24 58 52.755	+3 24.745
Ekholm, do. . . . .	59 41 8.11	1 43 11.927	25 47 58.905	
Rotsbar, do. . . . .	59 58 10.17	1 46 43.773	26 40 56.595	
Hockland, temp. Observatory	60 6 17.07	1 47 50.888	26 57 43.32	
Mügge, Pilus (northern extremity of the triangulation of M. Struve)	60 4 29.09	1 47 54.105	26 58 31.575	
Upper Lighthouse . . .	60 5 40.57	1 47 49.597	26 57 23.955	+0 7.545
Lower do. . . . .	60 6 19.68	1 47 50.871	26 57 43.065	
Chimney of the Coast- ing-Pilots' house	60 5 31.96	1 47 55.428	26 58 51.42	
Dorpat, Meridian Circle of the Observatory . . .	" "	1 46 54.056	26 43 30.84	+0 14.16*
Sommers, Lighthouse . . .	60 12 25.33	1 50 34.760	27 38 41.4	+0 4.66
Sishar, do. . . . .	60 2 8.92	1 53 27.827	28 21 57.405	
Tolbucin, do. . . . .	60 2 35.18	1 58 10.339	29 32 35.085	
Broanaia, Signal-staff on Hill	59 55 5.42	1 58 31.926	29 37 58.89	
Kronstadt, temp. Observatory	59 59 29.30	1 59 1.000	29 45 15.	
Steeple of the Cathedral	59 59 45.90	1 59 4.026	29 46 0.39	
Observatory of the Pilots' School . . .	59 59 23.16	1 59 3.563	29 45 53.445	+3 44.055
St. Petersburg, Observatory of the Academy of Sciences . . .	59 56 31.46	2 1 13.369	30 18 20.535	+0 36.465*
Observatory of the Etat-Major . . . . .	59 56 17.28	2 1 16.108	30 19 1.62	+0 35.965
Observatory of the Corps de la Marine . . .	59 56 7.74	2 1 7.383	30 16 50.745	
Pulkowa, Central Observatory (lately founded), centre of the middle tower . . .	59 46 20.43	2 1 18.565	30 19 38.475	

Coordenadas geográficas obtenidas por el general Schubert en su expedición cronométrica de 1833. El listado aquí reproducido figuró en la revista de la Real Sociedad Geográfica de Londres. Vol. 6, 1836 (pp. 413-416). En la última columna se presentan las diferencias entre los valores proporcionados por las publicaciones *The Nautical Almanac* (1837) y *La Connaissance des Temps* (1838). Los datos con asterisco son del N. A.

punto más alejado del Golfo de Botnia<sup>373</sup>. Igualmente mencionó los levantamientos hidrográficos efectuados por iniciativa del Almirantazgo Imperial, necesarios para completar la expedición cronométrica dirigida por el general Schubert<sup>374</sup>, en 1833, el cual fijó las diferencias de longitud entre los puntos más notables de las costas bálticas, facilitando así el conocimiento topográfico de las mismas, y el de otros en las del Mar Negro y en las del Mar Blanco.

Las cuatro últimas expediciones académicas, previas a la fundación del Observatorio de Pulkovo, también tuvieron como objetivo fundamental el posicionamiento astronómico de diferentes

<sup>373</sup> Se estaba refiriendo también, de forma implícita, a los trabajos comandados por Tenner y por el mismo Struve, con relación a las medidas del gran arco ruso.

<sup>374</sup> Director del Depósito Cartográfico del Estado Mayor y del Almirantazgo.

lugares. En 1830, decidió la Academia que Paul Heinrich von Fuss<sup>375</sup> debería de acompañar a la misión eclesiástica que se trasladaría a Pekín. A su regreso, en el verano de 1832, localizó la posición aproximada de 46 puntos de Siberia, más allá del lago Baikal y sobre la frontera china. El instrumental empleado se compuso de un sextante de Troughton, tres cronómetros y un pequeño telescopio acromático. En ese mismo año, el astrónomo Vasilii Fedorovich Fedorov fue enviado a Siberia para determinar la posición de 79 puntos entre el río Ural y la ciudad de Irkutsk, desde la frontera meridional hasta las proximidades del Océano Glacial; permaneciendo allí hasta el año 1837. Sus observaciones para el cálculo de las longitudes las basó tanto en las ocultaciones como en los pasos de la Luna, efectuándolas con un anteojo meridiano portátil. Los puntos intermedios los fijó con los cronómetros, obteniendo las latitudes mediante las observaciones realizadas con un teodolito astronómico<sup>376</sup>. Otra operación relevante debida a la Academia fue la expedición encargada de hacer la nivelación trigonométrica que enlazaría el Mar Negro con el Mar Caspio. Durante su ejecución, los astrónomos George Fuss y Sabler, junto al matemático Alexei Nicolaïevich Savitch, fijaron la posición astronómica de los dos extremos del itinerario, la de Novo-Tcherkask, además de la de unos 30 puntos más, varias ciudades, pueblos y montañas entre los dos mares, compatibilizando las observaciones geodésicas con las astronómicas.

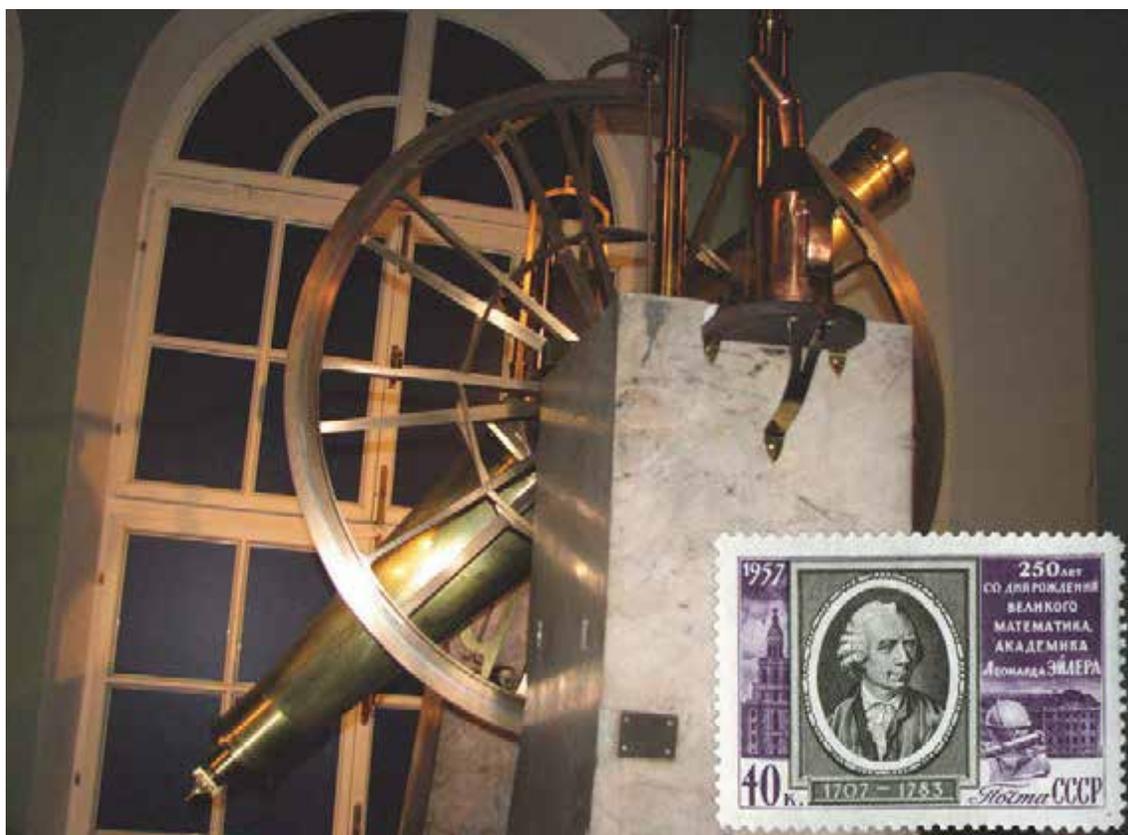


El Observatorio de Göttingen y su primer director Carl Friedrich Gauss. En la identificación de la medalla se lee (1777-1855) y Hannoversche Gradmessung (1821-1822) en clara referencia a sus medidas geodésicas en aquel reino.

Retomando la historia del Observatorio de San Petersburgo, comparó Struve su operatividad con la de otros centros nacionales y del extranjero, en el primer tercio del siglo XIX. A su juicio las observaciones astronómicas habían mejorado sustancialmente debido al progreso instrumental experimentado por las aportaciones de Troughton, Reichenbach, Fraunhofer y Repsold, así como por el cambio introducido en la metodología por Bessel y Gauss; dos hechos que parecían

<sup>375</sup> También conocido como Pavel Nikolaevich Fuss. Fue Secretario Permanente de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Junto a su padre Nicolas, publicó una obra póstuma de L. Euler: *Opera postuma mathematica et physica anno 1844 detecta quae Academiae scientiarum petropolitanae obtulerunt ejusque auspicio ediderunt auctoris pronepotes*. Padre e hijo escribieron el obituario del insigne matemático.

<sup>376</sup> Struve añadió que los cálculos correspondientes se estaban efectuando mientras él escribía la Descripción del Observatorio de Púlkovo.



El anteojo meridiano de Ertel adquirido por el Observatorio Astronómico de San Petersburgo. Se le ha superpuesto el sello editado por la antigua URSS para conmemorar el 250 aniversario del nacimiento de Leonard Euler, a su izquierda se reprodujo la silueta del referido observatorio.

imprescindibles cuando se pretendían obtener coordenadas estelares exactas. El Observatorio de Greenwich había adquirido los nuevos aparatos de Troughton en 1814. Los principales observatorios alemanes se enriquecieron igualmente con los excelentes equipos fabricados en Munich.

El propio gobierno ruso se preocupó por el progreso astronómico al crear los Observatorios de Dorpat, Turku y Nicolaïev. En ese periodo, la Academia de Ciencias de San Petersburgo, comprendió que por muchos méritos que tuviese su incansable astrónomo Wisniewsky, no estaba en condiciones de competir con los otros observatorios. Struve comentaba que nada podría resolver, por aquel entonces, el problema de fondo, ni siquiera la adquisición del gran círculo meridiano de Ertel; se tenía que abordar de inmediato la construcción de un nuevo observatorio. Así lo entendió la Academia, cuyos miembros deseaban conservar para el Observatorio el antiguo status de «primer establecimiento científico del imperio, dignidad con que lo había revestido su fundador, Pedro el Grande».

Casi tuvieron que pasar setenta años para que la Academia encargase a Georg Friedrich Parrot<sup>377</sup>, uno de sus miembros, la redacción del proyecto de un nuevo observatorio, incluyendo

<sup>377</sup> Parrot había sido Profesor de Física y primer rector de la Universidad Imperial de Dorpat, además de astrónomo en su Observatorio; participando además en la construcción de la torre móvil que albergaría al gran telescopio de Fraunhofer.

planos y presupuesto. Tres años duraron las discusiones previas, que culminaron con la redacción del mismo y la propuesta de un posible emplazamiento<sup>378</sup>. Aunque Struve, por evidentes razones de modestia, no desvelara el importante papel que desempeñó para el éxito final del observatorio, así debió ser por los detalles que ofreció en su crónica. Ciertamente, él mismo daba cuenta del viaje científico que realizó en el año 1830 y de que a su vuelta fue recibido por el emperador para informarle puntualmente de sus gestiones. Asimismo mencionó que durante la audiencia le preguntó aquel por el estado en que se encontraba el Observatorio de San Petersburgo y que él no había dudado en hablarle con toda franqueza del asunto.

Nicolás I captó inmediatamente el mensaje y comprendió la penuria de su dotación instrumental, así como los grandes inconvenientes derivados de la posición que ocupaba en el centro de la ciudad. A raíz de entonces, responsabilizó de la cuestión al Ministro de Instrucción Pública, haciéndole saber que el honor del país estaba en juego y que se debería construir un nuevo observatorio astronómico, acorde con los avances científicos del momento y que pudiese contribuir al desarrollo astronómico del futuro. El emperador se preocupó además de buscar un emplazamiento alternativo, pensando que el ofrecido en primer lugar no cumplía las condiciones de aislamiento que requería una instalación de esas características, dada su proximidad a la ciudad y la escasa estabilidad del subsuelo. Al final fue él quien propuso como lugar más apropiado, la colina de Púlkovo 75 m sobre el nivel del mar, situada a unos 19 km al Sur de San Petersburgo y a mayor distancia del núcleo urbano. Tres años después, en el mes de octubre de 1833, el zar ordena formalmente la construcción del observatorio, sancionando el proyecto y presupuesto de la Academia que le presentó el conde Uvarov, nombrado luego Ministro de Instrucción Pública. El mismo mes ordenó igualmente que se comprasen los instrumentos y que la Tesorería del Estado librase de inmediato cien mil rublos para iniciar las obras.

El primer proyecto contemplaba un observatorio análogo al de Dorpat, pero de mayores dimensiones, en el que destacaban sobremanera sus torres móviles, con todos los accesorios a que obligaba su ubicación fuera de la ciudad y con un edificio piramidal en el que se instalaría el telescopio de Herschel, que tenía la Academia desde el año 1803. El coste final previsto por el presupuesto oscilaba entre los 304.000 y los 346.500 rublos. También se deberían trasladar desde el Observatorio de San Petersburgo, los tres instrumentos siguientes: un telescopio de reflexión, un antiguo antejo acromático, con 18 pies de distancia focal y un objetivo de 4 pulgadas, y el nuevo círculo meridiano de Ertel, que aún no se había desembalado. Dentro del capítulo de las adquisiciones previstas, se incluyeron:

- a) Un gran telescopio acromático, con 10.5 de distancia focal.
- b) Un gran instrumento de pasos.
- c) Un ecuatorial con un antejo de 6 pies.
- d) Un instrumento universal con un antejo de 5 pies.
- e) Dos péndulos y un cronómetro de bolsillo.
- f) Un aparato para medir la longitud de un péndulo simple.
- g) Otros pequeños instrumentos<sup>379</sup>.

---

<sup>378</sup> En unos terrenos cedidos por el conde A. Kuchelev-Besborodko, miembro honorario de la Academia, que ofrecía un horizonte despejado en todas las direcciones.

<sup>379</sup> El Observatorio de Púlkovo contó luego con una importante colección de instrumentos portátiles, para que sus futuros astrónomos, además de los oficiales de Marina y de Estado Mayor, se fuesen familiarizando con las observaciones.



Imagen aérea con la situación de la colina de Púlkovo, al Sur de la ciudad de San Petersburgo, y detalle del terreno que ocupa el Observatorio en la actualidad.

Convencido Uvarov del interés que había despertado el proyecto en el emperador, quiso contar desde el principio con la colaboración de los astrónomos de la Academia, para que nunca se pudiese olvidar el destino esencialmente científico que debía tener el futuro observatorio. A tal efecto nombró una Comisión constituida por Wisniewsky, Fuss, Parrot y Struve, rogándole al emperador que fuese presidida por el almirante Greig<sup>380</sup>, miembro del Consejo del Imperio y miembro honorario de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Después de estudiar a fondo el proyecto y constatado el nivel de exigencia que parecía aceptar el emperador, la Comisión optó por reformarlo sustancialmente, estableciendo unas bases más amplias y sólidas, resumidas en las cinco cuestiones que se detallan a continuación:

1. *Establecer con toda claridad el carácter y objeto del nuevo Observatorio*, integrado en la Academia de Ciencias y llamado a ser el Observatorio Central de Rusia, desde el que se coordinarían los trabajos realizados en los otros observatorios del Imperio.
2. *Formular el plan general de las observaciones que se efectuarían, de acuerdo con el fin pretendido*. Plan que dependería en primer lugar de la elección de los instrumentos y en segundo de la propia plantilla del Observatorio.
3. *Organización de la administración y gestión del Observatorio*, acordándose que se responsabilizaría de ambas a un solo académico, director de los trabajos de ese género.
4. *Precisar en consecuencia el protocolo de la construcción del Observatorio y de la residencia de los astrónomos*.
5. *Fijar el montante anual de los gastos de mantenimiento del nuevo establecimiento*.

Analizados en detalle los cinco puntos y concretados sus principales aspectos, había que proceder a redactar el reglamento y a cuantificar el presupuesto anual del Observatorio. También se tendría que especificar la distribución de espacios y dependencias del nuevo centro, para hacérselo saber al arquitecto. La tercera consecuencia era quizás la más importante: preparación y evaluación del instrumental requerido.

Todo ello se lo comunicó el Ministro al Emperador, el cual dio su conformidad y ordenó elevar al Consejo de Ministros el proyecto de reglamento y el presupuesto previsto, para que acto seguido se diera traslado al Consejo del Imperio, y se cumplieran así todos los requisitos legalmente previstos. El propio Emperador eligió dos arquitectos, Alexander Pavlovich Brullov y Konstantin Andreyevich Thon<sup>381</sup>, Profesores de Arquitectura en la Academia de Bellas Artes, para que hicieran los planos correspondientes, independientemente el uno del otro. Ambos trabajos se presentarían después a la Comisión, para que esta se pronunciase sobre el particular y se encargase al arquitecto elegido la redacción del proyecto definitivo.

Aún se debía concretar el emplazamiento final en el que se tendría que construir el observatorio, aunque la Comisión pensara que la colina de Púlkovo era el sitio que reunía las mejores

---

<sup>380</sup> Aleksey Samuilovich Greig era respetado en toda Europa por sus profundos conocimientos astronómicos, que vino adquiriendo desde su juventud. El gobierno ruso le reconoció igualmente sus méritos al construir, bajo su dirección el Observatorio de Nikolayev, el cual dependería después del de Púlkovo, entre los años 1912 y 1991. Su principal cometido fue proporcionar cartas náuticas a la flota del Mar Negro, a la vez que se enseñaba a sus oficiales como orientarse con métodos astronómicos. Su primer director fue el astrónomo Karl Frederick Knorre, por expresa recomendación de Struve. Knorre había sido astrónomo asistente de Struve en el Observatorio de Dorpat.

<sup>381</sup> Diseñó los suntuosos interiores de la Academia de Ciencias, proyectó la Catedral de Cristo Salvador en Moscú y el gran Palacio del Kremlin.



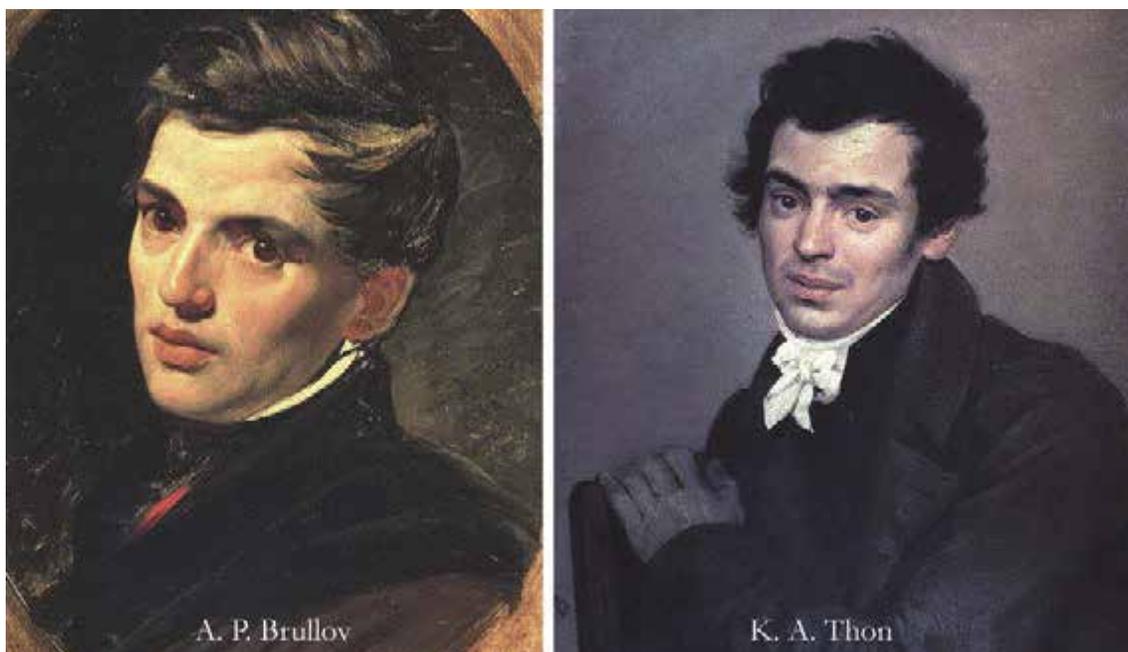
El almirante Aleksey Samuilovich Greig, Presidente de la Comisión que sentó las bases del Observatorio de Púlkovo, y el astrónomo Georg Friedrich Parrot, miembro destacado de la misma.

condiciones. El Emperador propuso, no obstante, otras alternativas, que fueron examinadas y consideradas peores que el primer emplazamiento; fue entonces, en febrero de 1834, cuando se optó por el promontorio que formaba parte del Tsárskoye Seló, la residencia de los zares ya mencionada. El mismo Zar dibujó sobre un plano una parcela<sup>382</sup> de 22 hectáreas, cuya propiedad se debería ceder a la Academia de Ciencias. Una disposición complementaria fue su orden para que no se pudiera construir edificio alguno a menos de una versta del límite Sur del recinto ocupado por el Observatorio, debiendo contar siempre con el preceptivo consentimiento de su director.

Los dos arquitectos presentaron sus planos a la Comisión, en una reunión que tuvo lugar el 24 de febrero de 1834. Después de las oportunas deliberaciones, fue elegido el proyecto de Brullov. En ambos casos se distribuyeron los espacios de forma parecida, aunque el aspecto externo fuese radicalmente diferente, tal como resumía Struve: «La fachada del Sr. Thon, de estilo gótico, destacaba desde el punto de vista arquitectónico sobre la del Sr. Brullov, con un estilo más austero pero que refleja, como contrapartida, claramente el destino científico del edificio. En uno de los dibujos se veía un bello castillo, en el otro se reconocía a primera vista que se trataba de un observatorio colosal». Por otra parte, la distribución interior propuesta por Brullov parecía más racional, por la proximidad de los despachos a las salas de observación y por la comunicación directa con las residencias de los astrónomos. La menor elevación de las tres torres móviles, fue otra de las características mejor valorada por los miembros de la Comisión, en relación con la comodidad de las futuras observaciones. Sin embargo, se propusieron al arquitecto ganador ligeras modificaciones que fueron subsanadas de inmediato, pues el 8 de marzo ya entregó los nuevos planos a la Comisión, que mostró su total satisfacción.

---

<sup>382</sup> La zona estaba ocupada por campesinos, que habían construido sus casas y cultivado sus campos. De manera que se procedió a su expropiación y a la asignación de terrenos equivalentes en las proximidades. El zar les indemnizó con 40.217 rublos por la demolición y reconstrucción de sus casas de madera y por el trasplante de sus árboles frutales.



Los dos arquitectos que proyectaron el Observatorio de Púlkovo. Ambos retratos fueron pintados por Karl Brullov, hermano del primero de ellos.

Comentaba después Struve, que en el mes de abril había acompañado al Ministro en la entrevista que tuvo con el emperador, para mostrarle los dos planos del Observatorio e informarle de las circunstancias que habían motivado la elección de la Comisión, el acuerdo real con la decisión de esta fue total; en el transcurso de la audiencia el emperador le indicó a Struve que había pensado en él como futuro director del Observatorio. Seguidamente confirmó el nombramiento de Brullov como arquitecto responsable de su construcción. El emperador también dispuso que Struve se trasladase al extranjero para examinar y encargar el instrumental necesario, con el mandato expreso de que fuese el más perfecto en su género. El gobierno, de acuerdo con el zar, procuró facilitar desde los inicios todas las tareas administrativas, según lo estipulaba el escrito dirigido por el Ministro al Presidente de la Comisión:

1. Sólo se aplicaría el método previsto de contratación a las construcciones accesorias, mientras que la compra de materiales y los trabajos de la construcción del observatorio, propiamente dicho, no estarían sujetos a las formalidades previstas y podrían ser adquiridos por contratación libre;
2. El Comité administrativo de la Academia se encargaría de la observancia de las formalidades, prescritas por la ley, y de la contabilidad.

El Comité se compuso de dos académicos ordinarios y de dos consejeros especializados en asuntos legales y administrativos, siendo presidido por el Vicepresidente de la Academia. Con parecido criterio se constituyeron tres grupos de trabajo diferenciados, pero complementarios: del primero se responsabilizaría el arquitecto, el cual se ocuparía de la construcción del edificio; el segundo sería el administrativo, encargado de la gestión económica y de la tramitación legal que fuese necesaria; el tercero, la propia Comisión científica, debería velar por que el edificio del Observatorio respondiera a las premisas astronómicas especificadas en el proyecto.

Los trabajos previos ya habían comenzado en el mes de marzo, cuando eligió la Comisión el punto que debería ser considerado como centro del Observatorio. Sobre él se construyó una plataforma sólida, que permitiría el estacionamiento de cualquier instrumento portátil y de manera que no se presentasen obstáculos al efectuar vueltas de horizonte. En ese mismo mes, el astrónomo G. Fuss situó en ella un pequeño instrumento de pasos, con el que divisó la flecha del campanario de la catedral localizada en el interior de la fortaleza de San Petersburgo. Observando diferentes pasos de estrellas por el vertical así definido calculó su acimut<sup>383</sup>:  $358^{\circ}22'20''$ . Igual de relevante fue el cálculo de la latitud del lugar realizado por Schubert, obteniendo el valor provisional de  $59^{\circ}46'19''.0$ . En el mes de agosto se trasladó la Comisión a Púlkovo para materializar sobre el terreno la dirección de la meridiana y del primer vertical, las dos líneas maestras para efectuar el replanteo de la planta del edificio. Esos trabajos comenzaron en el mes de septiembre y a primeros de octubre ya quedó todo dispuesto para que en la primavera siguiente se iniciara la construcción propiamente dicha.

A results del viaje de Struve, la Comisión preparó el pedido de los instrumentos que debería adquirir el nuevo Observatorio de Púlkovo. La relación correspondiente se estructuró en los apartados siguientes:

- a) Telescopios<sup>384</sup>.
- b) Instrumentos fijos<sup>385</sup>.
- c) Relojes astronómicos<sup>386</sup>.
- d) Instrumentos de geodesia y portátiles<sup>387</sup>.
- e) Instrumentos meteorológicos<sup>388</sup>.
- f) Patrones metrológicos y aparatos para medir bases.
- g) Diferentes aparatos auxiliares.
- h) Taller mecánico del observatorio<sup>389</sup>.

De acuerdo con las indicaciones de Struve, se decidió que todos los instrumentos fuesen suministrados por las mejores firmas: así los principales se encargarían a Ertel, a los sucesores de Fraunhofer y a los talleres de los hermanos Repsold. Para preparar los pedidos, la Comisión delegó en Struve y este contactó con todos los proveedores, comunicándole las características principales de los instrumentos, rogándoles que fuesen preparando bocetos detallados de los mismos para examinarlos conjuntamente en la próxima visita que les pensaba realizar.

---

<sup>383</sup> Realmente Struve indicó que el acimut resultante fue de  $1^{\circ}37'40''$  al Oeste del Norte, esto es  $178^{\circ}22'20''$ , contado desde el Sur, o bien  $358^{\circ}22'20''$  si el origen fuese el Norte.

<sup>384</sup> Un gran telescopio acromático, o refractor, con un objetivo tan grande como fuese posible, un heliómetro con un objetivo de 7.5 pulgadas, un pequeño refractor, con un objetivo de 6.4 pulgadas, dos buscadores de cometas y un antejo acromático con 4 pies de distancia focal. Todos los telescopios tendrían montura paraláctica para poder seguir el movimiento diario.

<sup>385</sup> Un gran antejo meridiano, un gran círculo vertical de nueva construcción, un gran círculo meridiano, un instrumento de pasos para usarlo en el primer vertical y un antejo meridiano de 4 pies.

<sup>386</sup> Cinco péndulos astronómicos, tres cronómetros y cinco despertadores.

<sup>387</sup> Dos instrumentos universales (grande y pequeño), un teodolito astronómico, un instrumento de pasos, un círculo prismático, un nivel, un sextante de reflexión y un círculo de reflexión.

<sup>388</sup> Un barómetro normal, una colección de termómetros y varios barómetros para las diferentes estaciones de observación.

<sup>389</sup> Varios tornos, una máquina para la división del círculo, una máquina para la división de líneas rectas, diferentes aparatos de mecánica y útiles mecánicos.



Retrato de Wilhelm von Struve realizado Christian Albrecht Jensen, un pintor danés al que le encargó el Observatorio de Púlkovo 11 retratos de científicos eminentes. Se presenta también el punto central de dicho observatorio, localizado en el hall del edificio principal. Su meridiano y su primer vertical fueron las líneas maestras del Observatorio.

En el mes de junio partió Struve para Alemania, provisto de los planos definitivos del observatorio. Su objetivo era doble, mostrar a los fabricantes el futuro emplazamiento del instrumental y someterlos al juicio de los astrónomos más eminentes del país, con la esperanza de conseguir su beneplácito e incluso con la idea de aceptar cualquier sugerencia que pudiera mejorarlo. Con evidente satisfacción comentaba después Struve que «la aprobación unánime con que estos ilustres sabios<sup>390</sup> han honrado nuestro proyecto, tanto en sus líneas generales como en los detalles, me ha servido de verdadero estímulo y ha causado una viva satisfacción a la Comisión, a la que informé en cuanto regresé».

El interés por dotar al Observatorio de Púlkovo con los instrumentos más modernos no era gratuito, a tenor de la perfección alcanzada por sus componentes ópticas y mecánicas. Bajo el primer punto de vista se debía intentar que el aumento de los anteojos, siendo extraordinario, fuese compatible con su fácil manejo. Análoga consideración se hizo con relación a la mecánica, pues en la construcción del aparato debía primar el fin previsto, procurando eliminar, en la medida de lo posible, los errores propios de la fabricación. Para lograr ambos avances, se contaba con los medios, prácticamente ilimitados, puestos a disposición por el emperador, sin olvidar los perennes cambios de impresiones entre instrumentistas y astrónomos. Struve se entrevistó en

<sup>390</sup> Bessel, Encke, Alexander von Humbold, Lindenau, Olbers, etc.

Hamburgo con los hermanos Repsold y en Munich con Ertel, teniendo a la vista los diseños que ambos habían preparado al efecto, contando siempre con el interesante apoyo técnico proporcionado por el Instituto de Óptica de la segunda ciudad. También son dignas de mención las dificultades superadas por Georg Merz, discípulo de Fraunhofer, al conseguir objetivos mayores que los fabricados antes para los observatorios de Dorpat y de Berlín.

Struve resumió en las Memorias de la Academia de Ciencias (1834) los resultados de todas las pruebas a que fueron sometidos, expresando «su convicción de que el objetivo de 10.5 pulgadas de abertura era digno sucesor de Fraunhofer y que reunía las cualidades esenciales para lograr la mayor precisión de las imágenes y el acromatismo». Fue tal su certeza que le encargó a Merz, y a su socio Franz Joseph Mahler, otro todavía mayor, de 13.5 pulgadas de abertura y 20 pies de distancia focal; con la importante innovación de instalarlo sobre un pilar macizo de piedra, sustituto del soporte de madera empleado por Fraunhofer para sus telescopios. Todos los diseños, analizados por Struve en Alemania, se los llevó consigo a Rusia para explicarlos a los otros miembros de la Comisión.

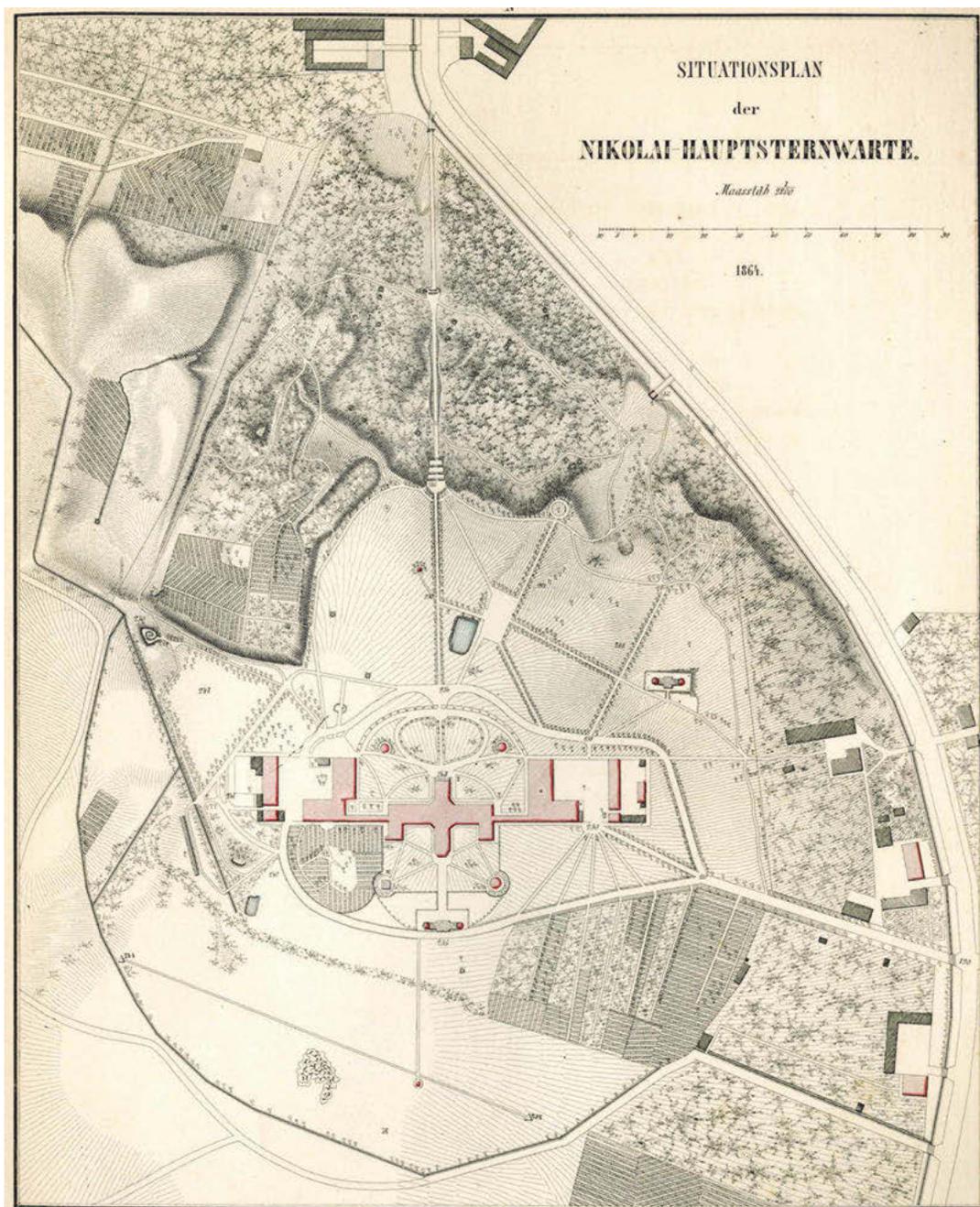
En efecto, finalizado su viaje, dio cuenta de todas sus gestiones a la Comisión, siendo aprobadas por unanimidad, tanto las relacionadas con los instrumentos principales como con la adquisición de otros menores, especialmente los péndulos astronómicos y los cronómetros; encargados en Alemania y en Inglaterra. No obstante quedaba pendiente la compra del instrumento de pasos, que se estacionaría en el primer vertical, puesto que la Comisión había decidido someter el proyecto a concurso, entre los constructores Ertel y Repsold. Struve presentó a sus compañeros las dos propuestas de los fabricantes alemanes y, tras el examen correspondiente, se eligió el realizado por los dos hermanos, entendiéndose que ofrecía ventajas incontestables no contempladas en el pliego de condiciones.

Las mejoras introducidas en muchos de los instrumentos aumentaron el coste previsto, aunque la Comisión las considerase insoslayables. El emperador comprendió las razones esgrimidas por ella y accedió a incrementar el presupuesto fijado en principio; en la época en que se abrió el observatorio ya había librado el gobierno 270.000 rublos, sin contar los 10000 que dedicó a la formación de la futura Biblioteca. Parrot abandonó la Comisión en el año 1834, siendo reemplazado por el físico académico Emily Hristianovich Lenz. A comienzos del mes de marzo de 1835, Brullov entregó a la Comisión el presupuesto definitivo de la obra, el cual ascendió a poco más de 1.754.000 rublos.

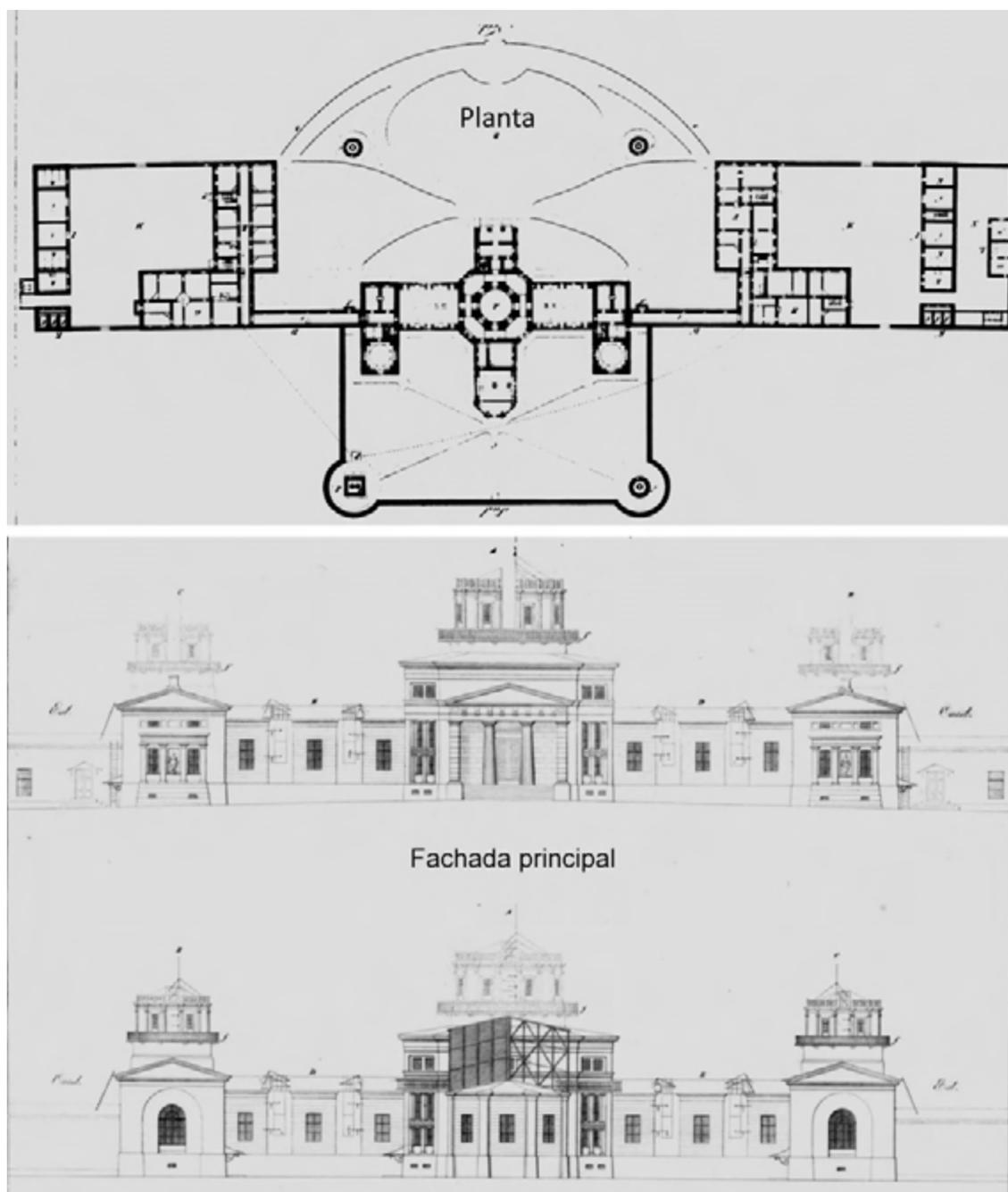
El día 21 de junio tuvo lugar la ceremonia de colocación de la primera piedra, contando con la asistencia del Ministro Uvarov, del Presidente de la Academia, conde Alexeï Protassievitch Protassov, viceministro, vicepresidente y demás autoridades, aparte de los miembros de la Comisión científica y del Comité administrativo de la Academia. Para dejar constancia formal del acontecimiento se estampó una medalla de platino con la esfigie del zar, representándose en su reverso la fachada septentrional del Observatorio, orlada con los signos del zodiaco. La medalla, varias monedas y una placa de cobre dorada se colocaron bajo la piedra anterior. La placa llevaba una doble inscripción escrita en ruso y francés, con el siguiente texto:

*Por orden de Su Majestad el EMPERADOR NICOLÁS PÁVLOVICH, dada el 28 de octubre de 1833 al Ministro de Instrucción Pública y Presidente de la Academia de Ciencias, Sergey Semionovich Uvarov, se ha colocado, el 21 de junio de 1835, la*

pedra fundamental del Observatorio Central de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, cuya construcción se realiza bajo la dirección de una Comisión presidida por el miembro honorario de la Academia Almirante Alexis Samoïlovitch Greig, y compuesta por los académicos Wisniewsky, Struve, Fuss, Parrot y Lenz, de acuerdo con las instrucciones y el proyecto del arquitecto Alexander Brullov.



Plano de situación del Observatorio de Púlkovo, publicado a escala 1/2800 en el año 1864. En realidad no es más que una actualización del original levantado por Schumaker, aunque en este caso se situase el Norte en la parte superior y no en la inferior.



Planta y alzados de las dos fachadas del Observatorio de San Petersburgo, ambas imágenes fueron reproducidas por Struve en la descripción que hizo del mismo.

Struve comentó que después del *Te Deum* preceptivo, se cubrió la piedra fundamental y se procedió a inspeccionar la obra, cimentación y muros exteriores, bastante avanzados. La piedra de referencia se colocó en el pie de una columna de ladrillo, levantada en el subterráneo y exactamente en el centro del Observatorio, donde se pensaba instalar un péndulo normal.

A lo largo de ese año fue avanzando la construcción del edificio principal, hasta el extremo de que tanto los muros exteriores y bóvedas, como la de los pilares en que se instalarían los instrumentos, quedaron terminados. Únicamente había que tener sumo cuidado con la de los muros que sustentarían a las torres móviles, para colocar los rodamientos cuando estuviese asegurada su inmutabilidad. Para la construcción de estas<sup>391</sup>, la Comisión había requerido los servicios de Thibaut, un reputado tramoyista propuesto por Brullov. Thibaut presentó a la Comisión tres proyectos, eligiendo esta el que estaba claramente influenciado por los modelos que poseían los observatorios de Dorpat y Berlín. También se le encargó que fuese construyendo una de las dos torres pequeñas, a título de ejemplo, a fin de que pudiese contribuir a la mejora de las siguientes. En lo relativo a los instrumentos, la Comisión recibió, también en 1835, correspondencia de los fabricantes, informando sobre el progreso de sus trabajos. A pesar de ello, la Comisión decidió que Uno Pohrt, mecánico del Observatorio de Dorpat, se trasladase a Munich y permaneciese allí hasta que se ultimaran todos los instrumentos. Él sería después el encargado de supervisar su traslado, desde Munich a Púlkovo, en donde se ocuparía de su mantenimiento como responsable último del taller mecánico del Observatorio.

En el año 1836 se nivelaron las tres torres móviles: la mayor del centro y las dos pequeñas, oriental y occidental; un trabajo ímprobó que resumió Struve en su Descripción del Observatorio. El progreso de la edificación fue muy satisfactorio en los dos años siguientes, siempre bajo la atenta y exigente dirección de Brullov. En 1837 se terminó la primera de las torres móviles, siendo examinada por la Comisión. Sus miembros quedaron tan satisfechos que le permitieron construir su homóloga, de 21 pies de diámetro, y después la mayor, de 32 pies de diámetro, siempre de acuerdo con las directrices y el proyecto preparado por el arquitecto. Al año siguiente se aceleraron los trabajos, sin detrimento de la calidad prevista para el Observatorio. La primera torre ya fue operativa, se inició la construcción de la segunda y se preparó la de la mayor; entre tanto se habían ido tallando las rocas graníticas que deberían soportar los instrumentos, con la excepción del gran telescopio y del heliómetro, puesto que las dimensiones y forma de las bases que los sustentarían no estaban aún definidas.

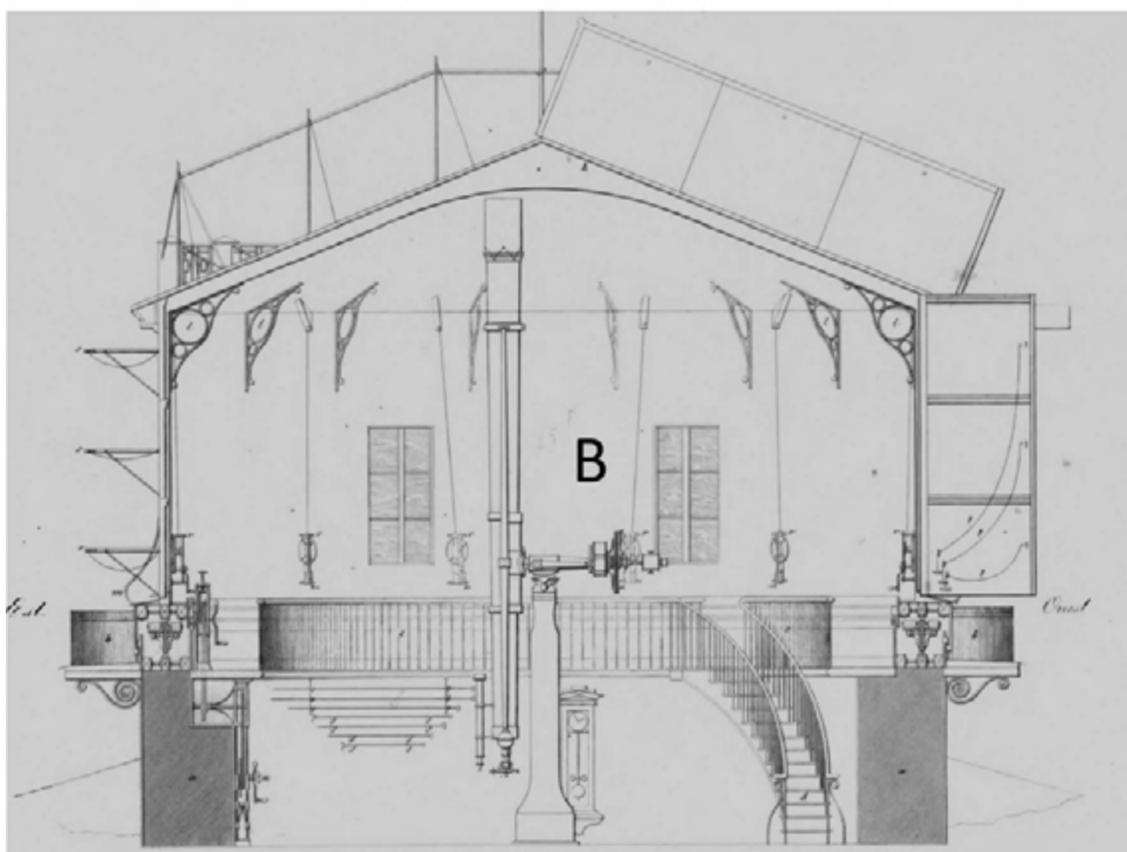
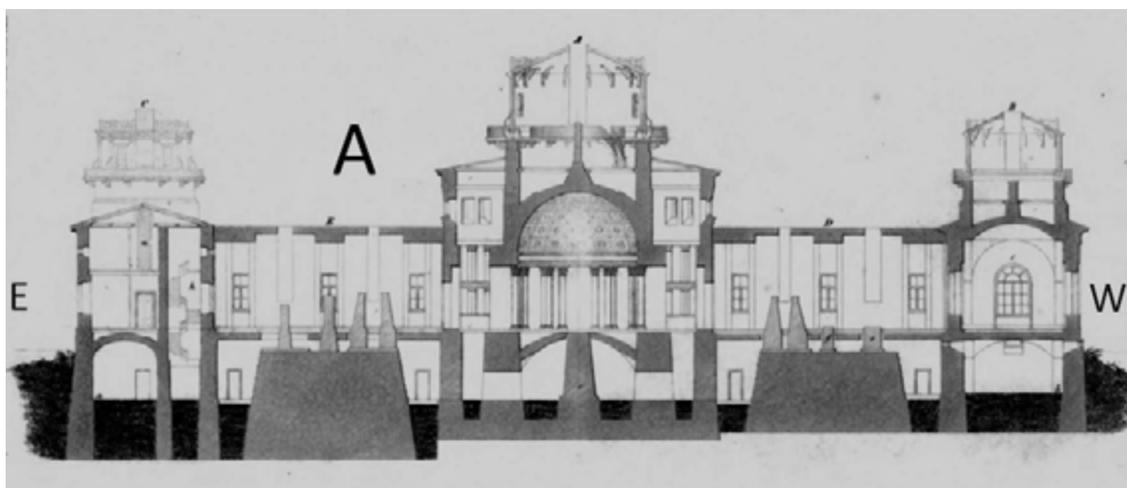
Paralelamente se fue corrigiendo el reglamento, atendidas las sugerencias del Consejo de Estado, y perfilando el presupuesto anual de gastos, por tener ya más elementos de juicio debido al progreso experimentado por las obras. A finales del mes de junio de 1838, la Comisión sometió ambos documentos a la sanción del emperador, el cual se dignó aprobarlos por medio del correspondiente ucase enviado al Senado, desde su residencia de Varsovia, cuyo texto rezaba así:

*Con el deseo de favorecer el progreso de la Astronomía en nuestro imperio, hemos ordenado construir, en los alrededores de San Petersburgo, sobre la montaña de Púlkovo, el Observatorio Astronómico Central y dotarlo con los instrumentos más perfectos.*

*Hoy que la construcción de los edificios destinados al efecto llega a su fin, de suerte que podrá ser abierto y se comenzarán las observaciones en 1839, hemos sancionado el reglamento y el presupuesto del Observatorio, presentados por el Ministro de Instrucción Pública y examinados por el Consejo de Estado, y hemos ordenado que entre en funcionamiento a partir del 1 de enero del año próximo.*

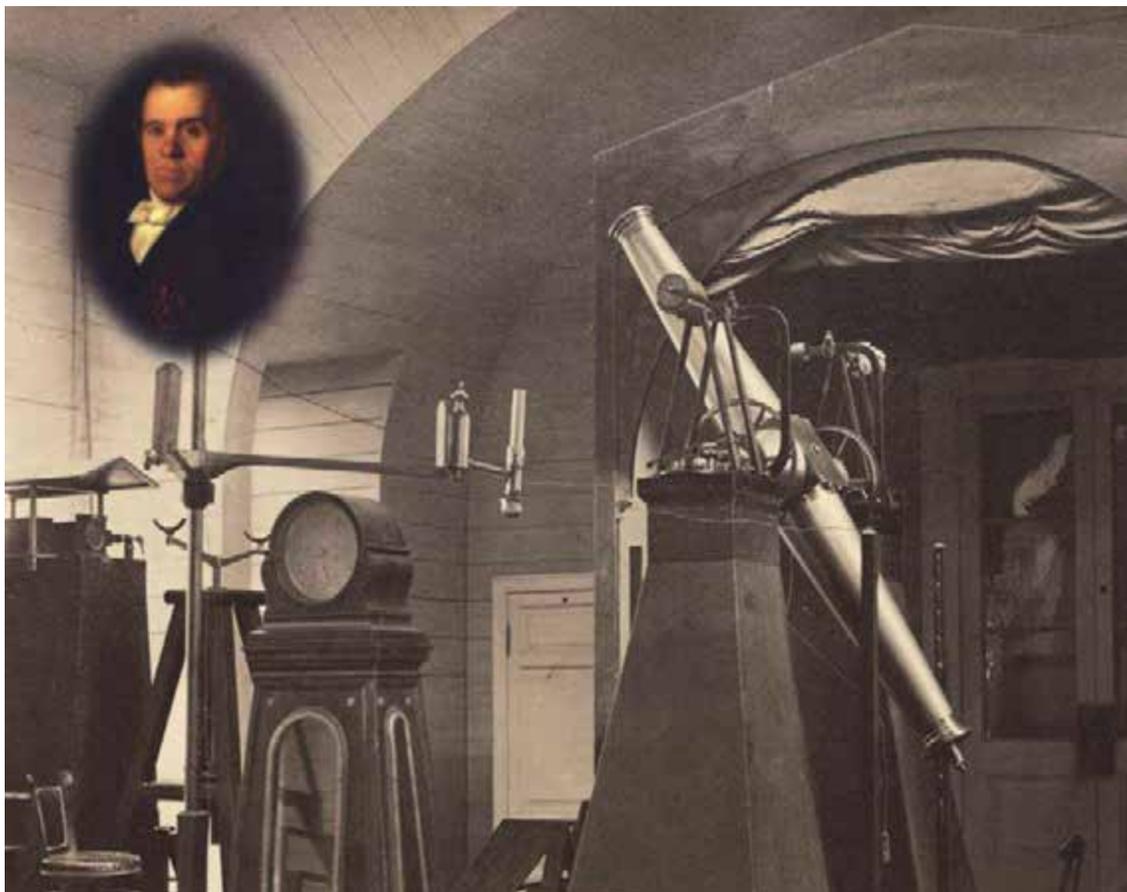
---

<sup>391</sup> En la construcción de las torres móviles se tuvo muy presente el armazón, ligado a las puertas correderas y a los aditamentos para abrirlas y cerrarlas. Otras cuestiones relevantes fueron la disposición de los rodamientos que permitirían el movimiento y el mecanismo responsable del movimiento de rotación.



Secciones por el Primer vertical de todo el Observatorio (A) y de la gran torre central (B).

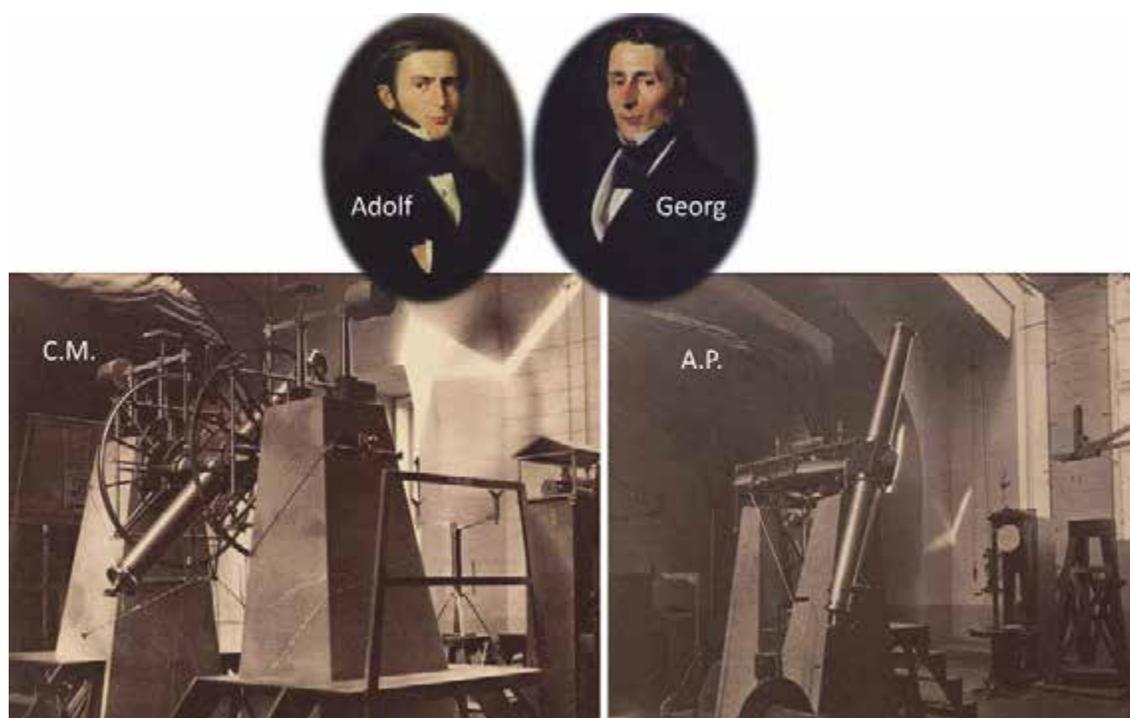
Para Struve, esa confirmación real era sin ninguna duda el suceso más importante en la historia del Observatorio Central. El alcance del reglamento fue incluso más allá de la época en que se iniciaron las actividades científicas del Observatorio, puesto que garantizaba igualmente las posibles investigaciones futuras.



Traugott Leberecht von Ertel, según M. Echter (1838) y su gran instrumento de pasos, construido de acuerdo con Struve. Con él se obtuvieron las ascensiones rectas de numerosas estrellas, a fin de completar los catálogos correspondientes.

Por aquel entonces, los fabricantes alemanes le comunicaron a Struve que los instrumentos estaban prácticamente ultimados, invitándole a que se desplazase de nuevo a su país para comprobar que cumplían con todas las prescripciones del contrato, y en su caso recepcionarlos. La Comisión aceptó la invitación y, con el beneplácito del zar, Struve permaneció fuera de Rusia entre los meses de agosto y noviembre de 1838. Cuando llegó a la ciudad de Hamburgo, los hermanos Repsold le tenían preparados los dos instrumentos, colocados sobre dos sólidas estructuras de madera, para que examinara todos sus movimientos y cualquier otro detalle. Aunque presentaron mejoras, con relación a los diseños originales, durante su estancia de tres semanas se introdujeron algunas más. Finalmente se embalaron los aparatos y fueron transportados en carro hasta Lübeck. G. Repsold vigiló el transporte, cabalgando junto a la comitiva, e incluso asistió a su colocación dentro del vapor anclado en Travemünde, a unos 13 km de la ciudad anterior. Lenz recibió las cajas en Kronstadt y escoltó su transporte hasta San Petersburgo, siendo depositadas en la sede de su Academia de Ciencias.

Durante su estancia de cinco semanas en Munich, se hospedó en el domicilio de su amigo Ertel, para así poder supervisar con mayor asiduidad los instrumentos que se estaban ultimando en sus talleres. No obstante, los trabajos habían avanzado menos de lo previsto; sobre todo los

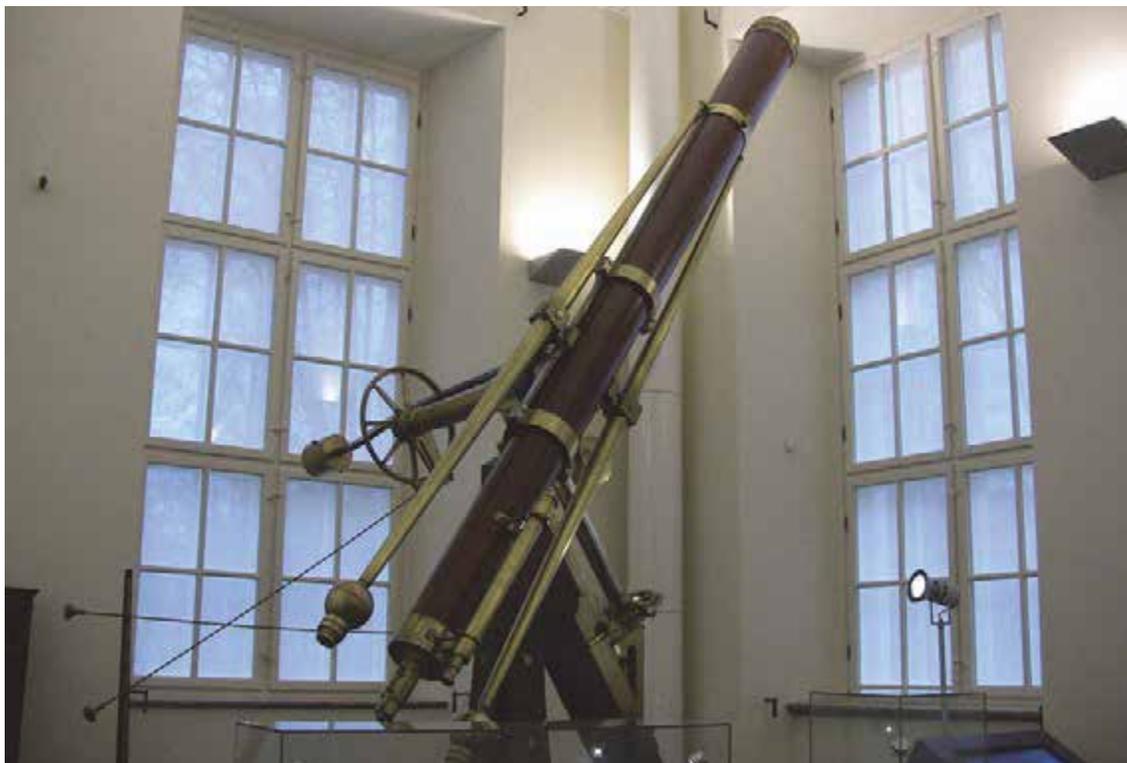


Los hermanos Repsold (Adolf y Georg) junto al Círculo meridiano y al Anteojo de pasos. Los retratos le fueron encargados por el Observatorio a Jensen (1840). Con el segundo, estacionado en el primer vertical, se obtuvieron con gran exactitud las declinaciones de estrellas circumpolares, de acuerdo con el método desarrollado por Struve para determinar la constante de aberración.

relativos al gran círculo vertical, pues se trataba de un instrumento nunca fabricado. Una de sus particularidades fue la mejor utilización de los microscopios micrométricos, para lograr mayor seguridad y claridad en las lecturas. También visitó el Instituto de Óptica, para comprobar los avances en la construcción del heliómetro y del gran telescopio, colocados en el interior de un gran casetón de madera cúbico de 9 m de lado. Con ellos se efectuaron algunas observaciones, comentando Struve que los soportes de madera, sobre los que los habían instalado, le sirvieron para fijar mejor las formas y dimensiones de los pilares de piedra definitivos. Struve aprovechó su viaje para comprar los libros más importantes de astronomía, matemáticas, etc, publicados en Leipzig por Leopold Voss, además de los numerosos libros antiguos que adquirió en las librerías especializadas de Alemania, París y Londres; con la intención de ir conformando la Biblioteca del Observatorio.

Dentro de la Comisión científica iba aumentando la tensión, pues el reglamento del Observatorio debería entrar en vigor a comienzos del mes de enero de 1839 y se tenía que dar un nuevo impulso al progreso de los trabajos. Por otro lado, Struve ya había sido formalmente nombrado Director del Observatorio Central en 1838, aunque hasta el mes de abril de 1839 continuase viviendo en Dorpat. Cuando recordaba este episodio de su vida, debió embargarlo la emoción, por el modo en que dio cuenta del mismo:

«...una separación que me produjo sentimientos encontrados, por una parte el profundo sentimiento que sufrí al abandonar una estancia tan querida, entre colegas y amigos entrañables, y por otra la sincera gratitud por todas las bendiciones con que me



El gran telescopio refractor de Fraunhofer, con montaje ecuatorial, del Observatorio de Dorpat. El encargo lo realizó W. von Struve, su director entre 1820 y 1839.

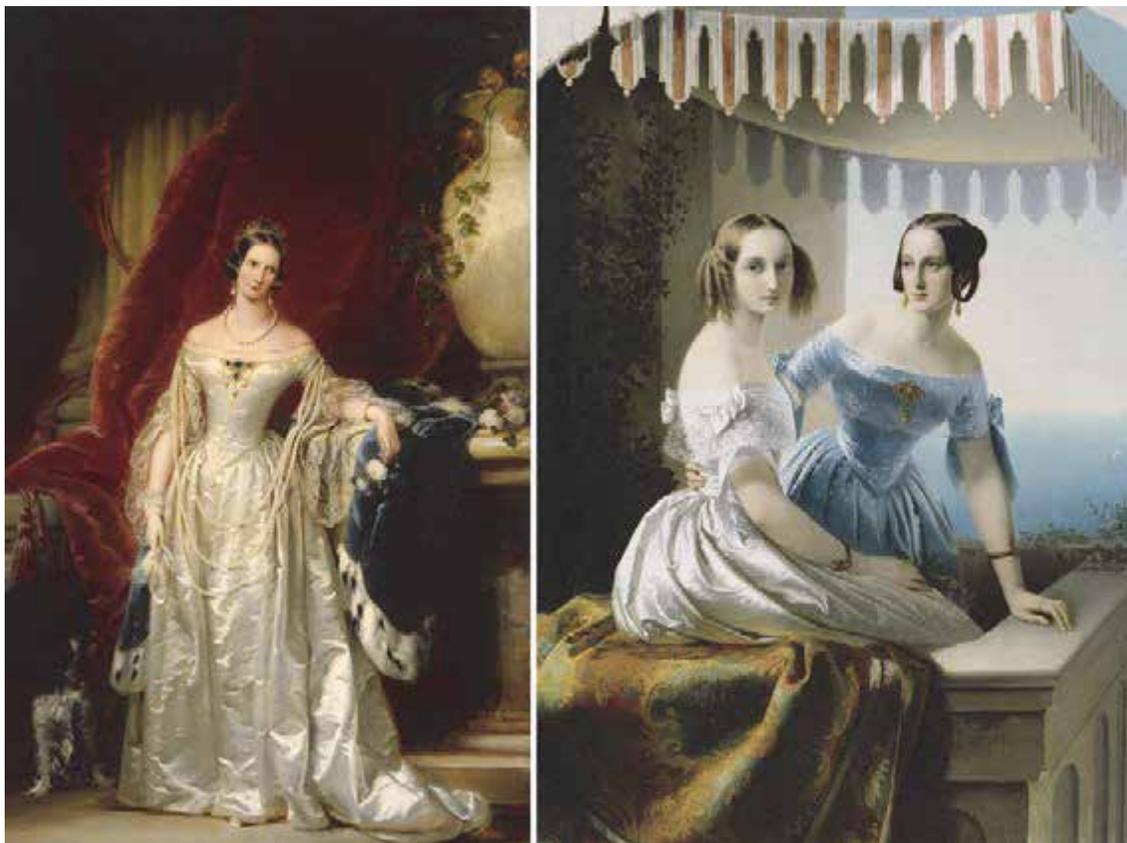
había colmado la Providencia durante toda una generación. La Universidad de Dorpat me admitió como alumno adolescente en 1808, dándome no sólo la ocasión de adquirir conocimientos, sino que también despertó en mí el interés por el estudio de la astronomía. En 1813, se dignó aceptarme entre su profesorado, y durante 26 años, apoyó constantemente los proyectos, a veces baldíos, concebidos con uno u otro objeto, bien para adquirir instrumentos notables para el Observatorio de Dorpat o para efectuar trabajos relacionados con el progreso científico».

Poco más adelante se preguntaba si dicho observatorio habría sido en realidad el germen del de Púlkovo, concluyendo con el ruego de que se le permitiera expresar hacia la Universidad de Dorpat los sentimientos de agradecimiento y reconocimiento que mandaba su corazón.

Struve contaba que a mediados del mes de abril del año 1839 se instaló en Púlkovo, pudiendo así contribuir más eficazmente a los preparativos necesarios para instalar los instrumentos astronómicos. Con la ayuda de la Comisión, asistido por los tres astrónomos adjuntos nombrados por la Academia: su hijo Otto, G. Fuss y G. Sabler, y asesorado también por Brullov y Thibaut, logró que todo estuviese dispuesto para celebrar el acto solemne de la inauguración a finales de julio. Cuando Struve examinó el contenido de todos los embalajes<sup>392</sup>, comprobó que

---

<sup>392</sup> Previamente señaló que en el mes de mayo comenzó el montaje de las dos torres móviles restantes, la oriental y la central, finalizándolo en dos meses y medio. El transporte de los instrumentos desde Munich a San Petersburgo se efectuó con toda precaución, habiéndose construido un carro ex profeso para colocar en él los instrumentos más sensibles, tales como los limbos, objetivos, niveles, etc. Junto a los que ya habían llegado proce-



La Emperatriz Alejandra Fiódorovna y sus dos hijas: Olga (izquierda) y María (derecha), en la época en que visitaron por primera vez el Observatorio de Púlkovo.

todos los instrumentos habían llegado en perfecto estado. Pocos días después procedió a su instalación, una operación que terminó con éxito en menos de seis semanas, gracias a la colaboración de los astrónomos anteriores y a la de Phort, mecánico del observatorio, secundado este último por Wetzer, luego mecánico del Observatorio de Helsinki. Finalizada la colocación de todos los instrumentos, pudo fijarse la fecha de la inauguración oficial para el 19 de agosto de 1839.

Por orden del Emperador se convocaron a todos los astrónomos rusos, siendo representado el Observatorio de Helsinki por Johan Jacob Nervander. La Academia asitió en pleno. También fueron invitadas las autoridades de San Petersburgo, los embajadores<sup>393</sup> y otras personas distinguidas. Hacia las 11 de la mañana ya estaban todos reunidos en Púlkovo, para recibir al Ministro de Instrucción Pública y Presidente de la Academia. Cuando llegó Uvarov, el almirante Greig le hizo la entrega formal del Observatorio, en nombre de la Comisión. Acto seguido se celebró misa en la sala central del observatorio, que también fue consagrado. El director tomó después la

---

dentes de Inglaterra, se subieron a bordo del barco Alexandra en Travemunde, para llevarlos hasta San Petersburgo. A la entrada del Neva los trasbordaron a otro barco para conducirlos por los canales de la ciudad y evitar el adoquinado. Los instrumentos fueron recibidos en Púlkovo en la primera semana del mes de julio; los procedentes de Hamburgo también se habían recibido unos días antes.

<sup>393</sup> Pedro de Alcántara Álvarez de Toledo y Palafox, XVII duque de Medina Sidonia, fue el embajador español entre los años 1839 y 1843.



*Vue de l'Observatoire de Poulkova, prise le 6 Décembre 1839.* Ilustración de la obra *Voyages de la Commission Scientifique du Nord en Scandinavie, Laponie, Suède, Finlande, Russie, Lithuanie, Pologne, etc; Atlas historique et pittoresque, lithographié* (1852). Se le ha superpuesto otra de Wilhelm von Struve, de la misma época que también fue incluida en la misma. La expedición científica (1838-1840), encargada por el almirantazgo francés a Joseph Paul Gaimard, navegó a bordo de la corbeta *La Recherche*.

palabra para subrayar la importancia científica del evento, agradeciendo los buenos oficios del Emperador, del Ministro y del presidente de la Comisión, sin olvidar la inapreciable labor del arquitecto. Se refirió asimismo a la responsabilidad que contraían a partir de entonces los astrónomos del observatorio, a la vez que invitaba a los otros miembros a unir sus esfuerzos en aras del mayor desarrollo de «una ciencia tan sublime». Tras el discurso se entregó a los asistentes una medalla conmemorativa de la efeméride<sup>394</sup>, con la esfigie del Emperador y la siguiente leyenda: *Nicolás I, Emperador y Autócrata de todas las Rusias*. En el reverso figuraba el edificio del observatorio, rodeado de los signos del zodiaco, con el texto: *Año 1839. Por orden del Emperador Nicolás I*. Una vez entregada la medalla se inició el recorrido por las diferentes salas del observatorio, encargándose de las explicaciones Struve, su hijo Otto y los otros dos astrónomos adjuntos. Algunos días después, y sin previo aviso, se presentó la Emperatriz Alejandra Fiódorovna<sup>395</sup>, acompañada de su hija, la gran duquesa Olga Nikolaievna, interesándose ambas por el gran telescopio y por el mecanismo de la torre mayor.

El zar, en cambio, si anunció su visita para los primeros días de octubre, fue acompañado por varios ministros y por el general Schubert; siendo recibido por Uvarov, por el Vicepresidente de la Academia de Ciencias, el príncipe Alexander Dondukov-Korsakov, por el Secretario perpé-

<sup>394</sup> Todos los textos fueron grabados en ruso.

<sup>395</sup> Nombre oficial de la zarina. Se trataba de Carolina de Prusia, hija de Federico Guillermo III de Prusia y de la duquesa Luisa de Mecklemburgo-Strelitz.

tuo Fuss y por el propio Struve. Después de haberle presentado a los otros miembros de la Comisión científica y a todo el personal del Observatorio, en la sala central del mismo, Struve guió su recorrido por las instalaciones durante dos horas y media. Durante el trayecto le fue explicando la distribución del centro, así como el uso y propiedades de los instrumentos, agradeciéndole al final de su exposición el apoyo recibido en todo momento para que el Observatorio Central fuera una realidad.

Antes de partir, el emperador felicitó a Uvarov por haberse realizado tan importante obra en su ministerio y a Struve por dirigir un establecimiento científico tan sobresaliente, ofreciéndose para garantizar la introducción de cualquier modificación que considerase necesaria en un futuro próximo. Al día siguiente, se le regaló al almirante Greig una caja con un portarretratos adornado con diamantes, al Vicepresidente de la Academia se le concedió la medalla de la primera clase, con la corona imperial, en la orden de Santa Ana, y a Struve se le nombró miembro de la orden de San Estanislao, dentro de su primera clase; asimismo se entregaron gratificaciones de 10.000 rublos a Fuss, a Brullov y al propio Struve.

La actividad científica del observatorio comenzó inmediatamente después de la inauguración, a medida que se iba consolidando la explotación de los instrumentos. La Comisión se disolvió en 1840, según comentaba Struve, aunque sus miembros continuaran asesorándolo ocasionalmente. En esos primeros años se produjeron los ajustes lógicos, de modo que el observatorio no fue plenamente operativo hasta mediados del año 1843. Struve revelaba que fue en 1840 cuando llegó, procedente de Altona, el péndulo normal construido por Heinrich Johann Kessels y cuando se fabricaron varios barómetros en los talleres del observatorio. En 1842 se recibió el buscador de cometas que había fabricado Simon Plössl en Viena, al año siguiente, Karl August von Steinhein envió su ocular heliométrico «aparato precioso destinado al gran telescopio». No obstante, indicaba Struve que aún no se habían recibido tres de los instrumentos inicialmente previstos, a saber: el antejo dialítico<sup>396</sup> con 7 pulgadas de abertura encargado a Plöss, un círculo y un sextante, ambos de reflexión. En el año 1841 se colocaron las dos miras meridianas, al Norte y al Sur del antejo meridiano, así como los dos pilares de la sala occidental, sobre los que se colocarían los visores correspondientes. El mismo año se hicieron algunas modificaciones logísticas complementarias que facilitarían los trabajos de los astrónomos durante los crudos meses de invierno, además de otras eminentemente técnicas efectuadas por el mecánico Pohrt para optimizar todavía más las prestaciones de todos los instrumentos.

La biblioteca del observatorio mereció la especial atención del director del observatorio, de hecho antes de que hubiese efectuado la compras de libros, durante sus viajes al extranjero, ya había adquirido una buena colección de libros de matemáticas procedentes de la biblioteca particular de Johann Christian Martin Bartels<sup>397</sup>, profesor de matemáticas en la Universidad de Dorpat. La Academia de San Petersburgo cedió al observatorio todas sus Memorias y la de Berlín asumió el compromiso de enviar también las de su Sección físico-matemática, desde el año 1822. En el año 1842, los astrónomos del Observatorio Universitario de Vilnius le donaron también numerosas obras antiguas, que contribuyeron en gran medida a completar «la literatura astronómica de los siglos pasados». Struve reconoció igualmente las aportaciones de instituciones

---

<sup>396</sup> Antejo acromático en el que la dispersión del color producido por una sola lente se corrige con otra cóncava menor, o por un sistema de lentes.

<sup>397</sup> Este profesor alemán había dado clase a Gauss, cuando ambos vivían en Wendengraben.

H. W. Matthäus Olbers y la primera página de su trabajo, de 1823, titulado *Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraums*, publicado en *Berliner astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1826*; en él formuló su famosa paradoja: en un universo estático el cielo nocturno debería estar iluminado por las infinitas estrellas. Olbers descubrió los asteroides Pallas (1803) y Vesta (1807), siguiendo para el primero las predicciones de Gauss. Se representa también un bajorrelieve del monumento dedicado a Olbers en la ciudad de Bremen.



Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraums,  
vom Hrn. Dr. Olbers in Bremen, un-  
term 7. Mai 1823. eingesandt.

Groß und klein im Raume sind freilich nur relative Begriffe, und wir können uns Geschöpfe gedenken, für die ein Sandkorn so groß ist, als für uns die ganze Erde; so wie im Gegentheil eine andere Ordnung der Dinge, in der Körper, die die Größe ganzer Planeten und Sonnen übertreffen, nur das sind, was uns die kleinsten Sandkörner zu sein scheinen. Aber eben deswegen bleibt es dem Menschen natürlich, die Größe oder Kleinheit nach einem Maaßstabe zu beurtheilen, bei dem mittelbarer oder unmittelbarer Weise die Größe seines eigenen Körpers, und seiner damit verglichenen nächsten Umgebungen zum Grunde liegt. Nur nach einem solchen Maaßstabe schätzt der Mensch die Größe der Dinge, und so muß er mit staunender Bewunderung die ungeheuern Dimensionen desjenigen Theils des großen Weltalls betrachten, der sich nach und nach seinem immer stärker bewaffneten Auge aufschließt. Schon der Abstand der Sonne von unserer Erde so groß, daß man, um sich diese Größe begreiflich-

científicas rusas y del extranjero, las de diversos astrónomos y las de otros particulares<sup>398</sup>. Sin embargo destacó entre todas ellas la conseguida a través de la compra que se hizo en 1841, para adquirir la biblioteca privada de Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers en Bremen<sup>399</sup>. Struve concluyó su referencia mostrando su confianza en que si se seguía con la misma política de adquisiciones durante algunos años, «habríamos conseguido dotar al Observatorio Central de una biblioteca, de las más completas que existirían en lo tocante a astronomía y matemáticas».

El funcionamiento del Observatorio se rigió por el reglamento que ya había aprobado y firmado Su Majestad Imperial, en Varsovia, el 19 de junio de 1838. Escrito en ruso y en francés, constó de 26 artículos, señalando el segundo de ellos sus principales cometidos:

*El Observatorio Central tiene por objeto: a) efectuar observaciones continuadas y tan perfectas como posibles, tendentes a perfeccionar la Astronomía como ciencia; b) proporcionar las observaciones correspondientes, indispensables para las empresas geográficas del imperio y para las expediciones científicas en general; en fin c) contribuir, por todos los medios, al perfeccionamiento de la astronomía práctica en sus aplicaciones a la geografía y a la navegación, y ofrecer a las personas que lo desearan la ocasión de participar en la determinación geográfica de lugares.*

*Nota. Para alcanzar ese triple objetivo, el Observatorio Central se dota de una colección completa de los instrumentos modernos más perfectos. Por otra parte, se prevé en sus presupuestos una suma para el mantenimiento y reparación de los instrumentos, para comprarlos nuevos a medida que el progreso de la ciencia y de las artes*

<sup>398</sup> Tanta donación permitió formar una nueva biblioteca a partir de los ejemplares duplicados, especialmente de autores contemporáneos, la cual fue cedida, previa autorización de Uvarov, al Observatorio de la Universidad de San Vladimir en la ciudad de Kiev.

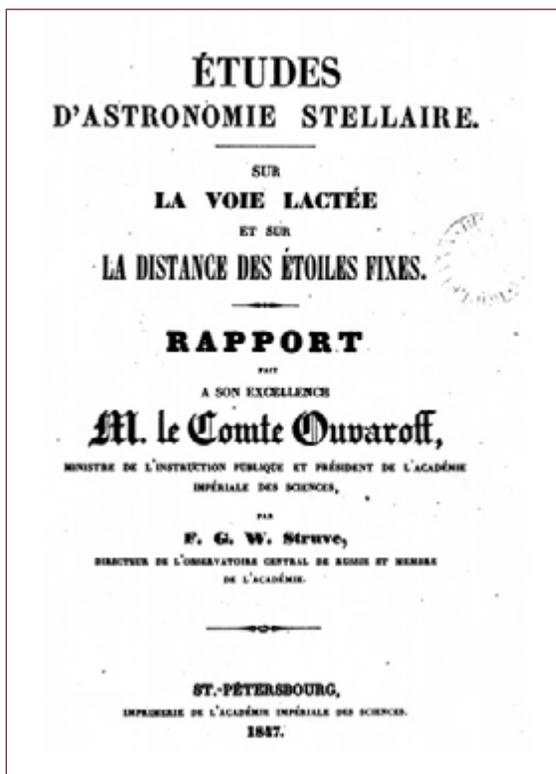
<sup>399</sup> Esa biblioteca era considerada desde mucho tiempo atrás como una de las más ricas de Alemania, en materia de Astronomía y más concretamente en cometografía.

*lo exijan, para hacer frente a los gastos que pudieran ocasionar los trabajos u observaciones extraordinarias.*

Las páginas siguientes de la Descripción del Observatorio de Púlkovo se refirieron a la geomorfología del emplazamiento, a los edificios, al análisis pormenorizado de todos los instrumentos<sup>400</sup>, a los talleres y a su biblioteca. Reservándose el último de sus capítulos a la actividad científica del establecimiento: plan de las observaciones, trabajos ejecutados en los primeros cinco años de su existencia, latitud y longitud del Observatorio, latitud y longitud de los tres observatorios de San Petersburgo<sup>401</sup>.

Al concluir su trabajo, Struve agradeció de nuevo el mecenazgo, sin parangón en la historia de la astronomía, que había hecho posible la construcción del observatorio. Con demasiada prudencia dejaba para el futuro el juicio que merecería el papel jugado por el Observatorio de Púlkovo en el progreso de las ciencias<sup>402</sup>. Cuando han pasado doscientos años desde que se iniciaron los trabajos para la medida del gran arco ruso, es justo reconocer que el referido observatorio fue el más representativo del siglo XIX, haciendo que San Petersburgo fuese considerada durante mucho tiempo la capital astronómica del mundo<sup>403</sup>.

En los próximos setenta y cinco años la actividad científica del Observatorio se desarrolló con toda normalidad, realizando los astrónomos sus observaciones e investigaciones con el aprovechamiento esperado. Tanto W. von Struve como su hijo Otto Wilhelm, el cual le sucedió en la dirección del centro entre los años 1862 y 1889, fueron indudablemente las figuras más sobresalientes de esa primera etapa del Observatorio de Púlkovo. Al primer director se debió una publicación astronómica que conviene subrayar: *Études d'astronomie stellaire. Sur la voie lactée et*



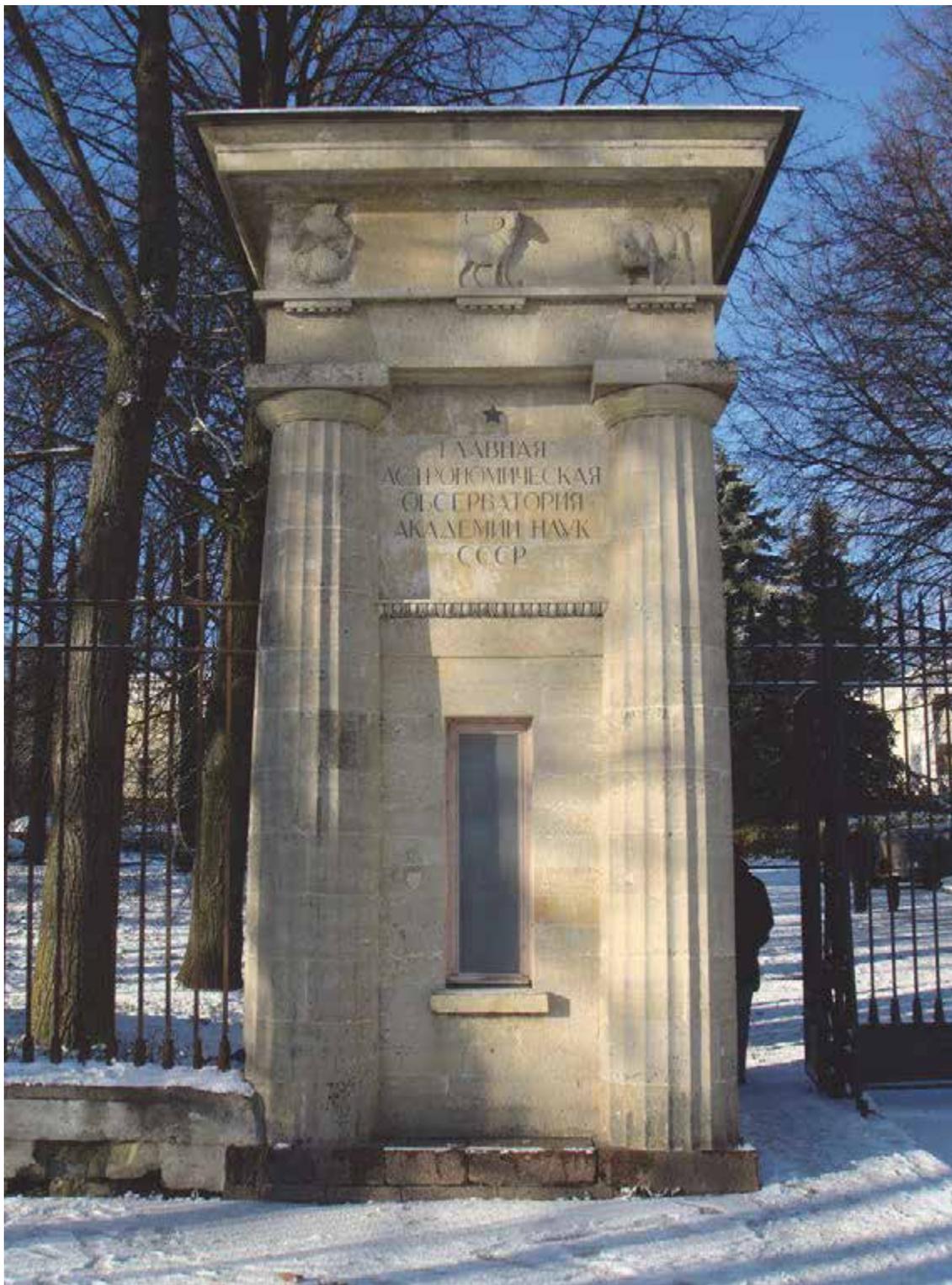
Estudios de Astronomía estelar. Sobre la vía Láctea y sobre la distancia de las estrellas fijas. Obra de Struve dedicada al conde Uvarov, Ministro de Instrucción Pública y Presidente de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

<sup>400</sup> Digamos a título de ejemplo que en la gran torre central se instaló el telescopio refractor de 15 pulgadas de objetivo, con montaje paraláctico, que habían construido en Munich los sucesores de Fraunhofer; los cuales suministraron igualmente el heliómetro de la torre oriental.

<sup>401</sup> El de la Academia de Ciencias, el del Estado Mayor y el del Cuerpo de Cadetes de la Marina.

<sup>402</sup> El astrónomo y matemático norteamericano Simon Newcomb, comentaba en su *Compendium of Spherical Astronomy* que una observación efectuada con el círculo vertical de Púlkovo equivalía a 20, 30 o 40 de las rutinarias practicadas con el círculo meridiano.

<sup>403</sup> Según S. Newcomb, fue su compatriota Benjamin Apthorp Gould el primero en llamar a Púlkovo «la capital astronómica del mundo».



Reconstrucción de una de las dos garitas neoclásicas que flanquean la entrada principal al Observatorio de Púlkovo, muestra inequívoca de la magnificencia de los otros edificios del complejo. En el friso se representan tres signos del zodiaco: Piscis, Aries y Taurus.

*sur la distance des étoiles fixes* (1847), en ella reveló la existencia de la absorción de la luz en el espacio interestelar e hizo una magistral exposición histórica sobre el desarrollo de nuestro conocimiento acerca de la estructura del sistema estelar.

La dirección de su hijo Otto fue también muy fructífera, debiendo destacar su cálculo de la constante de precesión: *Bestimmung der Constante der Präcession und der eigenen Bewegung des Sonnensystems*<sup>404</sup>, por el que se le concedió la medalla de oro de la *Royal Astronomical Society* en 1850. Por iniciativa suya se instaló en 1885, como recuerdo de los primeros cincuenta años del observatorio, un gran telescopio refractor con un objetivo de 76 cm y una distancia focal de 12.8 m. Con él observó los satélites de Urano y Neptuno, y midió los anillos de Saturno.

El segundo periodo del observatorio fue en cambio demasiado convulso, por calificarlo benévolutamente, debido a dos acontecimientos que conmocionaron al mundo civilizado y afectaron trágicamente a la institución: la revolución rusa, con el consiguiente conflicto civil, y la segunda



Otto Wilhelm von Struve sobre una fotografía del Observatorio de Púlkovo, durante la época en que lo dirigió (1862-1889).

---

<sup>404</sup> Determinación de la Constante de Precesión con respecto al Movimiento Propio del Sistema Solar. Se publicó, en su versión original, en las Memorias de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

guerra mundial. La posición estratégica ocupada por la colina del observatorio hizo que en sus alrededores se produjeran varias escaramuzas entre blancos y bolcheviques. Sin embargo, la férrea censura, impuesta por la tiranía de Stalin, no permitió que fuese conocida por el gran público la represión desatada contra los astrónomos rusos, hasta las décadas de los años sesenta y setenta del siglo pasado.

Es más, generalmente sólo se cantaban las excelencias de la revolución por la importante contribución de la URSS al desarrollo de la astronomía, con la construcción de nuevos centros de investigación y observatorios. Un ejemplo aparece en el artículo *The Pulkovo Observatory*, publicado por Aleksandr Aleksandrovich Mikhailov en *Astrophysics and Twentieth Century Astronomy* (1955). Mikhailov, director del Observatorio desde 1947 a 1964, señalaba: «desde la revolución se ha ampliado considerablemente el órgano de dirección del Observatorio, aumentando varias veces el número de científicos y el del personal técnico». Sus palabras no fueron más que un cruel sarcasmo, pues en el colectivo de astrónomos era notorio que muchos de sus miembros habían desaparecido a consecuencia de la purga, tan tristemente célebre<sup>405</sup>. El primero que sí se pronunció libremente sobre el particular fue precisamente el astrónomo americano Otto Struve, bisnieto de F. G. W. von Struve, junto al historiador de la ciencia R. A. Mc Cutcheon<sup>406</sup>. La autora ya mencionada comentó que los historiadores podrían proporcionar informaciones complementarias desde el momento en que fuesen públicos los archivos de la KGB (*Komitet Gosudárstvennoy Bezopásnosti*)<sup>407</sup>.

Dos de los lugares en que se cebó la represión fueron Leningrado<sup>408</sup> y el Observatorio de Púlkovo. La primera víctima fue el astrónomo Borís Vasílievich Númerov, un astrónomo y geofísico ruso universalmente conocido<sup>409</sup>, Director del Instituto Astronómico de Leningrado. Arrestado, junto a gran parte de sus colaboradores fue asesinado en la cárcel el 15 de septiembre de 1941. El destino del Observatorio de Púlkovo fue todavía más terrible. Más de la cuarta parte de su plantilla científica fue arrestada entre el final de 1936 y la mitad de 1937, unos arrestos que, para sembrar más terror, fueron acompañados por los de algunos miembros de sus familias. Casi todos los astrónomos encarcelados perecieron durante su cautiverio, incluido el director Boris Petrovich Gerasimovich<sup>410</sup>, renombrado astrofísico teórico y miembro correspondiente de la *Royal Astronomical Society*. Tal como comentaba A. I. Eremeeva fue el último en ser detenido, a finales del mes de junio de 1937, y el primero en ser asesinado (entre el 28 y el 30 de junio). Se da la penosa circunstancia de que a la familia se le comunicó, siguiendo la macabra costumbre

---

<sup>405</sup> Alina Iosifovna Eremeeva indica en su artículo *Political repression and personality: the history of political repression against soviet astronomers* (1995), que los datos preliminares muestran que no menos del 10% de todos los astrónomos fueron víctimas de la misma.

<sup>406</sup> O. Struve (*About a Russian astronomer, Sky and telescope*.1957). R. A. Mc Cutcheon (*The 1936-1937 purge of Soviet astronomers, Slavic review*.1991).

<sup>407</sup> Comité para la Seguridad del Estado.

<sup>408</sup> San Petersburgo fue nombrada así desde el 24 de enero de 1924 (muerte de Lenin) hasta el 8 de septiembre de 1991. Realmente en el momento del cambio se llamaba Petrogrado, denominación que mantuvo entre el 31 de agosto de 1914 hasta el 24 de enero de 1924.

<sup>409</sup> Había sido astrónomo del Observatorio de Púlkovo y formado catálogos estelares usando las observaciones de planetas menores. Desarrolló también métodos e instrumentos para efectuar prospecciones gravimétricas. Los alemanes le habían dado su nombre (Numerowia) a uno de los planetas menores, apuntándose la posibilidad de que algún ignorante lo considerase como prueba irrefutable de su condición de espía alemán.

<sup>410</sup> También lleva su nombre el asteroide 2126 Gerasimovich (1970 QZ), descubierto el 30 de agosto de 1970 por Tamara Mikhaylovna Smirnova en el Observatorio Astrofísico de Crimea.



Boris Petrovich Gerasimovich uno de los principales astrónomos asesinados durante la purga de Stalin. Junto a él figura el gran telescopio instalado en el Observatorio de Púlkovo durante el año 1885. La escala de la figura la proporcionan las personas que aparecen en la misma. El instrumento fue construido en los talleres de la firma americana Alvan Clark & Sons, precisamente fueron sus lentes las únicas que se salvaron tras ser destruido el observatorio durante la segunda guerra mundial.



del régimen, que había sido condenado a una pena de diez años de prisión sin derecho a correspondencia. Hasta el año 1989 no se conoció el verdadero significado de tan ignominiosa condena, 32 años después de su rehabilitación.

Aún no se había recuperado el observatorio de la catástrofe anterior<sup>411</sup>, cuando recibió el golpe definitivo que redujo a escombros sus instalaciones, aunque se pudiesen salvar algunos elementos de los principales instrumentos, por el interés y esfuerzo de los astrónomos, que en agosto de 1941 se vieron obligados a trasladarse hasta Leningrado<sup>412</sup>. Mikhailov comentaba, en el trabajo ya citado, que los astrónomos se llevaron consigo las componentes ópticas de los grandes refractores, el telescopio solar y una parte considerable de la biblioteca<sup>413</sup>. Alexander A. Gurshtein y Constantin V. Ivanov<sup>414</sup>, resumieron perfectamente lo sucedido en el observatorio, después de que la Wehrmacht controlase sus alrededores en 1941 y usase el lugar como base de

---

<sup>411</sup> Hoy día se admite que la mayoría de los astrónomos del Observatorio de Púlkovo fueron encarcelados y asesinados, siguiendo igual suerte que su director.

<sup>412</sup> El sitio de la antigua ciudad de San Petersburgo fue una de las operaciones más cruentas de la segunda guerra mundial. En el tiempo que duró, entre el 15 de septiembre de 1941 y el 10 de junio de 1944, se cree que hubo más de un millón de muertos. Al parecer Hitler tenía especial empeño en conquistar la ciudad que había sido capital del imperio ruso y cuna de su revolución, sin importarle, de acuerdo con su egolatría asesina, las posibles víctimas y las condiciones tan inhumanas que tuvieron que padecer todos sus habitantes.

<sup>413</sup> El 5 de febrero de 1997 se produjo un incendio provocado en la biblioteca del observatorio, destruyéndose alrededor de 1500 libros de los más de 3800 almacenados, resultando dañados enseres e instrumentos de su interior.

<sup>414</sup> *Science feast whilst the public starver: a note on the reconstruction of the Púlkovo Observatory after World War II. Russian Academy of Sciences (Institute for History of Science and Technology). 1995. Journal for the History of Astronomy, pp: 362-368.*

su fuego artillero sobre la ciudad. El contrataque del Ejército Rojo hizo que los nazis abandonasen la colina de Púlkovo y se instalaran a sus pies, aunque como efecto colateral quedase destruida la sede del observatorio en el transcurso de la operación, ya que este fue constantemente bombardeado por los dos contendientes durante los más de dos años y medio que duró la ocupación alemana. En este artículo se recuerda además que, de acuerdo con Tatjana V. Krat<sup>415</sup>, un oficial ruso, que era también topógrafo, logró salvar la tumba de W. von Struve, enmascarándola con montones de desperdicios.

Antes incluso de que finalizara la guerra, acordó el gobierno soviético, en marzo de 1945, que se reconstruyera el observatorio. Los trabajos se iniciaron en 1946 y al año siguiente ya se había instalado un telescopio cenital, con el que se hicieron determinaciones sistemáticas de la latitud. Seguidamente se fueron colocando los antiguos instrumentos, reparados y modernizados, y otros nuevos, adquiridos igualmente por decisión gubernamental. Los edificios fueron reconstruidos siguiendo el proyecto primitivo de Brullov, aunque se transformasen ciertos detalles técnicos y se incluyesen otros tan modernos como las cúpulas semi esféricas de las tres torres principales. La parte oriental, ocupada antes por los apartamentos del cuerpo directivo, fue destinada a laboratorios. La occidental fue rehabilitada como una gran sala de conferencias. El terreno ocupado por el complejo del observatorio se amplió considerablemente, hasta alcanzar una superficie triple de la original. Se construyeron además varias viviendas, incluyendo un confortable hotel con cerca de cincuenta habitaciones. Sin embargo, tal como apuntaba Gursthtein e Ivanov, se trató de una rehabilitación no exenta de polémica, puesto que se comenzó cuando Leningrado estaba todavía en ruinas y padeciendo sus sufridos habitantes toda clase de calamidades.

Por otra parte, la reconstrucción del Observatorio de Púlkovo fue demasiado peligrosa, puesto que sus alrededores estaban materialmente sembrados de bombas y minas. En el periodo 1950-1951 se produjeron 17 accidentes, que afectaron tanto a los astrónomos como a los obreros, con resultados fatales en 13 de ellos. La urgencia mostrada por las autoridades rusas no resulta muy comprensible, aunque hubiese prevalecido un interés eminentemente científico. Parece obvio que el nuevo proyecto no obedeció a esa razón: en esa época había aumentado de forma considerable la contaminación lumínica y atmosférica en el observatorio, por la gran expansión de la ciudad, aparte de la dificultad que suponía para las investigaciones astronómicas contar con el aeropuerto de Púlkovo en las inmediaciones del mismo, desde su finalización en el año 1932.

En la propia Academia de Ciencias de Rusia se creía en 1995 que el plan tan pomposo de la restauración de la ciencia en la antigua Unión Soviética obedeció más a la apariencia que a la necesidad<sup>416</sup>, así quedó reflejado en el artículo de Gurshtein e Ivanov ya referido, indicándose además la escasa intervención que tuvieron los astrónomos en la recuperación del observatorio. Ambos autores concluyeron su trabajo indicando que a partir de la década de 1960, el Observatorio de Púlkovo fue perdiendo su liderazgo, hasta el extremo de que su título de Observatorio Astronómico Principal, sólo es el recuerdo de su pasado esplendor.

---

<sup>415</sup> *My Past Experience: Púlkovo Observatory in 1938-1954 (Historical Astronomical investigations)*. 1989 (pp. 369-386).

<sup>416</sup> También parece sintomático que la dirección del proyecto de reconstrucción fuese encargada, durante unos años, al renombrado arquitecto, y miembro de la Academia de Ciencias, Alekséy Viktorovich Shchúsev, al cual se debió el mausoleo de Lenin y el famoso edificio, sede central de la KGB, Lubjanka, situado en la plaza moscovita de igual nombre.



Ruinas del Observatorio de Púlkovo tras la batalla de Leningrado en la segunda guerra mundial. Monumento en su meridiano, enfrente del edificio principal; el texto reza así: *Eterna memoria a los héroes guardianes que cayeron en la batalla por la Ciudad de Lenin. Enero de 1944.*



Portada principal de la cúpula central del Observatorio de Púlkovo, encima de la puerta figura en números romanos el año de su inauguración (MDCCXXXIX). Se ha superpuesto la imagen del arquitecto que dirigió su reconstrucción: Aleksy Viktorovich Shchúsev.

Aunque se hubiese acordado con la Unión Astronómica Internacional que la ceremonia oficial de la reinauguración del observatorio coincidiera con la asamblea que iba a celebrar aquella en el año 1951, razones políticas hicieron que se pospusiera hasta el mes de mayo de 1954. A tan solemne acto asistieron centenares de científicos soviéticos y un grupo de cincuenta astrónomos extranjeros: dieciocho europeos y el resto de Asia y América, algunos tan destacados como Louis André Danjon<sup>417</sup> y el holandés Pieter Theodorus Oosterhof, Secretario General de la Unión y Director del Observatorio Astronómico de Leiden, el primero del mundo integrado en la universidad correspondiente<sup>418</sup>. Con tal motivo se celebraron dos importantes conferencias, una sobre Astrometría y otra dedicada al Estudio de las estrellas variables.

En recuerdo de tan señalado acontecimiento, se emitió en la URSS un sello en el que destacaba la imagen del observatorio recientemente construido, figurando en la parte superior tres de

<sup>417</sup> Por entonces era Director del Observatorio de Paris. Una de sus aportaciones más notables fue el diseño del astrolabio de prisma, instrumento con el que se perfeccionó la determinación de las coordenadas estelares y geográficas, aunque también se emplease para el estudio de la rotación de la Tierra y para la medida del radio solar.

<sup>418</sup> Se creó en el año 1633 para instalar en él el cudrante mural de Rudolph Snel van Royen, más conocido por el nombre latino de Snellius. No obstante el observatorio más antiguo ya estaba construido en Castel Gandolfo (1580), la llamada Torre gregoriana; levantada para contribuir con las observaciones de Christoph Clavius a la reforma del calendario.

sus primeros directores: Vasily Yakovlevich Struve, en el centro; Fyodor Aleksandrovich Breddikhin<sup>419</sup>, tercer director (1890-1895) a la izquierda, y Aristarkh Apollonovich Belopolsky, quinto director (1916-1919) a la derecha. La imagen del Observatorio de Púlkovo fue difundida en varias ocasiones más, en una de ellas aparecía en una tarjeta postal del año 1964, junto a la constelación de la Osa Mayor, y a un matasellos con el mismo logotipo del centro, que festejaba su 125 aniversario. Al cumplirse en el año 1989 los 150 años de su inauguración<sup>420</sup> se volvió a emitir un sello con el fondo del observatorio, en el que figuraron además su primer gran telescopio y el gran radiotelescopio que se instaló precisamente en el año 1954.

Finalmente, en 2014, su director Alexander Vladimirovich Stepanov organizó una serie de conferencias en recuerdo de los 175 años, celebradas entre los meses de junio y octubre; debiendo subrayar las jornadas celebradas del 22 al 24 de septiembre, dedicadas a los Sistemas de Referencia espacio-temporales. También debe citarse la inclusión en la página web de la Biblioteca Presidencial<sup>421</sup>, creada por Vladimir Putin, de documentos inéditos del centro que tanto contribuyó al desarrollo de la astronomía y de la geofísica en la Academia de Ciencias de Rusia. Entre ellos sobresale la digitalización de diversos documentos oficiales relacionados con la creación del Observatorio de Púlkovo. Uno de ellos es una carta escrita en 1910 por el Presidente del Consejo de Ministros, Pyotr Stolpin, y dirigida al Ministro de Finanzas, pidiéndole que librase fondos para el observatorio, reconociendo a la vez la importancia de la institución para el estudio de las diferentes capas atmosféricas, no sólo por su innegable interés científico sino también por sus importantes aplicaciones prácticas.



Asistentes a la inauguración del Observatorio de Púlkovo en mayo de 1954, junto al sello conmemorativo de la efeméride.

<sup>419</sup> Dos años después, en 1956, volvió a emitirse otro sello ruso con su imagen y la del observatorio, adornado con un cometa, para recordar el 125 aniversario del astrónomo.

<sup>420</sup> La efeméride tuvo también repercusiones académicas, como la protagonizada por Alan H. Batten con su artículo «Dorpat and Púlkovo - an Astronomers Pilgrimage», incluido en el volumen número 84 del *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*.

<sup>421</sup> Ahora llamada de Boris Yeltsin, tiene su sede en la ciudad de San Petersburgo, casi en frente de donde estuvo situado el primer Observatorio Astronómico de la ciudad.



Sellos conmemorativos del 125 y del 150 aniversario del Observatorio de Púlkovo.



*Cuando se adoptó durante la Ilustración el modelo elipsoidal de la Tierra, surgieron de inmediato numerosos proyectos con la intención de obtener los valores geométricos de los parámetros que los definían. De entre todos ellos, se destaca en este trabajo el que se inició en el año 1816 y finalizó en el 1855; el cual sería declarado, muchos años después, por la UNESCO Patrimonio de la Humanidad. Para llevarlo a cabo se midió un gran arco de meridiano que enlazó geodésicamente el Delta del Danubio con el mar Glacial, su amplitud fue de  $25^{\circ}20'$  y su desarrollo próximo a los 2.900 km. Los protagonistas fueron astrónomos y geodestas, rusos y escandinavos, coordinados todos ellos por el alemán Friedrich Georg Wilhelm von Struve, director que fue del Observatorio de Dorpat (Tartu) y de Púlkovo. Tan ambiciosa operación geométrica no hubiese sido posible sin contar con el respaldo institucional de las Academias de Ciencias afectadas, y sobre todo de la Imperial de San Petersburgo, además de la financiación de los gobiernos respectivos. Aunque España no participara en la brillante empresa, si le cupo el honor de haber sido la primera que empleó el elipsoide de Struve, para formar nuestro Mapa Topográfico Nacional, gracias a la iniciativa del insigne Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero, fundador y primer director del Instituto Geográfico.*