

# Grupo A. Temas generales

## Grupo A.3 Topografía y Cartografía

- Tema 49. Medida de ángulos y distancias en Topografía: Instrumentos, errores. Métodos de observación. Reducción de las medidas. Calibración y contrastación de instrumentos.
- Tema 50. Redes topográficas: triangulación y trilateración. Intersección directa. Intersección inversa. Intersección mixta. Cálculo y compensación. Proyecto y observación de redes topográficas.
- Tema 51. Poligonación y radiación: observación, cálculo y compensación de poligonales. Tolerancias y errores de cierre. Método de radiación. Nivelación trigonométrica. Nivelación geométrica: métodos de observación, errores y tolerancias.
- Tema 52. Levantamientos topográficos: red básica y de detalle. Elección de métodos e instrumentos según la precisión, escala y extensión. Levantamientos batimétricos.
- Tema 53. Levantamientos topográficos con GPS: medición de código y de fase. Instrumentación. Métodos de medida: estáticos y cinemáticas, postproceso y tiempo real. Transformación de coordenadas. Redes de correcciones diferenciales en tiempo real.
- Tema 54. Geometría diferencial de superficies: representación analítica y cambio de curvas paramétricas. Primera forma fundamental, ángulo entre dos direcciones tangentes en un punto. Normal y plano tangente. Loxodrómicas. Segunda fórmula fundamental. Teorema de Meusnier. Teorema de Euler. Indicatriz de Dupin. Curvatura de Gauss y curvatura media.
- Tema 55. Representación del elipsoide en el plano, proyecciones cartográficas. La retícula geográfica, ecuaciones. Transformación de elementos diferenciales, concepto de escala, deformación angular y acimutal. Elipse de distorsión o indicatriz de Tissot. Distorsión por curvatura de las líneas geodésicas en la proyección y su corrección. Clasificación de las proyecciones atendiendo a las deformaciones.
- Tema 56. Representación plana Conforme: Proyecciones conformes. Sistemas isométricos del elipsoide, de la esfera y del plano. Correspondencia entre sistemas isométricos mediante funciones analíticas. Condiciones de Conformidad Cauchy-Riemann. Líneas isométricas. Isométrica estacionaria o base. Ejemplos de proyecciones conformes. Proyecciones conformes en geodesia.
- Tema 57. Curvatura de la transformada plana de una geodésica. Fórmula de Schols-Laborde. Curvatura de la transformada plana conforme de una curva cualquiera. Cálculos sobre alteraciones lineales y angulares en las proyecciones conformes. Factor de reducción de escala.
- Tema 58. Proyecciones equidistantes, ejemplos de cilíndrica y cónica. Proyecciones equivalentes. Condiciones de equivalencia. Latitud autállica, radio de la esfera equivalente. Utilización de las proyecciones equivalentes y ejemplos.
- Tema 59. Proyecciones cónicas y pseudocónicas. Proyección cónica conforme de Lambert: Definición a través de sistemas isométricos y construcción geométrica. Aplicaciones en España y al mapa del mundo. Proyección de Bonne. Proyección policónica.
- Tema 60. Proyecciones cilíndricas y pseudocilíndricas. Proyecciones cilíndricas conformes directa y transversa. Proyección Mercator. Proyección cilíndrica transversa de Gauss-Krüger y UTM: características, desarrollo, convergencia y deformaciones.
- Tema 61. Proyecciones acimutales ortográficas, gnomónicas y estereográficas. Perspectivas escenográficas. Proyección acimutal equivalente y equidistante. Proyecciones poliédricas.
- Tema 62. Definición de cartografía y mapas. Mapas: función; características básicas; tipos según la escala; según la adquisición de los datos (cartografía básica y derivada); según la función y según el tema. Conceptos de cartografía: enfoques geométrico, tecnológico, de presentación, artístico, de comunicación. Fases del proceso cartográfico y su relación con los enfoques citados.
- Tema 63. Cartografía y sistemas de producción: definiciones y objetivos. Sistemas cartográficos y modelos de comunicación. Fases generales del sistema de producción cartográfica. Cartografía digital de imagen.
- Tema 64. La representación del territorio: Sistema de producción cartográfica. Sistema cartográfico de representación: diseño, redacción, semiología gráfica, color en cartografía, técnicas cartográficas, reproducción y explotación
- Tema 65. Contenidos de la información: generación de nomenclaturas. Clasificación y leyenda. Procesos de normalización y armonización de nomenclaturas.
- Tema 66. Técnicas cartográficas actuales: producción electrónica de cartografía y documentos. Edición electrónica. Transformación analógica/ digital y digital/analógica. Salidas de la información. Transformación de datos: correcciones, conversiones y fusión.
- Tema 67. Plan de calidad en Cartografía. Definición. Calidad de producto y procesos. Modelos de calidad (definición de calidad). Control de calidad (comprobación de la calidad). Mejora de la calidad (gestión de calidad).
- Tema 68. Cartografía Temática. Definición, clasificación. Naturaleza de los fenómenos geográficos y selección de símbolos temáticos. Simbolización en los mapas temáticos cualitativos. Técnicas de simbolización en los mapas temáticos cuantitativos. Fundamentos de diseño y composición de mapas temáticos. Diseño y producción de atlas temáticos. Atlas nacionales.
- Tema 69. El Mapa Topográfico Nacional a escalas 1/50.000 y 1/25.000: Antecedentes. Descripción general de las series. Especificaciones de contenido de cada serie. Fases del proceso cartográfico en cada serie. Principales características técnicas de las diferentes actividades del proceso cartográfico de cada serie. Procesos de actualización.
- Tema 70. Visualización de información geográfica. Cartografía interactiva, multimedia, hipermedia; cartografía animada; visualización 3D de información geográfica; visualización en realidad virtual; cartografía en Internet: fundamentos, metodologías y tecnologías.

## **Tema 49. Medida de ángulos y distancias en Topografía: Instrumentos, errores. Métodos de observación. Reducción de las medidas. Calibración y contrastación de instrumentos.**

### **49.1. Medida de ángulos y distancias en Topografía: Instrumentos y errores**

#### **49.1.1. Introducción**

En general, se denominan goniómetros a los instrumentos que tienen la capacidad de medir ángulos, entre los cuales hay diferentes instrumentos incluidos en esta clasificación, como son: el teodolito, la brújula taquimétrica, el taquímetro, etc. Sin embargo, la tecnología electrónica ha dejado a estos instrumentos para la historia, por lo que este tema se centrará en la descripción y características de la estación total, instrumento con capacidad para medir simultáneamente ángulos y distancias y que es usada actualmente para todo tipo de tareas en topografía clásica en tareas en las que no se puede utilizar el GPS, instrumentación que a su vez ha desbancado a todos los instrumentos de topografía actualmente por su versatilidad, comodidad y rendimiento.

Hasta hace poco tiempo no existían apenas modelos de estaciones totales con alta precisión en la medida de ángulos, por lo que algunos instrumentos clásicos seguían en vigencia para aplicaciones de alta precisión. Sin embargo, actualmente se han desarrollado numerosos modelos de estaciones totales que permiten la medición de ángulos de manera automática (sin intervención del operador) con una precisión de  $1^{\circ}$  y medición de distancias con una precisión mejor que  $1 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$ , precisiones más que suficientes para los trabajos más exigentes.

#### **49.1.2. Medida de ángulos**

Todos los instrumentos tienen tres ejes principales:

- Eje principal o vertical: es el eje sobre el que gira la alidada. La alidada es la parte del instrumento que se mueve alrededor del eje vertical y sus distintas posiciones marcan las lecturas angulares horizontales.
- Eje secundario o de muñones: eje alrededor del cual gira el anteojo y sus diferentes posiciones marcan las lecturas angulares verticales.
- Eje de puntería o de colimación: eje hacia el que se dirige una visual a un objeto para medir sus ángulos horizontales y verticales respecto al punto de estación.

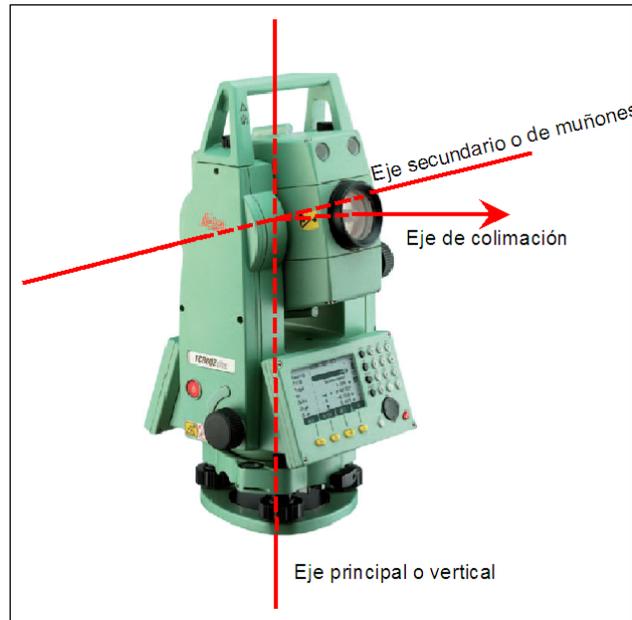


Figura 1. Ejes de un instrumento topográfico.

En un instrumento bien construido y corregido, el eje principal ha de ser perpendicular al eje de muñones y el eje de muñones, a su vez, perpendicular al eje de colimación. A su vez, los tres ejes deben de cortarse en un punto. En un instrumento corregido, en el anteojo, debe coincidir el eje de colimación con el eje óptico (recta que une el centro óptico del objetivo con el centro óptico del ocular).

Cuando un instrumento se pone en estación en un punto, el eje principal debe ser vertical pasando por el punto en el suelo sobre el que se estaciona y el giro de la alidada sobre este eje debe marcar un plano horizontal, siendo por tanto el eje de muñones también horizontal.

- **Componentes accesorios de una estación total**

- Plomada óptica: el estacionamiento se realiza de tal forma que el eje principal ha de pasar por el punto de estación señalado en el suelo. Para ello se emplea la plomada óptica, la cual consiste en un anteojo con retículo y un prisma de reflexión a  $90^\circ$  en coincidencia con el eje principal del instrumento, a través del cual se observa durante la operación de estacionamiento el punto del suelo.

- Plataforma nivelante: parte del instrumento que se apoya sobre la meseta del trípode con tres tornillos que pueden moverla sobre la vertical, de tal forma que actuando conveniente sobre ellos, se pone el eje principal del aparato en posición vertical.
- Tornillos de presión y coincidencia: para dirigir la visual a un punto (colimar), la alidada y el anteojo han de girar respecto del eje vertical y el eje de muñones respectivamente. Cuando se fija la visual en un punto de forma aproximada, se aprietan unos tornillos "de presión" de tal forma que se impiden ambos movimientos. Seguidamente, con los tornillos de coincidencia, se puede ajustar la colimación al objeto tanto en movimiento horizontal (de la alidada) como en vertical (del anteojo) de una manera fina.
- Niveles: dispositivos para realizar el estacionamiento de tal manera que el eje principal del aparato quede perfectamente vertical. Consisten en recipientes cerrados con una cierta curvatura (niveles tóricos) en los que se introduce un líquido de poca viscosidad como éter o alcohol y una pequeña burbuja de aire.

La sensibilidad de un nivel es una de las características más importantes que tienen los instrumentos niveladores y es el ángulo de giro sobre la vertical correspondiente al desplazamiento de una división de la burbuja del nivel. Este ángulo se expresa en segundos por división (estando las divisiones expresadas en mm, normalmente 2). En definitiva, sería el ángulo que hay que desviar sobre la vertical el eje principal del instrumento para que la burbuja del nivel se desplazara 2 mm. La sensibilidad es inversamente proporcional al radio de curvatura del nivel: cuanto mayor sea el radio, más sensible es el nivel según la relación:

$$(1) \quad s^{cc} = \frac{2}{R} 636620$$

Existen dos tipos de niveles en un instrumento topográfico: niveles esféricos y niveles tóricos. Los niveles esféricos están compuestos por un recipiente hermético de vidrio de forma cilíndrica en cuya parte superior lleva grabada una circunferencia sobre la que se consigue el calado al hacer coincidir la burbuja sobre ella. La nivelación grosera de un instrumento se realiza con el calado de este nivel esférico. La nivelación fina del instrumento se realiza con el nivel tórico anteriormente descrito.

Antiguamente existían en los aparatos más precisos los niveles de eclímetro, que eran solidarios al limbo vertical, de tal forma que el cero del limbo coincidía con la burbuja nivelada y se disminuía el error que se cometía cuando se hacían lecturas cenitales. Actualmente los

instrumentos llevan un eclímetro automático, que es un sistema compensador que tienen como misión dar la lectura correcta en cualquier dirección que se realice la observación. Consisten en un prisma suspendido de un péndulo, de tal forma que aunque haya una pequeña desnivelación del instrumento, el péndulo que se mantiene en todo momento vertical hace que se modifiquen las lecturas del limbo vertical, proporcionando la lectura correcta. Esta operación en los instrumentos normalmente se realiza sobre dos planos verticales perpendiculares entre sí que contienen al eje principal (compensador de doble eje), de tal manera que el sistema compensador actúa sobre cualquier dirección horizontal de la alidada.

- Anteojo: los instrumentos disponen de un anteojo que permite ampliar o aumentar visualmente el objeto para realizar una mejor puntería sobre él. Este anteojo dispone de un dispositivo interno (cruz filar) que sirve para apuntar o colimar sobre un determinado punto de manera precisa y tomar las lecturas de ángulo horizontal y vertical de esa visual.

Los anteojos de los instrumentos antiguos consistían en un tubo que tenía la capacidad de variar la distancia entre las dos lentes convergentes (objetivo y ocular) que componían el sistema óptico. Los instrumentos modernos disponen de un anteojo denominado de enfoque interno, el cual incorpora una lente divergente entre objetivo y ocular para que la imagen se forme en el plano del retículo. Permite además acortar el tamaño del anteojo. Esto hace que las imágenes del retículo y del objeto han de formarse en el mismo plano. Si ambas no están en el mismo plano, se producirá un error de paralaje y por tanto la puntería al objeto no será exacta, ya que la imagen del objeto se desplazará cuando el observador desplaza su mirada a la derecha o a la izquierda del ocular.

Los aumentos de un anteojo es la relación entre la medida angular de un objeto visto a través del anteojo comparado con su observación a simple vista o lo que es lo mismo, la relación entre la distancia focal del objetivo y la distancia focal del ocular.

- Limbos: círculos graduados para la medición de los ángulos horizontales y verticales. Los clásicos llevaban la graduación en el perímetro, con divisiones de trazos finos a un mismo intervalo y dispositivos como nonius o micrómetros para tener mayor precisión en las lecturas. Actualmente los limbos están constituidos por dispositivos electrónicos que dan la lectura automáticamente. Existirán limbos horizontales para las lecturas acimutales y limbos verticales para las lecturas verticales. Estos últimos tienen el origen (antiguamente no todos) en el cenit de la vertical del lugar, por eso se denomina a la medición ángulo cenital.

- **Medida electrónica de ángulos**

El fundamento consiste en la medición y transformación de un valor angular analógico en un valor digital. Los limbos se fabrican en vidrio grabando líneas o áreas opacas y transparentes y a cada lado del círculo se colocan un diodo emisor de luz (LED) y un fotodetector, de forma que cuando el limbo gira, el fotodetector registra el número de intervalos opacos - transparentes que pasan por delante del LED.

Dentro de la medida electrónica de ángulos hay diferentes variedades de captar el ángulo:

- Medida incremental: miden incrementos angulares de giro del limbo. Consiste en un círculo de vidrio con intervalos iguales de líneas claras y oscuras. Al girar el limbo con respecto al LED en el sensor se registran variaciones de claros-oscuros de forma senoidal que son registrados por el sensor, ya que este está construido para detectar la sensibilidad de paso de un intervalo claro a otro oscuro. La onda senoidal es transformada a valores discretos (onda cuadrada), de tal forma que el sistema cuenta los pasos de onda o impulsos que se han producido en el giro.

Para la medida incremental de ángulos se emplea el patrón *muaré*. Este se produce superponiendo dos limbos con el mismo patrón de claros - oscuros, uno de ellos fijo a la alidada y otro móvil con la parte superior del instrumento, de tal forma que al girar uno sobre otro producen la onda senoidal. Una variante del patrón *muaré* consiste en tener un círculo con nueve líneas o trazos y para el mismo espacio en el otro círculo, tener diez trazos. La medida en este sistema se realiza por coincidencia de la misma forma que se hacía en los antiguos nonius.

Existen otros sistemas que perfeccionan la medida, ya que se debe determinar el sentido de giro del círculo, error de descentrado y grabado de limbos, colocación de origen en el caso del limbo vertical, etc.

- Medida estática: realizan la medición directamente como si fueran limbos absolutos, no incrementales, de tal forma que cada parte del limbo tiene el valor angular. Estos sistemas básicamente consisten en limbos con pistas concéntricas formando un sistema binario donde las zonas transparentes son unos y las opacas ceros. Para una determinada dirección, el LED determina una lectura.

- Medida dinámica: consta de limbos absolutos con un sistema de medición angular formado por dos fotodetectores, uno fijo al instrumento y el otro móvil con la alidada. El fijo tiene la función de ser el origen de los ángulos y el móvil da el ángulo medido. La medida se realiza

contando los pasos que hay desde el origen hasta el móvil y añadiéndole el desfase o diferencia de fase entre dos pasos. Estableciendo un ejemplo de similitud, la lectura en grados enteros sería el número de trazos que se ha desplazado un fotodetector respecto al otro, mientras que la parte fraccional la daría el desfase existente entre ambos respecto a una división entera. Para aumentar la precisión en la medida fraccional se realizarían varias lecturas del desfase.

- **Errores angulares**

Es necesario distinguir dentro de los errores que se pueden establecer en un equipo topográfico la distinción entre errores sistemáticos y errores accidentales.

Los errores sistemáticos son los debidos exclusivamente a errores de ajuste del instrumento, errores de construcción, imperfecciones mecánicas, etc, los cuales tienen igual magnitud y signo. Estos errores son los que se corrigen mediante el ajuste, comprobación y corrección del instrumento y los que han de corregirse mediante la calibración del instrumento en laboratorio. Estos suelen ser:

- Falta de coincidencia del eje vertical del instrumento con el de giro de la alidada (ambos forman el eje principal).
- Falta de perpendicularidad del eje de muñones con el plano que describe el eje de colimación al girar verticalmente.
- Falta de perpendicularidad del eje principal con el eje de muñones.
- Error de eclímetro: el cero del limbo vertical no apunta exactamente al cenit.
- Error de graduación de limbos en cuanto a uniformidad.

Los errores accidentales son errores aleatorios debidos a las características propias del instrumento y la persona que lo utiliza. El conjunto de errores accidentales es el que va a fijar las características de precisión de un instrumento a la hora de realizar un cierto trabajo topográfico. Los errores accidentales actúan independientemente, siendo su magnitud imprevisible en cuanto a valor y sentido, pero el conjunto de todos ellos forman el error angular total, que describirá las características del instrumental en precisión.

Los errores accidentales angulares son:

- Error de verticalidad: se produce por la falta de verticalidad del eje principal del aparato. La no coincidencia del eje principal al estacionar el instrumento con la vertical del lugar dará

un error al medir el ángulo, siendo su influencia distinta en observaciones acimutales y cenitales:

- Observaciones acimutales: el error de verticalidad será la diferencia angular acimutal entre el ángulo acimutal determinado por dos puntos observados para una posición exacta nivelada del instrumento y el mismo ángulo acimutal observado para una posición desnivelada. Este error, como es lógico, dependerá de la sensibilidad del nivel, demostrándose matemáticamente que el error máximo de verticalidad en observaciones acimutales es:

$$(2) \quad e_{vertical}^{cc} = \frac{s^{cc}}{12}$$

siendo  $s^{cc}$  la sensibilidad en segundos centesimales anteriormente definida para los niveles tubulares.

- Observaciones cenitales: el error de verticalidad será la diferencia angular cenital entre el ángulo cenital determinado por el cenit verdadero a un punto observado y el mismo ángulo cenital observado con el cenit del instrumento en la posición desnivelado de este. Se demuestra que el error máximo de verticalidad para observaciones cenitales es:

$$(3) \quad e_{vertical}^{cc} = \frac{s^{cc}}{3}$$

Esto quiere decir que en trabajos de planimetría el error de verticalidad será poco importante, mientras que en trabajos de altimetría, el error se transmite casi íntegramente a las visuales. De aquí la necesidad antiguamente de disponer niveles de eclímetro y nivelar para cada dirección en trabajos altimétricos de precisión. Actualmente los eclímetros automáticos hace que no se tenga que realizar esta operación, ya que se realiza automáticamente en cada lectura.

En el caso de estaciones totales, todas llevan compensador de eclímetro, por lo que el error de verticalidad sobre observaciones cenitales se puede despreciar. Muchos modelos además incorporan compensador de doble eje para eliminar el error de verticalidad sobre ángulos acimutales, por lo que si es así, también se despreciará este error.

- Error de dirección: es el error debido a no estacionar exactamente sobre el punto marcado en el terreno tanto del instrumento (error de estacionamiento) como del prisma o mecanismo de puntería que marca la visual (error de posicionamiento de la puntería, consecuencia de la

incorrecta nivelación del nivel esférico del prisma). Sería la composición de ambos errores de estacionamiento y su efecto sobre la observación angular. En este caso, el error sólo afecta a lecturas acimutales.

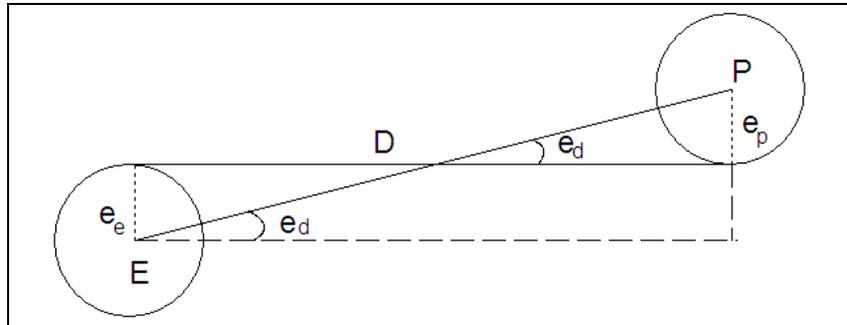


Figura 2. . Error de dirección.

Según la figura 2, siendo E el punto de estación y P el punto al que se dirige la visual, los círculos de radios  $e_e$  y  $e_p$  representan los de error en el posicionamiento de la plomada óptica del instrumento y de la posición del prisma o elemento de puntería. Tomando la tangente común interior a ambas circunferencias se obtendrá la posición de máximo error, que será:

$$(4) \quad \sin e_d = \frac{e_e + e_p}{D} \Rightarrow e_d = \frac{e_e + e_p}{D}, \text{ ya que } e_d \text{ es muy pequeño comparado con } D.$$

Expresándolo, como el anterior, en segundos centesimales:

$$(5) \quad e_d^{cc} = \frac{e_e + e_p}{D} 636620$$

En observaciones acimutales será, en general, el error más grande, de ahí la trascendencia del correcto estacionamiento con la plomada óptica y el centrado forzoso en trabajos de precisión. El error será tanto mayor cuanto más pequeña sea la distancia de la visual.

El error de estacionamiento y el de posicionamiento tienen un valor conjunto estandarizado de 2,5 cm en caso de utilizar plomada óptica en el estacionamiento y nivel esférico en el prisma.

- Error de puntería: se produce por la falta de coincidencia entre la cruz filar del retículo y el objeto concreto sobre el que se dirige la visual, debido a que el retículo tiene un

determinado grosor y la puntería de la visual no es perfecta al objeto. El tratamiento es diferente según se trate de observaciones acimutales o cenitales:

- Observaciones acimutales: en general la puntería sobre el ángulo acimutal es más perfecta que sobre ángulos cenitales. Teniendo en cuenta que el ángulo mínimo que distingue el ojo humano o límite de percepción visual angular para percibir un objeto es de 30", al hacer puntería con el hilo vertical del retículo, el objeto debe quedar dividido en dos partes iguales, rebajando este límite a la mitad (15"). Teniendo en cuenta que el error angular es empíricamente dos tercios de la apreciación, quedaría un valor de 10", que queda reflejado en la fórmula:

$$(6) \quad e_p'' = \frac{10''}{A} \left( 1 + \frac{4A}{100} \right)$$

siendo A los aumentos del antejo.

- Observaciones cenitales: el error de puntería cenital viene dado por la incertidumbre en la puntería con el hilo horizontal de la cruz filar sobre el objeto, considerando empíricamente dos tercios de la apreciación, por lo que:

$$(7) \quad e_p'' = \frac{20''}{A} \left( 1 + \frac{4A}{100} \right)$$

Si la visual se realiza sobre un objeto con mala definición de puntería se incrementa el error máximo hasta considerar:

$$(8) \quad e_p'' = \frac{50''}{A} \left( 1 + \frac{4A}{100} \right)$$

El coeficiente  $\left( 1 + \frac{4A}{100} \right)$  que aparece en las fórmulas corresponde precisamente al que determina la pérdida de claridad y nitidez del antejo con los aumentos. Por otra parte, hay que tener en cuenta que estas fórmulas vienen expresadas en segundos sexagesimales, mientras que las anteriores venían en segundos centesimales.

En el caso de estaciones totales los coeficientes usados en las anteriores fórmulas suelen ser de 50" para distancias largas tanto en observaciones acimutales como en cenitales y de 20" para distancias cortas en las que se puede hacer buena puntería, igualmente también sin distinción de observaciones acimutales o cenitales.

- Error de lectura: viene determinado por dos tercios de la mínima apreciación del instrumento o mínima división del limbo:

$$(9) \quad e_l = \frac{2}{3} a^{cc}$$

En el caso de instrumentos de medición electrónica de ángulos, como error de lectura se toma directamente la precisión angular del instrumento.

- Error total angular: según la ley de transmisión de errores el error angular total será la composición cuadrática de los errores angulares, distinguiendo observaciones angulares acimutales y cenitales:

- Error total angular para observaciones acimutales:

$$(10) \quad E_a = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

- Error total angular para observaciones cenitales:

$$(11) \quad E_a = \sqrt{e_v^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

### 49. 1.3. Medida de distancias

Para la medida electrónica de distancias se puede encontrar una gran variedad de instrumentos, aunque conviene hacer una clasificación en función de la longitud de onda de la portadora. Básicamente se pueden encontrar dos tipos de instrumentos atendiendo a este criterio: los instrumentos que utilizan ondas del espectro luminoso o infrarrojo próximo (geodímetros y distanciómetros electroópticos) y los que emplean ondas microondas de longitud de onda desde 1 cm a 1 m (telurómetros o distanciómetros electromagnéticos), si bien estos últimos han pasado a ser historia y únicamente se han utilizado en actividades geodésicas.

Los telurómetros pueden medir distancias de hasta 150 km con precisión del orden de  $10 \text{ mm} \pm 3 \text{ ppm}$ . Necesitan de reflectores activos, es decir, dos aparatos iguales en los extremos de la base a medir (master y remoto), en el que el master emite una señal y el remoto la recibe, amplifica y devuelve con la misma fase y dirección pero en sentido contrario. La gran ventaja de los telurómetros es que no es estrictamente necesaria la intervisibilidad de los puntos, a pesar de que no debe haber obstáculos entre ambos extremos de la base, no es necesario colimar con gran precisión, aspecto muy útil en observaciones nocturnas, en las que el índice de refracción es más atenuado y menos crítico para este tipo de observaciones, ya que el conocimiento del índice de refracción en estos instrumentos es más necesario que en los distanciómetros electroópticos.

Los instrumentos electroópticos trabajan en la zona del espectro luminoso, habiendo a su vez dos tipos fundamentales de instrumentos:

a) Distanciómetros de luz visible o geodímetros, que tienen una longitud de onda de la portadora cercana a la luz visible ( $0,4 - 0,7 \mu\text{m}$ ). Utilizan como onda portadora un láser y se han utilizado también en observación de redes geodésicas, ya que tienen alcances de hasta 60 km y precisiones del orden de  $5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$ .

b) Distanciómetros infrarrojos que trabajan con una longitud de onda cercana al infrarrojo próximo ( $0,7 - 1,2 \mu\text{m}$ ). Este sistema es el que llevan las estaciones totales y utilizan para producir la onda portadora un diodo láser de arseniuro de galio con un oscilador de cuarzo. La longitud de onda normal de trabajo de los distanciómetros de infrarrojos suele ser de entre  $0,8$  y  $0,95 \mu\text{m}$ . El alcance máximo suele ser de hasta 20 km utilizando varios prismas simultáneamente, con una precisión del orden de  $5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$ , si bien los distanciómetros normales de las estaciones totales llegan a medir en condiciones normales hasta 5 km. Existe una gran variedad en cuanto a precisión y prestaciones, llegando hasta los distanciómetros submilimétricos que tienen una precisión de hasta  $0,2 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ ppm}$ .

En ambos casos (luz visible o infrarrojos), el receptor es pasivo, ya que consiste en un prisma que devuelve la onda en la misma dirección y sentido contrario al de la onda incidente. Otra variante de distanciómetros son los que hacen la medida sin necesidad de prisma reflector sobre una superficie lisa o rugosa, aunque tienen una limitación en el alcance (no más de 500 metros) con precisiones del orden de  $5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$ .

### • Fundamento de la medición electrónica de distancias

Para la medición de la distancia, los distanciómetros utilizan el método de comparación de fase, consistente en un aparato transmisor situado en un extremo de la base a medir que emite una onda portadora modulada que llega a un receptor o prisma situado en el otro extremo de la base sobre el cual rebota y es devuelta al distanciómetro. Una vez recibida, el distanciómetro demodula la onda, es decir, separa la onda moduladora de la onda portadora para comparar la fase de retorno con la de emisión, de tal forma que la distancia medida será:

$$(12) \quad D = m \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

siendo:  $\lambda$  la longitud de onda de la portadora

$\Delta\varphi$  la diferencia de fase entre la onda emitida y recibida, desfase, es decir, la parte fraccional de longitud de onda pasada a unidades de longitud ( $\Delta\varphi$  es unidad angular)

$m$  el número entero de longitudes de onda contenido en la distancia.

Si se utilizara otra onda de longitud de onda sensiblemente diferente y conocida, se tendrán dos ecuaciones con dos incógnitas comunes ( $m$  y  $D$ ) y por lo tanto se podrán calcular. La diferencia de fase o desfase es una variable que el instrumento mide mediante un contador de fase. Esto es cierto siempre que no se supere lo que se denomina en distanciometría "*distancia límite*". Se entiende por distancia límite la distancia por debajo de la cual el número de semilongitudes de onda es el mismo en dos medidas efectuadas una con  $\lambda_1$  y otra con  $\lambda_2$ .

Con dos longitudes de onda se tendrá:

$$(13) \quad D = \frac{\lambda_1}{2} + \left( m + \frac{\Delta\varphi_1}{2\pi} \right)$$
$$D = \frac{\lambda_2}{2} + \left( m + \frac{\Delta\varphi_2}{2\pi} \right)$$

Si las longitudes de onda son sensiblemente diferentes,  $m$  no cambiará para ambas ecuaciones hasta que se llegue justo a la distancia límite, en la cual los desfases serán los mismos ( $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ ) y se cumplirá:

$$(14) \quad m \frac{\lambda_1}{2} = (m+1) \frac{\lambda_2}{2} \Rightarrow m = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

y por tanto la distancia límite será:

$$(15) \quad D_{\text{lim}} = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}$$

Para valores próximos de ambas longitudes de onda, el valor de la distancia límite será grande y por tanto se podrán medir distancias hasta la límite, pero pequeñas diferencias de desfase variarán  $m$ , por lo que con dos frecuencias, sólo se pueden medir distancias pequeñas. Esto se resuelve de diferentes maneras:

- Método de las tres longitudes de onda: si se utilizan tres longitudes de onda con valores  $\lambda_1 = 10,000000$  m,  $\lambda_2 = 9,9750623$  m  $\lambda_3 = 9,5238095$ , la distancia límite para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  es de 2000 metros. La distancia medida con las dos longitudes de onda será:

$$D = m \frac{\lambda_1}{2} + L_1 \quad \text{y} \quad D = m \frac{\lambda_2}{2} + L_2$$

,siendo  $L_1$  y  $L_2$  el desfase pasado a unidades de longitud, y

al igualar y sustituir:

$$(16) \quad m = \frac{\frac{L_2}{2} - \frac{L_1}{2}}{\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}}$$

Si el cálculo de  $m$  fuese correcto, el problema quedaría resuelto. Pero la indeterminación de  $m$  es:

$$(17) \quad E_m = \frac{E_1 \sqrt{2}}{\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}}$$

siendo  $E_1$  el error al medir  $L$  en el comparador de fase, la cual se mide con una precisión de una milésima de la longitud de onda; se admite que el error máximo puede ser 2,54 veces superior al error cuadrático, de tal forma que:

$$(18) \quad E_m = \frac{2,54 \cdot E \sqrt{2}}{\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}}$$

Si se sustituye en esta fórmula por los valores de las longitudes de onda anteriormente citados, se obtendría que el error en la determinación de  $m$  podría ser de 3 unidades de longitud de onda,

es decir, alrededor de 30 metros, por lo que con esta combinación sólo se puede obtener un valor aproximado de la distancia. Con esta medida se obtendrían las unidades de kilómetro, hectómetro y decámetros sin ninguna ambigüedad y para determinar la incertidumbre restante se trabajaría con la tercera longitud de onda, ya que la distancia límite para  $\lambda_1$  y  $\lambda_3$  es de 100 metros. Haciendo el mismo razonamiento de incertidumbre en la determinación de  $m$  con esta combinación, sale 0,18 unidades, con lo que no habría ninguna indeterminación en el valor entero de ambigüedad con  $\lambda_1$  y  $\lambda_3$ . Es decir, cuanto más parecidas sean las longitudes de onda, más grande será la distancia límite pero también mayor será la incertidumbre en la determinación de  $m$ , mientras que con longitudes de onda menos parecidas, la distancia a medir será mucho más pequeña pero con seguridad en la determinación de  $m$ , con lo que con esta última combinación se medirían los decámetros y con el desfase los metros, centímetros y milímetros.

- Método de las longitudes de onda múltiplos de 10: consiste en la utilización de portadoras de longitud de onda múltiplos de 10 m, de tal forma que cada portadora da una fracción de la semilongitud de onda. Con una  $\lambda = 20$  m se obtiene una medida no superior a 10 metros (daría metros, decímetros y centímetros), con una  $\lambda = 200$  m se obtendrían los decámetros sin ninguna duda ni error y con una  $\lambda = 2000$  m se obtendrían igualmente los hectómetros. La suma de las tres cantidades daría el resultado de la distancia.

En cuanto a la medida de la fase, normalmente se realiza mediante el contador de un oscilador que mide la diferencia entre la señal de salida y la de retorno para cada longitud de onda del distanciómetro. Este contador de fase es capaz de medir la fase con un error de una milésima de la longitud de onda.

- **Errores en la medición de distancias**

La expresión general que da el error en la distancia medida tiene dos partes, una independiente de la distancia (expresada en forma de constante, en mm) y otra parte proporcional a la misma (expresada en partes por millón de la distancia, ppm).

**a) Errores proporcionales a la distancia**

- Índice de refracción: la medida de la distancia depende de la longitud de onda  $\lambda$ , la cual a su vez es función de la velocidad de propagación en el medio y la frecuencia de modulación:

$$(19) \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

Pero la velocidad de propagación es dependiente del índice de refracción del medio, de tal forma que la longitud de onda nominal de un distanciómetro lo es sólo en unas condiciones ideales de presión, temperatura y humedad, diferentes casi siempre a la realidad. El índice de refracción viene dado por la relación entre la velocidad de propagación en el vacío con respecto a la velocidad de propagación real del medio:

$$(20) \quad n = \frac{c_0}{c}$$

Considerando un índice de refracción del medio  $n'$  diferente al índice de refracción  $n$  residente en el distanciómetro tendremos:

$$(21) \quad D' = D \frac{n' \cdot f'}{n \cdot f}$$

siendo  $D$  la distancia medida,  $D'$  la distancia corregida y  $f$  y  $f'$  las frecuencias estandar y reales respectivamente del distanciómetro. Considerando que el instrumento no tiene deriva de frecuencia ( $f = f'$ ), la distancia corregida de índice de refracción será:

$$(22) \quad D' = D \frac{n'}{n}$$

Actualmente, los instrumentos realizan la corrección automáticamente para cada medida si se introducen en el sistema las variables meteorológicas (especialmente presión y temperatura). Si no es así, las instrucciones del instrumento proporcionan unas tablas en las que mediante una doble entrada de presión y temperatura, se obtiene la corrección en ppm que hay que realizar a la medida. También puede calcularse el índice de refracción, para lo cual existen muchos modelos, dependiendo de si el instrumento es electroóptico (por ejemplo fórmula de Barrell y Sears) o de microondas (Essen y Froome).

- Variación de la frecuencia de modulación: se pueden producir desajustes en el oscilador o envejecimiento del cristal de cuarzo del mismo, produciéndose una frecuencia de modulación sensiblemente diferente a la nominal y variando por tanto la longitud de onda nominal del distanciómetro. Si la frecuencia de modulación disminuye, las longitudes de

onda se harán mayores y para una determinada distancia habrá menos longitudes de onda (menor distancia). Por ello es conveniente la comprobación de la frecuencia del oscilador cada cierto tiempo en un laboratorio especializado comparando la frecuencia del oscilador con una frecuencia patrón de mayor precisión.

#### **b) Errores no proporcionales a la distancia**

- Error cíclico: se denomina así a cualquier error que se repite en la medición de la distancia que no tiene carácter proporcional a la misma. Puede haber diferentes causas que lo provocan:
  - Mezcla entre la señal de referencia y la de retorno.
  - Mala reflexión de la onda en las superficies externas del prisma.
  - Error no lineal del contador de fase.

En topografía estos errores normalmente tienen un valor despreciable, teniéndose que realizar en laboratorio una calibración del instrumento si se desea obtener un valor constante de error cíclico.

- Constante del equipo: se debe por un lado a que el centro geométrico del distanciómetro desde el que se toma el origen de distancias no coincide con el centro electrónico exacto de donde sale la señal y por otro lado a que la señal no rebota exactamente en el centro del reflector, sino que sigue un recorrido interno en él, sufriendo dos reflexiones y saliendo del prisma en dirección paralela y sentido contrario al que salió del distanciómetro. También puede suceder que el centro geométrico del jalón tampoco coincide con el punto de reflexión del prisma. Todo ello viene expresado en la constante de equipo  $k$ , la cual se puede determinar mediante el método de punto medio - punto extremo que se comentará más adelante.

Con todo lo dicho, la fórmula que emplean las casas comerciales para expresar el error estándar previsible en la medición de distancia es de la forma:

$$(23) \quad e_D = a \text{ (mm)} \pm b \text{ (ppm)} D$$

Además de considerar este error estándar proporcionado por el fabricante, para evaluar la incertidumbre en la medición de distancias hay que considerar además el error de dirección

visto anteriormente para mediciones angulares acimutales, considerándose un estándar de 2,5 cm que se puede eliminar mediante centrado forzado tanto de la estación como del prisma.

## 49.2. Métodos de observación

El establecimiento de métodos de observación tiene como objetivo aumentar la precisión de las medidas angulares. En el caso del error de puntería, realizando un proceso de repetición de la visual, es lógico que se esté mejorando el valor del ángulo puesto que se repite la puntería, al mismo tiempo que al realizar la lectura angular sobre otra parte del círculo graduado del limbo, también se está mejorando su error de lectura (en el caso de instrumentos clásicos, no estaciones totales).

Los principales métodos de observación que se usan en topografía (no en Geodesia) son la regla de Bessel, los métodos de repetición y los métodos de reiteración.

### 49. 2.1. Regla de Bessel

Consiste en observar el objeto en dos posiciones del anteojo denominados círculo directo (CD) y círculo inverso (CI), de tal forma que se lean las lecturas en dos posiciones antagónicas del limbo. El método de operar consistiría en apuntar las lecturas angulares acimutal y cenital en posición normal o CD, a continuación se giraría en acimutal la alidada unos  $200^{\text{g}}$  y se giraría el anteojo (vuelta de campana) en dirección del objeto, recogiendo finalmente la lectura en posición CI. Las lecturas definitivas serían:

- Observaciones acimutales: si las observaciones fuesen perfectas, la diferencia de lecturas acimutales en CD y CI tendría que ser  $200^{\text{g}}$ , pero debido a los errores propios del instrumento y de la operación, se produce un exceso o un defecto de la diferencia de ambas lecturas:

$$(24) \quad L_{\text{CD}} - L_{\text{CI}} = 200 \pm \varepsilon$$

La corrección que hay que aplicar a las lecturas CD y CI es la mitad del error  $\varepsilon$  obtenido, de tal forma que la diferencia entre ambas lecturas corregidas sea  $200^{\text{g}}$ .

- Observaciones cenitales: si las observaciones fuesen perfectas, la suma de las lecturas en CD y CI tendría que ser  $400^{\text{g}}$ . El exceso o defecto respecto a  $400^{\text{g}}$  es el error que antiguamente se denominaba de eclímetro y solía ser constante en cada instrumento:

$$(25) \quad L_{\text{CD}} + L_{\text{CI}} = 400 \pm \varepsilon$$

La corrección se hace sumando (o restando) la mitad del defecto (o exceso) a  $400^{\text{g}}$ , de tal forma que una vez corregidas ambas lecturas la suma sea  $400^{\text{g}}$ .

Cuando se realiza la regla de Bessel se actúa en teoría sobre los errores angulares de lectura y puntería vistos anteriormente, de tal forma que el valor de cada uno de estos errores hay que multiplicarlo por  $1/\sqrt{2}$ .

#### 49. 2.2. Método de repetición

Este método se realiza cuando se dispone de un instrumento en el que sea posible mover el origen de lecturas, como es el caso de los teodolitos con tornillos de movimiento particular y general para mover el cero del limbo, de tal forma que se exploran en la misma visual diferentes sectores del círculo de lectura. En una estación total con lectura electrónica incremental el método no tiene sentido, ya que no se va a girar físicamente el limbo.

El método operativo al medir un ángulo entre dos puntos A y B consiste en visar a un objeto A con lectura en el limbo  $0^{\text{g}} 0^{\text{c}} 0^{\text{cc}}$ . Posteriormente se visa al punto B (lectura  $\alpha$ ). Con la lectura que se tiene para el punto B se suelta el tornillo general para visar al punto A, de tal forma que la visual en este punto tiene la lectura que tenía antes el punto B. Finalmente se vuelve a soltar el tornillo particular y se visa al punto B. En este caso la lectura del ángulo tendría que ser  $2\alpha$ . Este método se puede repetir tantas veces como se desee, obteniéndose como valor para el ángulo entre los dos puntos la lectura media, ya que con  $n$  repeticiones la lectura sería  $n\alpha$ . Se reducen considerablemente el error de lectura y el error de puntería, ya que en la primera repetición y siendo  $\alpha$  la lectura que se obtuviera, se tendría:

$$(26) \quad \alpha = \alpha_1 + l_0 + l_1 + p_1 + p_2 + v + d$$

siendo:  $l_0$  = error de lectura en la visual A  
 $l_1$  = error de lectura en la visual B  
 $p_1$  = error de puntería en A  
 $p_2$  = error de puntería en B  
 $v$  = error de verticalidad  
 $d$  = error de dirección  
 $\alpha_1$  = lectura en B

Con dos repeticiones se tendrá análogamente:

$$(27) \quad 2\alpha = \alpha_2 + l_0 + l_2 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2v + 2d$$

y en n repeticiones se tendrá:

$$(28) \quad n\alpha = \alpha_n + l_0 + l_n + \sum_{i=1}^{2n} p_i + nv + nd$$

y el valor angular será:

$$(29) \quad \alpha = \frac{\alpha_n}{n} + \frac{l_0 + l_n}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{2n} p_i}{n} + v + d$$

con un error cometido que será:

$$(30) \quad \text{Error} = \alpha - \frac{\alpha_n}{n}$$

que para n repeticiones y teniendo en cuenta cada error se tendrán los siguientes errores finales:

- Error de lectura:  $E_l = \frac{e_l \sqrt{2}}{n}$
- Error de dirección:  $E_d = e_d$
- Error de verticalidad:  $E_v = e_{va}$

- Error de puntería:  $E_p = \frac{e_p \sqrt{2n}}{n}$

Y como expresión del error total se tendrá:

$$(31) \quad E_a = \sqrt{\frac{2e_l^2}{n^2} + \frac{2e_p^2}{n} + e_{va}^2 + e_d^2}$$

Como se puede observar, el error de lectura queda sensiblemente reducido y en menor cuantía, el de puntería, permaneciendo invariables los de verticalidad y dirección. Aumentando el número de repeticiones, los dos primeros disminuyen, aunque cada vez más lentamente, por lo que a partir de un cierto número de repeticiones no merece la pena realizar más. Generalmente se suelen hacer dos o tres repeticiones y siempre combinando el método con la regla de Bessel.

#### 49. 2.3. Método de reiteración

Muy similar al anterior, este método consiste en líneas generales, en medir  $n$  veces el ángulo deseado tomando el promedio como valor más probable final. Se suele combinar con el método de Bessel y se mide cada ángulo en una zona del limbo. Si se quieren hacer cuatro reiteraciones se procedería operativamente de la siguiente manera:

- 1) Se dirige la puntería al primer punto en el sentido de la graduación creciente del limbo y se toma lectura.
- 2) Puntería al segundo punto y lectura.
- 3) Giro de  $200^\circ$  y vuelta de campana.
- 4) Puntería al segundo punto y lectura.
- 5) Puntería al primer punto y lectura.
- 6) Nuevo giro de  $200^\circ$  y vuelta de campana.
- 7) Se gira unos  $100^\circ$  el limbo con el movimiento general.
- 8) Se actúa otra vez como en 1, 2, 3, 4 y 5.

De la misma manera que en el caso anterior, la fórmula para el error total angular quedaría en la forma:

$$(32) \quad E_a = \sqrt{\frac{2e_l^2}{n^2} + \frac{2e_p^2}{n} + e_{va}^2 + e_d^2}$$

El caso particular del método de reiteración con visuales a varios puntos desde una estación es el método de observación de la vuelta de horizonte, consistente en hacer lectura a todos los puntos que están alrededor de la estación en CD y posteriormente volver a observar todos los puntos en CI siguiendo el sentido contrario al realizado en CD. La lectura definitiva será la media de CD y CI, quedando para el primer punto observado el denominado error de cierre de la vuelta de horizonte como diferencia entre la lectura inicial y final, realizando una compensación o distribución de dicho error entre los restantes puntos observados de la vuelta.

Este segundo método de reiteración es más aplicable cuando hay que observar varios puntos desde la estación, quedando mejor la idoneidad del primer método de repetición cuando se va a observar un solo ángulo.

### **49. 3. Reducción de las medidas**

En cuanto a la reducción y correcciones a aplicar en las medidas de distancia (sin mencionar la reducción por anamorfosis lineal si se va a aplicar para el cálculo de coordenadas en una proyección como la UTM), cabe hacer dos grupos de reducciones:

#### **49. 3.1. Reducción meteorológica**

Como ya se ha visto en el apartado de errores de un distanciómetro, en todos ellos, tanto los que utilizan luz visible como los de infrarrojos, la distancia medida es función de la velocidad de las ondas a través de la atmósfera.

La distancia que da el distanciómetro viene determinada por los valores internos del mismo: índice estándar  $n_s$  y longitud de onda  $\lambda$  calibrados por el fabricante y además por los valores atmosféricos externos, presión, humedad y temperatura que se observan en el momento y zona en la que se realiza la medición. De esta forma, al considerar  $n_s$  se está suponiendo que las observaciones se realizan en una atmósfera estándar, diferente a la existente en la realidad, ya que habría que considerar realmente el índice de refracción del medio ( $n$ ). La corrección se puede introducir en la mayoría de los instrumentos introduciendo los valores atmosféricos anteriormente citados y medidos en cada momento, aplicando el instrumento la corrección correspondiente en partes por millón (ppm) a la distancia medida para obtener la distancia real.

Si se denomina  $D'$  a la distancia obtenida por el distanciómetro, la distancia real vendría dada por la expresión:

$$D = D' + C_m = D' + D' (n_s - n)$$

siendo  $n$  el índice de refracción en el momento en el que se realiza la medición y para cuyo cálculo existen diferentes fórmulas (Glastone, Essen y Frome, Barrell y Sears, etc), dependiendo de la longitud de onda para la que se vaya a aplicar.

#### 49. 3.2. Reducción de la base medida al elipsoide

Al ser el elipsoide la superficie de referencia sobre la que se realizan los cálculos de coordenadas geodésicas, es necesario reducir al mismo las mediciones realizadas sobre el terreno.

En el caso de las medidas angulares, la reducción, aunque rigurosamente existe, es prácticamente insignificante incluso para lados de primer orden (30 km).

La reducción clásica que se hace es en medidas de distancia en los tres pasos que se relacionan a continuación:

- **Reducción al horizonte medio**

Suponiendo la distancia que une dos puntos de diferente altitud, la corrección a realizar para obtener una distancia horizontal sobre el horizonte medio de ambos puntos es:

$$(33) \quad c = -\frac{\Delta h^2}{2D} - \frac{\Delta h^4}{8D^3}$$

siendo  $\Delta h$  el incremento de altitud entre ambos puntos y  $D$ , la distancia medida. Por supuesto, la corrección es negativa (la distancia reducida es siempre inferior a la medida):

$$(34) \quad D_1 = D + c$$

siendo  $D_1$  la distancia reducida y  $D$  la distancia medida.

- **Reducción al nivel del mar**

El segundo paso sería la reducción de la distancia del horizonte medio al nivel del mar. Estrictamente, tendría que hacerse al elipsoide, pero las altitudes estarán referidas normalmente al nivel medio del mar y no al elipsoide (la diferencia es la ondulación del geoide). Sin embargo, la ondulación del geoide en España con respecto al elipsoide de Hayford es de unos 40 metros como máximo, lo cual no introduce variación sustancial en la reducción.

La distancia reducida al nivel del mar viene dada por:

$$(35) \quad D_2 = \frac{D_1 \cdot R}{R + h_m}$$

siendo  $h_m$  la altitud media de los dos extremos de la base y  $R$  puede ser el radio de la esfera media, aunque estrictamente es el radio de la sección normal entre los dos puntos, que viene dado por la fórmula de Euler:

$$(36) \quad \frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \Rightarrow R_\alpha = \frac{N \cdot \rho}{\rho \cdot \sin^2 z + N \cdot \cos^2 z}$$

- **Paso de la cuerda al arco**

La última corrección a hacer es el paso de la cuerda al arco, ya que la distancia para el cálculo de coordenadas tiene que estar sobre el arco (del elipsoide). En este caso, como se puede intuir, la corrección es positiva (la distancia sobre el arco es mayor que la distancia sobre la cuerda):

$$(37) \quad D_3 = D_2 + \frac{D_2^3}{24R^2}$$

En este caso, cabe hacer la misma consideración respecto a  $R$ .

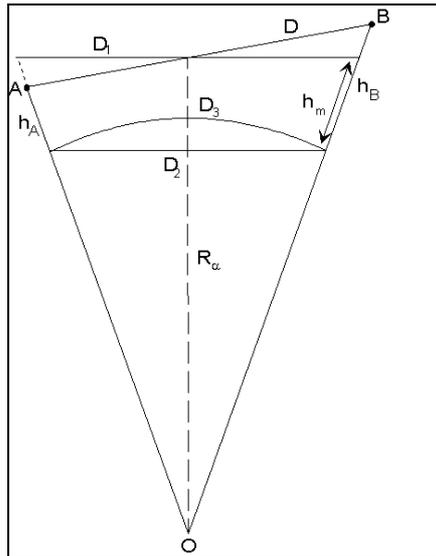


Figura 3. . Reducción de una base al elipsoide.

Las correcciones sobre el horizonte medio y paso al nivel del mar se pueden hacer también en un solo paso a partir de la fórmula:

$$(38) \quad D_2 = \left[ \frac{D^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)} \right]^{1/2}$$

#### 49. 4. Calibración y contrastación de instrumentos

Obviamente, la calibración tanto de instrumentos de medición angular como de distanciómetros ha de hacerse en laboratorio certificado cada cierto tiempo. Sin embargo, las correcciones y comprobaciones que se pueden realizar en el caso de un instrumento de observación angular pueden ser:

- Comprobación y corrección de los niveles:

El nivel esférico debe estar en el centro de la circunferencia cuando está nivelado. Si al realizar una rotación sobre el eje principal no se mantiene la posición de la burbuja, entonces habrá que corregirlo, ya que si el nivel está descorregido no se garantiza la formación de un plano horizontal. La corrección se realizará mediante los tres tornillos correctores que lleva el propio nivel esférico, actuando sobre aquel más cercano a la recta que forma el centro del nivel con la posición de la burbuja descorregida, haciendo que la burbuja se desplace la mitad de la descorrección apreciada. Seguidamente, volviendo a calar la burbuja se repite la operación y así hasta que quede completamente corregido.

En el caso de un nivel tórico, se nivela el nivel entre dos tornillos nivelantes y posteriormente se gira la alidada  $200^{\circ}$ . Si la posición de la burbuja no es simétrica respecto a la anterior, esta tendrá una descorrección. Para corregirlo habrá que actuar con el tornillo de corrección del nivel tórico haciendo desplazar a la burbuja la mitad de su posición descorregida.

- Comprobación de torcedura del eje principal: es un defecto grave del aparato. Para comprobar su existencia se estaciona el teodolito, nivelándolo completamente, empleando uno de los giros, por ejemplo, el general del aparato. Fijando luego este y soltando el de la alidada, debe permanecer nivelado. Si no es así, existe torcedura del eje principal.
- Falta de perpendicularidad entre el eje de colimación y el secundario: con el aparato estacionado se observa, horizontalmente, un punto lejano. Se efectúa vuelta de campana y giro acimutal de  $200^{\circ}$ , con lo cual, si no existe el error, se tendría visado al punto. Si existe variación, su valor es la mitad de la diferencia de lecturas acimutales en el punto en posición de círculo directo y círculo inverso. Para corregirlo se lleva el antejo a la posición media entre las dos visuales y moviendo lateralmente el retículo con el tornillo de corrección del mismo, se lleva la cruz filar hasta el punto visado.
- Corrección de eclímetro: consiste en colocar este de manera que con el aparato nivelado, su lectura sea  $100^{\circ}$ . Si no es así, la corrección se realiza con tornillos que hacen girar el limbo con independencia del antejo o bien al revés. En el caso de estaciones totales, se puede realizar la comprobación pero su corrección debe ser hecha en laboratorio.

En el caso de los distanciómetros, hay dos correcciones fundamentales que deben hacerse:

- Ajuste de la frecuencia de modulación: como se ha citado anteriormente, la frecuencia de modulación de un distanciómetro puede variar con el tiempo y por tanto, variar las longitudes de onda. El error se puede producir por desajustes accidentales del oscilador o envejecimiento del cristal de cuarzo del oscilador. Generalmente lo que sucede es que existe una pequeña deriva de la frecuencia nominal. La corrección sólo puede hacerse en laboratorio especializado con un frecuencímetro de mayor precisión que el del distanciómetro. Conviene hacer la operación periódicamente (una vez al año) y que el laboratorio extienda el correspondiente certificado de calibración.

- Comprobación de la constante del equipo: como se ha comentado anteriormente, existe una constante de equipo en un distanciómetro que conviene conocer para aplicar las correcciones correspondientes. El modo de obtener la constante se basa en el método del segmento medio de medición de una base.

Para ello se divide una base AB en dos trozos aproximadamente iguales (punto C), se estaciona en el punto A y se realiza la medición a B. Evidentemente, estas medidas conviene realizarlas con sistemas de centrado forzado y con las máximas garantías de precisión. Posteriormente, estacionando en el punto medio C, se realizarán medidas a los extremos de la base, A y B.

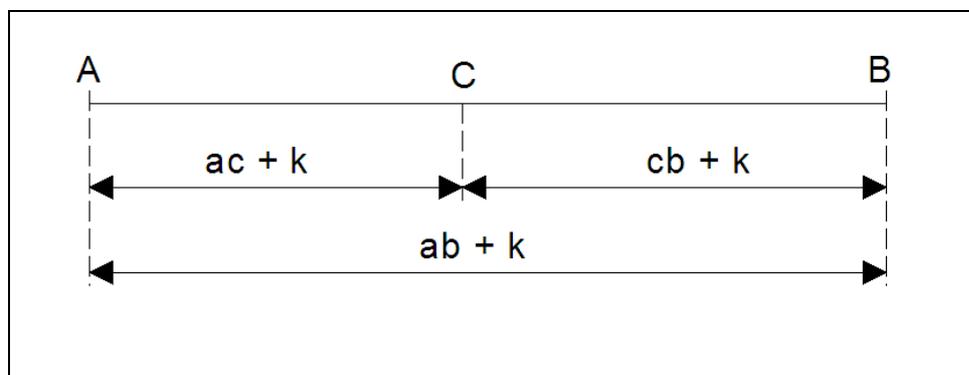


Figura 4. Método de determinación de la constante k.

De la medida total de la base AB se tendrá:

$$(39) \quad AB = ab + k$$

siendo  $AB =$  distancia real y  $ab =$  distancia medida.

De las medidas desde el punto C a A y B se tendrá:

$$(40) \quad (cd + k) + (ca + k) = AB = ab + k$$

Con lo que se obtendrá la constante de equipo k como:

$$(41) \quad k = ab - (ac + cb)$$

Realizando la operación varias veces y obteniendo la media se obtendrá el resultado final de la constante de equipo k del distanciómetro.

## **Bibliografía**

- [1] CHUECA PAZOS, M., HERRÁEZ BOQUERA, J., BERNÉ VALERO, J. L. Teoría de errores e instrumentación. Ed. Paraninfo, 1996.
- [2] DE SAN JOSÉ, J. J., GARCÍA, J., LÓPEZ, M. Introducción a las ciencias que estudian la geometría de la superficie terrestre. Ed. Bellisco, 2000.
- [3] FERRER TORIO, R., PIÑA PATÓN, B. Topografía aplicada a la ingeniería. Primera parte. Instituto Geográfico Nacional, 1996.

## **Tema 50. Redes topográficas: triangulación y trilateración. Intersección directa. Intersección inversa. Intersección mixta. Cálculo y compensación. Proyecto y observación de redes topográficas.**

### **50.1. Redes topográficas: triangulación y trilateración**

#### **50. 1.1. Introducción**

Se considera red topográfica al conjunto de vértices que densifican la Red Geodésica de Orden Inferior (ROI) para realizar un determinado trabajo o instaurar una red más densa en la que apoyarse (por ejemplo redes topográficas urbanas de ayuntamientos, redes con fines catastrales, etc.). En la actualidad, la mayor parte de estas redes se están implementando con técnicas GPS, si bien para muchas necesidades debe complementarse con observaciones clásicas o también por motivaciones de mala cobertura GPS (caso de zonas urbanas). En este tema se abordará la instauración, observación y cálculo de redes topográficas mediante técnicas clásicas de observación topográfica.

La necesidad de la red topográfica radica en que la distancia entre los vértices de ROI a veces resulta demasiado grande para los levantamientos por técnicas de observación clásica. Se hace necesario establecer por métodos topográficos nuevos vértices de modo que la distancia entre ellos no supere aquella que necesita el trabajo. Los puntos que constituyen esta red pueden estar separados desde unos centenares de metros hasta kilómetros. Para observarlos se utilizan los métodos de intersección angular (directa, inversa o mixta) y la trilateración mediante medidas de distancia, aunque en general, se utilizará una combinación de intersección angular y trilateración.

Se estudiarán en primer lugar los métodos de intersección angular, que no requieren más que de medidas angulares, aunque para llegar a determinar las coordenadas de los vértices de la red se necesitará conocer al menos la longitud de uno de los lados de la red o coordenadas de varios puntos en los que se apoyará la red topográfica. Los métodos de intersección tienen como objetivo la obtención de coordenadas de uno o de varios puntos apoyándose en otros vértices con coordenadas determinadas en fases previas o de la red geodésica. La aplicación fundamental del método de intersección consiste en la densificación de redes existentes. También puede aplicarse para la comprobación de la bondad de las mismas o en los trabajos preliminares de enlace a un determinado sistema de coordenadas.

### 50.1.2. Clasificación de los métodos de triangulación

En el pasado, los métodos de triangulación eran estrictamente angulares, con una única distancia medida en la red que proporcionaba la escala a la misma. Actualmente, la facilidad en la medida electromagnética de distancias ha permitido la introducción de observaciones de distancia en los métodos de triangulación. El orden de precisión en la medida de distancias con las estaciones totales es análogo al de la medida de ángulos. En este sentido, en función del tipo de observación del que se dispone conviene distinguir como métodos para la realización de redes topográficas:

- Métodos de triangulación con sólo medidas angulares (intersección).
- Métodos de triangulación con sólo medidas de distancia (trilateración).
- Métodos con medidas angulares y de distancias.

A su vez, en los métodos de intersección, dependiendo de si se conocen o no las coordenadas del punto sobre el que se estaciona, la intersección se denomina:

- Directa: se estaciona sólo en puntos conocidos.
- Inversa: se estaciona sólo en puntos desconocidos.
- Mixta: se estaciona en puntos conocidos y desconocidos.

Por otro lado, dependiendo del número de observaciones de que se disponga, las intersecciones se clasifican en simples o múltiples:

- Simple: se dispone únicamente de los datos imprescindibles para resolver geoméricamente el problema.
- Múltiple: se dispone de más datos que los estrictamente necesarios para determinar las coordenadas del punto.

- **Métodos de observación angular en la intersección**

Aunque existen numerosos métodos operativos, los métodos más empleados para la observación angular en los métodos de intersección son el de la vuelta de horizonte y el método de Schreiber ó método de pares sobre una referencia. La utilización de uno u otro depende de la precisión que requiera el trabajo.

a) Método de vuelta de horizonte

Si se desea realizar la observación angular a los puntos B, C, D, E, F representados en la figura 1 desde la estación A se procedería del siguiente modo:

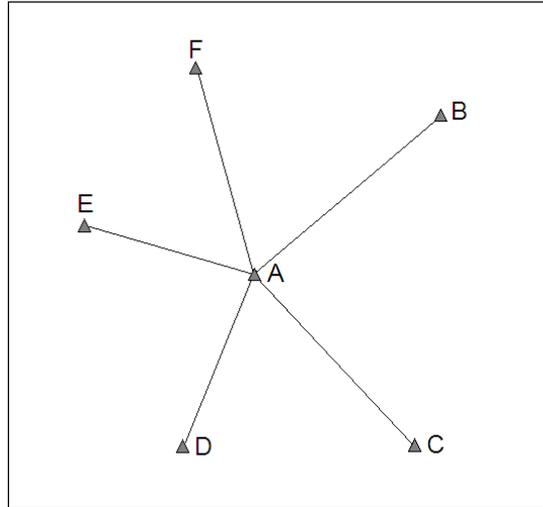


Figura 1. Vuelta de

horizonte.

- 1) Se estaciona el instrumento en el vértice A y se coloca el anteojo en posición de círculo directo (CD).
- 2) De todas las direcciones que se van a observar se elige la que esté mejor definida, la F por ejemplo, y se anotan las lecturas en CD en el orden F, B, C, D volviendo finalmente a visar al punto F.
- 3) Se comprobará que esta lectura, denominada de *cierre*, es la misma (con la tolerancia angular del instrumento) que al comienzo. De esta forma se asegurará que el instrumento no ha sufrido ningún tipo de movimiento durante la observación.

Esta coincidencia no puede ser total, ya que estarán afectadas de errores de puntería y lectura. La mayor diferencia admisible (error de cierre de la vuelta de horizonte) será:

$$(1) \quad e \leq \left( \sqrt{e_p^2 + e_l^2} \right) \sqrt{2}$$

siendo  $e_p$  el error de puntería y  $e_l$  el error de lectura.

4) A continuación se voltea el anteojo, se coloca en posición de círculo inverso (CI) y se repiten las observaciones, girando el instrumento en sentido contrario al de las agujas de reloj: F, E, D, C, B y F, comprobando nuevamente el cierre en F.

5) Si el cierre es correcto, se ha observado *una serie o vuelta de horizonte*. En caso contrario se deberá repetir el procedimiento desde el principio.

Cuando se pretenden alcanzar mayores precisiones se hace necesario observar más de una serie. Siendo  $n$  el número de series, el ángulo de reiteración  $\alpha$ , vendrá dado por el cociente:

$$(2) \quad \alpha = \frac{200^g}{n}$$

que será el valor que habrá que incrementar la lectura origen de cada serie para calcular la del comienzo de la vuelta siguiente. En topografía no es frecuente observar más de dos o tres series, por ello las lecturas origen con varias vueltas de horizonte suelen estar entre  $0^g$  y  $100^g$ .

#### b) Método de Schreiber: pares sobre una referencia.

Este método consiste en elegir una dirección de referencia R, que esté bien definida, y que puede ser o no alguna de las direcciones a observar y realizar las observaciones de cada ángulo independientemente entre R y el resto de los vértices. El procedimiento operativo sería:

1) Se realizan las lecturas correspondientes sobre R y B como si se tratase de una vuelta de horizonte (en posiciones CD y CI) compuesta sólo por dicho *par* de direcciones.

2) A continuación se visa de igual modo a R y C. Estos puntos constituyen el segundo par.

3) Se procede de forma análoga hasta haber combinado con R todas las direcciones.

Al realizar la observación por pares se evitan posibles movimientos del instrumento y es más fácil localizar equivocaciones. Si el número de direcciones es grande se tarda bastante en la observación.

Para abreviar el método se utiliza en ocasiones un método mixto entre el método de vueltas de horizonte y pares a una referencia, de tal forma que se dividen las direcciones totales en grupos, de tal manera que se vise a la referencia y a las direcciones del grupo. Finalmente se vuelve a visar a la referencia y al resto de las direcciones del siguiente grupo.

### 50.1.3. Trilateración

En el método de trilateración en vez de medir ángulos, se miden distancias entre todos los lados con distanciómetro. Para el cálculo de coordenadas y según la distancia que se trate, las distancias que se obtienen en campo hay que reducirlas al elipsoide, según los pasos que se indican en el tema anterior. Por ello deberán medirse también las correspondientes lecturas cenitales.

Si se designan por a, b, c los lados del triángulo ABC, el valor del ángulo A se puede deducir mediante el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

A partir del conocimiento de los ángulos, el cálculo de coordenadas de los vértices es inmediato, ya que si A y B son los puntos de partida conocidos, el acimut  $\theta_A^B$  será también conocido y como se ha medido el lado AC, para calcular las coordenadas de C respecto de A solo se precisa deducir el ángulo en A ya que:

$$(3) \theta_A^C = \theta_A^B - A$$

## 50. 2. Intersección directa

### 50. 2.1. Observación y cálculo

En el método de intersección directa se determinan las coordenadas de un punto V haciendo observaciones desde dos puntos A y B de coordenadas conocidas (figura 2). El método operativo de intersección directa simple consiste en estacionar el equipo topográfico en el punto conocido A y realizar las observaciones angulares al punto cuyas coordenadas se quieren determinar (V) y a otro punto de coordenadas conocidas (B). Seguidamente se estacionaría sobre el punto B y se tomarían las lecturas angulares al punto V y al punto A.

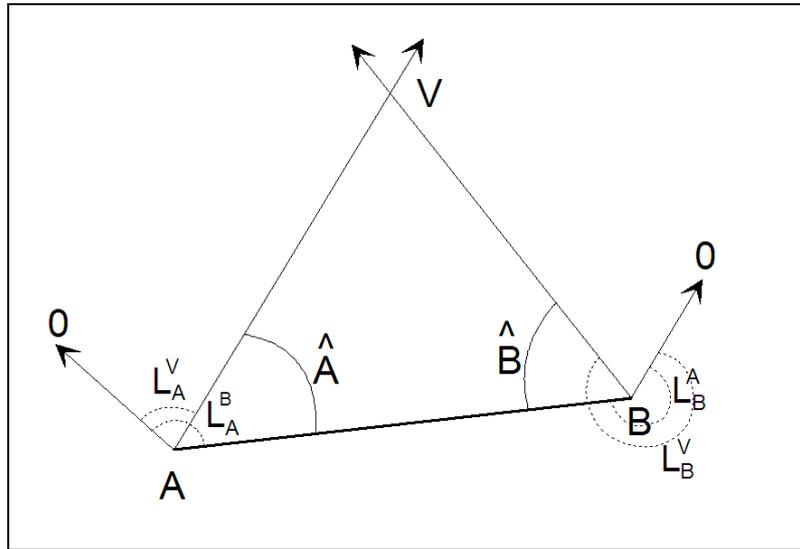


Figura 2. Intersección directa simple.

Para el cálculo de la intersección directa simple se parte como datos previos de las coordenadas de dos vértices A ( $X_A, Y_A$ ) y B( $X_B, Y_B$ ). Como resultado de la observación en campo se habrán obtenido las siguientes lecturas:

$$\text{desde } A : L_A^V, L_A^B$$

$$\text{desde } B : L_B^V, L_B^A$$

A partir de las coordenadas de los puntos A y B, se calculará el acimut  $\theta_A^B$  y la distancia que hay entre ellos. Conocido la lectura y el acimut  $\theta_A^B$ , se obtendrá la desorientación de A ( $\Sigma_A = \theta_A^B - L_A^B$ ). Una vez calculada la desorientación, se calculará el acimut  $\theta_A^V$  ( $\theta_A^V = \Sigma_A + L_A^V$ ). Del mismo modo se procede con el punto B, calculando el acimut  $\theta_B^V$ .

La obtención de las coordenadas del vértice V se puede realizar por cualquiera de los siguientes procedimientos:

a) Método de resolución del triángulo aplicando el teorema del seno: a partir de los acimutes calculados desde el punto de estación al punto desconocido, se pueden obtener los ángulos en los vértices de estación:

$$(4) \quad \begin{aligned} A &= \theta_A^B - \theta_A^V \\ B &= \theta_B^V - \theta_B^A \end{aligned}$$

La distancia AB también es conocida ya que:

$$(5) \quad D_A^B = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

El problema de la intersección directa queda determinado con el cálculo de las distancias AV y BV mediante el teorema del seno. En el triángulo ABV, se cumple:

$$(6) \quad \frac{D_{rA}^V}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{D_{rA}^B}{\text{sen}\hat{V}} = \frac{D_{rB}^V}{\text{sen}\hat{A}} \Rightarrow D_{rA}^V = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{V}} D_{rA}^B \quad \text{y} \quad D_{rB}^V = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{V}} D_{rA}^B$$

El ángulo en el vértice puede deducirse, ya que en el triángulo la suma de los tres ángulos ha de ser 200°:

$$(7) \quad \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{V} &= 200^\circ \\ \hat{V} &= 200 - (\hat{A} + \hat{B}) \end{aligned}$$

Conocidos los tres ángulos del triángulo, y las tres distancias en el mismo, el problema queda resuelto con el cálculo del incremento de coordenadas entre A y V:

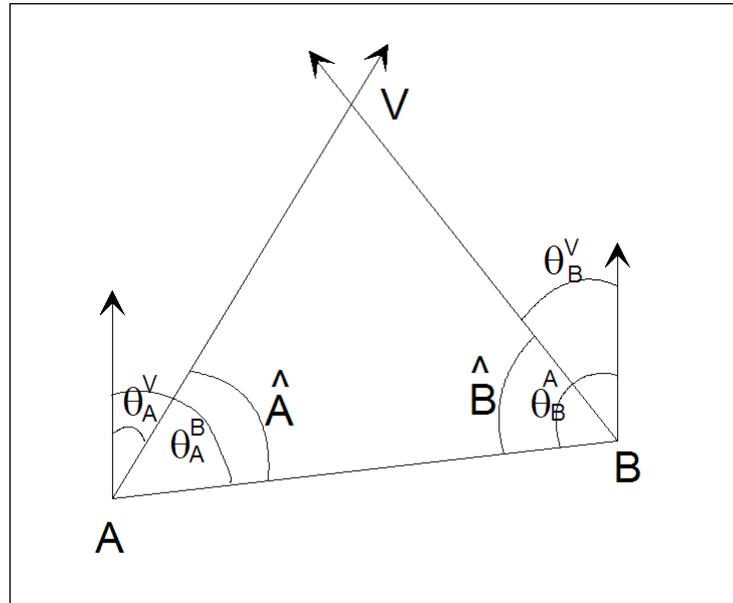
$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta x_A^V &= D_{rA}^V \cdot \text{sen}\theta_A^V & \Rightarrow & & X_V &= X_A + \Delta x_A^V \\ \Delta y_A^V &= D_{rA}^V \cdot \text{cos}\theta_A^V & & & Y_V &= Y_A + \Delta y_A^V \end{aligned}$$

Partiendo del punto B:

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta x_B^V &= D_{rB}^V \cdot \text{sen}\theta_B^V & \Rightarrow & & X_V &= X_B + \Delta x_B^V \\ \Delta y_B^V &= D_{rB}^V \cdot \text{cos}\theta_B^V & & & Y_V &= Y_B + \Delta y_B^V \end{aligned}$$

Las coordenadas que se obtengan de V a partir de A y B, evidentemente han de ser iguales. Con este procedimiento se comprueba el cálculo, pero no hay ninguna comprobación de datos de campo, ya que no existe redundancia. En una intersección simple la solución es única.

b) Método de las tangentes: en este método se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que son las coordenadas X e Y del problema (figura 3).



**Figura 3.** Cálculo mediante el método de las tangentes.

De la figura se deduce:

$$(10) \quad \tan \theta_A^V = \frac{X_V - X_A}{Y_V - Y_A}$$

$$(11) \quad (Y_V - Y_A) \cdot \tan \theta_A^V = X_V - X_A \Rightarrow X_V = (Y_V - Y_A) \cdot \tan \theta_A^V + X_A$$

Por otro lado:

$$(12) \quad \tan \theta_B^V = \frac{X_V - X_B}{Y_V - Y_B}$$

$$(Y_V - Y_B) \cdot \tan \theta_B^V = X_V - X_B$$

Sustituyendo  $X_V$  por la expresión anterior:

$$(13) \quad \begin{aligned} (Y_V - Y_B) \cdot \tan \theta_B^V &= (Y_V - Y_A) \cdot \tan \theta_A^V + X_A - X_B \\ Y_V (\tan \theta_B^V - \tan \theta_A^V) &= Y_B \cdot \tan \theta_B^V - Y_A \cdot \tan \theta_A^V + X_A - X_B \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_V = \frac{Y_B \cdot \tan \theta_B^V - Y_A \cdot \tan \theta_A^V + X_A - X_B}{\tan \theta_B^V - \tan \theta_A^V}$$

### 50. 2.2. Error en la intersección directa

Para establecer la incertidumbre planimétrica en las coordenadas de un punto que se determinan por el método de intersección directa hay que tener en cuenta que las únicas medidas que se efectúan son las de los ángulos A y B (ambos como diferencia entre los acimutes de dos visuales). El error en V será consecuencia de los errores en la determinación de dichos ángulos. Considerando estos errores como  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  y representándolos en sentido positivo y negativo, se obtendrá un cuadrilátero KLMN de incertidumbre en cuyo interior estaría el punto V.

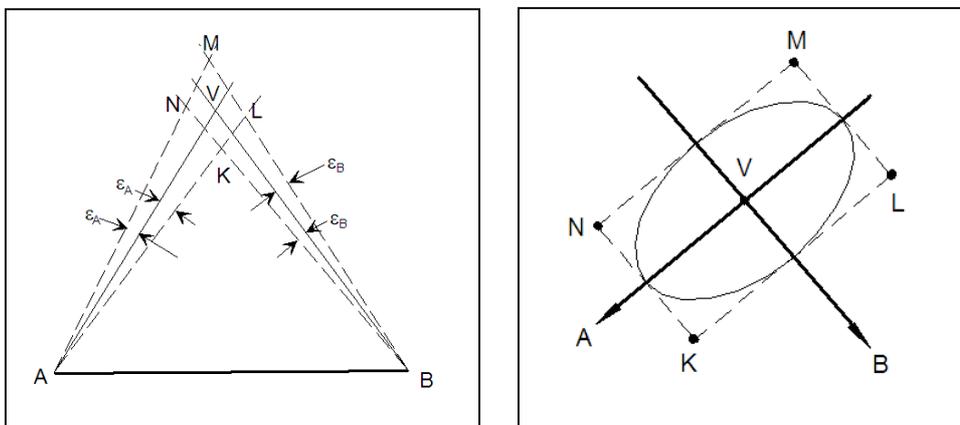


Figura 4. Error máximo en la intersección directa.

Las distancias AV y BV son muy grandes en comparación con los lados del cuadrilátero de incertidumbre y los ángulos  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  son pequeños. Se puede admitir que MN y KL son paralelas a AV y equidistantes de ella, al igual que ML y NK respecto de BV, considerando KLMN un paralelogramo. La zona comprendida entre las rectas MN y KL se llama banda de indeterminación de la visual AV y su anchura vendrá dada por  $2 \cdot AV \cdot \varepsilon_B$ . Análogamente, la zona entre NK y ML es la banda de indeterminación de la visual BV y su anchura vendrá dada por  $2 \cdot BV \cdot \varepsilon_A$ . Se puede considerar la elipse inscrita en él, como la zona más probable en la que puede encontrarse situado el punto problema.

A partir de esta figura se demuestra que la incertidumbre máxima, semieje mayor de la elipse inscrita en el paralelogramo, viene dada por la expresión:

$$(14) \quad e_{\max} = \frac{L \cdot e_a}{\widehat{V} \cdot \frac{\text{sen}}{2}}$$

Por tanto, la incertidumbre depende de  $L$ ,  $e_a$  y  $V$ . La intersección directa será tanto más precisa cuanto más cortas sean las visuales al punto a determinar y cuanto mayor sea la precisión angular del instrumento. Sin embargo las visuales cortas incrementan el error de dirección. El caso óptimo de intersección es aquel en el que ambas visuales cortan en ángulo recto. Como condición general se acepta que un ángulo de intersección no debe ser menor de  $30^\circ$ .

### 50. 3. Intersección inversa

#### 50.3.1. Observación y cálculo

La intersección inversa simple es un problema clásico en topografía consistente en la observación desde un vértice, cuyas coordenadas planimétricas se pretenden obtener, de otros tres cuyas coordenadas son conocidas.

Las tres visuales PA, PB, PC proporcionan los datos necesarios para resolver matemáticamente el problema. Se conocerán las coordenadas:

$$A (X_A, Y_A) \quad B(X_B, Y_B) \quad C(X_C, Y_C)$$

Los datos de campo serán las lecturas desde P a los tres puntos conocidos A, B y C:

$$L_P^A, L_P^B, L_P^C$$

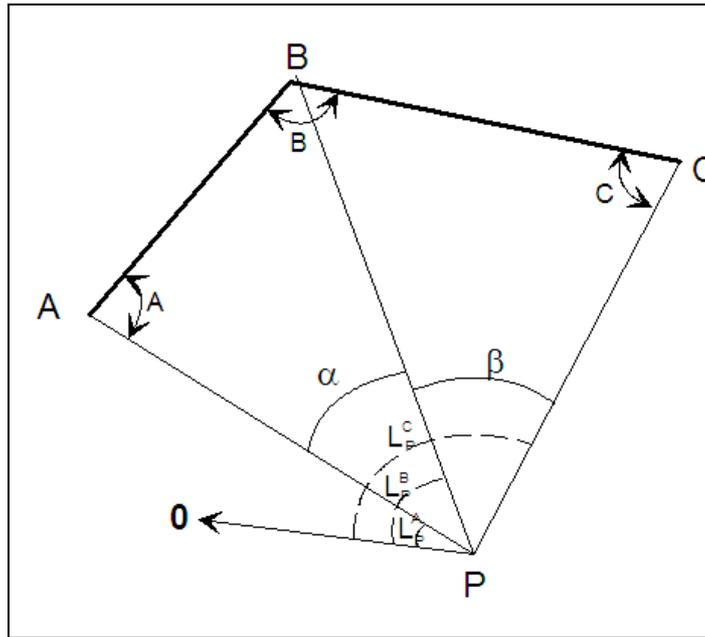


Figura 5. Observación de la intersección inversa.

Matemáticamente el problema tiene resolución mediante el clásico método de Pothnot, si bien existen otros procedimientos más sencillos para su resolución, como por ejemplo según el siguiente desarrollo (C. Fernández Antón): en la figura que representa la situación en el método de intersección inversa, aplicando el teorema del seno a los triángulos que la componen (ABP y BCP) se puede despejar el valor de la distancia PB en ambas expresiones:

$$\frac{D_P^B}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{D_A^B}{\widehat{\text{sen } \alpha}} \rightarrow D_P^B = D_A^B \frac{\widehat{\text{sen } A}}{\widehat{\text{sen } \alpha}}$$

$$(15) \frac{D_P^B}{\widehat{\text{sen } C}} = \frac{D_B^C}{\widehat{\text{sen } \beta}} \rightarrow D_P^B = D_B^C \frac{\widehat{\text{sen } C}}{\widehat{\text{sen } \beta}}$$

Iguando:

$$(16) D_A^B \frac{\widehat{\text{sen } A}}{\widehat{\text{sen } \alpha}} = D_B^C \frac{\widehat{\text{sen } C}}{\widehat{\text{sen } \beta}}$$

Llevando a un lado de la igualdad los términos desconocidos (A y C):

$$(17) \quad \frac{\text{sen}A}{\text{sen}C} = \frac{D_B^C \cdot \text{sen}\alpha}{D_A^B \cdot \text{sen}\beta} = M$$

Por otro lado la figura ha de cumplir que la suma de todos sus ángulos sea  $400^\circ$ .

$$(18) \quad \hat{A} + \hat{C} + \alpha + \beta + \hat{B} = 400^\circ$$

Por lo tanto, se tendrá un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que puede resolverse mediante sustitución:

$$(19) \quad \hat{C} = (400 - \hat{B} - \beta - \alpha) - \hat{A} = \hat{E} - \hat{A}, \text{ (siendo } C = 400 - B - \beta - \alpha)$$

$$D_A^B \cdot \text{sen} \hat{A} \cdot \text{sen} \beta = D_B^C \cdot \text{sen} \hat{C} \cdot \text{sen} \alpha$$

$$D_A^B \cdot \text{sen} \hat{A} \cdot \text{sen} \beta = D_B^C \cdot \text{sen}(\hat{E} - \hat{A}) \cdot \text{sen} \alpha$$

$$D_A^B \cdot \text{sen} \hat{A} \cdot \text{sen} \beta = D_B^C \cdot [\text{sen} \hat{E} \cdot \cos \hat{A} - \cos \hat{E} \cdot \text{sen} \hat{A}] \cdot \text{sen} \alpha$$

$$\text{sen} \hat{A} \cdot [D_A^B \cdot \text{sen} \beta + D_B^C \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \hat{E}] = [D_B^C \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \hat{E}] \cdot \cos \hat{A}$$

$$\text{tg} \hat{A} = \frac{D_B^C \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \hat{E}}{D_A^B \cdot \text{sen} \beta + D_B^C \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \hat{E}}$$

$$\hat{C} = \hat{E} - \hat{A}$$

Al calcular el ángulo A hay que tener en cuenta que  $tg\hat{A} = tg(200 + \hat{A})$ . Estas expresiones permiten obtener los ángulos A y C y por tanto resolver el problema. ya que se pueden obtener los acimutes a V:

$$(20) \quad \begin{aligned} \theta_A^P &= \theta_A^B + \hat{A} \\ \theta_C^P &= \theta_B^C \pm 200 - \hat{C} \end{aligned}$$

Las distancias se hallarán mediante el teorema del seno:

$$(21) \quad \begin{aligned} B_1 &= 200 - A - \alpha \\ B_2 &= 200 - C - \beta \quad \text{ó} \quad B_2 = B - B_1 \end{aligned}$$

$$\frac{D_P^B}{\widehat{\text{sen } \hat{A}}} = \frac{D_A^B}{\text{sen } \alpha} \rightarrow D_P^B = D_A^B \frac{\widehat{\text{sen } \hat{A}}}{\text{sen } \alpha}$$

$$\frac{D_A^B}{\text{sen } \alpha} = \frac{D_A^P}{\text{sen } B_1} \rightarrow D_A^P = D_A^B \frac{\text{sen } B_1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\frac{D_B^C}{\text{sen } \beta} = \frac{D_C^P}{\text{sen } B_2} \rightarrow D_C^P = D_B^C \frac{\text{sen } B_2}{\text{sen } \beta}$$

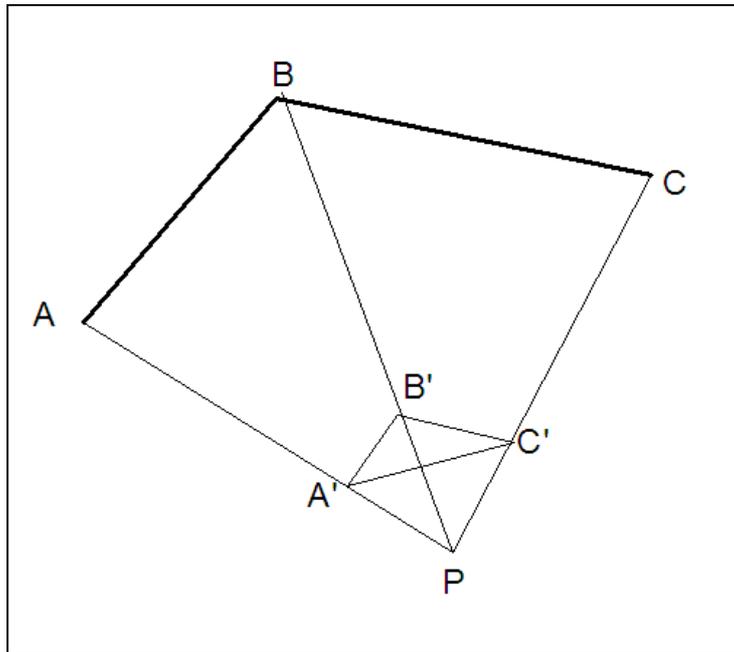
Una vez obtenidas las distancias y los acimutes se obtendrán las coordenadas de V desde los puntos A o C:

(22)

$$\begin{aligned} X_p &= X_A + D_A^P \cdot \text{sen } \theta_A^P & X_p &= X_C + D_C^P \cdot \text{sen } \theta_C^P \\ Y_p &= Y_A + D_A^P \cdot \text{cos } \theta_A^P & Y_p &= Y_C + D_C^P \cdot \text{cos } \theta_C^P \end{aligned}$$

### 50. 3.2. Error máximo en la intersección inversa

La incertidumbre existente en un punto P determinado por el método de intersección inversa, se analiza estudiando el desplazamiento de las tangentes al arco capaz en el punto de intersección. A partir de las inversas de las distancias, y sobre las propias visuales se sitúan puntos A', B', C'. Uniendo los puntos A', B', C' se forma el denominado triángulo indicativo del error.



**Figura 6.** Triángulo indicativo de error en la intersección inversa.

Se obtiene que la incertidumbre viene expresada por:

$$(23) \quad e = \frac{e_a \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot S} \sqrt{(\text{lado mayor})^2 + (\text{lado intermedio})^2}$$

donde:

- $e_a$  es la incertidumbre existente en la visual acimutal realizada con el equipo.
- $S$  es la superficie del triángulo formado por los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  que se obtienen calculando la inversa de las distancias de los lados de la intersección.
- lados mayores e intermedios son las longitudes de dichos lados en el triángulo indicativo de error.

El error en la intersección inversa será menor a medida que lo sea la incertidumbre de la observación acimutal ( $e_a$ ). También será menor al aumentar la superficie del triángulo y disminuir la longitud de los lados del triángulo indicativo del error. El triángulo indicativo del error afecta en dos sentidos: su superficie y la longitud de los lados que lo forman. Los lados

han de ser lo mínimos posibles, pero la superficie la máxima. Ello implica que el triángulo mejor (el que aparecería en la intersección más deseable) será un triángulo equilátero que tiene la propiedad de abarcar una mayor área con el perímetro mínimo. Interesa que las visuales formen unos  $60^\circ$  aproximadamente, ya que se necesita el triángulo de mayor superficie con el menor perímetro: triángulo equilátero.

#### **50. 4. Intersección mixta**

La intersección mixta simple es el método que permite la determinación de las coordenadas de un punto a partir de observaciones de campo obtenidas en dos puntos de estación, uno de ellos de coordenadas conocidas y siendo el segundo punto de estación aquel cuyas coordenadas se quieren determinar.

Suponiendo dos puntos A y B de coordenadas conocidas y un punto V cuyas coordenadas se quieren determinar, el método operativo de observación en la intersección mixta simple sería:

1) estacionar el equipo topográfico en el punto conocido A y realizar las siguientes observaciones:

- lectura de orientación (al menos a un punto conocido, en este caso B).
- lectura al punto desconocido: V.

2) estacionar el equipo topográfico en el punto V y realizar las siguientes observaciones:

- lectura al punto conocido A.
- lectura al punto conocido B.

En la intersección mixta simple se conocerán  $(X_A, Y_A)$ ,  $(X_B, Y_B)$  y en campo se habrán obtenido las lecturas  $L_A^B$ ,  $L_A^V$ ,  $L_V^A$  y  $L_V^B$ .

La resolución numérica de la intersección mixta simple se transforma al caso de directa (resolución de un triángulo a partir del conocimiento de un lado y los ángulos) sin más que calcular el ángulo en el vértice en el que no se ha estacionado (B).

## 50.5. Cálculo y compensación

En general, en una red topográfica se realizan observaciones mixtas, con carácter intersección directa, inversa, mixta y trilateración. En la bibliografía clásica sobre triangulación topográfica existen diversos métodos para la compensación de la triangulación mediante compensación de figuras (cuadriláteros, cadenas, polígonos) en los que se describe la forma de "repartir" los errores de una manera sistemática de tal forma que la figura cumpliera la condición de geometría perfecta: cierre de triángulos, suma de ángulos centrales de la figura, ajuste de lados mediante el teorema del seno, etc, una operación tras otra de forma que la siguiente operación no afectase a las anteriores. Sin embargo, la posibilidad de programar los cálculos en ordenador y la potencia de los métodos de mínimos cuadrados para la compensación de un grupo de observaciones de diferente naturaleza, hace que estos métodos prácticamente hayan desaparecido o queden obsoletos, por lo que en este apartado la descripción del método de compensación se referirá exclusivamente al método de mínimos cuadrados (MMCC) para el ajuste de observaciones de la triangulación.

Básicamente, en topografía y en las triangulaciones se pueden integrar tres tipos de observaciones: direcciones angulares, distancias y desniveles. A cada tipo de observación le corresponderá una forma de ecuación mínimos cuadrados. Las ecuaciones de observación deberán relacionar las observaciones de campo con las incógnitas. En cada ecuación aparecerá la observación (convenientemente linealizada) y como incógnitas, parámetros para determinar las coordenadas del punto o puntos desconocidos. La linealización de una ecuación se realiza mediante el método de Taylor. A cada tipo de observación de campo le corresponde un modelo de ecuación, de tal forma que se tienen ecuaciones de:

- Relación de observación por dirección angular.
- Relación de observación de distancias.
- Relación de observación de desnivel.

### 50.5.1. Relación de observación para observaciones angulares

Para las observaciones de dirección (medidas angulares acimutales) se obtiene el modelo de ecuación a partir de la expresión analítica del acimut a partir de las coordenadas de dos puntos y a partir del conocimiento del valor aproximado se tendrá:

$$\theta_1^2 = (\theta_1^2)' + \partial\theta_1^2$$

(24)

$$\partial\theta_1^2 + (\theta_1^2)' - \theta_1^2 = V_1^2$$

Estableciendo la terminología: (Valor aproximado + corrección) – valor observado = residuo

El acimut puede expresarse en función de las coordenadas de la siguiente forma:

(25)

$$\tan \theta_1^2 = \left( \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \right)$$

el cual es función de cuatro términos:

(26)

$$\theta_1^2 = f(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$$

La ecuación  $\partial\theta_1^2 + (\theta_1^2)' - \theta_1^2 = V_1^2$  no es lineal, ya que la tangente no lo es. Para poder plantear y resolver el sistema de ecuaciones por MMCC, es necesario linealizarla. Para ello se aplica la derivada de la función:

(27)

$$\partial\theta_1^2 = \frac{\partial f}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial f}{\partial Y_1} dY_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = \frac{1}{1 + \left( \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \right)^2} \cdot \frac{1}{(Y_2 - Y_1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \frac{1}{1 + \left( \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \right)^2} \cdot \frac{(-1)}{(Y_2 - Y_1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y_2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \frac{(-1)(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \frac{(-1)(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} \cdot (-1)$$

Y sustituyendo:

$$(28) \quad \partial\theta_1^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \left[ \frac{1}{(Y_2 - Y_1)} dX_2 - \frac{1}{(Y_2 - Y_1)} dX_1 - \frac{(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dY_2 + \frac{(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dY_1 \right]$$

Multiplicando y dividiendo por  $(Y_2 - Y_1)$ :

$$(29) \quad \partial\theta_1^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \left[ \frac{(Y_2 - Y_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dX_2 - \frac{(Y_2 - Y_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dX_1 - \frac{(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dY_2 + \frac{(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dY_1 \right]$$

$$\partial\theta_1^2 = \frac{(Y_2 - Y_1)^2}{D^2} \cdot \left[ \frac{(Y_2 - Y_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dX_2 - \frac{(Y_2 - Y_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dX_1 - \frac{(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dY_2 + \frac{(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dY_1 \right]$$

$$\partial\theta_1^2 = \frac{1}{D^2} \cdot [(Y_2 - Y_1)dX_2 - (Y_2 - Y_1)dX_1 - (X_2 - X_1)dY_2 + (X_2 - X_1)dY_1]$$

Esta ecuación está en radianes. Partiendo de valores de acimutes en unidades centesimales y estableciendo la diferencia entre valor aproximado y valor real en segundos centesimales:

$$(30) \quad \partial\theta_1^2 = \frac{r^{cc}}{D^2} \cdot [(Y_2 - Y_1)dX_2 - (Y_2 - Y_1)dX_1 - (X_2 - X_1)dY_2 + (X_2 - X_1)dY_1]$$

siendo  $r^{cc} = 636620^{cc}$ . Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$(31) \quad \partial\theta_1^2 + (\theta_1^2)' - \theta_1^2 = V_1^2$$

$$(32) \quad \frac{r^{CC}}{D^2} \cdot [(Y_2 - Y_1)dX_2 - (Y_2 - Y_1)dX_1 - (X_2 - X_1)dY_2 + (X_2 - X_1)dY_1] + [(\theta_1^2)' - \theta_1^2]^{CC} = v$$

En estas ecuaciones  $(\theta_1^2)'$  es el obtenido mediante coordenadas, mientras que  $\theta_1^2$  es el obtenido mediante lecturas sumándole a éstas la desorientación de la estación:

$$(33) \quad \theta_1^2 = L_1^2 + \Sigma_1$$

Cuando no se conozca la desorientación en el punto de estación, es decir, cuando se ha estacionado y obtenido las lecturas desde el propio punto a determinar (desconocido, como si fuera una observación de intersección inversa) la  $\Sigma_1$  será una incógnita más a determinar. Normalmente no se introduce esta incógnita como tal, sino que se calcula un valor aproximado, y se plantea como incógnita la variación de desorientación:

$$(34) \quad \theta_1^2 = L_1^2 + (\Sigma_1' + d\Sigma)$$

Sustituyendo en el modelo anterior se obtiene:

$$(35) \quad \frac{r^{CC}}{D^2} \cdot [(Y_2 - Y_1)dX_2 - (Y_2 - Y_1)dX_1 - (X_2 - X_1)dY_2 + (X_2 - X_1)dY_1] + [(\theta_1^2)' - (L_1^2 + \Sigma_1' + d\Sigma)]^{CC} = v$$

Finalmente, ordenando las incógnitas y el término independiente se obtiene la expresión general de la relación de observación por dirección angular:

$$(36) \quad \frac{r^{CC}}{D^2} \cdot [(Y_2 - Y_1)dX_2 - (Y_2 - Y_1)dX_1 - (X_2 - X_1)dY_2 + (X_2 - X_1)dY_1] - d\Sigma_1 + [(\theta_1^2)' - (L_1^2 + \Sigma_1')]^{CC} = v$$

Las incógnitas son cinco:

- La variación de coordenadas del punto de estación:  $dX_1, dY_1$
- La variación de coordenadas del punto visado:  $dX_2, dY_2,$
- La variación de desorientación del punto de estación:  $d\Sigma_1$

Bastará con obtener unas coordenadas aproximadas del punto de estación y del punto visado, y hacer los cambios de subíndice para aplicarla a la observación concreta. Si se conocieran las coordenadas de cualquiera de los puntos, sus respectivos diferenciales serían igual a cero, con lo cual quedaría reducida la expresión anterior, de tal forma que se pueden construir las ecuaciones de observación para visuales de intersección directa o de intersección inversa.

### 50.5.2 Relación de observación para observaciones de distancia

Para cada distancia se establece:

$$(37) \quad D = D' + \partial D \Rightarrow \partial D + D' - D = 0$$

Al ajustar, no se cumplirá la igualdad, con lo que si el sistema es redundante, se introduce el concepto de residuo:

$$(38) \quad \partial D + D' - D = v$$

La distancia, en un sistema cartesiano, viene dada por:

$$(39) \quad D_1^2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \Rightarrow D^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

Como no es una ecuación lineal, para poder aplicar el método de MMCC se linealiza. Diferenciando:

$$2D \cdot \partial D = 2 \cdot (X_2 - X_1) \cdot \partial(X_2 - X_1) + 2 \cdot (Y_2 - Y_1) \cdot \partial(Y_2 - Y_1)$$

(40)

$$\partial D = \frac{(X_2 - X_1)}{D} \cdot \partial(X_2 - X_1) + \frac{(Y_2 - Y_1)}{D} \cdot \partial(Y_2 - Y_1)$$

$$\partial D = \frac{1}{D} [-(X_2 - X_1)dX_1 - (Y_2 - Y_1)dY_1 + (X_2 - X_1)dX_2 + (Y_2 - Y_1)dY_2]$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$(41) \quad \partial D + D' - D = v$$

(42)

$$\frac{1}{D_{CAL}} \left[ -(X_2 - X_1)dX_1 - (Y_2 - Y_1)dY_1 + (X_2 - X_1)dX_2 + (Y_2 - Y_1)dY_2 \right] + D_{CAL} - D_{OBS} = V$$

El modelo de relación de observación por cada distancia observada (y tratada convenientemente para reducirla correspondientemente, por ejemplo en el caso de la proyección UTM) se obtiene la expresión general de la relación de observación por distancias:

(43)

$$\frac{1}{D_{CAL}} \left[ -(X_2 - X_1)dX_1 - (Y_2 - Y_1)dY_1 + (X_2 - X_1)dX_2 + (Y_2 - Y_1)dY_2 \right] + D_{CAL} - D_{OBS} = V$$

Si se conocieran las coordenadas de cualquiera de los puntos, sus respectivos diferenciales serían nulos y quedaría reducido el número de incógnitas.

Algunos autores sugieren variaciones en la ecuación de distancia con el fin de tener en cuenta la posible introducción de errores sistemáticos en la medida de distancias. Por ello se puede incluir un factor de escala para tratar de eliminar posibles errores debidos a una elección inadecuada del índice de refracción, reducción altimétrica incorrecta, factor de escala de la proyección cartográfica o incluso errores sistemáticos en la definición del datum de la red.

### 50.5.3 Relación de observación para observaciones de desnivel

Finalmente, para su aplicación en altimetría para redes topográficas, se deduce el modelo de relación de observación para observaciones de desnivel. En cada desnivel se puede plantear:

$$(44) \quad \Delta H_1^2 = (\Delta H_1^2)' + d(\Delta H) \Rightarrow d(\Delta H) + (\Delta H_1^2)' - \Delta H_1^2 = 0$$

Al ajustar no se cumplirá la igualdad, con lo que si el sistema es redundante, se introduce el concepto de residuo como:

$$(45) \quad d(\Delta H) + (\Delta H_1^2)' - \Delta H_1^2 = v$$

El desnivel entre dos puntos viene expresado por la diferencia de altitud:

$$(46) \quad \Delta H_1^2 = H_2 - H_1$$

$$d(\Delta H_1^2) = dH_2 - dH_1$$

con lo que el modelo de relación de observación para desniveles (esta vez lineal) queda finalmente como:

$$(47) \quad dH_2 - dH_1 + (\Delta H_{12})' - \Delta H_{12} = v$$

donde  $dH_1$  y  $dH_2$ , son las incógnitas.

#### 50.5.4. Resolución del sistema de ecuaciones de observación

Las consideraciones básicas que sustentan la teoría de MMCC son:

1. Las equivocaciones y los errores sistemáticos han sido eliminados previamente, sólo quedan errores accidentales.
2. El número de observaciones que van a ser ajustadas es grande.
3. La frecuencia de los errores sigue una distribución estadística normal (curva de Gauss).

El ajuste por MMCC proporciona el tratamiento más riguroso de los errores, además de proporcionar los valores más probables de las incógnitas, el ajuste por MMCC permite:

1. Determinar la precisión de las cantidades ajustadas.
2. Manifiesta la presencia de errores grandes y equivocaciones, de tal forma que pueden tomarse acciones para eliminarlas.
3. Hace posible el diseño óptimo de los procedimientos topográficos en gabinete antes de ir al campo a realizar las mediciones (mediante la matriz de diseño).

Para un grupo de observaciones de igual peso, la condición que se aplica en el ajuste por MMCC es que la suma de los cuadrados de los residuos sea mínima. Suponiendo un grupo de  $m$  medidas de igual peso cuyos residuos son  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$ , en forma de ecuación paramétrica, la condición fundamental del ajuste por MMCC, se expresa:

$$(48) \quad \sum (V_i)^2 = (V_1)^2 + (V_2)^2 + (V_3)^2 + \dots + (V_m)^2 = \text{MINIMO}$$

Si los valores medidos son de distinto peso la condición a imponer es que la suma de los pesos  $p$  por sus correspondientes residuos al cuadrado sea mínima:

$$(49) \quad \sum p_i(V_i)^2 = p_1(V_1)^2 + p_2(V_2)^2 + p_3(V_3)^2 + \dots + p_m(V_m)^2 = \text{MINIMO}$$

Considerando el siguiente sistema de  $\underline{m}$  ecuaciones de observación lineales de igual peso que contienen  $\underline{n}$  incógnitas :

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + c_1 C + \dots + n_1 N - L_1 &= V_1 \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C + \dots + n_2 N - L_2 &= V_2 \\ \dots & \\ a_m A + b_m B + c_m C + \dots + n_m N - L_m &= V_m \end{aligned}$$

donde  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  ... son los coeficientes de las incógnitas  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  ... ,  $\underline{L}$  son las constantes y  $\underline{V}$  los residuos.

Elevando al cuadrado los residuos y sumándolos, se forma la función  $\sum V^2$ . Tomando las derivadas parciales de  $\sum V^2$  con respecto a cada incógnita A, B, C, etc se forman las  $\underline{n}$  ecuaciones normales. En forma matricial, las ecuaciones de observación vendrían expresadas de la forma:

$$A_{m \times n} X_{n \times 1} = L_{m \times 1} + V_{m \times 1}$$

donde:

(50)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & b_m & c_m & \dots & n_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ \dots \\ N \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \dots \\ L_m \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ V_m \end{bmatrix}$$

Y estableciendo la correspondencia con el sistema de ecuaciones y operando:

$$A^T A X = A^T L$$

En esta ecuación  $A^T A$  es la matriz de los coeficientes de las incógnitas de las ecuaciones normales. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $(A^T A)^{-1}$  y simplificando, se obtiene (I, matriz identidad):

$$\begin{aligned} (A^T A)^{-1} (A^T A) X &= (A^T A)^{-1} A^T L \Rightarrow I X = (A^T A)^{-1} A^T L \Rightarrow \\ &\Rightarrow X = (A^T A)^{-1} A^T L \end{aligned}$$

Esta ecuación matricial es la expresión fundamental del método de ajuste por MMCC para observaciones de igual precisión. La matriz X está formada por los valores más probables de las incógnitas A, B, C... Introduciendo diferentes pesos para cada observación el sistema tiene la expresión:

$$(51) \quad X = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

donde la matriz P es una matriz diagonal de pesos que se define:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}_n$$

En la matriz P todos los elementos fuera de la diagonal principal son 0, correspondiendo esta situación a observaciones independientes y no correlacionadas.

Los criterios de asignación de pesos pueden ser:

- Desconocida la varianza se pueden aplicar criterios topográficos. Por ejemplo se puede construir la matriz de pesos considerando que el peso de la observación es inversamente proporcional a la distancia del tramo

$$p = \frac{k}{D}$$

- Conocida la varianza, el peso p de una cierta medida se define como una cantidad inversamente proporcional a su varianza:

$$P = k / \sigma^2$$

siendo  $K = \sigma_0^2$ , varianza de referencia a priori o varianza de la observación de peso unidad. A partir de ella el peso de cada observación será:

$$P = \sigma_0^2 / \sigma^2$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m^2} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \Sigma^{-1}$$

siendo  $\Sigma$  la matriz varianza, que se puede construir a partir de las precisiones de los equipos utilizados:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Para determinar las precisiones de las cantidades ajustadas, se calculan los residuos después del ajuste. Sea el ajuste con o sin pesos, los residuos vienen dados por:

$$V = Ax - L$$

Y la varianza de referencia a posteriori estimará si la varianza a priori ha sido asignada con acierto ( $\sigma_0^2 \approx 1$ ):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r}$$

donde  $V$  es el vector de residuos,  $P$  la matriz de pesos y  $r$  es el número de grados de libertad del ajuste. La matriz cofactor asociada al vector de parámetros por el método paramétrico, puede calcularse a partir de:

$$Q_{xx} = N^{-1} = (A^T P A)^{-1}$$

Y a partir de esta matriz obtenemos la matriz covarianza, que contiene las precisiones buscadas. La desviación típica de las cantidades individuales ajustadas son:

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{xx}$$

Y los parámetros de la elipse de error de cada punto que proporcionan el grado de incertidumbre para cada uno son las raíces de los valores propios de la matriz covarianza:

$$\text{Semieje mayor } a = \sqrt{\lambda_1}$$

$$\text{Semieje menor } b = \sqrt{\lambda_2}$$

## 50.6. Proyecto y observación de redes topográficas

### 50.6.1 Diseño.

El conjunto de puntos que forman una red topográfica debe cubrir toda la zona de trabajo. Su diseño depende de tres factores:

- El trabajo que se quiere realizar.
- El terreno donde deba establecerse.
- El coste del proyecto.

El diseño puede hacerse estimando la geometría sobre la cartografía existente o recurriendo a estudios de diseño óptimo. Según la metodología de trabajo, con la consideración de la situación sobre el terreno de los puntos, se puede establecer la matriz de diseño A del modelo y con las características de la instrumentación topográfica con la que se va a trabajar, unida al método de observación que se utilice, se puede determinar la precisión y con ello la matriz de pesos o matriz de covarianzas a priori  $\sigma_0^2 Q$  mediante simulación.

La matriz de diseño se conoce si se saben las coordenadas aproximadas de los vértices elegidos. Por otro lado al fijar la instrumentación y el método de observación se determina P. De esta manera se puede obtener la precisión del trabajo sin haberlo realizado ya que la matriz normal N será conocida y con ello:

$$C_{x^*x^*} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}$$

Según se considere la matriz  $C_{x^*x^*}$  fija o no, se tienen los diferentes problemas de diseño, que dependerán de que parámetros se consideran fijos o libres:

- Diseño de orden cero: fija A y P tomando un sistema de referencia y deja libres x y  $C_{x^*x^*}$  que dependerán de dicho sistema.
- Diseño de primer orden o problema de configuración: fija la matriz de pesos y la de covarianzas  $C_{x^*x^*}$  dejando libre la de configuración, A. Es decir, deja libre y desea determinar la situación de los vértices para garantizar una precisión como la de  $C_{x^*x^*}$ .
- Diseño de segundo orden: fija las matrices A y  $C_{x^*x^*}$  y deja libre la pesos P. Así se trata de establecer los métodos de observación necesarios y la instrumentación adecuada para obtener una precisión determinada.
- Diseño de tercer orden: fija  $C_{x^*x^*}$  y deja parcialmente libres A y P. Pretende mejorar la información de que se dispone a partir de otros datos como pueden ser un mayor número de observaciones, etc.

Estas fases desde un punto de vista práctico pueden resumirse en:

- Preselección de los vértices de la red.
- Estudio de las observaciones que se pueden realizar.
- Estudio de los instrumentos disponibles y métodos de observación para poder fijar una estimación a priori de la precisión.
- Compensación y estudio de los resultados.
- Calculo de las influencias de las observaciones van a realizarse.
- Búsqueda de la solución optima en el sentido necesario: coste, precisión, fiabilidad, etc. realizándose para ello:
  - Elección del instrumental
  - Diseño de tercer orden.
  - Elección de los métodos de observación
  - Eliminación o anexo de observaciones

Desde un punto de vista práctico los trabajos para la implementación de una red topográfica empiezan con la obtención de la cartografía a escala 1:25.000 de la zona del trabajo y de los alrededores para la localización de los vértices de la red. Analizado el objetivo del trabajo topográfico y las necesidades del mismo, se seleccionarán vértices pre-existentes en las proximidades que tengan coordenadas en el sistema de referencia elegido para el trabajo.

Sobre la cartografía existente se localizan estos vértices, se eligen los lugares idóneos para situar la red básica de nueva implantación, y se comprueba que dichos lugares cumplan la condiciones geométricas (triángulos equiláteros y que la geometría de la figura sea idónea). Se intentara que los vértices formen triángulos de la misma longitud y con forma geométrica regular para conseguir a posteriori un buen ajuste de la red. Si se observa por métodos clásicos es importante que exista intervisibilidad desde cada punto.

Finalmente, los vértices de una red básica han de tener las siguientes características:

- Estabilidad dimensional: que no varien de forma o tamaño.
- Estabilidad material: que sus materiales sean resistentes a los agentes externos.
- Estabilidad espacial: que no varíe su situación o posición absoluta en el espacio.
- Materialización de forma adecuada, fina, precisa e inequívoca.
- Fácilmente estacionable.
- Fácilmente visible desde cualquier otro punto de la zona.
- Con visibilidad sobre la zona del proyecto.
- Fácilmente localizable.
- Fácilmente sustituible en caso de desaparición.

### **50.6.2. Reconocimiento y selección definitiva**

La selección definitiva de vértices se realiza en la fase de reconocimiento del terreno, comprobando la viabilidad del diseño establecido en la fase anterior.

### **50.6.3 Señalización**

Con el anteproyecto verificado, se materializan los vértices y se elabora la reseña de los mismos. La materialización puede realizarse con señales sobre la roca, clavos de acero, hitos hormigonados,

hitos feno o mediante barras de acero corrugadas, clavadas en el terreno y consolidadas en la base con mortero de cemento u hormigón.

## **Bibliografía**

- [1] CHUECA PAZOS, M., HERRÁEZ BOQUERA, J., BERNÉ VALERO, J.L. Tratado de Topografía 2. Métodos Topográficos. (1996). Editorial Paraninfo.
- [2] FERRER TORIO, R., PIÑA PATÓN, B. Topografía aplicada a la Ingeniería. 1ª parte. (1996). Instituto Geográfico Nacional.
- [3] MARTIN ASIN, F. Geodesia y Cartografía Matemática. (1987), 2ª edición. Instituto Geográfico Nacional.
- [4] OJEDA, J.L. Métodos topográficos y oficina técnica. (1984). Instituto Geográfico Nacional.

## **Tema 51. Poligonación y radiación: observación, cálculo y compensación de poligonales. Tolerancias y errores de cierre. Método de radiación. Nivelación trigonométrica. Nivelación geométrica: métodos de observación, errores y tolerancias.**

### **51.1. Poligonación y radiación: Observación, cálculo y compensación de poligonales. Tolerancias y errores de cierre.**

#### **51.1.1. Introducción**

El método de itinerario o poligonación en topografía clásica se introduce cuando es necesario dar coordenadas a puntos fundamentales de un levantamiento o replanteo para realizar el trabajo por cuestión de visibilidad, precisión, máxima longitud de las visuales, etc. o también simplemente para dotar de coordenadas a un trabajo desde uno o varios puntos de referencia (por ejemplo, enlazar un trabajo con la red geodésica). Los puntos de la poligonal pueden convertirse en estaciones para efectuar un levantamiento. En este caso en primer lugar se realizará la observación de los puntos de estación del itinerario y después se efectuará en cada uno de ellos la radiación de los puntos de detalle.

En cualquiera de los casos, la poligonación consiste en una serie de estaciones ligadas mediante medidas angulares y de distancia. Las estaciones de la poligonal tendrán que:

- estar relacionadas entre sí mediante observaciones (angulares y de distancia).
- tener intervisibilidad entre ellas.
- poder desempeñar el trabajo para el que se ha diseñado la poligonal desde los puntos de la misma.

#### **51.1.2. Observación, cálculo y compensación**

##### **• Observación**

El método operativo general de poligonación consiste en estacionar en un punto A (inicio de la poligonal y con coordenadas conocidas), visar a una referencia (también de coordenadas conocidas), tomando lecturas angulares acimutales y cenitales, distancia y alturas de instrumento y prisma y visar al segundo punto de la poligonal (B). Posteriormente se estacionará en B y se tomarán las mismas observaciones al punto anterior A y al punto

siguiente, C. Así se continúa sucesivamente hasta llegar al último punto de la poligonal (de coordenadas conocidas o no). En cada una de las observaciones angulares se realiza regla de Bessel, observando en posiciones CD y CI sacando los valores promedio compensados de ambas lecturas. Las distancias sólo se miden en posición de CD (directa y recíproca).

Este método general se conoce con el nombre de método de Moinot. Existen otros métodos auxiliares de observación como los métodos de Porro, Villani, de comprobaciones angulares y el método de comprobaciones sucesivas.

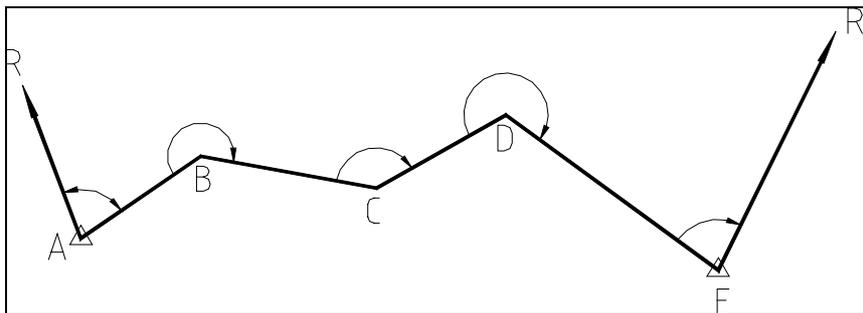


Figura 1. Esquema general de una poligonal.

Para observación de poligonales de precisión se utilizan los equipos de centrado forzoso en los vértice de frente, de estación y de espalda, por lo que también se denomina método de los tres trípodes. Siguiendo este método se sitúa el aparato en estación y se observan varias referencias de salida. Para materializar el punto de la poligonal que va a observarse, se sitúa un trípode con una placa de puntería. Las placas de puntería disponen de una plataforma nivelante con plomada óptica y nivel esférico, para su estacionamiento y esta base nivelante permite la adaptación no sólo de la placa de puntería sino también el instrumento sin tener que desmontarla del trípode ni quitarla del correspondiente estacionamiento. La placa se orienta en la dirección del punto de estación y se realiza la observación angular. Concluida la observación angular en CD / CI a los vértices de frente y espalda, se quitan las placas de puntería y se sitúan sobre los trípodes los prismas, enroscándolo en la misma base nivelante. El cambio de estación se realiza sin mover los trípodes. El teodolito o estación total se intercambia con las placas de puntería, y se repite la operación anterior.

De esta forma, el error en la observación se reduce al minimizar el error de dirección, que es siempre el más temido de los errores angulares en el método de poligonación.

## Clasificación de las poligonales

Se puede establecer una primera clasificación teniendo en cuenta los puntos de partida y llegada:

- Cerrada: el punto inicial y final coinciden, con lo que se puede obtener el error de cierre en la poligonal.

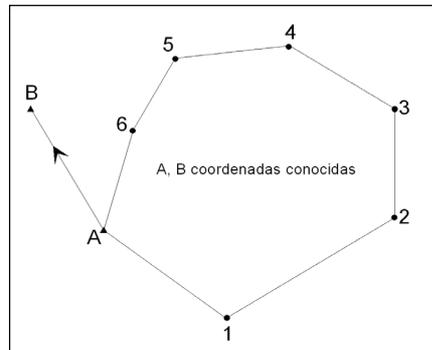


Figura 2. Poligonal cerrada.

- Encuadrada o abierta: se parte de un punto de coordenadas conocidas y un acimut conocido para orientar y se llega a otro punto de coordenadas conocidas, pudiendo igualmente obtener el error de cierre de la poligonal.

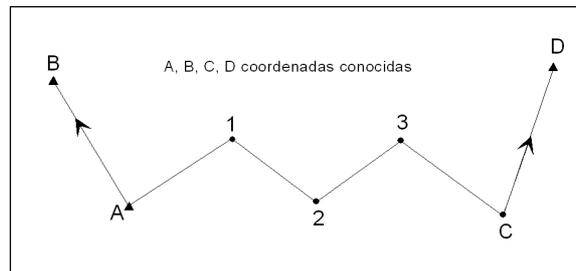


Figura 3. Poligonal encuadrada.

- Colgada: se parte de un punto de coordenadas conocidas y una orientación pero se termina en otro punto de coordenadas no conocidas ni desde el cual se puede comprobar el acimut, por lo que no se puede obtener el error de cierre de la poligonal y por lo tanto cualquier error grosero pasará desapercibido.

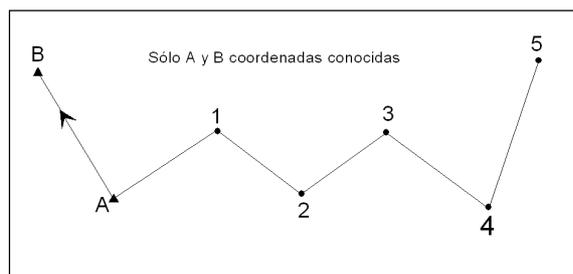


Figura 4. Poligonal colgada.

Otra clasificación se puede establecer según la orientación angular en la observación angular:

- Poligonal orientada: el instrumento está orientado en cada uno de los puntos o estaciones que componen la poligonal, de tal forma que los ángulos acimutales son directamente acimutes. La única ventaja es que se puede comprobar en campo inmediatamente (angularmente), el cierre de la poligonal.
- Poligonal no orientada: es el caso normal, en el que se observan los ángulos acimutales de la poligonal y posteriormente se calculan desorientaciones en cada estación y se lleva a cabo la "corrida de acimutes" para dotar de acimut a cada tramo o eje de la poligonal.

### Errores a priori en el método de poligonación

#### a) Error angular o transversal

Si al medir el ángulo en la estación inicial A se cometiera un error,  $e_1$  y suponiendo que no se vuelve a cometer ningún otro error en las restantes estaciones de la poligonal, todo el itinerario gira rígidamente con centro en A, un ángulo de  $e_1$  y radio AD, lo que determina que el último punto D, se traslada a D'. El error cometido trasciende hasta el final con efectos progresivamente ampliados. Designando por  $L$  la longitud total del itinerario y si es  $n$  el número de tramos del mismo, el desplazamiento  $DD'$  que experimentará el punto D será:

$$(1) \quad DD' = AB n e_1 = \frac{L}{n} n e_1$$

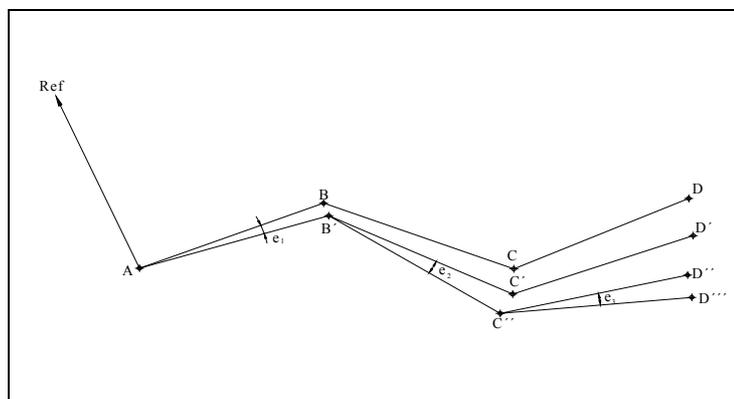


Figura 5. Error máximo en la poligonación.

Supongamos que, con independencia del error en el ángulo A, al medir el ángulo en B se comete un error  $e_2$ , sin que se produzca ningún otro error en los siguientes. La poligonal sufrirá un nuevo giro de valor  $e_2$  y centro en B', con lo que D' se desplazará a D'', de modo que:

$$(2) \quad D'D'' = \frac{L}{n} (n-1) e_2$$

Admitiendo, del mismo modo, errores sucesivos e independientes en todos los ángulos, el error que el se cometa en el enésimo producirá un efecto final

$$(3) \quad D^{n-1}D^n = \frac{L}{n} e_n$$

Como tales errores son independientes, el efecto acumulado de todos ellos será igual a su componente cuadrática. El error total será:

$$(4) \quad E_T \leq \sqrt{\left(\frac{L}{n}\right)^2 n^2 e_1^2 + \left(\frac{L}{n}\right)^2 (n-1)^2 e_2^2 + \dots + \left(\frac{L}{n}\right)^2 e_n^2}$$

Los valores de  $e_1, e_2, \dots, e_n$  son desconocidos, pero pueden sustituirse por el error máximo angular,  $e$ , que se cometa con el teodolito que se utilice. Si  $e_a$  es el error máximo que, por dirección, le corresponde a dicho aparato, resultará:

$$(5) \quad e \leq e_a \sqrt{2}$$

ya que cada ángulo consta de dos direcciones. Sustituyendo se obtiene:

$$(6) \quad E_T \leq \frac{L}{n} e_a \sqrt{2} \sqrt{n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1}$$

La cantidad subradical es la suma de los cuadrados de los n primeros números enteros, y su valor es:

$$(7) \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior se obtiene que el error transversal puede calcularse con la expresión:

$$(8) \quad E_T \leq \frac{L}{n} e_a \sqrt{2} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

b) Error longitudinal o en distancias

Designando por  $\varepsilon$  el error relativo de la medida de distancias, L la longitud total del itinerario y n su número de tramos, en cada uno de ellos se cometerá un error:

$$(9) \quad E_l \leq \frac{L}{n} \varepsilon$$

y al cabo de n tramos, el error total longitudinal valdrá:

$$(10) \quad E_l \leq \frac{L}{n} \varepsilon \sqrt{n}$$

Como el error relativo es la incertidumbre por unidad de medida, se obtiene dividiendo el error esperado en distancias, por la distancia observada:

$$(11) \quad \varepsilon = \frac{e_D}{L/n}$$

Sustituyendo:

$$(12) \quad E_l \leq \frac{L}{n} \frac{e_D}{L/n} \sqrt{n} = e_D \sqrt{n}$$

Esta es la expresión del error longitudinal cuando sólo se haya realizado una medida en cada distancia. Como el método de observación de una poligonal exige la medida doble (en sentido directo y recíproco), la expresión final resultante que se considera es:

$$(13) \quad E_l \leq \frac{e_D}{\sqrt{2}} \sqrt{n}$$

siendo  $e_D$  la suma del error de dirección (estacionamiento + prisma) y el error nominal del distanciómetro (mm + ppm por distancia):

$$(14) \quad e_D = (e_e + e_p) + e_{\text{distanciómetro}}$$

c) Error total

El error transversal y el error longitudinal de la poligonal se componen de manera cuadrática, originando un paralelogramo de error, debido a que ambas direcciones son aproximadamente perpendiculares (generalmente el error angular se manifiesta transversalmente a la dirección de la poligonal, mientras que el de distancia se producirá en la dirección de la poligonal):

$$(15) \quad E_T \leq \sqrt{E_T^2 + E_l^2}$$

d) Error altimétrico

En altimetría, los desniveles en poligonación se obtienen mediante nivelación trigonométrica. El método de nivelación trigonométrica que se aplica es la nivelación trigonométrica compuesta mediante visuales en sentido directo y recíproco, es decir por estaciones recíprocas. La expresión de cálculo del desnivel de un punto B respecto a A en nivelación trigonométrica simple (teniendo en cuenta esfericidad y refracción si los tramos son largos) es:

$$(16) \quad \Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + (0.5 - K) \frac{(D_A^B)^2}{R}$$

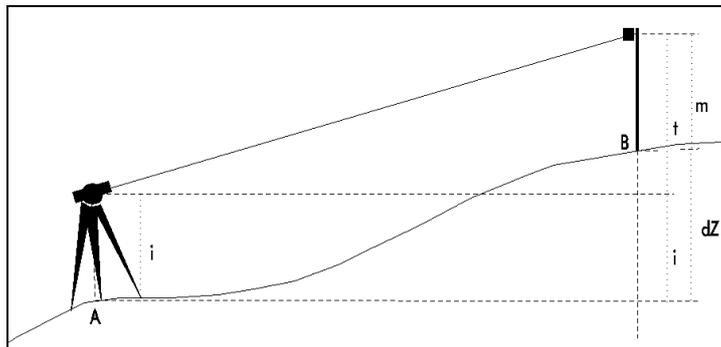


Figura 6. Desnivel trigonométrico.

siendo:

- $i$  = altura de instrumento
- $m$  = altura de prisma
- $t = D_g \cos V = \frac{D_r}{\tan V}$

Para la determinación de los desniveles se hacen dos determinaciones entre estaciones, obteniéndose el valor final a partir de la media aritmética de ambas, siempre que la diferencia sea tolerable. La tolerancia entre el desnivel directo y recíproco será:

$$(17) \quad T = e_{\Delta H} \cdot \sqrt{2}$$

siendo  $e_{\Delta H}$  el error en la determinación del desnivel trigonométrico, que viene dado por la componente cuadrática de los errores de los parámetros que intervienen en la fórmula del cálculo del desnivel trigonométrico ( $i$ ,  $t$ ,  $m$ ) :

$$(18) \quad e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

teniendo en cuenta que:

$$e_i \leq 5 \text{ mm.}$$

$$e_t = \sqrt{(\cos^2 V)e_D^2 + (D^2 \sin^2 V)e_V^2}$$

$$e_m = \sqrt{e_m'^2 + e_m''^2}$$

siendo:

- $e_m'$  el error por inclinación del jalón (ángulo  $\beta$ ), considerado con una altura de jalón superior a 1,30 m 20 mm utilizando nivel esférico y 62 mm sin nivel esférico:  $e_m' = m(1 - \cos \beta)$ .
- $e_m''$  el error de puntería al prisma que influye sobre la medición de la altura de prisma ( $m$ ), experimentalmente aceptado 1 cm a 100 m / 2 cm a 500 m / 3 cm a 1000 m / 4 cm a 2000 m.

Al calcularse el desnivel como promedio del valor directo y del recíproco (si fueran tolerables entre ambos), su precisión vendrá dada por:

$$(19) \quad \text{Incertidumbre en el desnivel promedio} = \frac{e_{\Delta H}}{\sqrt{2}}$$

La incertidumbre como consecuencia del encadenamiento de desniveles a lo largo de la poligonal de n tramos (línea de nivelación trigonométrica) podrá determinarse con la expresión:

$$(20) \quad e_{\Delta H_{B,C}} = \frac{e_{\Delta H}}{\sqrt{2}} \sqrt{n}$$

Este es el parámetro que se tomará como tolerancia en el cierre altimétrico de la poligonal antes de proceder a la compensación.

### • Cálculo y compensación

El método tradicional de cálculo de una poligonal, obtiene en una primera fase el valor de los acimutes de la poligonal, así como el error de cierre acimutal. Seguidamente se calculan los acimutes compensados, para posteriormente proceder a realizar el cálculo de las coordenadas planimétricas.

1) Cálculo de Acimutes. Existen dos procedimientos posibles para realizar el cálculo de acimutes:

a) Por ángulos: si al comienzo de la poligonal se visó a un punto R y se conoce el acimut  $\theta_A^R$  de dicha dirección, el acimut de la dirección AB ( $\theta_A^B$ ) se obtendrá como suma del azimut de AR más el ángulo que forman las dos direcciones:

$$(21) \quad \theta_A^B = \theta_A^R + (L_A^B - L_A^R)$$

$$\theta_B^A = \theta_A^B \pm 200^g$$

Procediendo de forma análoga se llegará al final de la poligonal obteniendo un acimut de ER  $\theta_E^{R'}$ . la diferencia que se presente con respecto al verdadero será el error de cierre de la poligonal.

b) Por desorientaciones: consiste en obtener la desorientación de las vueltas de horizonte en las sucesivas estaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \Sigma_A &= \theta_A^R - L_A^R \\ \theta_A^B &= \Sigma_A + L_A^B \\ \theta_B^A &= \theta_A^B \pm 200^g \\ \Sigma_B &= \theta_B^A - L_B^A \\ \theta_B^C &= \Sigma_B + L_B^C \\ \theta_C^B &= \theta_B^C \pm 200^g \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

2) Cálculo de la tolerancia de cierre: Conocido el error de cierre de acimutal o angular de la poligonal (diferencia entre acimut verdadero y acimut observado en el último tramo o desde la última estación a una referencia) y antes de proceder a su compensación, es necesario determinar si, por su cuantía, es admisible o no. Si el itinerario se ha observado con un instrumento cuyo error por cada dirección dada es  $e_a$  y dicha poligonal se compone de n estaciones, como se ha descrito anteriormente, en cada estación se mide un ángulo formado por dos direcciones, al cabo de n medidas el error podrá alcanzar un valor de:

$$(22) T_a \leq e_a \sqrt{2} \sqrt{n} = e_a \sqrt{2n}$$

Este valor es el error máximo o tolerable que podrá admitirse en el error de cierre.

3) Compensación del error de cierre angular: una vez comprobado que el error de cierre de la poligonal es admisible según la tolerancia anteriormente calculada, el siguiente paso será compensar los acimutes obtenidos. Para realizar dicha compensación se modifican los ángulos, de modo que se anule el error de cierre, repartiendo el error en partes iguales entre todos los ángulos.

Es necesario tener en cuenta que la corrección aplicada al primer ángulo repercute en el acimut de los tramos siguientes y por tanto se van acumulando las correcciones que experimentan los ángulos. Por ello, si se divide el error de cierre  $e_c$  entre el número de ángulos (m), se corregirá al primer ángulo una cantidad  $e_c/m$ , al segundo ángulo se le corregirá  $2e_c/m$ , al tercero  $3e_c/m$ , etc.

No siempre el error a corregir resulta múltiplo del número de estaciones. Teóricamente deberían modificarse los ángulos en el cociente que resultase de dividir el error por el número de estaciones, pero en la práctica no se introducen correcciones inferiores a la precisión del instrumento, sino que se descompone el error en partes enteras y múltiplos de la apreciación.

4) Cálculo de la longitud de los ejes de la poligonal: al observar la poligonal se han medido ángulos y distancias a los distintos vértices (anterior y posterior) de la estación, por lo que se tendrán dos distancias observadas para cada eje de la poligonal y con ellas se calcularán las distancias reducidas. Se realiza un promedio, siempre que su discrepancia sea menor que la tolerancia:

$$(23) \quad T = e_D \cdot \sqrt{2} .$$

$$D_{rA}^B - D_{rB}^A \leq e_D \cdot \sqrt{2}$$

5) Cálculo de coordenadas y errores de cierre: tras obtener los acimutes compensados de los tramos y calcular las distancias reducidas promedio, se procede a calcular numéricamente las coordenadas de la poligonal:

$$(24) \quad \begin{aligned} x_A^B &= x_A + D_{rA}^B \operatorname{sen} \theta_A^B \\ y_A^B &= y_A + D_{rA}^B \operatorname{cos} \theta_A^B \end{aligned}$$

La diferencia entre las coordenadas conocidas y calculadas en el último punto de la poligonal (N) es el error de cierre:

$$(25) \quad \begin{aligned} e_x &= x_N - (x_N)_{DATO} \\ e_y &= y_N - (y_N)_{DATO} \end{aligned}$$

6) Tolerancia en los errores de cierre en coordenadas: para determinar si una poligonal es admisible según la tolerancia establecida se calcula la componente cuadrática de los errores de cierre en x, e y, comprobando que sea menor que el error total  $E_T$  (componente cuadrático de los errores angular y de distancia):

$$(26) \quad e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq E_T$$

7) Compensación de coordenadas: se pueden aplicar técnicas de mínimos cuadrados, estableciendo las relaciones de observación de ángulos y distancias o bien estableciendo

ecuaciones de condición. Sin embargo, la falta de redundancia de observaciones en las poligonales hace que el método de mínimos cuadrados no aporte ventajas sustanciales sobre los métodos clásicos de reparto de errores.

Para la compensación de las coordenadas clásicas hay que distinguir varios casos, teniendo en cuenta las características angulares y de distancia de los aparatos de medida:

1. Similar precisión en ángulos y distancias: es el caso normal de las modernas estaciones totales, en las que la compensación se realiza proporcionalmente a la longitud de los tramos (método de Bowditch). Las correcciones que hay que aplicar a cada uno de los tramos son:

$$(27) \quad C_{\Delta x_i} = \frac{e_x \cdot D_i}{\Sigma D} \quad C_{\Delta y_i} = \frac{e_y \cdot D_i}{\Sigma D}$$

2. Mayor precisión en distancias que en ángulos: este es un caso más raro, y la compensación se realiza con correcciones proporcionales a los incrementos absolutos de coordenadas, pero cruzadas:

$$(28) \quad C_{\Delta x_i} = \frac{e_x \cdot |\Delta y_i|}{\Sigma |\Delta y|} \quad C_{\Delta y_i} = \frac{e_y \cdot |\Delta x_i|}{\Sigma |\Delta x|}$$

3. Mayor precisión angular que en distancias: es el caso de medidas con taquímetro y mira. Las correcciones serán proporcionales a los errores de cierre en las coordenadas parciales y el valor obtenido de estas, siendo el valor de dicha proporcionalidad el error relativo con el que se han medido las distancias. Las correcciones a aplicar son las siguientes:

$$(29) \quad C_{\Delta x_i} = \frac{e_x \cdot |\Delta x_i|}{\Sigma |\Delta x|} \quad C_{\Delta y_i} = \frac{e_y \cdot |\Delta y_i|}{\Sigma |\Delta y|}$$

Otro criterio de compensación es el método de Sanguet, aunque sólo puede aplicarse en poligonales aproximadamente rectilíneas. En lugar de compensar el acimut y luego las distancias, el método de Sanguet compensa la poligonal de forma conjunta, calculando el giro y la homotecia que obligan a cumplir la coincidencia del punto inicial y final. Consiste en aplicar un giro a la poligonal hasta conseguir que el punto erróneo E' se situé sobre la recta AE, que

une la situación correcta. El punto E' pasa a ocupar la posición E''. La poligonal resultante será A, B'', C'', D'', E''.

Para que E'' coincida con E, se modifican las longitudes de los tramos proporcionalmente, sin que varíen los ángulos, con centro de homotecia A. Las coordenadas parciales corregidas de cada tramo vendrán dada por:

$$(30) \quad \begin{aligned} x_{Compensada} &= x + e y + \lambda x \\ y_{Compensada} &= y - e x + \lambda y \end{aligned}$$

siendo:

$$(31) \quad e = -\frac{e_x \Sigma y - e_y \Sigma x}{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$$

$$\lambda = -\frac{e_x \Sigma x + e_y \Sigma y}{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$$

donde  $x$  representa la coordenada parcial (eje de abscisas) de un tramo genérico:

$$(32) \quad x = x_A^B = X_B - X_A$$

De la misma forma,  $y$  representa la coordenada parcial de un tramo genérico en el eje de las ordenadas.

#### • Cálculo con coordenadas UTM

El cálculo de la longitud de los tramos de la poligonal, obliga a reducir las distancias observadas a la proyección UTM. También se llevará a cabo la reducción de las distancias al elipsoide. La reducción conjunta puede realizarse con la distancia geométrica de cada tramo a partir de la expresión:

$$(33) \quad D_{UTM} = K \sqrt{\frac{\overline{D}_G^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right)\left(1 + \frac{h_2}{R}\right)}}$$

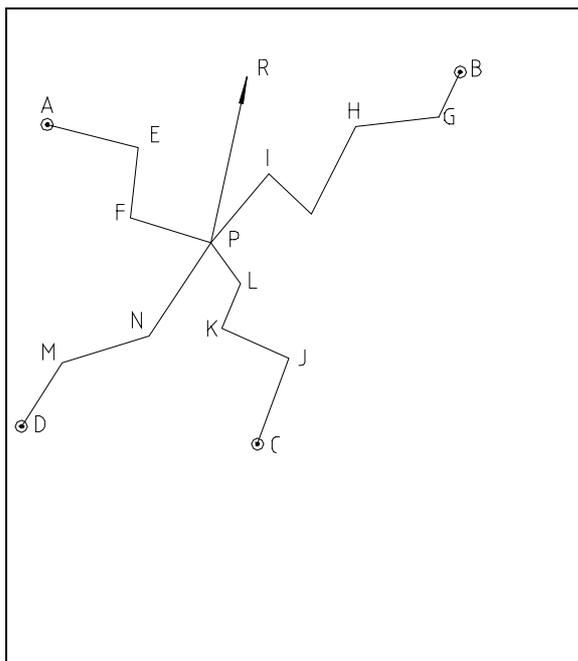
donde  $h_1$  y  $h_2$ , son las altitudes de los puntos 1 y 2 respectivamente,  $\Delta h$  es la diferencia entre ambas y  $R$  representa el radio de la Tierra, del que se puede tomar un valor de aproximado de 6370 km.

### • Itinerarios concurrentes

Existen casos en trabajos especiales en los que es necesario establecer itinerarios concurrentes, formando una red de poligonales con uno o varios puntos comunes (denominados nodos). Es el caso, por ejemplo, de la instauración de bases para levantamientos clásicos en zonas urbanas para la elaboración de planos de población y cartografía urbana.

El punto nodal puede ser de coordenadas desconocidas o conocidas. En cualquier caso, las normas básicas de diseño de los itinerarios han de contemplar que:

- Las poligonales no se crucen por las visuales.
- La longitud de los tramos ha de ser homogénea. Si esto no fuera posible se configuran dos órdenes diferentes de poligonación: una poligonal principal de eje largo y una poligonal secundaria de eje corto apoyada en la principal.



El cálculo podrá realizarse comenzando por ejemplo, por el del itinerario AEFPNMD, con lo que se obtendrá las coordenadas compensadas de P. Posteriormente se calcularían las poligonales que partiendo de B y C acaban en P. Sin embargo, puede considerarse a P como un nudo o *punto nodal* y obtener para el mismo unas coordenadas como resultado de la conjunción de los itinerarios que terminan en él.

Figura 7. Itinerarios concurrentes y punto nodal.

Las operaciones a realizar para el cálculo del punto nodal serán las siguientes:

- a) Elección de la referencia (puede ser un tramo de los que concurren en el punto nodal).

- b) Corrida de acimutes en cada uno de los itinerarios, calculando un acimut de cierre por cada itinerario.
- c) Calcular la media ponderada de los acimutes obtenidos anteriormente para el lado de cierre o referencia, siendo los pesos inversamente proporcionales al número de ángulos medidos en cada poligonal.
- d) Compensar acimutalmente los itinerarios sobre el valor obtenido anteriormente para el lado de cierre o referencia.
- e) Calcular las coordenadas del punto nodal en cada itinerario.
- f) Calcular la media ponderada de las coordenadas del punto nodal, siendo los pesos inversamente proporcionales a la longitud de los itinerarios o al número de vértices según los casos.

Este método conlleva que cada vez que se llegue a P, como final de una poligonal, se visa a una referencia R y realizando la corrida acimutal a través de cada uno de los itinerarios, se tendrán para la dirección PR tantos acimutes ligeramente distintos como poligonales concurren en P. En principio cabría pensar tomar como valor definido del acimut  $\theta_p^R$  el promedio obtenido, pero esto no sería lo correcto, ya que todas las poligonales no tienen el mismo número de estaciones, por lo que habrá que tomar *pesos* y calcular la media ponderada de los acimutes obtenidos. Designando por  $\theta_p^{R'}, \theta_p^{R''} \dots$  a tales acimutes, si se admite que todas las observaciones han sido efectuadas en análogas condiciones y con el mismo instrumento, el error que afectará a dichos valores será proporcional a  $\sqrt{n}$ , siendo n el número de estaciones que componen cada una de las poligonales, y como los pesos son inversamente proporcionales a los cuadrados de los errores, resultará que la media ponderada tendrá el valor de:

$$(34) \theta_p^{R'} = \frac{\theta_p^{R'} \frac{1}{n'} + \theta_p^{R''} \frac{1}{n''} + \dots}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \dots}$$

en la que  $n', n'' \dots$  serán los respectivos números de estaciones. La diferencia entre los acimutes de llegada y la media ponderada será el error de cierre de cada poligonal en el nodo:

$$(35) \begin{aligned} e' &= \theta_p^{R'} - \theta_p^R \\ e'' &= \theta_p^{R''} - \theta_p^R \end{aligned}$$

Análogamente sucede con las coordenadas, ya que se pueden obtener para P tantas parejas de valores ligeramente distintos como poligonales concurren en él, y de los que pueden calcularse unas medias ponderadas. Aunque los errores en coordenadas no son exactamente proporcionales a  $\sqrt{n}$ , para una mayor sencillez en el cálculo se pueden tomar pesos proporcionales al número de tramos:

$$(36) \quad X_p = \frac{X'_p \frac{1}{n'} + X''_p \frac{1}{n''} + \dots}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \dots} \quad Y_p = \frac{Y'_p \frac{1}{n'} + Y''_p \frac{1}{n''} + \dots}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \dots}$$

donde  $n'$ ,  $n''$ , ... en estas expresiones son el número de tramos de cada poligonal.

Los errores de cierre en las coordenadas que habrán de compensarse serán:

$$(37) \quad \begin{aligned} e'_X &= X'_p - X_p & e'_Y &= Y'_p - Y_p \\ e''_X &= X''_p - X_p & e''_Y &= Y''_p - Y_p \end{aligned}$$

En algunas ocasiones puede suceder que las necesidades impuestas requieran de otros puntos dentro de la red básica. En éstos casos se recurre a densificar la red de poligonación aplicando el método de implantación de *destacados*, o incorporando puntos intermedios en los tramos, denominados *puntos en alineación*.

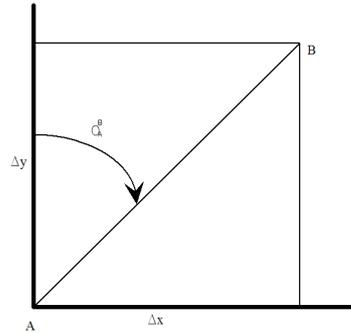
Los puntos destacados son aquellos que se radian desde la poligonal principal. Para que puedan ser considerados como tales, se han de radiar un mínimo de dos veces desde dos vértices diferentes de la poligonal y posteriormente estacionar en ellos y visar igualmente a los dos puntos desde los que se ha radiado, de tal forma que pasarán a formar parte de la estructura del trabajo con la misma categoría de precisión que el resto de vértices de la poligonal. Como norma básica, la radiación desde puntos de la poligonal se limita a distancias del orden de 2/3 de la longitud media de los tramos que la componen.

## 51.2. Método de radiación

### 51.2.1 Observación y cálculo.

El método más sencillo utilizado en topografía para levantamientos topográficos es el método de radiación. Para la aplicación de este método se necesita un punto de coordenadas conocidas materializado en el terreno, y una orientación conocida u otro punto de coordenadas conocidas

para poder orientar acimutalmente el aparato. Los datos que se obtienen son ángulos horizontales, verticales y distancias (geométricas o reducidas), además de la altura de instrumento y altura de prisma para obtener la altimetría. Normalmente se trabaja con el instrumento desorientado, calculando posteriormente la desorientación a partir del ángulo acimutal a una dirección conocida o punto de coordenadas conocidas.



**Figura 8.** Cálculo de las coordenadas entre dos puntos.

Los incrementos de coordenadas planimétricas se obtienen mediante trigonometría plana:

$$(38) \quad \Delta x = D_A^B \cdot \sin \theta_A^B \quad \Delta y = D_A^B \cdot \cos \theta_A^B$$

y las coordenadas de un punto B obtenidas desde un punto A cuyas coordenadas son  $(x_A, y_A)$  serán:

$$(39) \quad x_B = x_A + D_A^B \cdot \sin \theta_A^B \quad y_B = y_A + D_A^B \cdot \cos \theta_A^B$$

En el caso de que el aparato esté desorientado:

$$(40) \quad \sum_A = \theta_A^B - L_A^B$$

siendo  $\sum_A$  la desorientación en el punto,  $\theta_A^B$  el acimut y  $L_A^B$  la lectura acimutal.

En cuanto al cálculo altimétrico, se realiza por nivelación trigonométrica, por lo que la expresión para el cálculo de  $\Delta H$  es la misma que se ha citado en apartados anteriores:

$$(41) \quad \Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B$$

no añadiendo en este caso corrección por esfericidad o refracción dada la distancia tratada, que se supone en radiación pequeña.

### 51.2.2. Error máximo en la radiación

No existe posibilidad de saber cual es el error cometido sobre cada punto, ya que no puede existir comprobación, pero se pueden calcular los errores que se pueden cometer a priori, en función de las características del aparato. El error cometido es función de los ángulos y distancias, los cuales darán lugar a un error transversal y otro longitudinal respectivamente considerando la alineación AB.

#### • Error transversal

El error transversal vendrá expresado por la siguiente fórmula:

$$(42) \quad e_t = \frac{D_r \cdot e_a^{cc}}{636620}$$

donde  $e_t$  es el error transversal,  $e_a^{cc}$  el error angular del aparato expresado en segundos centesimales y  $D_r$  la distancia reducida.

En el error angular ( $e_a$ ) intervienen el error de dirección, el error de puntería, el error de lectura y el error de verticalidad, de la siguiente forma:

$$(43) \quad e_a = \sqrt{e_p^2 + e_v^2 + e_d^2 + e_l^2}$$

Todos estos errores son conocidos si lo son las características del equipo que se utiliza y si conocemos los requisitos técnicos del trabajo topográfico, según se ha visto en temas anteriores, excepto el error de dirección ( $e_D$ ), en el que también interviene la distancia:

$$(44) \quad e_{D(\text{radianes})} = \frac{e_e + e_s}{D}$$

siendo  $e_s$ , el error de estación y  $e_e$  error de señal.

#### • Error longitudinal

Por otro lado, el error longitudinal es función únicamente de las características del distanciómetro:

$$(45) \quad e_l = (e_e + e_p) \pm (a \pm b \cdot D)$$

Donde  $e_e$  y  $e_p$  son los errores de estacionamiento y visado respectivamente (ambos componen el error de dirección que forma parte también del error angular  $e_a$ ),  $a$  es la parte fija del error en medida de distancias (expresada habitualmente en mm), y  $b$  es la parte variable que viene expresada en partes por millón, siendo  $D$  la distancia al punto expresada en kilómetros.

Algunos autores añaden también como parte del error longitudinal el que afecta a la distancia como consecuencia de la inclinación del jalón que soporta el prisma ( $e'_m$ ), cuantificado en el apartado anterior experimentalmente como 20 mm cuando se utiliza nivel esférico en el jalón y 62 mm cuando no se utiliza. Este componente de error debe añadirse a la expresión de  $e_l$ :

$$(46) \quad e_l = (e_e + e_p) \pm (a \pm b \cdot D) + e_l$$

- **Error máximo**

La composición de ambos errores forma el área de incertidumbre en la determinación de las coordenadas del punto visado.

Aunque pudiera pensarse que para cuantificar el error máximo en la radiación se debe hacer la componente cuadrática de ambos errores (longitudinal y transversal), es admitido por todos los autores que cuando dos causas de error son independientes y actúan en direcciones perpendiculares, el máximo error probable sería el mayor de los dos, dada la escasa probabilidad que existe de que sean simultáneos los dos valores máximos.

Por definición de error máximo es aquel cuya probabilidad de que suceda es del 2 %, se puede concluir que el recinto de incertidumbre en planimetría asociado a un punto radiado vendrá dado por la elipse circunscrita al paralelogramo mencionado anteriormente. El parámetro que tradicionalmente se ha venido denominando error máximo será la máxima separación posible del centro a la elipse, es decir, el semieje mayor de la misma. El semieje mayor será por tanto el mayor de los errores cuantificados, el error longitudinal o el transversal según el caso concreto.

Respecto al error altimétrico cometido cabe incluir la misma expresión de incertidumbre de la nivelación trigonométrica tratada en el apartado anterior:

$$(47) \quad e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

teniendo en cuenta que:

$$e_i \leq 5 \text{ mm.}$$

$$e_t = \sqrt{(\cos^2 V)e_D^2 + (D^2 \sin^2 V)e_V^2}$$

$$e_m = \sqrt{e_m'^2 + e_m''^2}$$

con:

- $e_m'$  el error por inclinación del jalón (ángulo  $\beta$ ), considerado con una altura de jalón superior a 1,30 m 20 mm utilizando nivel esférico y 62 mm sin nivel esférico:  $e_m' = m(1 - \cos \beta)$ .
- $e_m''$  el error de puntería al prisma que influye sobre la medición de la altura de prisma (m), experimentalmente aceptado 1 cm a 100 m / 2 cm a 500 m / 3 cm a 1000 m / 4 cm a 2000 m.

### 51.3. Nivelación trigonométrica

#### 51.3.1. Expresión y error máximo

Como se ha visto anteriormente, la nivelación trigonométrica es el método altimétrico que permite obtener desniveles entre puntos, con observaciones de distancias cenitales de cualquier inclinación. Suponiendo estacionado el instrumento en el punto A, y que se sitúa el prisma en el punto B. El modelo teórico de medida queda reflejado en el siguiente gráfico.

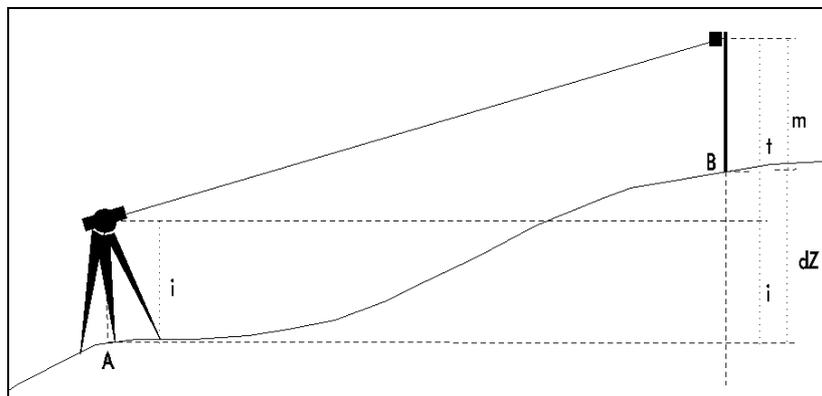


Figura 9. Nivelación trigonométrica.

deduciéndose fácilmente la expresión por la que se podrá obtener el desnivel:

$$(48) \quad \Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B$$

También en apartados anteriores se ha hecho referencia el error máximo en la nivelación trigonométrica, cuantificándolo como:

$$(49) \quad e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

### 51.3.2. Correcciones a aplicar al desnivel trigonométrico

En la nivelación trigonométrica existen dos efectos que han de ser eliminados:

- 1) La influencia de la curvatura de la Tierra, que da lugar a la corrección por esfericidad.

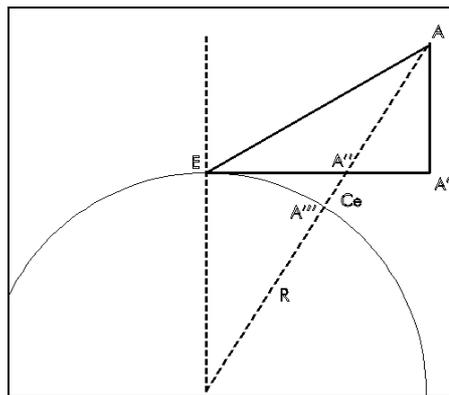


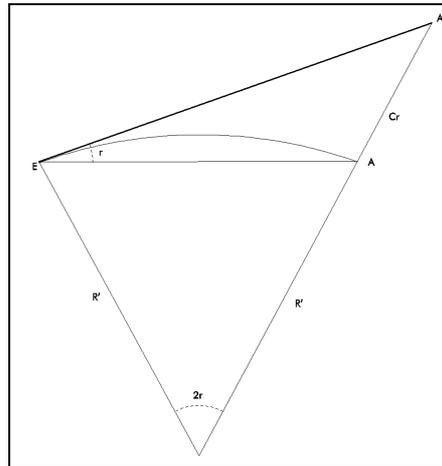
Figura 10. Corrección por esfericidad.

Supuestas esféricas las superficies de nivel y un instrumento estacionado en el punto A, desde el que se visa al punto B, teniendo en cuenta que las medidas topográficas se realizan en un plano tangente a la superficie terrestre en un punto en el que está estacionado el instrumento, el desnivel que se obtiene AA' no corresponde al real AA'''. Simplificando términos y operando, se llega fácilmente a la expresión de corrección:

$$(50) \quad C_e = \frac{D^2}{2R}$$

Esta corrección siempre será positiva, tal como se desprende del gráfico.

2) La influencia de la refracción del rayo de luz que proviene del punto visado, que origina la corrección por refracción.



**Figura 11.** Corrección por refracción.

El rayo que proviene del punto visado no sigue una trayectoria rectilínea, sino que va sufriendo sucesivas refracciones al ir atravesando una atmósfera de densidad variable. La distancia cenital que se mide corresponde a la tangente al rayo de luz en el centro óptico del teodolito, y es con ella con la que se calcula la posición de A, que queda situado en la posición A'. La distancia AA', es el denominado error por refracción, que con el signo negativo, toma el valor:

$$(51) \quad Cr = \frac{D^2}{2R'} \quad \text{siendo } R' \text{ el radio de curvatura de la refracción.}$$

$$2K = \frac{R}{R'} \quad \text{siendo } F \text{ el coeficiente de refracción.}$$

Para circunstancias normales  $K = 0,08$ , por lo que:

$$(52) \quad Cr = \frac{0,08D^2}{R}$$

Esta corrección es siempre de signo negativa.

Normalmente se realiza una corrección conjunta de esfericidad y refracción, teniendo en cuenta que sus efectos tienen signo contrario. La corrección conjunta sería:

$$(53) C_{e_r} = \frac{0,50D^2}{R} - \frac{0,08D^2}{R} = \frac{0,42D^2}{R}$$

### 51.3.3. Visuales recíprocas y simultáneas. Determinación del índice de refracción

Este método consiste en realizar de forma simultánea la observación entre los dos puntos. Estacionando dos instrumentos en ambos puntos y realizando observaciones cenitales recíprocas y simultáneas, los efectos angulares de la refracción y la esfericidad en las dos visuales serán iguales, anulándose por tanto los efectos. Es especialmente importante eliminar el efecto de refracción, ya que la consideración de un coeficiente de refracción estándar (K) induce a los mayores errores. Como se puede deducir por tanto, en el caso del error de esfericidad, este está bien cuantificado, pero no así el de refracción si no se conoce el índice K.

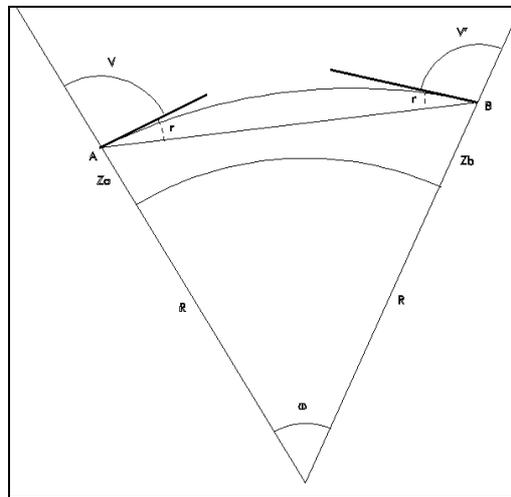


Figura 12. Visuales recíprocas y simultáneas.

A partir de esta figura se puede deducir que la expresión para el desnivel por visuales recíprocas y simultáneas viene dada por:

$$(54) \Delta H_A^B = D \cdot \text{tag} \frac{V' - V}{2}$$

Debe hacerse notar que las distancias cenitales V y V' son las que correspondería observar sin alturas de instrumento y objeto de puntería, es decir, que las que han sido observadas deberán reducirse al terreno y como con la simultaneidad de las observaciones lo que se pretende es igualar los efectos de la refracción, puede sustituirse por la condición de operar en condiciones atmosféricas semejantes.

Para determinar el coeficiente de refracción  $K$  es necesario estacionar en los dos puntos A y B, medir la distancia y efectuar simultáneamente medidas de los ángulos cenitales correspondientes, de la misma forma como se operaría para obtener el desnivel. Como la luz, por efecto de la refracción, describe un arco AB, las distancias cenitales que se miden son  $V$  y  $V'$ , y como las condiciones atmosféricas son las mismas, por ser simultáneas las observaciones, serán iguales los ángulos  $r$ , de refracción. En el triángulo OAB, cuyo vértice O es el centro de la Tierra, puede establecerse la siguiente relación entre los ángulos:

$$(55) \quad V + r = \omega + 200 - (V' + r)$$

$$2r = \omega - (V + V') + 200$$

Dividiendo los dos miembros de esta expresión por  $2\omega$  y teniendo en cuenta que  $r / \omega = K$  resulta:

$$(56) \quad \frac{2r}{2\omega} = K = \frac{1}{2} - \frac{2}{2\omega}(V + V' - 200)$$

Si en esta expresión se sustituye  $\omega$  por su valor se tendrá:

$$(57) \quad K = 0,5 - \frac{R}{2D}(V + V' - 200)$$

en las que  $V$  y  $V'$  son distancias cenitales reducidas al terreno

#### 51.3.4. Nivelación trigonométrica compuesta

Al igual que en la poligonación planimétrica, se realizan itinerarios de nivelación trigonométrica para dotar de altitud a los puntos del itinerario.

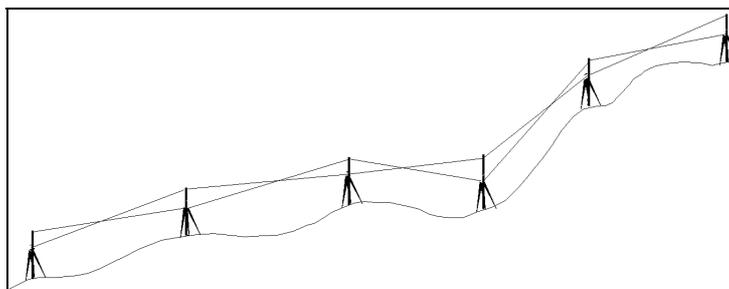


Figura 13.. Nivelación trigonométrica compuesta.

Es usual medir los desniveles dos veces, primero de la estación A a B y posteriormente de B a A. Para realizar la compensación del itinerario altimétrico compuesto se siguen los siguientes pasos:

1. Se calculan todos los desniveles, hallando los desniveles medios:

$$(58) \quad \Delta Z_{i\_obs}^{i+1} = Dr_i^{i+1} \cdot \text{ctg} V_i^{i+1} + i_i + m_{i+1}$$

$$\Delta Z_{i+1\_obs}^i = Dr_{i+1}^i \cdot \text{ctg} V_{i+1}^i + i_{i+1} + m_i$$

$$\Delta Z_{i\_medio}^{i+1} = \frac{\Delta Z_i^{i+1} - \Delta Z_{i+1}^i}{2}$$

2. Cálculo del error de cierre:

$$(59) \quad E_{\text{cierre}_z} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta Z_i^{i+1} - (Z_n - Z_1)$$

siendo  $Z_1$  la cota de partida y  $Z_n$  la del punto final.

La corrección será:

$$(60) \quad C_z = -E_{\text{cierre}_z}$$

3. Compensación de los desniveles de los tramos del itinerario. Las compensaciones a los tramos se calcularán ponderándolas en función del valor absoluto de los desniveles o, bien a las longitudes de los tramos:

$$(61) \quad C_{z_i}^{i+1} = \frac{C_z}{\sum_{j=1}^{n-1} |\Delta Z_j^{j+1}|} \cdot |\Delta Z_i^{i+1}|$$

$$C_{z_i}^{i+1} = \frac{C_z \cdot d_i^{i+1}}{\sum_{j=1}^{n-1} d_j^{j+1}}$$

4. Cálculo de los desniveles compensados, sumando la corrección calculada para el tramo a su desnivel medio:

$$(62) \quad \Delta Z_{i \text{ Corr}}^{i+1} = \Delta Z_{i\_medio}^{i+1} + C_{Z_i}^{i+1}$$

5. Cálculo de cotas corregidas: con los incrementos corregidos se calcularán las cotas de todos los puntos del itinerario:

$$(63) \quad Z_{i+1} = Z_i + \Delta Z_{i \text{ corr}}^{i+1}$$

## 51.4. Nivelación geométrica: métodos de observación, errores y tolerancias

### 51.4.1. Observación

La forma más precisa de dotar de altitudes a un trabajo es la nivelación geométrica y el instrumental que se utiliza en este método es el nivel topográfico con dos miras. Este instrumento es capaz de proporcionar visuales horizontales con bastante precisión debido a un compensador mecánico de tipo pendular. Para hallar el desnivel entre dos puntos A y B, se sitúan las miras en ambos, haciendo lectura de la altura en que interseca la visual en cada una de las miras, tal y como se puede ver en la figura 14:

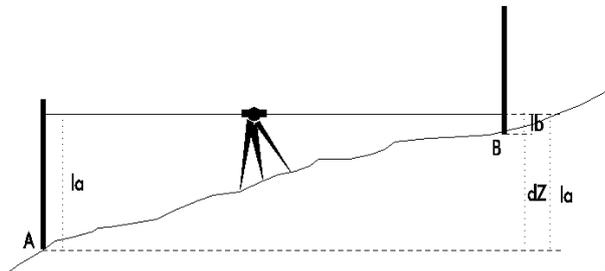


Figura 14. Fundamento de la nivelación geométrica.

El desnivel vendrá dado por la diferencia de los hilos centrales de las lecturas estadimétricas sobre las miras. Siempre se efectúan las lecturas de los tres hilos: inferior, central y superior. Se comprueba en el momento de realizar la observación que la semisuma de las lecturas de los hilos extremos es igual a la lectura del hilo central  $\pm 1$  mm (en la nivelación topográfica), y se da por válida la observación. Si la semisuma no fuese igual a la lectura del hilo central  $\pm 1$  mm, se repetirán las tres lecturas. Esto es lo que se denomina Nivelación Geométrica Simple.

La expresión que proporciona el desnivel es:

$$(64) \quad \Delta Z_B = l_A - l_B \Rightarrow Z_B = Z_A + l_A - l_B$$

Las lecturas sobre las miras se realizan apreciando los milímetros. Para conseguirlo las visuales han de hacerse a distancias cortas. La apreciación del mm en la mira depende también de los aumentos que tenga el anteojo del nivel. En la práctica se demuestra que el límite de distancias para conseguir lecturas en las que se asegure el mm, es de 80 a 100 m. Esto conlleva una posible distancia de 160 a 200 m entre los puntos cuyo desnivel se desea obtener.

Existen varios métodos en función de la precisión necesitada, pero por lo general conviene utilizar el método del punto medio, ya que atenúa el error de horizontalidad del eje de colimación del nivel. Consiste en estacionar el nivel en un punto aproximadamente equidistante de los puntos donde se sitúan las miras (figura 15).

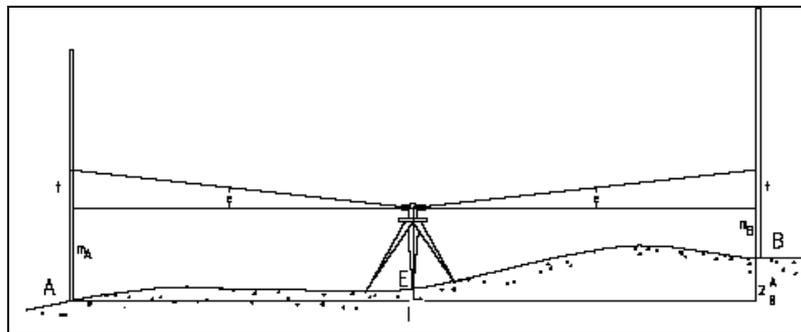


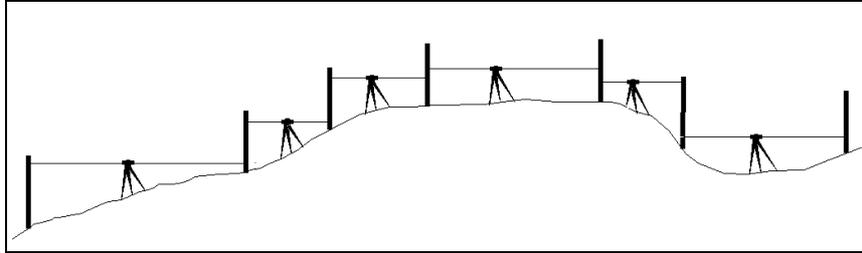
Figura 15. Método de nivelación del punto medio.

La ventaja fundamental del método del punto medio respecto a otros métodos menos utilizados (método del punto extremo, método de estaciones recíprocas, método de estaciones exteriores, etc.) es la eliminación de la falta de horizontalidad del eje del nivel.

Suponiendo que el instrumento tiene un error residual de corrección ( $e$ ), las visuales no serán exactamente horizontales. La influencia de este error en las alturas de mira ( $t$ ) será igual en ambas miras al cumplirse la equidistancia de  $E$  respecto de  $A$  y  $B$ . Al ser iguales los errores que afectan a  $m_A$  y  $m_B$ , su diferencia, que es el desnivel, será correcto. El desnivel está exento de errores sistemáticos y también de la influencia de la esfericidad y refracción atmosférica, debido a la igualdad de distancias entre miras. Si es  $\delta$  la influencia de estos errores:

$$(65) \quad \Delta Z_A^B = (m_A + \delta) - (m_B + \delta) = m_A - m_B$$

Normalmente la operación de la nivelación topográfica se realiza encadenando sucesivos tramos de nivelación topográfica simple debido a la limitación en altura de las miras y a la máxima distancia de visual, de tal forma que el método operativo se denomina Nivelación Geométrica Compuesta.



**Figura 16.** Nivelación geométrica compuesta.

La expresión que proporciona en este caso el desnivel entre dos puntos en función de las medidas realizadas sobre la mira sería la diferencia de los sumatorios de las lecturas de espalda y frente:

$$(66) \quad \Delta Z_A^B = \sum l_{\text{espalda}} - \sum l_{\text{frente}} ; Z_B = Z_A + \sum l_{\text{espalda}} - \sum l_{\text{frente}}.$$

Los itinerarios altimétricos mediante nivelación geométrica suelen hacerse dos veces, en sentidos diferentes, de tal forma que entre señal y señal a nivelar se hace un itinerario "de ida" y otro itinerario "de vuelta", cuya discrepancia de desniveles ha de entrar dentro de la tolerancia establecida.

#### **51.4.2. Errores y tolerancias**

Actualmente, la mayoría de los niveles que se utilizan son digitales y no analógicos, por lo que al analizar los errores accidentales que puede tener un nivel topográfico conviene establecer la división. La norma ISO 17123-2 da la desviación típica del cálculo de una observación.

Si se trabaja con niveles analógicos, se puede calcular el error accidental siguiendo una formulación, análogamente al error angular de las estaciones totales. En este caso los errores accidentales que intervienen será el error de puntería (realizada a la estima), el error de verticalidad y el error de lectura en mira, pudiendo escribir:

$$(67) \quad E_a = \sqrt{E_p^2 + E_v^2 + E_{lm}^2}$$

siendo  $E_a$ : el error angular de una visual en el plano vertical.

$E_p$ : el error de puntería.

$E_v$ : el error de verticalidad.

$E_{lm}$ : el error de lectura en mira.

Se suele tomar como error de puntería en un nivel la cantidad:

$$(68) \quad E_p = \frac{50''}{A} + \left(1 + \frac{4 * A}{100}\right)$$

Para el error de verticalidad se puede encontrar en diferentes bibliografía la expresión  $e_v = s/3$ , siendo  $s$  la sensibilidad del nivel tubular. Sin embargo esta expresión se aplicaba a los niveles de línea, para los cuales se calaba la burbuja del nivel tubular para cada dirección. Actualmente ningún nivel lleva ya este tipo de mecanismo, sino un sistema de compensación pendular y el error de verticalidad toma la expresión:

$$(69) \quad E_v = \sigma * 3,29$$

siendo  $\sigma$  la desviación típica del sistema de compensación.

El error de lectura en mira tiene la expresión:

$$(70) \quad E_{lm} = \frac{0.54(mm)}{D(mm)} * 206265 + 13'' - 0.4'' * A$$

siendo  $D$ : distancia nivel-mira.

$A$ : aumentos del instrumento.

Se puede considerar un último error como consecuencia de la falta de verticalidad de la mira. En cualquier caso, el error por nivelada  $e_n$  será (ya que  $E_a$  viene expresado en unidades angulares):

$$(71) e_n = e_a \cdot L \text{ siendo } L \text{ la longitud de la nivelada}$$

Finalmente, para el caso de una nivelación de  $n$  tramos, el error en la nivelación geométrica compuesta será:

$$(72) e_z = e_n \cdot \sqrt{n} \text{ siendo } n \text{ el número de tramos}$$

Normalmente la expresión del error se suele dar en forma del denominado error kilométrico, que sería el error cometido en un kilómetro:

$$(73) e_k = e_n \cdot \sqrt{n} \text{ siendo en este caso } n \text{ el número de niveladas en un kilómetro.}$$

Y el error de cierre en un itinerario de nivelación geométrica compuesta:

$$(74) e_c = e_k \cdot \sqrt{k} \leq T \text{ siendo } k \text{ el número de kilómetros del itinerario}$$

De esta forma se comprobará si el itinerario cumple la tolerancia  $T$ . Normalmente suele compararse esta tolerancia según el error kilométrico en base a la discrepancia de los desniveles de ida y de vuelta, ya que como se comentó anteriormente, el método operativo se compone de dos medidas iguales entre señal y señal que se realizan en diferente sentido. Se aceptan como valores estándar para la nivelación geométrica topográfica  $7\sqrt{k}$  mm, es decir, precisiones (y tolerancias) por debajo de 7 mm por cada kilómetro del itinerario de nivelación.

#### **51.4.3. Compensación de un itinerario de nivelación geométrica**

Para poder comprobar y compensar las medidas realizadas en campo es necesario que el itinerario sea cerrado o encuadrado. Si no fuese así (itinerario abierto) se toman como desniveles definitivos las medias de los desniveles de ida y de vuelta. Igual que en poligonación, se denomina a un itinerario de nivelación cerrado, cuando el primer punto y el final coinciden. El desnivel total en un itinerario cerrado es 0 (prescindiendo de falta de paralelismo de superficies equipotenciales, ya que las distancias serán en general pequeñas). Por otra parte, un itinerario de nivelación encuadrado es aquel que parte de un punto de cota conocida y llega a otro diferente de cota también conocida.

En caso de que el error de cierre sea menor que la tolerancia se puede proceder a compensar el itinerario de nivelación. La compensación de los diferentes tramos se puede hacer ponderando la corrección total en función del valor absoluto del desnivel de dicho tramo, obteniendo la primera expresión siguiente o, por otra parte, realizando la ponderación en función de la longitud del tramo (segunda expresión):

$$(75) \quad C_{zi}^{i+1} = \frac{C_z}{\sum_{j=1}^{n-1} |\Delta Z_j^{j+1}|} \cdot |\Delta Z_i^{i+1}|$$

$$C_{zi}^{i+1} = \frac{C_z \cdot d_i^{i+1}}{\sum_{j=1}^{n-1} d_j^{j+1}}$$

siendo  $\Delta Z_i^{i+1} = l_i - l_{i+1}$  el desnivel entre el punto  $i$  e  $i+1$ , con lo que los desniveles compensados serán:

$$(76) \quad \Delta Z_{i\_c}^{i+1} = \Delta Z_i^{i+1} + C_{zi}^{i+1}$$

Finalmente se calculan las cotas compensadas de los diferentes puntos del itinerario, sumando a la cota del punto origen, los desniveles compensados:

$$(77) \quad Z_{i+1} = Z_i + \Delta Z_{i\_c}^{i+1}$$

## **Bibliografía**

- [1] CHUECA PAZOS, M., HERRÁEZ BOQUERA, J., BERNÉ VALERO, J. L. Métodos topográficos. (1996). Editorial Paraninfo.
- [2] DE SAN JOSÉ, J.J., GARCÍA, J., LÓPEZ, M. Introducción a las ciencias que estudian la geometría de la superficie terrestre. 2000, 1ª edición. Editorial Bellisco.
- [3] FARJAS ABADÍA, M. Apuntes de Topografía de la E.U.I.T. Topografía. (2007). Formato digital de la web del Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodésica y Fotogrametría.
- [4] FERRER TORIO, R., PIÑA PATÓN, B. Topografía aplicada a la Ingeniería. 1ª parte. (1996). Instituto Geográfico Nacional.
- [5] MARTIN ASIN, F. Geodesia y Cartografía Matemática. (1987), 2ª edición. Instituto Geográfico Nacional.
- [6] Martínez Marín, R., Ojeda Manrique, J. C., Sánchez Sobrino, J. A., Rejas Ayuga, J. G., García García, J. Geodesia y topografía. Formularios Técnicos y científicos. (2004). Editorial Bellisco.
- [7] OJEDA, J.L. Métodos topográficos y oficina técnica. (1984). Instituto Geográfico Nacional.
- [8] SANCHEZ RIOS, A. Fundamentos teóricos de los métodos topográficos. (2000). Editorial Bellisco.

## **Tema 52. Levantamientos topográficos: red básica y de detalle. Elección de métodos e instrumentos según la precisión, escala y extensión. Levantamientos batimétricos.**

### **52.1. Levantamientos topográficos: red básica y de detalle**

La finalidad de un levantamiento topográfico es la observación en campo de una red de puntos que permitan, posteriormente en gabinete, obtener un modelo planimétrico y altimétrico representable gráficamente a una escala predefinida. Este trabajo estará realizado por un equipo humano que emplea un instrumental y una metodología que es necesario definir previamente en función de los condicionantes y requisitos previos del trabajo, por lo que es necesario analizar los elementos que intervienen en tal definición.

Los condicionantes previos, normalmente van a ser definidos en función de:

- a) Se utilizan unos determinados aparatos topográficos, con características definidas en cuanto a precisión, posibilidades de uso, rendimiento, metodología probable, etc.
- b) Se desea obtener una precisión predeterminada tanto en planimetría como en altimetría.

Por todo ello se precisa conocer de antemano la tolerancia del trabajo topográfico, la cual condicionará el instrumental y la metodología a utilizar. A partir de esos condicionantes se deberá plantear el trabajo empleando unos aparatos topográficos y una metodología que garantice que la incertidumbre que siempre existirá en toda medida topográfica se encuentre por debajo de la precisión exigida. No es menos importante la definición del personal que va a llevar a cabo el trabajo y el tiempo que se tardará en realizarlo, lo que implicará el cálculo de un coste de realización. En función de esta última variable y en la posibilidad de elección de diferente metodología e instrumental, será necesario decidir la opción menos costosa. Por ejemplo, actualmente las metodologías GPS (RTK, el cual se trata en el siguiente tema) ofrecen la misma precisión que metodologías de topografía clásica, pero el rendimiento y por lo tanto coste efectivo material es mucho menor, por lo que siempre que se disponga del material y sea factible su utilización en el medio (horizontes libres de obstáculos) será conveniente realizar el levantamiento con GPS.

La metodología a seguir en la fase de toma de decisiones será:

- 1) Estudio cuidadoso de las necesidades de precisión del trabajo según el objetivo del levantamiento, uso que se le va a dar al plano o mapa, escala de trabajo y extensión a levantar.
- 2) Cuantificación de los errores máximos que se pueden admitir en cada fase del trabajo (densificación de la red geodésica, establecimiento de bases mediante poligonación, radiación...), conociendo los errores y aplicando convenientemente el principio de transmisión de errores de una operación a otra.
- 3) Estudio del equipo disponible (material y humano), planteando la conveniencia o no de cambiar instrumentación, asignación de rendimientos por equipo, organigrama de ejecución de tiempos, costes, etc.
- 4) Toma de decisiones final con la elaboración de un protocolo de actuación para el personal de campo que realice las operaciones.

## **52. 2. Elección de métodos e instrumentos según la precisión, escala y extensión**

### **52.2.1. Anteproyecto: estudio sobre cartografía**

Una vez definido el instrumental y la metodología a seguir para realizar el levantamiento conviene definir la idoneidad o no del establecimiento de redes de densificación o implementación de bases en la zona en función de la extensión del trabajo, la metodología a emplear, el sistema de referencia elegido y la distancia a referencias de la red geodésica correspondiente.

Por todo ello es necesario establecer un anteproyecto mediante cartografía general (desde 1/5.000 si hubiese hasta 1/25.000 dependiendo de la extensión del trabajo) para analizar el tipo de relieve y la metodología a utilizar, así como el replanteo previo de la red de detalle a implementar si fuese necesaria. Sobre los documentos previamente existentes se realiza un diseño inicial del trabajo, que luego será verificado en campo en un primer reconocimiento del terreno.

### 52.2.2. Elección del Sistema de Referencia

Dependiendo del objetivo del levantamiento y del pliego de condiciones técnicas anexas al mismo, las coordenadas se habrán de calcular en un sistema de referencia u otro. Como sistemas de referencia se puede elegir entre adoptar un sistema de referencia topográfico local o un sistema de referencia geodésico en función del tipo de trabajo y la finalidad. Siempre será preferible utilizar un sistema geodésico de referencia oficial de tal forma que el trabajo quedará georreferenciado de una forma global sobre cualquier cartografía, aunque esta decisión depende de la finalidad del trabajo. Por ejemplo esto será imprescindible para actualización de cartografía, realización de cartografía urbana de detalle, levantamiento de puntos de apoyo, etc, no siendo tan importante para trabajos locales. En cualquier caso siempre habrá que valorar el coste de enlazar con un sistema geodésico de referencia oficial. Se debe tener especial cuidado en definir el sistema de referencia planimétrico y altimétrico, y adoptar un sistema de medida acorde a las necesidades del trabajo.

No hay que olvidar que existe una Ley sobre la Cartografía, que regula las actuaciones cartográficas oficiales en nuestro país. Esta Ley define como Sistema Geodésico de Referencia oficial para la cartografía el European Datum 1950 (ED50). Sin embargo, el Real Decreto de 28 de julio de 2007 por el que se aprueba el Sistema Geodésico de Referencia oficial en España, establece a partir de la entrada en vigor del mismo la oficialidad del Sistema Geodésico de Referencia ETRS89 (European Terrestrial Reference System 1989) para la nueva cartografía que se produzca, con un periodo de convivencia con el ya antiguo sistema ED50, de cinco años.

El marco de referencia oficial en España que materializa ETRS89 como apoyo para todo tipo de trabajo es la red REGENTE (Red GEodésica Nacional por Técnicas Espaciales). Consiste en una densa red GPS de alta precisión con estaciones coincidentes con vértices ROI y enlaces en un 15% de los vértices con señales de la red de nivelación de alta precisión (NAP), dado que la altitud que se observó mediante GPS es elipsoidal y con estos enlaces, poder relacionar con altitudes ortométricas. La densidad media quedó fijada en una estación por cada 300 km<sup>2</sup>, o un punto por cada hoja del MTN 1:50.000. El armazón geodésico del Proyecto REGENTE está formado por alrededor de 1.150 vértices (incluidos los insulares).

REGENTE constituye un marco de referencia homogéneo y una red de clase C que materializa el sistema geodésico de referencia ETRS89, teniendo coordenadas con una exactitud centimétrica y una precisión relativa del orden mejor que 0,1 ppm (100 veces superior a la de la red de primer orden convencional). Dado que todos los puntos de la red pertenecen simultáneamente a ROI, en todos esos puntos se dispone del doble juego de coordenadas geodésicas ED50 (sistema oficial

actual) y ETRS89, lo que ha hecho posible la obtención de parámetros de transformación de coordenadas entre ambos sistemas con una alta fiabilidad para toda España.

Por todo ello, la conexión de cualquier levantamiento con un sistema geodésico de referencia oficial como es actualmente ETRS89, debe hacerse a partir de la red REGENTE.

En cuanto a datum vertical, aunque los vértices REGENTE tienen una altitud elipsoidal precisa, debe hacerse con altitudes ortométricas. REGENTE no tiene en la mayoría de sus vértices una altitud ortométrica precisa, ya que esta procede de la antigua Red de Orden Inferior (ROI), observada a partir de triangulaciones angulares y con una precisión altimétrica del orden de 0,3 m. La superficie de referencia alimétrica (el datum alimétrico) en España es el nivel medio del mar, definido por el mareógrafo de Alicante desde 1870. El marco geodésico que materializa este datum alimétrico con la máxima precisión es la Red de Nivelación de Alta Precisión, (REDNAP). Esta red se extiende linealmente a lo largo de unos 18.000 kilómetros, con señales espaciadas aproximadamente un kilómetro, por las principales carreteras del país. Está observada con nivelación de precisión y gravimetría para la obtención de cotas geopotenciales y altitudes ortométricas con una precisión relativa mejor que  $1\sqrt{k}$  mm.

La Red de Orden Inferior (ROI) ha sido hasta ahora la red geodésica fundamental, con coordenadas ED50, constituida por casi 11.000 vértices geodésicos y lados medios de 5 - 7 kilómetros. Pero actualmente se han recalculado las coordenadas de ROI en el sistema geodésico ETRS89 con observables GPS y clásicos, por lo que esta red constituye una densificación (menos precisa) de REGENTE sobre el mismo marco de referencia, con precisión media de 8 cm en planimetría y 15 cm en altimetría, que puede ser utilizada para la georreferenciación del levantamiento topográfico teniendo en cuenta la precisión mencionada.

Para la realización del levantamiento es necesario establecer una red básica que englobe la zona y nos permita obtener coordenadas de todos los puntos observados, en el sistema de coordenadas de proyecto. Sobre la cartografía previa se realiza un diseño de la distribución de vértices, analizando las condiciones de altitud y visibilidad, así como la geometría de la figura resultante. La red ha de cubrir toda la zona de proyecto. En función del sistema de referencia elegido, se incluirán en la red del proyecto, vértices geodésicos o vértices de referencia. En este caso hay que adquirir las reseñas de estos vértices que pertenezcan a redes existentes.

### 52.2.3. Selección de equipos y métodos

Actualmente, para realizar los trabajos topográficos de un levantamiento, se puede elegir entre dos metodologías:

- topografía clásica (asociada a estaciones totales o equipos topográficos tradicionales),
- tecnología GPS (normalmente con equipamiento RTK que se describirá en el siguiente tema).

Cada una de ellas conlleva el uso de un equipo de observación específico, así como un tratamiento concreto de datos y metodología de observación. Dependiendo de las condiciones del terreno o del pliego de condiciones, ambas técnicas se complementan o pueden ser utilizadas de forma independiente. La tecnología GPS siempre será mucho más competitiva en cuanto a rendimiento y costes en una proporción cercana al doble que al uso de instrumentos de topografía clásica. Frente a este hecho hay que tener en cuenta y prever la posibilidad de la existencia de obstáculos en la zona de trabajo que dificulten el uso del GPS, como por ejemplo zonas arboladas o uso en zonas urbanas con un horizonte muy cerrado.

### 52. 2.4. Análisis de las incertidumbres a priori

Una vez decidido el equipo a utilizar, es necesario establecer el margen de incertidumbre que tiene el equipo en las diferentes operaciones del levantamiento y analizar, con el estudio de las tolerancias que pueden admitirse en el trabajo, si el instrumental y la metodología es compatible con las especificaciones de precisión exigidas.

Lo observables posibles son: lecturas acimutales, lecturas cenitales, distancias, desniveles y posiciones (si se aplica la tecnología GPS). A continuación se analizan, caso por caso, las incertidumbres asociadas a cada una de estas observaciones y posteriormente con las metodologías asociadas a un levantamiento topográfico.

- Incertidumbre por observación angular acimutal.

Con el equipo elegido se calcula la incertidumbre o error angular  $\epsilon_a$  por dirección acimutal observada. Este parámetro se obtiene a partir de la expresión:

$$(1) \quad e_a = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

donde los sumandos de la componente cuadrática son las incertidumbres máximas de verticalidad, dirección, puntería y lectura.

- Incertidumbre de verticalidad

$e_v = 0$  con compensador automático (actualmente, prácticamente todas las estaciones totales)

$e_v = \frac{s^{cc}}{12}$  siendo  $s$  la sensibilidad del nivel tubular, sin compensador automático (teodolitos)

- Incertidumbre de dirección

$$(2) \quad e_d = \frac{\sqrt{e_s^2 + e_e^2}}{D} r^{cc}$$

$e_s$  = incertidumbre en el centrado del jalón sobre el punto en la señal  $e_e$  = incertidumbre de la puesta en estación del aparato sobre el punto materializado

$D$  = distancia entre los puntos que definen la visual.

- Incertidumbre de puntería

$$(3) \quad e_p = \frac{C_a}{A} K \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$C_a$  = coeficiente de observación angular:  $10^{cc} \leq C_a \leq 150^{cc}$

$A$  = aumentos del antejo.

$K$  = constante de mayoración,  $1,5 \leq K \leq 3$ , es el término  $\left(1 + \frac{4A}{100}\right)$  en la formulación

clásica del error de puntería

$n$  = número de observaciones realizadas. Si se utiliza Regla de Bessel,  $n = 2$ .

- Incertidumbre de lectura:

- Sistema óptico mecánico:

$$(4) \quad e_l = \frac{2}{3} m \frac{1}{\sqrt{n}}$$

siendo:

$m$  = apreciación directa del limbo o sistema de lectura.

$n$  = número de observaciones.

- Sistema electrónico:

$$(5) \quad e_l = \frac{m_e}{\sqrt{3}}$$

Siendo  $m_e$  el mínimo salto en pantalla en el sistema electrónico.

- Incertidumbre por observación angular cenital.

La incertidumbre en la lectura de ángulos cenitales, ocasionada por los errores accidentales del aparato, vendrá dada por:

$$(6) \quad e_{a \text{ cenital}} = \sqrt{e_v^2 + e_l^2 + e_p^2}$$

- Incertidumbre de verticalidad

Es función de la precisión del nivel tubular del aparato. Como en el caso del error acimutal, este error se hace despreciable si la estación dispone de un compensador de doble eje.

$e_v = 0$  con sensor de inclinación y compensador de doble eje, característica de la mayoría de las estaciones totales

$e_v = C_p$  ( $C_p$  = característica de precisión del compensador automático, algunas estaciones totales)

$$(7) e_v = \frac{s^{cc}}{20} \text{ con eclímetro de coincidencia}$$

$$e_v = \frac{s^{cc}}{3} \text{ en teodolitos clásicos}$$

- Incertidumbre de puntería.

Calculado con una expresión análoga a la utilizada en la incertidumbre por dirección acimutal:

$$(8) e_p = \frac{C_v}{A} K \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$C_v$  = coeficiente de observación cenital, en función del ángulo de inclinación de la visual.

$A$  = aumentos del antejo.

$K$  = constante de mayoración,  $1,5 \leq K \leq 3$

$n$  = número de observaciones realizadas (Bessel,  $n=2$ )

- Incertidumbre de lectura

#### Sistema óptico mecánico

$$(9) e_L = \frac{2}{3} m \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Siendo:

$m$  apreciación por lectura directa del limbo o sistema de lectura.

$n$  el número de observaciones.

#### Sistema electrónico

$$(10) e_L = \frac{m_e}{\sqrt{3}}$$

Siendo  $m_e$  el mínimo salto en pantalla en el sistema electrónico.

- Incertidumbre por distancia.

La expresión de la incertidumbre por distancia observada, viene dada por la componente cuadrática de cuatro errores:

$$(11) e_D = \sqrt{e_{\text{estandar}}^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

- Incertidumbre propia del distanciómetro (estándar)

Es la incertidumbre asociada al distanciómetro utilizado en la medida de las distancias, que viene expresado con una cantidad constante y una parte proporcional:

$$(12) e_{\text{estandar}} = a + b \text{ ppm}$$

donde:

a = error sistemático en la medida de distancias.

b = incertidumbre que comete el aparato dependiendo de la distancia medida (b ppm= milímetros por kilómetro).

- Incertidumbre de estacionamiento ( $e_e$ )

Es la incertidumbre asociada al estacionamiento del instrumento por imperfección de la plomada óptica, mala definición del punto, etc.

- Incertidumbre de señal ( $e_s$ )

Es la incertidumbre asociada al estacionamiento del jalón con prisma en el punto a observar. La mayoría de autores cuantifican experimentalmente este error conjuntamente con el anterior en 2,5 cm.

- Incertidumbre por inclinación del jalón ( $e_j$ )

El jalón no se sitúa completamente vertical, lo que provoca una incertidumbre en la medida de la distancia, cuya expresión es la siguiente:

$$(13) e_j = \frac{m \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha}$$

siendo:

$m$  = altura del jalón.

$\alpha$  = sensibilidad del nivel de burbuja del jalón.

$\beta$  = ángulo de máxima inclinación de las visuales.

Experimentalmente, cuantificado en 2 cm usando nivel esférico en el jalón y 6 cm sin uso de nivel esférico, con una altura de puntería al prisma por encima de 1,30 m.

- Incertidumbre por desnivel trigonométrico.

La expresión para obtener el desnivel entre dos puntos mediante nivelación trigonométrica, según se ha visto en temas anteriores es:

$$(14) \quad \Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + C_{e-r}$$

donde:  $t_A^B = Dr_A^B \cdot \cot g V_A^B$

$m_B$  = altura del jalón.

$i_A$  = altura de estación.

$C_{e-r}$  = corrección conjunta de esfericidad y refracción.

El error o incertidumbre asociada a un desnivel en este tipo de observación, vendrá dado por la componente cuadrática de las incertidumbres de los tres términos que intervienen en el cálculo de  $\Delta H$ :

$$(15) \quad e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

$e_i$  : Incertidumbre en la medida de la altura del instrumento, tiene un valor empírico de 5 mm.

$e_t$  : Incertidumbre en el término t.

Conocida la expresión de  $t$  ( $D_g \cdot \cos V$ ) y diferenciando respecto a  $D_g$  y  $V$ , según la ley de propagación de errores se obtiene:

$$(16) e_t = \sqrt{(\cos^2 V) e_D^2 + (D^2 \operatorname{sen}^2 V) e_{a \text{ cenital}}^2}$$

El término  $e_D$  es la incertidumbre en la distancia observada y  $e_{a \text{ cenital}}$  la incertidumbre en la observación angular cenital, descritos ambos anteriormente.

- $e_m$  : Incertidumbre producida en la medida de la altura de la señal o altura de prisma.

Esta incertidumbre se puede descomponer en dos partes, siendo el error total ( $e_m$ ) la componente cuadrática de dos valores  $e'_m$  y  $e''_m$ .

- $e'_m$  : incertidumbre en el desnivel debida a la medida directa de la altura de la señal sobre el jalón inclinado:

$$e'_m = m (1 - \cos \beta)$$

- $e''_m$  : incertidumbre ocasionada al no observar exactamente en el centro del prisma. Se admite que esta incertidumbre toma empíricamente unos valores de 1 cm a 100 m, 2 cm a 500 m, 3 cm a 1.000 m y 4 cm a 2.000 m. Para cualquier distancia intermedia puede realizarse una interpolación lineal entre estos valores.

- Incetidumbre en una observación del desnivel por visuales recíprocas y simultáneas.

El método de observaciones recíprocas y simultáneas consiste en estacionar el equipo topográfico en los puntos entre los que se quiere hallar el desnivel y realizar lecturas cenitales simultáneamente desde los dos puntos (si no son estrictamente simultáneas, al menos que las condiciones meteorológicas sean iguales habiendo transcurrido muy poco tiempo entre ambas observaciones). Los efectos angulares de la refracción atmosférica serán iguales en las dos visuales y el desnivel con eliminación de tal efecto conjuntamente con el de esfericidad vendrá dado por la expresión:

$$(17) \Delta H_A^B = D \operatorname{tag} \frac{V' - V}{2}$$

Las horas próximas al amanecer y al anochecer son poco aptas para efectuar este tipo de medidas, se necesita una mayor estabilidad atmosférica. Es recomendable observar después de las diez de la mañana y antes de las tres de la tarde, en horas simétricas respecto al mediodía. Por supuesto, tampoco deberá operarse cuando existan perturbaciones atmosféricas como tormentas, fuertes vientos, etc.

Debe hacerse notar que las distancias cenitales  $V'$  y  $V$  son las que correspondería observar sin alturas de instrumento y mira; es decir, que las distancias cenitales que han sido observadas deberán ser reducidas al terreno:

$$(18) V = V_m + E$$

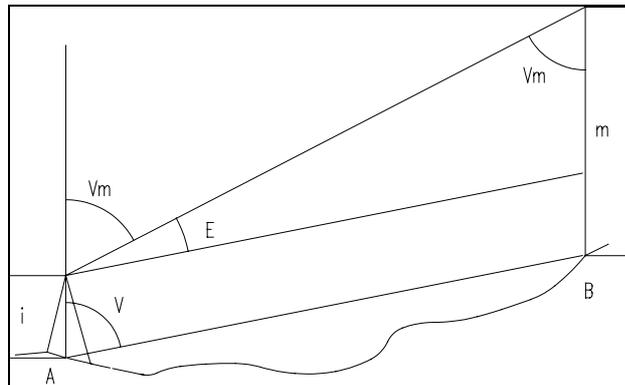
$$E^{cc} = \frac{m-i}{D} \operatorname{sen} V$$

Siendo:

$V_m$  = lectura cenital medida en el campo

$V$  = lectura cenital reducida al terreno

$E^{cc}$  = ángulo de corrección expresado en segundos



**Figura 1.** Reducción de visuales cenitales al terreno.

La precisión del desnivel al aplicar el método de visuales recíprocas y simultáneas viene dada por la expresión (Pérez Martín, 1981):

(19)

$$e_{\Delta H} = D_g \frac{1}{2} 0,000018692 \cos \frac{1}{2} (V_B^A - V_A^B) + D_g \frac{1}{100000} \operatorname{sen} \frac{1}{2} (V_B^A - V_A^B)$$

Para un equipo de precisión angular de  $8,4''$ , y una precisión en distancias de 10 ppm con un alcance de 2 a 3 km, aplicando esta fórmula, se obtiene el siguiente cuadro:

$V_A^B/D_g$ (m.)	500	1.000	1.500	2.000
100 <sup>g</sup>	5	9	14	19
90 <sup>g</sup>	5	11	16	22
80 <sup>g</sup>	6	12	18	24

**Tabla 1.** Errores en la determinación de alturas por visuales recíprocas y simultáneas.

- Incertidumbre en el desnivel observado por nivelación geométrica.

Si se observa un desnivel aplicando el método de nivelación geométrica, la precisión se determina según el error kilométrico ( $e_k$ ) del equipo de nivelación utilizado (componente de los errores de puntería, lectura de mira en equipo no digital y error de verticalidad).

Una vez obtenido este valor según se vio en el tema anterior, la precisión del desnivel dependerá de la distancia existente entre los puntos nivelados. Si se denomina  $K$  a la distancia en kilómetros existente entre ambos:

$$(20) e_{\Delta H} = e_k \cdot \sqrt{K}$$

- Incertidumbre en la posición de un punto determinado con GPS.

Para estimar la precisión en GPS se considera normalmente un término fijo y otro dependiente de la distancia al receptor fijo o al cual se refieren las correcciones diferenciales (en el caso de un método relativo o diferencial). Aunque la precisión en GPS depende de muchos más factores, los fundamentales son:

- El tipo de observable: código o código y fase.
- Simple o doble frecuencia (L1 o L1 y L2).
- Método de posicionamiento en todas sus variantes (absoluto o relativo, estático o cinemático, postproceso o tiempo real).
- Distancia de línea-base (receptor fijo al móvil).

En función de estas variables, se admite que las precisiones que se obtienen con un equipo GPS topográfico, son del siguiente orden:

METODO	FRECUENCIA	OBSERVABLES	PRECISION	APLICACIONES
ABSOLUTO	L1	CODIGO C/A	±10 m	NAVEGACION
DIFERENCIAL	L1	CODIGO C/A	1 m	CARTO/GIS
DIFERENCIAL	L1	FASE	1cm + 2ppm	TOPOGRAFIA
DIFERENCIAL	L1 Y L2	FASE	5mm + 1ppm	TOPO/GEO

Tabla 2. . Precisión en GPS en función del método, frecuencia y observables.

Y según el método de observación, las precisiones pueden ser (receptores de doble frecuencia):

METODO DE OBSERVACIÓN	PRECISION
ESTÁTICO	5 mm + 1 ppm
ESTÁTICO-RÁPIDO	5-10 mm + 1 ppm
RTK	2 cm + 2 ppm

Tabla 3. . Precisión en GPS en función del método de observación.

### 52.2.5. Distancia máxima de radiación

En el apartado de tolerancias de un proyecto se incluye la precisión que ha de obtenerse en planimetría y altimetría, directamente o a través de una escala de representación. La precisión requerida limita el error máximo permitido en el levantamiento, es decir la incertidumbre máxima de los puntos observados.

- **Planimetría**

El tamaño del mínimo detalle geométrico representable en una cartografía, a una determinada escala de representación, vendrá dada por el resultado de multiplicar el límite de percepción visual (0,2 mm) por el denominador de la escala. Si se trata de una escala 1/200:

$$(21) E_{\max} = l.p.v. * 200 = 0.04 \text{ m}$$

A una escala 1/500:

$$E_{\max} = l.p.v. * 500 = 0.10 \text{ m}$$

Si la escala del levantamiento es 1/200 no se deben sobrepasar los 4 cm en las incertidumbres de los puntos radiados, mientras que si la escala es 1/500 la precisión asociada es de  $\pm 10$  cm.

Con el fin de que los errores de un punto radiado no tengan representación a la escala, o no sobrepasen los límites de precisión impuestos en el pliego de condiciones, se puede calcular a priori la distancia máxima de radiación, límite que cumple esta condición, dado que el error previsible en la radiación es directamente dependiente de la distancia.

En cualquier caso, conviene tener en cuenta que la precisión habrá de ser mayor que la resultante de efectuar la componente cuadrática de los errores o incertidumbres de cada una de las fases que se realicen, ya que para cualquier trabajo será necesario encadenar una serie de metodologías y operaciones (triangulación, poligonación, etc.) y por tanto la precisión final será el resultado del encadenamiento de estas operaciones. Suponiendo que el trabajo consta de una red básica desde la que se radian los puntos del levantamiento, el error final vendrá dado por la componente cuadrática de las incertidumbres de la red básica ( $E_{red}$ ) y de la radiación:

$$(22) E_{TOTAL} = \sqrt{E_{red}^2 + E_{rad}^2}$$

Si hubiera redes intermedias o poligonales, igualmente también tendrían que tenerse en cuenta. Cuando haya sido observada la red básica, los parámetros de precisión serán la desviación típica máxima del ajuste.

Si  $E_{rad}$  cuantifica el error máximo que se puede cometer en la radiación y se conoce la precisión o tolerancia máxima del trabajo ( $E_{TOTAL}$ ), una vez cuantificado  $E_{red}$  podrá determinarse:

$$(23) E_{rad} = \sqrt{E_{TOTAL}^2 - E_{red}^2}$$

Y a partir de este valor se podrá calcular la distancia máxima de radiación sin sobrepasar los errores e incertidumbres permitidos.

Como ya se expuso en el tema anterior, las incertidumbres asociadas al método de radiación son el error o incertidumbre longitudinal y el error o incertidumbre transversal. Debido a que ambas actúan en direcciones perpendiculares, no se puede considerar como error máximo la componente cuadrática de los dos, sino la mayor de ellas.

- Incertidumbre transversal en radiación

La incertidumbre que se comete en la posición de un punto radiado debido a la medida de los ángulos viene dada por:

$$(24) \quad e_T = e_a D$$

siendo  $e_a$ :

$$(25) \quad e_a = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_i^2}$$

Cuantificado el error total aceptable en la radiación ( $e_t$ ), despejando la distancia en la expresión (el error de dirección  $e_d$  incluye en su expresión la distancia) resulta:

$$(26) \quad D_{\text{máxima según error transversal}} = \sqrt{\frac{e_t^2 - (e_s + e_e)^2}{(e_p^2 + e_v^2 + e_i^2)}}$$

- Incertidumbre longitudinal en radiación

El error o incertidumbre longitudinal tiene su origen en la medida de distancias. Su expresión en el método de radiación es:

$$(27) \quad e_L = \sqrt{e_{\text{estandar}}^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

- Incertidumbre propia del distanciómetro ( $e_{\text{estandar}}$ )

Es el error o incertidumbre en la medida de las distancias, debida al equipo:

$$E_{\text{estandar}} = a + b D_{\text{Km}}$$

- Incertidumbre de estacionamiento ( $e_e$ )

Es el error o incertidumbre que se comete al estacionar el instrumento.

- Incertidumbre de señal ( $e_s$ )

Es el error o incertidumbre producida en la señalización del punto. El objeto con el que se indica el punto, no se sitúa en su lugar exacto, sino cercano a él.

- Incertidumbre por inclinación del jalón ( $e_j$ )

El jalón no se sitúa completamente vertical, lo que provoca un error o incertidumbre en la medida de la distancia, cuya expresión es la siguiente:

$$(28) \quad e_j = \frac{m \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha}$$

siendo:

$m$  = altura del jalón.

$\alpha$  = sensibilidad del nivel de burbuja del jalón.

$\beta$  = ángulo de máxima inclinación para las visuales.

A partir de estas expresiones y teniendo en cuenta la componente cuadrática del error total longitudinal se puede despejar la distancia máxima de radiación, obteniendo:

$$(29) \quad D_{\text{máxima según error longitudinal}} = \frac{(\sqrt{e_L^2 - e_e^2 - e_s^2 - e_j^2} - a)}{b}$$

Una vez analizados estos dos errores se determina respecto a la precisión planimétrica la distancia que no se deberá superar en el momento de la radiación. Radiando puntos por debajo de esta distancia se garantizará teóricamente que los errores o incertidumbres asociadas a la observación de esos puntos no van a tener representación a la escala de representación gráfica del levantamiento.

#### • Altimetría

En altimetría se considera una tolerancia igual a  $\frac{1}{4}$  de la equidistancia de las curvas de nivel. La equidistancia depende en gran parte de la escala, pero también del desnivel existente en el terreno. Para una cartografía a escala 1/200 puede plantearse en principio una equidistancia

entre curvas de nivel de 20 cm y para una escala 1/500, de 50 cm, en cuyos casos las tolerancias altimétricas en estas condiciones sería de 5 y 12 cm respectivamente.

Esta tolerancia también condiciona la distancia máxima de radiación. A partir de la expresión ya conocida del error total se deberá calcular igualmente el valor del error máximo de radiación para la altimetría (ya sea por nivelación trigonométrica o por nivelación geométrica) y a partir de este, una nueva distancia máxima de radiación. Si fuese ésta de valor inferior a la calculada en planimetría, sería la que se impondría finalmente como distancia máxima de radiación.

$$(30) E_{altimetria} = \sqrt{E_{altimetria\ RADIACION}^2 + E_{altimetria\ RED}^2}$$

### 52.2.6. Errores máximos adicionales a la radiación

Es necesario volver a recalcar que el error  $E_{RED}$  debe incluir tantas técnicas como operaciones se hayan realizado hasta llevar coordenadas a las estaciones de la radiación desde la red geodésica o bien desde otra red de densificación.

Cuando no es posible radiar los puntos del levantamiento desde una estación o desde puntos de la red básica y se han establecido bases mediante el método de poligonación o itinerario, es necesario tener en cuenta el error cometido en las estaciones de la poligonal, dividiendo también error angular ( $E_A$ ) y error longitudinal ( $E_L$ ):

$$(31) E_A = \frac{L}{n} e_a \sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}}$$

$$E_L = \frac{((e_e + e_s) + (a + b \cdot D)) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

$$E_{poligonacion} \leq \sqrt{E_A^2 + E_L^2}$$

Por tanto, y al igual que se ha cuantificado en la radiación la distancia máxima admisible, en las operaciones de poligonación se requerirá determinar el número de ejes y la longitud de los mismos para obtener la tolerancia del trabajo. En los trabajos de poligonación se recomienda siempre efectuar regla de Bessel, pero también y si la precisión es demasiado alta, se podría contemplar la posibilidad de estacionamiento con centrado forzoso.

Tras la realización de la poligonal y la radiación, los puntos levantados estarán afectados por la componente cuadrática de ambas operaciones:

$$(32) \quad T \leq \sqrt{E_{radiacion}^2 + E_{poligonación}^2}$$

Si además la poligonación se apoya sobre una red obtenida por triangulaciones o intersecciones a partir de la red geodésica, será necesario considerar también los errores cuantificados en las intersecciones directas, inversas, trilateración, etc. El error en la intersección directa, prescindiendo del error angular procedente del instrumento elegido, viene únicamente determinado por el ángulo de intersección en el vértice de coordenadas desconocidas, mientras que el de la intersección inversa está directamente relacionado con la forma del polígono generado. Será necesario por tanto, una vez elegido el instrumento adecuado, optimizar estas variables para obtener la máxima precisión en la densificación de la red.

En el caso de redes de control de deformaciones o donde se requieran máximas precisiones, la optimización de todas estas variables no conducirá a resultados satisfactorios si no se realizan las operaciones necesarias con instrumentos de la máxima precisión. Actualmente existen estaciones totales con precisión por debajo de 1<sup>cc</sup> en mediciones angulares y con distanciómetro submilimétrico con puntería automática a prisma con base nivelante, que asegura las máximas prestaciones en la toma de datos.

### **52. 3. Red básica y de detalle.**

La primera fase del trabajo de campo será la implantación de los vértices de la red básica. Es necesario disponer de una red en el sistema de referencia elegido, para desde ella poder llevar a cabo los trabajos de radiación. Si la red geodésica no cumple los requisitos de densidad de vértices para una zona concreta y una metodología de observación, se ha de llevar a cabo la implementación de vértices a partir de la red geodésica. En general, la conveniencia o no de establecer otra red depende de la metodología de trabajo. Actualmente, las técnicas GPS hacen posible que en la mayor parte de los trabajos no sea necesaria la implementación de una red básica adicional, sino que, dependiendo del alcance del radio-modem y la zona en que se encuentre el trabajo (salvando zonas ocultas, urbana, vaguadas, etc) se pueda radiar directamente desde la red geodésica.

En cualquier caso, la red básica planimétrica no tiene por qué coincidir con la red básica altimétrica. El diseño, la materialización y la observación se planifica independientemente una y otra, según sea la precisión y los requisitos del levantamiento.

Tras el diseño, en campo se comprueba la viabilidad de la situación de los vértices previstos y se decide su posición definitiva. En el momento de la materialización del vértice, se realiza un croquis de situación y una reseña de cada uno. Es necesaria una buena señalización de cada vértice, que garantice su estabilidad, permanencia, visibilidad y estacionamiento. Para la materialización de los vértices se pueden utilizar hitos feno o señales fabricadas in situ. En la fase de diseño, se estudia la posición idónea de los vértices, pero es en la visita al campo cuando se eligen los emplazamientos óptimos y se materializan los emplazamientos definitivos. En la elección de los vértices es importante la intervisibilidad y obtener una geometría favorable, además de conseguir una cobertura total de la zona a levantar. Se vuelve a recalcar que los condicionantes de implantación de los vértices son diferentes si los equipos que van a utilizarse son equipos GPS o estaciones totales.

Sobre cartografía 1/25.000 se diseñará la red básica interior intentando que entre los vértices se formen triángulos de la misma longitud y con forma geométrica regular para conseguir a posteriori un ajuste de la red adecuado.

En la fase de observación de la red se decide la técnica a utilizar. Si la observación es mediante GPS, el método más adecuado para su observación será el estático, método que se describe en el siguiente tema, definiendo en este caso como parámetros más importantes el intervalo de toma de datos y el tiempo común de observación, dependiendo de la distancia de líneas-base. Otro factor a tener en cuenta en la fase de observación son la definición de las diferentes sesiones de toma de datos y los enlaces comunes con la red geodésica de la red que se está estableciendo, así como los enlaces con sesiones anteriores, de tal forma que los puntos de la red que se está formando sirvan de apoyo para los siguientes (bisagra entre sesiones). Estos últimos condicionantes vendrán impuestos por el número de receptores disponibles para realizar el trabajo. En la fase de observación GPS, aunque los datos se almacenan en la memoria del receptor, es imprescindible la anotación en estadillo de campo de la altura de antena, la referencia a la misma (a base de antena siempre), junto con anotaciones de incidencias, intervalo de toma de datos, máscara de elevación, horas de inicio y final de la sesión, etc.

Si se observa mediante metodología clásica (estación total), lo normal es realizar mediciones de ángulos y distancias conjuntamente mediante vueltas de horizonte al resto de los vértices visibles, para formar posteriormente las ecuaciones de observación de ángulos y distancias para

un ajuste MMCC. Este procedimiento se aplicaría en todos vértices de la red en los que se estaciona. Conviene recordar que la tolerancia en el cierre de la observación en CD y en CI, en observaciones acimutales será de  $e_a \sqrt{2}$ , siendo:

$$(33) \quad e_{a \text{ acimutal}} = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

Y en observaciones cenitales, respecto a la suma a  $400^g$ , la tolerancia será:

$$(34) \quad e_{a \text{ cenital}} = \sqrt{e_v^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

En cuanto a la altimetría, considerando las dimensiones de la zona y la precisión requerida, en función de las incertidumbres a priori se ha de decidir el método de observación altimétrica, pudiendo optar por nivelación trigonométrica, nivelación trigonométrica por visuales recíprocas y simultáneas, nivelación geométrica o nivelación geométrica de precisión. La metodología GPS permite obtener desniveles, pero en forma de altitudes elipsoidales. Si no se dispone de un buen modelo de geoide contrastado, dependiendo de la zona y de las distancias a la que se transfiere la altura (ortométrica), se pueden cometer errores considerables.

Si desde la red básica por métodos clásicos no se puede hacer el levantamiento de ciertos elementos por quedar ocultos desde la red básica, se realiza en una zona concreta una densificación que se suele denominar red de detalle. El método normal de observación de esta red es por medio de destacados directamente radiados desde la red básica o bien, si se necesita mayor precisión, integrar observaciones completas a estos puntos y desde estos puntos para ajustar por MMCC mediante intersecciones mixtas múltiples con el conjunto de la red básica, quedando enlazados con esta en un nivel de jerarquización y precisión semejante, aunque como es evidente, con lados más cortos. Lo habitual es formar una red de detalle a partir de la red básica mediante el establecimiento de poligonales que salen desde un punto de la red básica y cierran en otro, pudiéndose por tanto realizar una compensación de todos los puntos que componen la poligonal.

## 52.4. Levantamientos batimétricos

Los levantamientos batimétricos constituyen un caso especial sobre los métodos tradicionales de topografía clásica, de tal forma que su estudio merece ser tratado por separado. Además, como sucede en los levantamientos terrestres, no existen elementos singulares que plasmar en el

mapa, sino simplemente puntos de relleno para representar la profundidad. El levantamiento se lleva a cabo en dos etapas:

- 1) Determinar la posición de la embarcación, actualmente con GPS.
- 2) Sondar, determinar la cota del fondo y referenciarla con respecto, en el caso de levantamientos marinos, a la línea de bajamar escorada (no al nivel medio).

Generalmente, salvo levantamientos para aplicaciones específicas, en el levantamiento batimétrico, los puntos se organizan en perfiles, conjuntos de puntos alineados en una determinada dirección, situándose cada perfil de una forma paralela y algunos otros en direcciones transversales para una mayor cobertura de la zona. El número de puntos a tomar, como es lógico, dependerá de la escala, siendo norma habitual contar con un punto por  $\text{cm}^2$  de mapa, por lo que la distancia entre perfiles y el espaciado de puntos dentro del perfil debería corresponder a 1 cm a la escala del mapa. Un perfecto conocimiento del relieve subacuático implica un alto número de puntos de profundidad conocida o puntos sondados sistemáticamente espaciados. Si el método de sondeo es discreto, con todas las consecuencias que ello conlleva, en zonas especialmente importantes como pueda ser un puerto y sus vías de entrada necesitarán una mayor densidad de puntos. Actualmente, trabajando con ecosonda, se registra el perfil de una manera continua, con puntos cada segundo o más.

Cuando se trabaja por perfiles se toman líneas rectas paralelas entre sí y perpendiculares a la costa o bien líneas radiales a la misma, ya que líneas paralelas a la costa pueden ocultar información entre líneas. En cualquier caso, para reducir la pérdida de información se realiza también una densificación de la malla mediante perfiles transversales. El sistema de líneas radiales se utiliza cuando el perfil de la costa cambia bruscamente de dirección y alrededor de islas de pequeñas dimensiones. Es muy importante evitar que la embarcación sufra desviaciones con respecto al rumbo de navegación diseñado para no romper la uniformidad del levantamiento.

La cota inicialmente se mide respecto a la superficie del agua, por lo que en levantamientos marinos es necesario disponer de los registros de marea para reducir la batimetría al nivel de bajamar escorada o bien disponer de un modelo de mareas.

Antiguamente la determinación de la posición planimétrica se realizaba con técnicas y metodologías de topografía clásica, como las intersecciones directas o mediante radiación desde tierra (con un prisma montado sobre la embarcación). También se utilizaron las radiobalizas

mediante el método de navegación Loran y Decca, consistente básicamente en la medición de distancias entre el buque y dos puntos de coordenadas conocidas por medio de ondas electromagnéticas, comparando diferencias de fase o tiempos, con un alcance de unos 1200 km con ondas UHF y 80 km con microondas.

El método general para la determinación de la posición planimétrica actualmente es el GPS con métodos RTK (Real Time Kinematic) o cinemático con medidas de fase y cálculo en postproceso, este último ya sea con resolución de ambigüedades a partir de una inicialización previa o con resolución de ambigüedades en movimiento (métodos On-The-Fly, OTF). El primero tiene como limitación el alcance del radio-modem desde la estación base en tierra (menos de 10 km en buenas condiciones), mientras que la segunda opción tiene más alcance desde la estación base terrestre (hasta 100 km con receptores de doble frecuencia). Una tercera opción es el uso de correcciones diferenciales de código, con menor precisión planimétrica (del orden métrico) pero con un alcance que puede llegar hasta centenares de kilómetros, utilizando Red Nacional DGPS para Navegación Marítima del organismo Puertos del Estado.

En cuanto a la medición de la profundidad, en la actualidad se realiza mediante ecosonda. El principio fundamental consiste simplemente en registrar el tiempo que transcurre desde que un impulso sonoro es emitido desde a bordo y recogido nuevamente en el buque, una vez reflejado en el fondo de la superficie. Se basa en el principio de que todo sonido producido cerca de la superficie del agua se refleja en el fondo y vuelve a la superficie como un eco. Como la velocidad del sonido en el agua es conocida, el problema se reduce a medir el tiempo empleado en el doble recorrido. Varían desde los modelos portátiles, movidos por acumuladores y aptos para profundidades de 60 m, hasta las grandes instalaciones permanentes, que pueden sondear hasta 10-12 Km. de profundidad. Los sondadores acústicos constan en esencia de las siguientes partes fundamentales:

- Un aparato registrador, que a la vez es el órgano de control de todo el instrumento.
- Un generador de alta tensión, que lleva a su vez un condensador cuya descarga actúa sobre el transmisor de la onda sonora.
- Transmisor. El sonido es producido por un transductor, que automáticamente convierte un impulso eléctrico en una onda sonora.
- Receptor, recibe la onda reflejada en el fondo del mar, que después de ser amplificada por medio del amplificador, se registra gráficamente en el aparato registrador.
- Amplificador.
- Aparato registrador.

Puede ocurrir que en fondos muy escarpados la onda se refleje sobre cualquier superficie más próxima a la quilla que al fondo del mar. Estas dificultades han desaparecido con el empleo de ondas ultrasonoras de frecuencia inaudible superior a 20 MHz. Esta clase de ondas no son perceptibles por el oído humano y son solo captadas por aparatos análogos. La principal característica de las ondas ultrasonoras está en su propagación a través del agua, haciéndolo solamente en forma de un haz bastante cerrado.

El equipo de sondeo está proyectado para producir el sonido, recibir y amplificar el eco, medir el tiempo transcurrido desde la emisión y la recepción del sonido, convertir este intervalo de tiempo en unidades de profundidad y registrar estas medidas de profundidad.

Las ondas sonoras son emitidas por el transductor a intervalos de tiempo muy cortos; así por ejemplo un modelo portátil de sonda de esta clase, cuya máxima profundidad de alcance no llega a los 75 m, hace los sondeos a la velocidad de 600 por minuto.

Las sondas de eco tienen una precisión instrumental que varía desde unas centésimas por ciento de la profundidad en las grandes instalaciones permanentes, hasta un 0,5 por ciento de la profundidad en las máquinas portátiles. La precisión en la medida puede ser definida en función de la resolución del equipo acústico. Ésta está determinada por:

- Duración del pulso o longitud: Un pulso tiene una duración finita, determinada por la frecuencia, la velocidad de propagación y la duración del pulso. La resolución es la mitad de la duración del pulso.
  
- Angulo de incidencia de la onda en el objetivo: Si el rayo no incide normal a la superficie a representar, la longitud del pulso efectivo será mayor disminuyendo entonces la precisión.
  
- Resolución del medio de grabación: el medio de recogida de datos debe ser capaz de recoger ondas reflejadas con una resolución acorde con el pulso.
  
- Naturaleza del objetivo: Las superficies en las que rebotan las ondas pueden ser de distinta naturaleza.

Además se debe determinar una velocidad promedio de propagación de la onda mediante un instrumento que haga directa y continuamente lecturas de temperatura, salinidad y velocidad de onda. El sonido atraviesa el agua a una velocidad casi constante, siendo el valor medio de la

velocidad de propagación de las ondas acústicas en el mar de  $1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . variando con la temperatura, salinidad y profundidad (presión). Los instrumentos de sondeo acústico operan con una cierta velocidad del sonido que se llama "velocidad de calibración", y todos los sondeos estarán afectados por un error cuya magnitud es directamente proporcional a la diferencia entre la velocidad de calibración y la real del agua al hacer el sondeo.

Otro aspecto importante es la sincronización entre el GPS y la ecosonda. La precisión de sincronización proviene de la necesidad de obtener un preciso y eficaz levantamiento batimétrico que nos asegure que la medida efectuada por el GPS coincida en el mismo punto y en el mismo instante sobre en el que la ecosonda mide la profundidad (p). Para conseguir la sincronización temporal de alta precisión y asegurar esa coincidencia en tiempo y en espacio, se pueden aprovechar los mensajes NMEA emitidos por el GPS. El formato de estos mensajes es ASCII estandarizado y contienen una serie de campos que informan acerca de la posición, la calidad y la hora del estado del GPS en cada instante de emisión. En este caso el mensaje emitido es el GLL, uno de cuyos campos, la hora GPS, es interpretado por la ecosonda e intercalado entre sus medidas de profundidad. Así se asigna a cada instante u hora enviada por el NMEA, una profundidad concreta, generando un fichero ecosonda de horas y profundidades.

## **Bibliografía**

- [1] CHUECA PAZOS, M., HERRÁEZ BOQUERA, J., BERNÉ VALERO, J. L. Métodos topográficos. (1996). Editorial Paraninfo.
- [2] DE SAN JOSÉ, J.J., GARCÍA, J., LÓPEZ, M. Introducción a las ciencias que estudian la geometría de la superficie terrestre. 2000, 1ª edición. Editorial Bellisco.
- [3] FARJAS ABADÍA, M. Apuntes de Topografía de la E.U.I.T. Topografía. (2007). Formato digital de la web del Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodésica y Fotogrametría.
- [4] FERRER TORIO, R., PIÑA PATÓN, B. Topografía aplicada a la Ingeniería. 1ª parte. (1996). Instituto Geográfico Nacional.
- [5] SANCHEZ RIOS, A. Fundamentos teóricos de los métodos topográficos. (2000). Editorial Bellisco.

## **Tema 53. Levantamientos topográficos con GPS: medición de código y de fase. Instrumentación. Métodos de medida: estáticos y cinemáticas, postproceso y tiempo real. Transformación de coordenadas. Redes de correcciones diferenciales en tiempo real.**

### **53. 1. Levantamientos topográficos con GPS: medición de código y de fase**

#### **53.1.1. Introducción**

La elección del método y equipo de levantamiento topográfico con GPS presenta diferentes alternativas en función de la precisión requerida, nivel de complejidad y costes, de tal forma que en función del trabajo a desarrollar se aplicarán unas u otras técnicas. La elección del método dependerá fundamentalmente de dos factores: equipo disponible y relación entre precisión final y rendimiento que se quiere alcanzar.

Aunque se puede describir una relación pormenorizada de los métodos de observación que se utilizan actualmente, en trabajos topográficos, el levantamiento cinemático en tiempo real (Real Time Kinematic, RTK) se ha impuesto en los últimos años en topografía a todos los demás debido a su alto rendimiento y productividad, versatilidad y disponibilidad de los datos en tiempo real, dejando las técnicas de topografía clásica para entornos en los que no se pueda trabajar con GPS por arbolado, zona urbana, túneles, etc u otros trabajos con una demanda especial de precisión.

Es importante aclarar que los trabajos de GPS en tiempo real (RT) no son en sí mismos una forma de posicionamiento, sino una manera de calcular las líneas-base en tiempo real en el método de posicionamiento diferencial de fase.

#### **53.1.2. Medición de código y de fase**

Los satélites GPS emiten señales en dos frecuencias en banda L ( $L_1=1575.42$  MHz y  $L_2=1227.6$  MHz), múltiplos de una frecuencia fundamental  $f = 10.23$  MHz, con una relación de 154 y 120 respectivamente. Sobre estas portadoras se modulan códigos y mensajes:

- Código C/A o course acquisition, llamado “Standard Positioning Service (SPS)”, uso civil. Se modula sobre la frecuencia  $L_1$ .

- Código P o de precisión, llamado “Precise Positioning Service (PPS)”, uso militar y usuarios autorizados. Se modula sobre las dos frecuencias L1 y L2.
- Mensaje de navegación, que contiene las órbitas de los satélites, correcciones de reloj y otros parámetros del sistema.

Se puede definir el observable básico GPS como el retardo o tiempo  $\delta\tau$  que tarda la señal en viajar desde el centro de fase de la antena del satélite (instante de emisión) hasta el centro de fase de la antena del receptor (instante de recepción). El valor proporciona la distancia “aparente” o pseudodistancia entre ambos,  $D = c \cdot \delta\tau$ .

- **Medición de código**

El posicionamiento mediante código es la técnica más sencilla empleada por los receptores GPS para proporcionar instantáneamente al usuario la posición y/o tiempo. Se realiza con un único receptor y consiste en la solución de una intersección inversa de todas las pseudodistancias receptor-satélite sobre el lugar de estación en un período de observación dado. Las precisiones esperadas en este tipo de posicionamiento son de unos 10 metros (sin SA).

Llamando  $t^S$  a la lectura del reloj del satélite en el momento de la emisión y  $t^R$  a la lectura del reloj del receptor en el momento de la recepción,  $\delta^S$  y  $\delta^R$  a la diferencia entre las lecturas de los relojes del satélite y el receptor respecto al sistema de tiempo GPS respectivamente, la diferencia entre ambas lecturas será entonces la cantidad  $\Delta t$  que corresponde al desfase de tiempo entre la señal del satélite y la del receptor en el proceso de correlación de código en el receptor:

$$(1) \quad \Delta t = t^R - t^S = [t^R(GPS) + \delta^R] - [t^S(GPS) + \delta^S]$$

de forma que si se multiplica el intervalo de tiempo  $\Delta t$  por la velocidad de la luz  $c$ , se obtiene la medida de pseudodistancia de código (R):

$$(2) \quad R = c \cdot \Delta t = c \cdot \Delta t(GPS) + c \cdot \Delta\delta = \rho + c \cdot \Delta\delta$$

siendo  $\rho$  la distancia calculada a partir del tiempo real de viaje de la señal

Para obtener una ecuación de pseudodistancias más correcta se debe tener en cuenta que la onda electromagnética procedente del satélite atraviesa la atmósfera y por lo tanto sufre retardos debidos principalmente a la ionosfera y la troposfera:

$$(3) \quad R = \rho + c \cdot \Delta\delta + D_{Ion} + D_{Trop}$$

donde el término troposférico es igual en valor absoluto pero de signo opuesto para pseudodistancias y fases y el término ionosférico es igual para ambos los observables, aunque en diferente cantidad para L1 que para L2.

Cualquier receptor (ya sea navegador o sea receptor geodésico de precisión) mide el código con una precisión equivalente al 1% de la longitud del chip (cada cuanto se repite el código), por lo que la precisión con código C/A será en pseudodistancia medida con una resolución de 3 m y con P, 0,3 m (todo esto sin tener en cuenta los errores de reloj, troposféricos, ionosféricos, etc).

- **Medición de fase**

El observable de fase es la diferencia entre la fase de la portadora recibida del satélite y la fase generada internamente por el oscilador del receptor. La distancia satélite-receptor está relacionada con el número entero de longitudes de onda y su fase.

Si se denomina  $\varphi^S(t)$  la fase recibida de la portadora y  $\varphi^R(t)$  la fase generada en el receptor en un tiempo de recepción  $t$ , la medida que calcula el receptor es una función que varía en el tiempo  $\varphi^S(t) - \varphi^R(t)$ . Cuando la diferencia de fase aumenta o disminuye en un ciclo ( $2\pi$ ), el observable de fase de la portadora  $\varphi_R^S(t) = \varphi^S(t) - \varphi^R(t)$  también cambia en un ciclo, de tal forma que lo que mide el receptor es la parte fraccional de fase más el número entero de longitudes de onda (ciclos) que se acerca o se aleja el satélite. Pero en el instante inicial en que el receptor comienza a seguir la fase recibida del satélite, se desconoce el número entero de longitudes de onda entre el satélite y el receptor. Ésta incógnita es lo que se llama *ambigüedad de ciclo inicial*.

Cuando el receptor sigue la fase recibida desde el satélite a partir de una época inicial, la pseudodistancia de fase consistirá en:

- Una medida fraccional de la fase.
- Una cuenta entera de ciclos que varía según se aleje / acerque el satélite.
- Un número entero de ciclos desconocido (ambigüedad de ciclo inicial, N), fijo en el tiempo a lo largo de todo el seguimiento de la señal de ese satélite.

Para cualquier época, para obtener la expresión de las pseudodistancias de fase entre un satélite  $i$  y un receptor  $j$  hay que añadir los correspondientes términos correctivos por estados de ambos relojes  $\delta^S$  y  $\delta_R$  además de las correcciones por retardos ionosféricos y troposféricos, (expresado en ciclos):

$$(4) \quad \Phi_A^j(t) - \frac{c}{\lambda} \delta^j(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_A^j(t) - N_A^j - \frac{c}{\lambda} \delta_A(t) - d_{Aion}^j(t) + d_{Atrop}^j(t)$$

siendo  $\Phi$  = diferencia de fase medida

$\lambda$  = longitud de onda

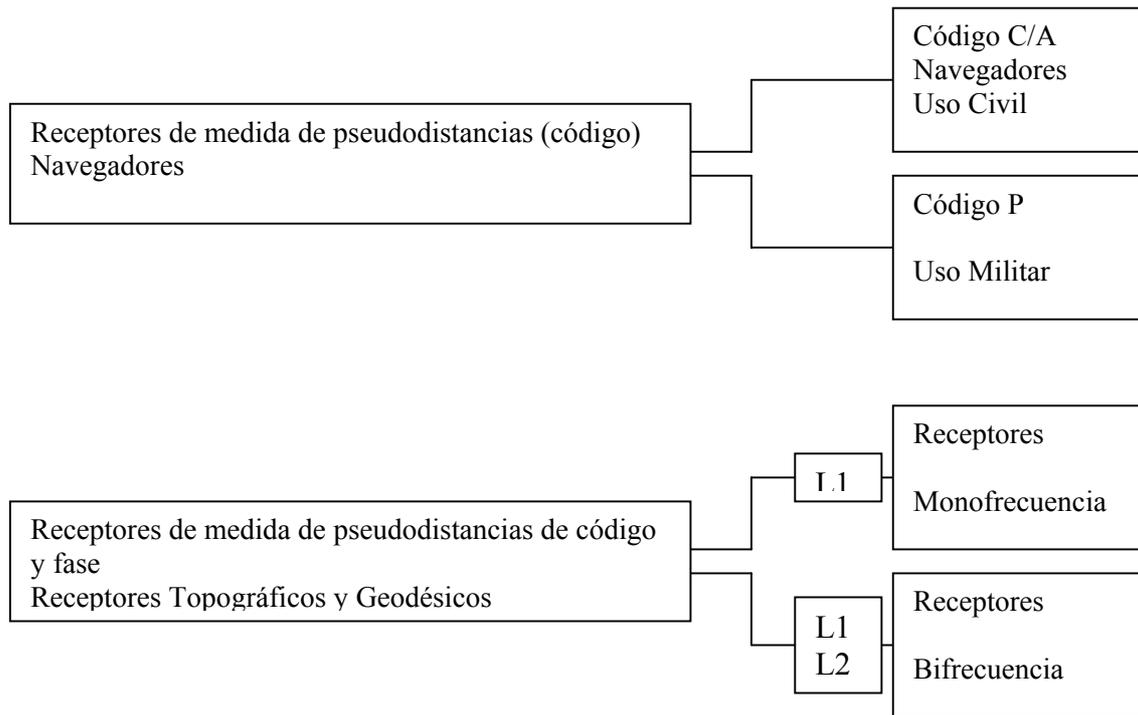
$c$  = velocidad de la luz

$N$  = ambigüedad de ciclo inicial

La fase puede ser medida por un receptor mejor que 0,01 ciclos, lo cual implica una precisión mejor que 2 – 3 mm.

### 53.2. Instrumentación

Si se establece una clasificación en función del observable que emplean para determinar la posición del punto se distinguirá entre receptores de medida de código, que son los navegadores, y los receptores de medida de fase (receptores topográficos y geodésicos), siendo posible estos últimos que sean de una o de doble frecuencia, según reciban L1 o L1 y L2 respectivamente. Un esquema general sería el siguiente:



**Figura 1.** Clasificación de los receptores GPS.

La principal diferencia entre unos equipos GPS y otros, atiende a la precisión que permiten alcanzar y por tanto el coste.

- Navegadores: los receptores utilizados son unidades pequeñas, portátiles y de bajo coste, con recepción de código C/A, resultando útil para usuarios de barcos, aviones, vehículos, deporte, ocio y todas aquellas aplicaciones donde la exigencia de precisión en el posicionamiento esté por encima de los 10 metros. Las soluciones se obtienen en tiempo real, bien con solución instantánea de navegación o por resolución de un sistema mínimo-cuadrático en el que la redundancia del sistema está en función del tiempo de observación. Únicamente reciben datos de código C/A por la portadora L1. Correlacionan el código y determinan la pseudodistancia entre el receptor y satélite.
- Receptores submétricos: son equipos que en base son iguales a los anteriores, sólo reciben código C/A, pero difieren de los anteriores en que es posible trabajar en modo diferencial, un equipo de referencia y otro móvil en modo cinemático o en modo estático. Puede tratarse de los equipos anteriores con admisión de correcciones diferenciales de código vía GPRS, GSM (Internet) o radio.

Las precisiones que se pueden conseguir se encuentran entorno a un 1 metro, en función del tipo de receptor, algoritmos de cálculo y sobre todo, distancia a la estación fija que genera las correcciones de código. Las aplicaciones se encuadran en los campos de la cartografía (actualización de escalas medias y pequeñas), GIS, navegación de precisión, etc.

- **Receptores de fase monofrecuencia:** estos receptores toman como datos de la portadora L1 los códigos C/A y la fase. Son equipos que trabajan en modo diferencial en tiempo real y en diferido o postproceso. Como es lógico y dada la medición de fase, la precisión aumenta considerablemente respecto a los anteriores, siendo esta del orden de  $2\text{ cm} + 2\text{ ppm}$ , lo que permite su utilización en aplicaciones topográficas. Es una opción menos cara que los receptores bifrecuencia, aunque su uso queda limitado a la observación de líneas-base menores que 10 - 15 kilómetros. Actualmente pueden operar en modo RTK, aunque con algoritmos de resolución de ambigüedades menos sólidos que los de doble frecuencia, tiempos de inicialización considerablemente más altos y más delicados en cuanto a pérdida / recuperación de la señal.
- **Receptores de doble frecuencia:** son los equipos de mayor precisión y se utilizan en aplicaciones topográficas y geodésicas. Registran observables de las dos portadoras emitidas por los satélites, realizando medidas de código C/A y P en L1, de código P en L2 y medidas de fase en L1 y L2. Trabajan en tiempo real o en diferido alcanzando precisiones del orden de  $5\text{ mm} + 1\text{ ppm}$  y disminuyendo los tiempos de observación. Se utilizan en redes topográficas y geodésicas, redes de control de deformaciones y control fotogramétrico, con tiempos de observación más cortos que en el caso anterior.
- **Receptores de doble frecuencia GPS + GLONASS:** algunas casas comerciales incorporan en sus receptores la posibilidad de integrar además las señales de la constelación GLONASS. Esto implica la posibilidad de disponer de un mayor número de satélites, con la consiguiente ventaja cuando se trabaja en zonas con posibilidad de pérdida de la señal. La precisión es la misma que los anteriores, si bien el disponer de un mayor número de satélites puede dar más redundancia al cálculo y en equipos RTK proporcionan más solidez en caso de pérdida de satélites.

En el siguiente cuadro comparativo se puede ver un resumen de los diversos tipos de receptores GPS actualmente disponibles en el mercado:

Método	Frecuencia	Observables	Precisión	Aplicaciones
Absoluto	L1	C/A	10 m	Navegación
Diferencial	L1	C/A	1 m	Cartografía, GIS, nav. prec.
Diferencial	L1	C/A y fase	2 cm + 2 ppm	Topografía
Diferencial	L1 y L2	C/A, P, fase	5 mm + 1 ppm	Topografía y Geodesia
Diferencial	L1, L2 y GLONASS	C/A, P, fase	5 mm + 1 ppm	Topografía y Geodesia

**Tabla 1.** Comparación de receptores GPS.

Como se ha expuesto, en topografía la opción más idónea para todo tipo de trabajos en cuanto a instrumental es el de doble frecuencia (con o sin GLONASS), el cual, utilizándolo en modo estático relativo, estático rápido, stop & go o cinemático en tiempo real (RTK) enumerando del método más preciso al menos preciso, cubre toda la gama de posibles aplicaciones en topografía (implementación de bases topográficas, apoyo fotogramétrico, levantamientos, observación de redes topográficas, etc).

### 53.3. Métodos de medida.

Se puede hacer una amplia clasificación en cuanto a los métodos de posicionamiento con GPS en función de muchas variables. Una clasificación tradicional sería:

- En función del observable utilizado:
  - Código (metros)
  - Código y Fase (centímetros, milímetros)
  
- En función del movimiento del receptor:
  - Estático, no se mueve durante la observación (mayor precisión y tiempo)
  - Cinemático, el receptor se desplaza durante la observación
  - Híbridos, combina los dos anteriores
  
- En función del tipo de solución:
  - Posicionamiento absoluto: coordenadas de un punto aislado (X, Y, Z).

- Posicionamiento relativo o diferencial GPS (DGPS): coordenadas de un punto con respecto a otro (dX, dY, dZ).
- En función de la disponibilidad de la solución:
  - Tiempo Real, cálculo y solución en campo (por ejemplo RTK)
  - Post-proceso, cálculo y solución en gabinete.

En un amplio sentido de la palabra, estas técnicas se pueden clasificar básicamente en tres clases, mezclando los conceptos vistos anteriormente:

1.- Navegación autónoma = Posicionamiento Absoluto por código, empleando sólo un receptor simple. Empleado en navegación, con una precisión estándar de 5 metros.

2.- GPS Diferencial por Código = DGPS, con corrección diferencial a las pseudodistancias de cada satélite (o, aunque más raro, a las coordenadas). Se puede conseguir una precisión estándar de 1 m. Utilización: Navegación costera, adquisición de datos para SIG, inventarios georreferenciados, revisión de cartografía de escalas medias (1:10.000, 1:25.000, 1:50.000), agricultura, movimientos no precisos de maquinaria de obra civil, control de flotas, etc.

3.- Posicionamiento Diferencial de Fase: precisión entre 0,1 m y 5 mm, dependiendo de la técnica, observables, tiempo de observación, etc. Aplicaciones: Geodesia, Topografía, Geodinámica, control de deformaciones, control preciso de maquinaria automática, etc. En general, en este grupo es en el que se engloban los métodos más precisos empleados en Geodesia y Topografía.

### **53.3.1. Fundamento de los métodos relativos**

El fundamento de cualquier método relativo estriba en la eliminación de errores, especialmente el retardo ionosférico y troposférico, al anularse los errores si se considera que estos tienen la misma magnitud en el mismo instante de observación en puntos no muy alejados. Planteando las ecuaciones de simples y dobles diferencias se demuestra que para un determinado instante y siempre que los puntos no estén muy alejados, los efectos troposféricos e ionosféricos en la línea-base observada son iguales y por tanto pueden eliminarse.

Dentro de los métodos relativos puede haber múltiples combinaciones en función del observable, movimiento o no de los receptores, etc. En cualquier caso, en los métodos estáticos:

- Se eliminan:
  - Errores de reloj de los satélites y receptor.
  - Error orbital (en los parámetros de efemérides transmitidas).
  - Disponibilidad selectiva, SA (si la hubiera).
  - Efecto de la ionosfera.
  - Efecto de la troposfera.
  
- Se mantiene:
  - Multipath (de mucha mayor magnitud en el código que en la fase)
  - Ruido del receptor.

En los métodos relativo dos receptores (al menos) están simultáneamente observando satélites comunes, para establecer las ecuaciones de simples y dobles diferencias de fase. De los dos, uno de ellos ha de estar en un punto de coordenadas conocidas o bien asignarle unas aleatorias, pero consideradas fijas, en un sistema de referencia, determinándose los incrementos de coordenadas.

### **53.3.2. Métodos de observación**

- **Posicionamiento absoluto (código)**

Un sólo receptor de código (C/A) observa la constelación y mediante la ecuaciones de observables código se determinan las pseudodistancias (al menos cuatro) para determinar por trisección inversa en el espacio la posición (precisión 10 m).

- **Posicionamiento relativo con código en postproceso**

Si el receptor de sólo código es capaz de generar archivos con las medidas de pseudodistancias de código, posteriormente se puede procesar en un software adecuado junto con las observaciones de una estación base, obteniendo una precisión en torno a 1 metro.

- **DGPS (correcciones diferenciales de código)**

El término DGPS se aplica a los métodos relativos de correcciones diferenciales de código en tiempo real. El fundamento es el siguiente: la "estación base" genera una corrección para cada una de las pseudodistancias observadas (PRC Pseudo Range Correction, Corrección a la

pseudodistancia) y su variación con el tiempo (RRC Range Rate Correction), época a época, para los satélites observados. El equipo móvil aplica estas correcciones sobre los satélites que esté utilizando para calcular su posición en tiempo real. Este es el método más correcto.

Existe una variante que se utiliza cuando la estación móvil y base no observan la misma constelación. Se calcula la diferencia de latitud, longitud y altura elipsoidal en la "estación base" para aplicársela al móvil. Es el método más sencillo, pero tiene el inconveniente de que puede considerarse rigurosamente correcta sólo si en la base y el móvil se usan los mismos satélites (constelación idéntica).

También se puede hablar dentro del DGPS de:

- Corrección diferencial directa: es el proceso normal. La estación móvil recoge las correcciones diferenciales y las aplica sobre sus observaciones obteniendo su posición corregida.
- Corrección diferencial inversa: Se suele aplicar en control de flotas. Los datos recogidos por los distintos móviles se envían a un centro de control que dispone de correcciones diferenciales (o las obtiene mediante una "estación base") y las aplica a todos ellos, obteniendo su posición corregida. En este tipo de tecnología el móvil desconoce su posición corregida.

Los resultados obtenidos con este método de posicionamiento, incluso con distancias mayores de 200 km pueden alcanzar algunos decímetros con repetitividad de medidas, estando nominalmente en el entorno de 1 m.

Las medidas de código suelen ser "suavizadas" con medidas de fase en el receptor base para obtener rendimientos aún mejores. El fundamento es que las medidas de código (y por ello también las correcciones) responden a una función en forma de "dientes de sierra" por la propia precisión que tienen estas medidas, mientras que la fase responde a una gráfica suave en el tiempo. Si ambos observables se mezclan para obtener una función más suavizada, las correcciones que se generen sobre esta combinación mediante algún algoritmo será una función suavizada y con mayor precisión. Desde un punto de vista práctico, el receptor de las correcciones no tiene porqué tener medidas de fase, sólo de código, pero la estación base

generadora de correcciones sí que tendrá medidas de fase para hacer el suavizado de las correcciones.

En DGPS se trabaja con un único receptor, al que se le debe sumar una unidad de control y un receptor de radiofrecuencia que recibe los datos de corrección de una estación central de referencia. Esta envía las correcciones en formato RTCM o RTCA a la estación móvil, obteniendo la posición en tiempo real. Muchos organismos e instituciones públicas o privadas han puesto este servicio en funcionamiento, gracias al cual, con un receptor de bajo coste de código y un transmisor de radio convencional con conversor a mensajes formato RTCM se pueden obtener precisiones en tiempo real por debajo del metro.

Para describir matemática el proceso, la medida de código en una estación base A desde el satélite j en una época  $t_0$  puede ser modelada como:

$$(5) R_A^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) + \Delta\rho_A^j(t_0) + \Delta\rho^j(t_0) + \Delta\rho_A(t_0)$$

donde:

- $\rho_A^j(t_0)$  es la medida geométrica de pseudodistancia.
- $\Delta\rho_A^j(t_0)$  es el error de la medida dependiente de la estación base terrestre así como de la posición del satélite (error radial orbital, efectos de refracción...).
- $\Delta\rho^j(t_0)$  es el error dependiente únicamente del satélite (por ejemplo, error del reloj del satélite).
- $\Delta\rho_A(t_0)$  es el error dependiente únicamente del receptor (por ej. error del reloj del receptor, multipath...).

La corrección a la pseudodistancia para el satélite j en la época  $t_0$  es definida por la relación:

$$(6) PRC^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) - R_A^j(t_0) = -\Delta\rho_A^j(t_0) - \Delta\rho^j(t_0) - \Delta\rho_A(t_0)$$

la cual puede calcularse a partir de la medida geométrica  $\rho_A^j(t_0)$  obtenida a partir de la posición conocida de la estación de referencia y las efemérides transmitidas y  $R_A^j(t_0)$  es la cantidad medida. Además de la corrección a la pseudodistancia  $PRC^j(t_0)$ , se calcula en la estación base también su derivada con el tiempo  $RRC^j(t_0)$ . Ambas correcciones están referidas a la época de

referencia  $t_0$  y son transmitidas a la estación B (“rover” o móvil) en tiempo real. En B la corrección a la pseudodistancia es predicha para la observación en la época  $t$  usando la relación:

$$(7) \quad PRC^j(t) = PRC^j(t_0) + RRC^j(t_0) (t - t_0)$$

donde la cantidad  $(t - t_0)$  es conocida como “latencia”. Es evidente que la precisión que se puede conseguir se incrementa para pequeñas variaciones de las correcciones de pseudodistancia y cuanto más pequeña sea la latencia.

Considerando la expresión general (5) para el punto B y la época  $t$ , la medida de pseudodistancia de código puede ser modelada como:

$$(8) \quad R_B^j(t) = \rho_B^j(t) + \Delta\rho_B^j(t) + \Delta\rho^j(t) + \Delta\rho_B(t)$$

Aplicando la corrección a la pseudodistancia predicha  $PRC^j(t)$  a la expresión (7) a la medida de pseudodistancia en el punto B,  $R_B^j(t)$  resulta:

$$(9) \quad R_B^j(t)_{CORR} = R_B^j(t) + PRC^j(t)$$

o bien sustituyendo (4) en la corrección a la pseudodistancia según (6) y (7), respectivamente se llega a:

$$(10) \quad R_B^j(t)_{CORR} = \rho_B^j(t) + [\Delta\rho_B^j(t) - \Delta\rho_A^j(t)] + [\Delta\rho_B(t) - \Delta\rho_A(t)]$$

donde los errores dependientes del satélite se han cancelado.

Para distancias moderadas entre la base y el rover, los errores satélite-receptor están altamente correlados. Por ello, la influencia de los errores orbitales radiales y la refracción son reducidos considerablemente. Despreciando esos errores, la ecuación (10) se simplifica a:

$$(11) \quad R_B^j(t)_{CORR} = \rho_B^j(t) + \Delta\rho_{AB}(t)$$

siendo  $\Delta\rho_{AB}(t) = \Delta\rho_B(t) - \Delta\rho_A(t)$ . Si no existe error por multipath, este término se convierte en el error de reloj del receptor, en términos de distancia, queda:

$${}^{(12)} \Delta\rho_{AB}(t) = c\delta_{AB}(t) = c\delta_B(t) - c\delta_A(t)$$

Las aplicaciones más comunes del DGPS con código son:

- Navegación de precisión.
- Levantamientos y apoyo para cartografías de escalas menores de 1/5000.
- Confección y actualización de sistemas de información geográfica.
- Todo trabajo en general que no requiera precisiones mayores de 0,5 m.

- **Método estático relativo de fase**

Este modo de posicionamiento consiste en el estacionamiento de al menos dos receptores que no varían su posición durante la etapa de observación. La referencia puede establecerse en cualquiera de ellos y la precisión será función del tiempo de observación, de la geometría y del instrumental utilizado.

Sin duda es el método clásico para grandes distancias y el que ofrece mayor precisión: 5 mm + 1 ppm en la longitud de la base línea o incluso mejor si se utilizan los algoritmos y modelos matemáticos adecuados. Se suele medir base línea a base línea, con observaciones de una o más horas, cerrando figuras geométricas en la red que se quiere observar con un posterior ajuste MMCC de la misma.

El tiempo de observación suele ser proporcional a la longitud de la línea y también dependerá de otros factores: instrumento mono o bifrecuencia, precisión requerida, algoritmos de resolución (de ambigüedades), intervalo de toma de datos...etc.

Principales aplicaciones:

- Redes geodésicas.
- Confección de redes fundamentales en las cuales se vayan a apoyar trabajos de Cartografía, Fotogrametría o proyectos de ingeniería.
- Obtención de puntos de apoyo fotogramétrico de precisión.
- Control geométrico de cartografía.
- Control de deformaciones en superficies y estructuras.
- En general, todo tipo de aplicaciones en donde se necesite la máxima precisión.

- **Método estático rápido**

Es una variante del método estático, pero sólo en cuanto al cálculo, no en cuanto a la observación en sí misma, sólo se reduce el tiempo de observación y el intervalo de toma de datos (normalmente 3 segundos). En este método, mediante el algoritmo de cálculo se resuelven todas las incógnitas con pocas épocas de observación. La incógnita fundamental es la ambigüedad, pudiéndose resolver en 5 o 10 minutos, observaciones que exigirían media hora o más para ofrecer igual redundancia y por tanto similar precisión. En realidad, se utilizan las mismas técnicas que se aplican en el posicionamiento estático clásico, aunque con algoritmos de resolución de ambigüedades que requieren menos épocas de observación (por ejemplo, FARA, Fast Ambiguity Resolution Algorithm). Dependiendo del tipo de receptor, cobertura de satélites y distancia, basta con tiempos de observación de 5 minutos con intervalo de toma de datos de 3 segundos y una media de 6 SV's.

El método para la resolución de ambigüedades con pocas épocas tiene una limitación en cuanto a distancia, de tal forma que se recomienda que las líneas-base midan menos de 20 kilómetros. Para una mayor redundancia de observaciones en este método, se disminuyen los intervalos de medida que se usan normalmente en el estático (de 15, 20 o 30 segundos se suele pasar a 1 o 3 segundos de intervalo de toma de datos).

La ventaja del método es que es sencillo, rápido y preciso. Por otro lado, no requiere mantener el contacto continuo con los satélites entre diferentes estaciones. La precisión final está en el orden de  $10 \text{ mm} + 1 \text{ ppm}$ , haciéndolo ideal para redes o levantamientos en pequeñas distancias.

Se suelen distinguir dos modalidades a su vez dentro de este:

- a) Modo estático rápido ocupando sólo una estación, es el normal.
- b) Modo estático rápido ocupando una segunda estación al cabo de más o menos una hora.

En el método b) cada estación tiene que ser ocupada nuevamente después de un intervalo de tiempo entre los 50 y 120 minutos, siendo el tiempo de observación de una estación más corto, unos 3 o 4 minutos. El receptor puede perder toda comunicación con los satélites entre punto y punto. La idea básica radica en el hecho de que se requieren datos de una configuración geométrica diferente para resolver las ambigüedades. Se considera a ambos conjuntos de datos como un solo conjunto con un salto de ciclo (cycle slip) intermedio, que puede ser fijado con técnicas de triples y dobles diferencias. Sin embargo, la fijación de un salto de ciclo con un

lapso mayor de 30 minutos funciona sólo si se dispone de una alta calidad de datos (nivel bajo de ruido y efectos bajos de multipath) y si ocupaciones repetidas de las estaciones son exactamente las mismas (buen estacionamiento).

- **Método "Stop & Go" o semicinemático**

Un método a medio camino entre el estático y el cinemático es el semicinemático o Stop & Go, que se utiliza para el levantamiento no demasiado preciso (3 - 4 cm) de un buen número de puntos. En este método, al principio, el receptor móvil requiere de una inicialización previa, observando durante algunos minutos el primer punto en modo estático para resolver ambigüedades. Posteriormente, para posicionar un punto con el receptor móvil se realiza una toma de datos de unas pocas épocas (puede ser una nada más), después se lleva al siguiente punto y se actúa de igual modo. El procedimiento se mantendrá hasta completar el trabajo o hasta sufrir una pérdida de señal que obligue a inicializar otra vez. El intervalo de toma de datos suele establecerse en 1 segundo.

Este método es apropiado para el levantamiento de puntos cercanos entre sí. La precisión del método siempre es función del tipo de instrumentación utilizado, con una precisión nominal que puede estar entre 1 y 5 cm.

La principal característica de este método es que se hace una resolución de ambigüedades inicial de la línea base referencia - móvil en el primer punto y a partir de ahí, el móvil se va moviendo al resto de los puntos del levantamiento. La medición cinemática puede ser entendida como "la transferencia de ambigüedades de una estación a otra".

Antes de empezar hay que resolver la ambigüedad inicial, existiendo tres variantes para resolverla:

- Inicialización Estática, en un punto cualquiera con una pequeña observación estática.
- Inicialización en un punto de coordenadas conocidas, inicializador, de menor periodo de tiempo.
- Cambio de antena (antenna swapping): se sitúan dos receptores en dos estaciones cercanas. Una estación es de coordenadas conocidas, puesto que es la estación de referencia. La segunda se selecciona arbitrariamente. Se observan datos comunes aproximadamente un minuto. Después se intercambian las antenas (lógicamente con sus receptores), manteniendo la fijación de fase de los satélites observados y nuevamente se recolectan datos durante un minuto.

La mayoría de los fabricantes incluyen estos tres posibles métodos de inicialización, aunque se suelen utilizar los dos primeros. Si se pierde el seguimiento de los satélites mínimos (4) es necesario volver a reinicializar la base, por lo que el método semicinemático o "stop and go" es muy eficiente en áreas abiertas, donde no se espere pérdida de señal causada por obstáculos. En caso de pérdida de señal y no poder ser recuperada, se tiene que empezar nuevamente con la medición con un paso nuevo de inicialización, el receptor móvil tiene que volver a la última marca conocida de la medición. Quizás este método haya perdido validez y uso debido a la aparición en los últimos años de equipos RTK (Real Time Kinematic), con mucha más versatilidad en el funcionamiento y con un rendimiento muy superior en topografía y solución en tiempo real.

- **Método cinemático**

Para muchos objetivos es necesario determinar las coordenadas precisas de la trayectoria del receptor GPS móvil a lo largo de la trayectoria, por ejemplo un levantamiento de la traza de una carretera para actualización de cartografía o, en apoyo fotogramétrico, determinación de las coordenadas de los centros de proyección para reducción del número de puntos de apoyo en la aerotriangulación. En este caso se recurre al método cinemático puro, en el que no hay parada para tomar puntos singulares, sino que se programa el receptor para la toma de datos cada segundo (por ejemplo) y el levantamiento es continuo y uniforme en el tiempo. Requiere una inicialización previa también.

En los ejemplos comentados es necesario que en el caso de una ruptura de la conexión con los satélites exista la posibilidad de recuperación de la pérdida de la relación de fase de la señal o ambigüedades, mientras la plataforma de la antena se halle en movimiento. Por ello es necesario un método independiente de la técnica de inicialización estática que incluya la capacidad de recuperar la pérdida de fase y de resolver ambigüedades durante el movimiento. Esta técnica se conoce con el nombre de resolución de ambigüedades en movimiento u "on the fly" (OTF).

La precisión llega a ser de unos 10 cm e incluso mejor en condiciones muy favorables de configuración de satélites, buenos receptores, sin multipath... El intervalo de toma de datos en este método, aunque depende de las aplicaciones, puede llegar a ser de 10 Hz.

- **Cinemático en tiempo real (RTK)**

Los tres métodos anteriormente citados (estático, estático rápido y cinemático) implican la corrección diferencial en tiempo diferido, es decir, los datos son almacenados en la memoria del receptor y posteriormente, en gabinete, son calculadas las posiciones corregidas de los puntos observados. En topografía, normalmente se trabaja con correcciones de fase en tiempo real (RTK). Sin duda ninguna el RTK actualmente es el equipo que proporciona mayor eficacia, versatilidad, precisión y rendimiento para todo tipo de trabajos de topografía.

El fundamento del método consiste en establecer una estación fija de referencia, estática, a la que se introducen las coordenadas de referencia y otra estación móvil (también denominada "rover") recorriendo los puntos del terreno de los que se desee tomar datos. Para trabajar con este método es necesaria una inicialización, que supone el cálculo de las ambigüedades de cada satélite de la línea base que une el móvil y la referencia, para lo cual se necesita dejar en un punto estático unos minutos el receptor móvil. Una vez realizada esta operación y siempre que no haya pérdida irrecuperable de la señal de los satélites, durante toda la operación se conservarán los valores de las ambigüedades y se podrán determinar las coordenadas relativas del rover respecto a la base o referencia con sólo una época de observación (1 segundo).

Este método presenta la ventaja de que se obtienen resultados rápidos con una precisión centimétrica, aunque presenta el inconveniente de la posible pérdida de señal. Si esto se produce en un instante, es necesario volver a determinar las ambigüedades iniciales de ciclo, por lo que el método es idóneo para zonas relativamente despejadas. Con receptores con capacidad para recepción de la constelación GLONASS los problemas de pérdida de señal quedan ligeramente aminorados.

El tiempo real se consigue estableciendo una comunicación en directo entre el equipo fijo y el móvil, de tal forma que las ambigüedades se resuelven en el momento de la toma de datos y es, en ese mismo instante, cuando se calcula la línea-base requerida, o lo que es lo mismo, las coordenadas del punto móvil dadas desde el equipo fijo. La forma normal de transferir la correcciones diferenciales de fase desde el receptor base al rover es mediante radio-modem, aunque actualmente se impone la recepción de correcciones diferenciales desde redes de estaciones permanentes GPS a través de Internet (normalmente vía GPRS).

El trabajo en tiempo real no es un método de posicionamiento por satélite, sino que es una forma de obtener los resultados una vez procesadas las observaciones. El procesamiento de estas observaciones puede ser realizado con un software post-proceso, previa inserción de los datos

de observación necesarios, ya sea en campo o en gabinete. Ahora bien, este cálculo puede ser realizado de forma inmediata a la recepción de las observaciones y ser efectuado por la unidad de control, obteniendo las coordenadas en el instante, es decir, en tiempo real. Para ello, se incorporan los algoritmos de cálculo de los software post-proceso, o parte de ellos, a los controladores para este tipo de aplicaciones. Esto supone una gran ventaja, ya que todo el tiempo que se invierte en insertar, tratar, chequear y procesar los datos se suprime al obtener los resultados al instante y a la vez permite edición de datos de un levantamiento en campo, replanteo, y todo tipo de labores en los cuales sea necesario el conocimiento de las coordenadas de los puntos en tiempo real.

El inconveniente principal en la transmisión desde una base a través de radio-modem es la limitación en alcance de emisión y transmisión de datos debido a las licencias de frecuencias y potencias de señal permitidas. Un equipo que funcione con 0,5 W, que está permitido por las autoridades, está limitado a un radio de acción de unos pocos Km (7 - 8 Km como máximo si no hay obstáculos), lo que limita el rendimiento del trabajo.

Para describir el modelo de correcciones RTK es necesario recordar que la ecuación de observaciones de fase, en ciclos, puede escribirse como:

$$(13) \quad \Phi_i^j(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_i^j(t) + N_i^j + f^j \Delta\delta_i^j(t)$$

donde:

- $\lambda$  es la longitud de onda.
- $\rho_i^j(t)$  es la pseudodistancia para medidas de fase (lo mismo que en el código).
- $N_i^j$  es la ambigüedad de fase, independiente de t y es un número entero.
- $f^j$  es la frecuencia de la señal del satélite.
- $\Delta\delta_i^j(t)$  es el error de reloj combinado satélite-receptor.

Generalizando esa expresión, la medida (esta vez en términos de distancia) en la estación base A en la época  $t_0$  puede ser modelada como:

$$(14) \quad \lambda\Phi_A^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) + \Delta\rho_A^j(t_0) + \Delta\rho^j(t_0) + \Delta\rho_A(t_0) + \lambda N_A^j$$

donde, por analogía con el modelo de código:

$\rho_A^j(t_0)$  es la distancia geométrica satélite – receptor en la estación base A.

$\Delta\rho_A^j(t_0)$  es el conjunto de errores dependientes del conjunto satélite – receptor.

$\Delta\rho^j(t_0)$  son los errores dependientes del satélite.

$\Delta\rho_A(t_0)$  son los errores dependientes del receptor.

Consecuentemente, la corrección a la medida de fase en la época de referencia  $t_0$  será:

$$(15) \text{PRC}^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) - \lambda\Phi_A^j(t_0) = -\Delta\rho_A^j(t_0) - \Delta\rho^j(t_0) - \Delta\rho_A(t_0) - \lambda N_A^j$$

La formulación de las correcciones a las medidas de fase en la estación A así como la aplicación de las correcciones predichas a la fase observada en la estación “rover” B se pueden expresar mediante:

$$(16) \lambda\Phi_B^j(t)_{CORR} = \rho_B^j(t) + \Delta\rho_{AB}(t) + \lambda N_{AB}^j$$

donde  $\Delta\rho_{AB}(t) = \Delta\rho_B(t) - \Delta\rho_A(t)$  y el término  $N_{AB}^j$  son las simples diferencias de ambigüedades de fase.

Si se elimina el multipath, el término  $\Delta\rho_{AB}(t)$  simboliza el error de reloj combinado satélite – receptor, que, escalado a distancia sería  $\Delta\rho_{AB}(t) = c\delta_{AB}(t) = c\delta_B(t) - c\delta_A(t)$ .

El posicionamiento en el punto B (rover) es mejorado con la pseudodistancia de fase corregida  $\lambda\Phi_B^j(t)_{CORR}$ .

#### • Mensajes RTCM

Aunque la mayor parte de fabricantes desarrollaron su propio formato para la transmisión de correcciones diferenciales, el formato está estandarizado desde 1985, de acuerdo a la propuesta de la *Radio Technical Commission for Maritime Services*, Comité 104. El estándar es conocido como formato RTCM.

En este formato se transmiten los denominados mensajes RTCM desde la base al rover para que este realice el cálculo en tiempo real. Hay 64 tipos de mensajes disponibles, aunque la mayoría aún no han sido definidos. Se definirán, por ejemplo, para satélites geostacionarios, GALILEO, etc.

Actualmente (2007) la versión más moderna del formato RTCM es la 3.0. El formato de los mensajes consiste en secuencias de palabras de 30 bits. Los últimos 6 bits en cada palabra son los bits de paridad. Cada mensaje comienza con dos palabras cabecera. La primera palabra es fija y contiene lo que se denomina preámbulo (preamble), el tipo de mensaje, y el identificador de la estación de referencia. La segunda palabra contiene la marca de tiempo en forma de cuenta Z, el número de secuencia, la longitud de mensaje y la salud de la estación de referencia. En algunos mensajes hay una tercera palabra.

Los mensajes 1-17 estaban disponibles en la versión 2.0, mientras que los mensajes 18-21 contienen cabeceras de 3 palabras, fueron añadidos en la versión 2.1 y tienen como propósito el posicionamiento RTK. Los mensajes relacionados con GLONASS se incluyeron en la versión 2.2. Los mensajes 18 y 19 contienen la observación de fase y código respectivamente en la estación de referencia. Los mensajes 20 y 21 contienen las correcciones a la fase y el código y sirven por tanto, los cuatro, para el posicionamiento diferencial tanto DGPS como RTK.

#### **53.4. Redes de correcciones diferenciales en tiempo real**

Actualmente numerosas instituciones públicas y privadas están instalando servicios de posicionamiento diferencial de GPS con la emisión de correcciones diferenciales de estaciones permanentes GPS a través de diferentes medios. Dentro de estos servicios, según el tipo de correcciones enviadas, el nivel de precisión y el ámbito de cobertura, se pueden distinguir dos variantes: redes WADGPS de satélites y correcciones de redes terrestres.

##### **53.4.1. WADGPS**

Bajo la denominación de redes WADGPS (*Wide Area Differential GPS*) se agrupan los sistemas que proveen correcciones diferenciales a los usuarios a partir de satélites geoestacionarios. Las correcciones troposféricas e ionosféricas son las que normalmente se transmiten en forma de parámetros de corrección de coordenadas.

Para el ámbito de la Unión Europea se dispone del sistema EGNOS (*European Geostationary Navigation Overlay Service*), que transmite correcciones diferenciales de código así como otros servicios de aumentación e integridad a través de satélites geoestacionarios. El sistema ha sido desarrollado por las principales agencias aeronáuticas de Europa bajo la dirección de la ESA (Agencia Espacial Europea).

El sistema EGNOS proporciona las siguientes funciones, que constituyen las aumentaciones requeridas para complementar las prestaciones de la constelación GPS/GLONASS:

- Telemetría / GEO Ranging (R-GEO): Transmisión de señales GPS desde tres satélites geoestacionarios (INMARSAT III AOR-E, INMARSAT III IOR y el ARTEMIS). Al aumentar el número de satélites de navegación, aumenta la disponibilidad, continuidad y precisión del servicio.
- Integridad / GNSS Integrity Channel (GIC): Distribución de información de integridad. Esto aumenta la integridad del servicio de seguridad GPS/GLONASS/EGNOS de navegación hasta el nivel requerido para la aviación civil (no precisión).
- Precisión / Wide Area Differential (WAD): Distribución de correcciones diferenciales. Esto incrementa la exactitud del servicio GPS/GLONASS/EGNOS de navegación.

Similar a EGNOS, en América del Norte se dispone de WAAS (Wide Area Augmentation System), de la Administración Federal de Aviación (FAA). WAAS es un sistema de aumentación del tipo SBAS (Satellite-Based Augmentation System) basado en las correcciones generadas en 25 estaciones terrestres y su diseminación vía satélite.

#### **53.4.2. Correcciones de redes terrestres**

Dentro de esta categoría se pueden distinguir entre las que proporcionan correcciones de código para navegación o las que proporcionan correcciones de fase.

- **Redes de correcciones diferenciales de código**

En España, instituciones como Puertos del Estado o el Instituto Geográfico Nacional tienen un sistema de correcciones diferenciales de código. El del IGN es el proyecto RECORD (Red Española de CORrecciones Diferenciales) y difunde las correcciones diferenciales GPS a través de la subportadora no audible RDS (*Radio Data System*, Sistema de Datos en Radio) de las emisoras de Radio Nacional de España (RNE).

La corrección diferencial GPS de código, obtenida a partir del observable de pseudodistancia suavizada con fase, se dispone en formato RTCM SC104. A continuación, es analizada y comprimida en formato RASANT 2.6 (*Radio Aided Satellite Navigation Technique*, Técnica de Navegación Asistida por Satélite). En este formato se envía a RNE, quien lo incorpora a la señal FM que se emite. Un receptor FM/RDS/RASANT descomprime y proporciona las correcciones originales RTCM SC04 integrables en la gran mayoría de receptores GPS.

Las correcciones diferenciales en formato RTCM se generan y comprimen en el IGN, donde son enviadas a RNE. En RNE se integran en el servidor RDS encargado de transmitir y mezclar las distintas tramas. Desde RNE se inyectan en el satélite Hispasat y se difunden a los centros emisores. Las distintas emisoras FM difunden las correcciones diferenciales que reciben de Hispasat.

Los potenciales usuarios para la explotación del sistema necesitan un receptor FM/RDS/RASANT. Este receptor sintoniza la emisora más adecuada, eligiéndola entre toda la banda o de una tabla programable residente en el receptor y, realiza la decodificación de RASANT a formato RTCM utilizable por la mayoría de los receptores o sensores GPS. Estos receptores de FM pueden incluir en su interior un sensor GPS en cuyo caso la salida de datos proporciona directamente posiciones corregidas susceptibles de ser incorporadas en una aplicación específica.

En el caso de Puertos del Estado, se dispone de una red de estaciones permanentes GPS costeras que emiten las correcciones diferenciales individualizadas a través de una determinada frecuencia de radio para cada estación.

- **Redes de correcciones diferenciales de fase.**

Actualmente se están desarrollando redes de estaciones permanentes GPS que permiten utilizar sus estaciones como estaciones base RTK para el usuario público, realizándose las correcciones diferenciales a través de Internet, mediante GPRS. Tal es el caso de la red de estaciones permanentes del Instituto Geográfico Nacional u otras que están desarrollando las Comunidades Autónomas.

La recepción de correcciones diferenciales se realiza a través de cualquier equipo que tenga acceso a Internet: ordenador, PDA con GPRS, etc. y el ancho de banda requerido para aplicaciones de código se cifra en unos 50 bytes/segundo mientras que en fase (RTK) unos 500 bytes/segundo. Teniendo en cuenta que las aplicaciones usuales de teleconferencia o Internet-Radio necesitan unos 5-20 Kbit/segundo, el ancho de banda necesario para aplicaciones GPS es relativamente pequeño.

La mayor parte de la actividad en este campo es llevada a cabo a través de la disseminación de datos GPS (DGPS) en forma de correcciones diferenciales para posicionamiento preciso y navegación mediante el protocolo RTCM con mensajes 1-3 para DGPS y 18/19 o 20/21 para

RTK. El sistema ha sido diseñado para que el dato enviado no sea modificado de forma alguna. En consecuencia es posible difundir cualquier “stream” de datos sin limitación alguna; en la actualidad se están transmitiendo tanto correcciones GPS como EGNOS, datos brutos, efemérides ultra-rápidas o incluso datos sísmicos.

Dentro de estos servicios se encuentran los proporcionados por el Instituto Geográfico Nacional a través del proyecto EUREF-IP, en el que 20 estaciones de la Red de Estaciones Permanentes GPS están proporcionando correcciones diferenciales de fase a través de la conexión mediante Internet a un caster o servidor en el que se puede seleccionar la estación más cercana a la zona de trabajo, de tal forma que se puede trabajar con un sólo receptor RTK, prescindiendo de la base. Esto tiene una limitación en distancia, de tal forma que se puede trabajar con el receptor móvil, como máximo, a unos 25 - 30 kilómetros de la base o estación permanente. El usuario selecciona de una lista la estación permanente más cercana a su entorno de trabajo y recibe sus correcciones diferenciales a través de los mensajes 1, 2, 18 y 19.

Otra variante consiste, en lugar de seleccionar la estación más cercana al lugar de trabajo y recibir las correcciones individuales de esa estación, en recibir correcciones de una red generadas específicamente para las coordenadas en donde se encuentra el receptor móvil (solución de red creando una estación de referencia virtual, VRS). Esta solución es más completa, ya que una red de estaciones permanentes cubre una zona o región para trabajar con RTK mediante estaciones separadas entre 50 y 70 km de distancia. Esta distancia depende de las propias características de la zona, (en zonas con alta actividad ionosférica necesitaría una mayor densidad de estaciones la red). El software generador de las correcciones diferenciales hace una evaluación en el punto específico donde se sitúa la VRS de errores ionosféricos, troposféricos, orbitales, etc. En este caso, las fases de trabajo serían:

- El servidor central recibe los datos de las estaciones permanentes para crear un modelizado, eliminando errores sistemáticos (ionosféricos, troposféricos...) y un análisis multipath en tiempo real de cada una de las estaciones.
- El receptor usuario envía su posición aproximada al centro de control mediante un mensaje GGA (disponible en la mayoría de los receptores del mercado). Se realiza utilizando una comunicación bidireccional como GPRS o UMTS/3G.

- El centro de control acepta la posición y responde enviando correcciones RTCM al receptor usuario.
- El usuario calcula una posición DGPS (precisión de 1 m) que servirá para actualizar su posición y enviarla de nuevo al centro de control, lo que asegura que las distorsiones sean prácticamente iguales.
- En el centro de control se crean los datos de una estación de referencia “virtual” y se emiten al usuario las correcciones de esa VRS, es decir, para su posición, mediante los mensajes RTCM 18/19 o 20/21.

La precisión horizontal es de 2 a 4 cm cuando las distancias entre las estaciones de referencia son óptimas. Un pequeño problema en redes VRS puede ser el número de usuarios simultáneamente conectados al sistema, no sólo por la capacidad de cálculo del sistema para cada posición, sino por el ancho de banda de emisión.

Otra variante de este método, aunque menos completa en su solución, sería la generación de correcciones diferenciales específicas para cada satélite válidas para una determinada área. El sistema, tras evaluar las correcciones generadas en cada estación permanente, genera una "malla" de correcciones interpolada para todo el área, enviándola al usuario. En este caso no existe comunicación bidireccional entre usuario y centro de emisión de correcciones diferenciales.

## **Bibliografía**

- [1] HOFMANN-WELLENHOF, B.; LIUCHTENEGGER, H.; COLLINS, J. (1994): GPS Theory and Practice. Springer-Verlag, Wien, Austria.
- [2] LEICKA (1995): GPS Satellite Surveying. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- [3] Página web del IGN: <http://www.fomento.ign.es>

**Tema 54. Geometría diferencial de superficies: representación analítica y cambio de curvas paramétricas. Primera forma fundamental, ángulo entre dos direcciones tangentes en un punto. Normal y plano tangente. Loxodrómicas. Segunda fórmula fundamental. Teorema de Meusnier. Teorema de Euler. Indicatriz de Dupin. Curvatura de Gauss y curvatura media.**

**54.1. Geometría diferencial de superficies. Introducción**

La representación de la superficie de la Tierra según la geodesia aproximándola a un elipsoide de revolución y la de determinadas líneas requiere el uso de la geometría en 3D, y resulta más fácil con la ayuda que proporciona la geometría diferencial en el dominio de las matemáticas. Además, la geometría diferencial de las superficies curvas presenta gran analogía con los planteamientos de la cartografía matemática o, si se prefiere, las proyecciones cartográficas. En un sistema cartesiano 3D la posición en el espacio de un punto y su desplazamiento siguiendo una línea se determinan mediante el vector posición que se representará en negrita.

Es bien conocido que un *espacio curvo* se define como la localización del extremo de un *vector posición* que se puede representar con una ecuación vectorial dependiente del parámetro  $u$ :

(1)  $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(\mathbf{u})\mathbf{i} + \mathbf{y}(\mathbf{u})\mathbf{j} + \mathbf{z}(\mathbf{u})\mathbf{k}$ , donde  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  son los *vectores unitarios* de las direcciones de los ejes cartesianos  $OX, OY, OZ$ .

Así, una circunferencia viene definida por el punto genérico P

$$(2) \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{u}) = a \cos(\mathbf{u}) & \mathbf{i} \\ \mathbf{y}(\mathbf{u}) = a \sin(\mathbf{u}) & \mathbf{j} \\ \mathbf{z}(\mathbf{u}) = b & \mathbf{k} \end{vmatrix}^T$$

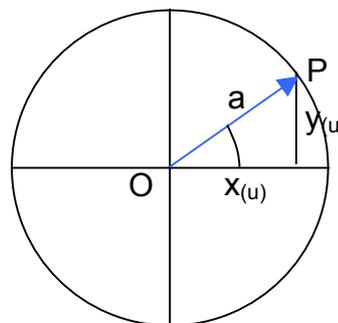


Figura 1. Ecuación circunferencia

Si la constante  $b$  es igual a cero la circunferencia está en el plano base  $XY$ . El parámetro  $u$  (ángulo) finalmente podría ser función del tiempo y describir un movimiento circular.

A partir de este ejemplo se consigue otra línea haciendo  $z(u)=bu$ . En este caso, el punto se despegó del plano  $XY$  generando una hélice, cuya ecuación es

$$(3) \quad \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{u}) = a \cos(\mathbf{u}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{u}) = a \sin(\mathbf{u}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{u}) = b \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

El paso de la hélice será  $2\pi b$

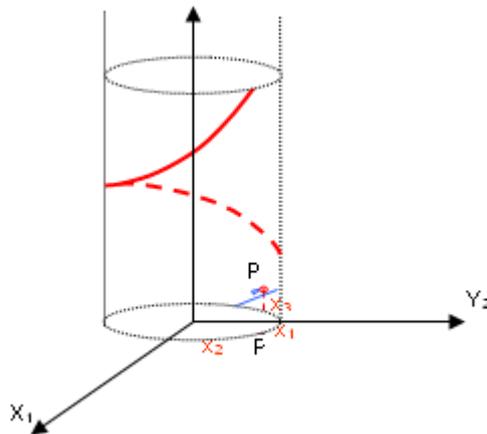


Figura 2. Curva 3D. Hélice

Respecto a una curva en el espacio definiremos a continuación, en el entorno de un punto  $P$  de la misma, los conceptos de longitud de arco y los de vector tangente, plano osculador, curvatura y vector curvatura, así como el vector binormal y el concepto de torsión.

Si se utiliza el desarrollo de arco de curva  $s$  como parámetro  $u$ , un elemento de curva  $d\mathbf{s}$  (es posible porque  $d\mathbf{s}/du \neq \mathbf{0}$ ; y ambos son escalares independientes) vendrá determinado por

$$(4) \quad ds^2 = |d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}| = |d\mathbf{x}|^2 + |d\mathbf{y}|^2 + |d\mathbf{z}|^2.$$

Por otro lado, dado que el producto escalar  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 1$ , se tiene por tanto que *el vector*

$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 1$  es un vector unitario; y como límite de la cuerda  $PQ$ , cuando el punto  $Q$  tiende a

confundirse con P, recibe el nombre de *vector tangente*  $\mathbf{t}$ . Este hecho es el que se expresa a menudo diciendo que la *tangente pasa por dos puntos consecutivos de la curva*, forma de hablar incorrecta aunque muy gráfica, pero puede hacerse rigurosa al llevarla al límite. La expresión 3D de este vector, según sus componentes, es  $\mathbf{t} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$  que está de acuerdo con la identidad  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ , esto es,

$$(5) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

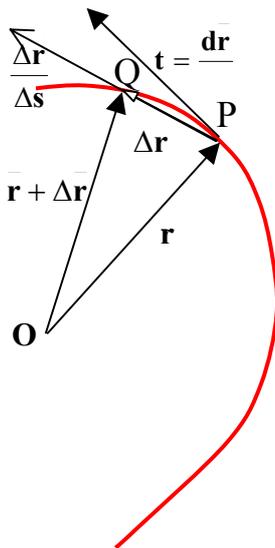


Figura 3.

Puesto que se cumple  $\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{du}$  se ve claramente que  $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{du}$  es también un vector tangente,

aunque no necesariamente un vector unitario.

Si antes se han considerado sobre la curva dos puntos: P y otro Q próximo a él, ahora se añade un tercero R -también próximo a P - de forma que por los tres pasará un plano, cuyo punto genérico vendrá representado por  $\mathbf{P}(X\mathbf{i}, Y\mathbf{j}, Z\mathbf{k})$  del cual se pretende hallar su ecuación cuando, tanto Q como R, tienden a confundirse con P. Plano al que se da el nombre de *plano osculador*.

Con este fin se puede definir dicho plano por el producto escalar  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = d$  donde  $\mathbf{b}$  es un vector unitario perpendicular al plano (definido por sus cosenos directores:  $\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{c}_\beta, \mathbf{c}_\gamma$ ) y  $d$  es un valor constante (distancia del origen de coordenadas al plano). Dichos tres puntos  $\{P, Q, R\}$  deberán satisfacer la condición de pertenecer al plano y por tanto cumplir la función  $f(u) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} - d = 0$   $\{f(u_0) = 0, f(u_1) = 0, f(u_2) = 0\}$ . Por otro lado, siendo la curva continua y derivable, los valores del parámetro  $v_1$  y  $v_2$ , tales que se encuentren en los intervalos  $u_0 \leq$

$v_1 \leq u_1$  y  $u_1 \leq v_2 \leq u_2$ , han de verificar que  $f'(v_1)=0$  y  $f'(v_2)=0$ ; también para un valor  $v_3$  que se halle en el intervalo  $v_1 \leq v_3 \leq v_2$  se verificará  $f'(v_3)=0$ . Como se ha dicho que Q y R tienden a P los valores  $u_1, u_2, v_1, v_2$  y  $v_3$  tienden a  $u_0$ , y en consecuencia se puede establecer la relación lineal siguiente:

$$f(u) = P \bullet b - d = 0 = f(u_0) = r \bullet b - d;$$

$$(6) \quad f'(u) = \dot{P} \bullet b = 0 \quad \text{que también se puede expresar así}$$

$$f''(u) = \ddot{P} \bullet b = 0$$

$$(X - x_0)c_\alpha + (Y - y_0)c_\beta + (Z - z_0)c_\gamma = 0$$

$$(7) \quad \dot{x}c_\alpha + \dot{y}c_\beta + \dot{z}c_\gamma = 0$$

$$\ddot{x}c_\alpha + \ddot{y}c_\beta + \ddot{z}c_\gamma = 0$$

Una forma reducida de expresarlo es que depende de dos parámetros ( $\lambda$  y  $\mu$ ), tal que

$\dot{P} = r + \lambda \dot{r} + \mu \ddot{r}$ . lo que implica la condición de que se anule el determinante siguiente, cual proporciona la ecuación del *plano osculador*, particularizada para el punto P de la curva

$$(8) \quad \begin{vmatrix} (X - x_0) & (Y - y_0) & (Z - z_0) \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

El *plano osculador* no está determinado cuando la segunda derivada (3ª fila) se anula o cuando es proporcional a la primera derivada (2ª fila). También se desprende de esta expresión que la tangente en P se halla contenida en el plano osculador.

Además de la expresión comentada sobre que el plano osculador *pasa por tres puntos consecutivos de la curva*, también se dice que *el plano osculador contiene dos tangentes consecutivas*, ya que PQ pasa a ser la tangente en P y QR la tangente en Q.

La recta del plano osculador en P que es perpendicular a la tangente se denomina *normal principal*. Sobre esta línea se considera un vector unitario  $n$ , cuyo sentido puede elegirse arbitrariamente con tal de que sea continuo a lo largo de la curva. Si adoptamos la longitud de arco como parámetro se tiene, como se indicó arriba:

$$(9) \quad r = r(s) \quad t = \frac{dr}{ds} = r' \quad t \bullet t = 1$$

Donde el acento representa la derivación respecto a  $s$ , y derivando la última identidad anterior resulta  $\mathbf{t} \bullet \mathbf{t}' = 0$ , lo cual prueba que el vector  $\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$  es perpendicular a  $\mathbf{t}$ . Por otra parte, como

$\mathbf{t} = \mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}} \mathbf{u}'$  y  $\mathbf{t}' = \ddot{\mathbf{r}} (\mathbf{u}')^2 + \dot{\mathbf{r}} \mathbf{u}''$  se ve que  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}'$  están en el plano de  $\dot{\mathbf{r}}$  y  $\ddot{\mathbf{r}}$  y, por tanto, en el plano osculador. En consecuencia, es posible introducir un factor de proporcionalidad  $\kappa$  que junto con el vector unitario  $\mathbf{n}$ , citado anteriormente, permite formular la expresión

$$(10) \quad \mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \kappa \mathbf{n}$$

Este vector  $\mathbf{k}$  expresa la variación proporcional de la tangente cuando se desplaza sobre la curva y se llama *vector curvatura* y, al factor  $\kappa$  se le denomina simplemente *curvatura*, siendo el módulo  $|\mathbf{k}|$ , es decir, la longitud del vector cuya dirección viene determinada por  $\mathbf{n}$ .

Si se comparan, siguiendo la figura, los vectores tangentes  $\mathbf{t}(u)$  en P y  $\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}(u+h)$  en Q a donde se ha desplazado  $\mathbf{t}$  –el punto Q se considera tan próximo a P como se quiera– se da que  $\mathbf{t}$ ,  $\Delta\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}$  forman un triángulo isósceles cuyos lados iguales son de valor 1 y forman un ángulo  $\Delta\phi$  denominado *ángulo de contingencia*.

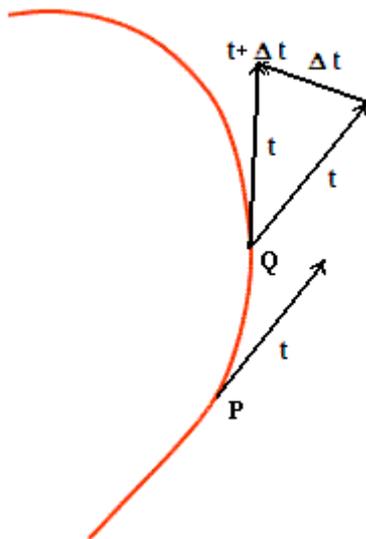


Figura 4.

Despreciando términos de orden superior se admite la expresión:

$|\Delta \mathbf{t}| = 2 \sin(\Delta \phi / 2) = \Delta \phi$  y, si  $\Delta \phi \rightarrow 0$  se llega a la relación que define la curvatura para curvas planas  $\kappa = |d\mathbf{t}/ds| = |k| = |d\phi/ds|$ .

De la ecuación (10) resulta  $\kappa^2 = \mathbf{r}'' \bullet \mathbf{r}''$ . Se define  $\mathbf{R}$  como igual a  $\kappa^{-1}$ . El valor absoluto de  $\mathbf{R}$  es el radio de curvatura, que es el radio de una circunferencia que pasa por tres puntos consecutivos de la curva, y se conoce como círculo osculador por encontrarse en el plano osculador. El centro se encuentra en la normal principal y a una distancia  $|\mathbf{R}|$  de P.

Hasta aquí se ha contemplado, para una curva continua 3D (alabeada), su curvatura, que mide la variación proporcional de la tangente al desplazarse a lo largo de ella, pero es necesario introducir ahora una magnitud que tenga el mismo significado respecto al plano osculador. Con este objeto se añade a los vectores unitarios  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  un tercer vector unitario en P que es ortogonal a los anteriores, es decir al plano osculador, denominado vector unitario binormal  $\mathbf{b}$ . Su sentido es de forma tal que el de la terna  $\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{b}$  sea el mismo del triedro cartesiano  $OX \Rightarrow OY \Rightarrow OZ$  de referencia cuyos vectores unitarios son  $\mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{k}$ . Por tanto,  $\mathbf{b}$  queda definido por el producto vectorial  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ .

En consecuencia, la terna  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  puede tomarse como nuevo sistema de referencia, que se desplaza a lo largo de la curva y constituye el *triedro móvil*.

Como se ha hecho en los casos anteriores, se puede expresar la variación del plano osculador por el vector  $\mathbf{b}' = d\mathbf{b}/ds$  que tiene la dirección de la normal principal, ya que, de acuerdo con la derivada de la ecuación  $\mathbf{b} \bullet \mathbf{t} = 0$ ..se tiene  $\mathbf{b}' \bullet \mathbf{t} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{t}' = 0$  de donde  $\mathbf{b}' \bullet \mathbf{t} = -\mathbf{b} \bullet \kappa \mathbf{n} = 0$  y, por ser  $\mathbf{b} \bullet \mathbf{b} = 1$  resulta ser  $\mathbf{b}' \bullet \mathbf{b} = 0$ , de modo que, si se introduce un factor de proporcionalidad  $\tau$  al que se denomina *torsión* de la curva, se llega a la expresión

$$(11) \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}.$$

Y el valor de  $\tau$ , al igual que la curvatura ( $\kappa$ ), puede ser positivo o negativo; pero, mientras la ecuación de la curva sólo determina  $\kappa^2$  define unívocamente  $\tau$ .

En resumen, y obviando la demostración, curvatura y torsión vienen determinadas por las

expresiones siguiente, donde  $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{du}$ ,

$$\begin{aligned}
 \kappa^2 &= \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^3} \\
 \tau &= \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Se ve que  $\kappa$  y  $\tau$  tienen como dimensión  $L^{-1}$  (inverso de longitud). Así como  $|\kappa^{-1}|=|R|$  se ha llamado *radio de curvatura*,  $|\tau^{-1}|=|T|$  recibe el nombre de *radio de torsión*, aunque su interpretación geométrica no es tan directa y sencilla como la anterior.

*Curvatura* y *torsión* se llaman también *primera* y *segunda* curvaturas; y, en consecuencia, las curvas alabeadas se denominan frecuentemente *curvas de doble curvatura*.

Se han encontrado las derivadas de  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{b}$ , como expresiones del vector unitario  $\mathbf{n}$  debido a su ortogonalidad, según las ecuaciones:  $\mathbf{t}'=\kappa\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}'=-\tau\mathbf{n}$ ; falta pues completar esta información con la de la derivada de  $\mathbf{n}$  respecto al arco de curva, como en los casos anteriores, en función de los vectores unitarios del triedro móvil. Sea  $\mathbf{n}'=d\mathbf{n}/ds$  que es perpendicular a  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'=0$ ), lo que permite formular  $\mathbf{n}'$  como función lineal de  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{n}' = \alpha_1 \mathbf{t} + \alpha_2 \mathbf{b}
 \tag{13}$$

a partir de ésta, premultiplicandola por  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{b}$  sucesivamente, teniendo presente la ortogonalidad entre vectores y sustituyendo los valores anteriores, se llega a :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}' = -\mathbf{n} \cdot \kappa\mathbf{n} = -\kappa \\
 \alpha_2 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}' = +\mathbf{n} \cdot \tau\mathbf{n} = \tau
 \end{aligned}
 \text{ quedando la ecuación (13) así}$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}
 \tag{14}$$

Reunida ésta con las dos expresiones anteriores se tienen las tres ecuaciones vectoriales, que conjuntamente con  $d\mathbf{r}/ds=\mathbf{t}$  describen el movimiento del *triedro móvil* a lo largo de la curva, las cuales se conocen como *fórmulas de Frenet*

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa \mathbf{n} \\
 \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\
 \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau\mathbf{n}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Los planos limitados por las tres aristas del triedro móvil, definidos con cada uno de los vectores unitarios ortogonal a los otros dos, contenidos en él, reciben los nombres de:

- *Plano osculador*, determinado por la tangente y la normal principal, de ecuación:

$$(16) (\mathbf{X} - \mathbf{r}) \bullet \mathbf{b} = 0$$

- *Plano normal*, determinado por la normal principal y la binormal, de ecuación:

$$(17) (\mathbf{X} - \mathbf{r}) \bullet \mathbf{t} = 0$$

- *Plano rectificante*, determinado por la binormal y la tangente, de ecuación

$$(18) (\mathbf{X} - \mathbf{r}) \bullet \mathbf{n} = 0$$

## 54.2. Representación analítica de superficies

En la mayor parte de los casos se puede dar una superficie por medio de sus coordenadas cartesianas rectangulares  $(X, Y, Z)$  como componentes del vector posición  $\mathbf{y}$ , al igual que se hiciera anteriormente para una curva en el espacio, se suponen funciones reales de las variables reales  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , a menos que se introduzcan explícitamente cantidades imaginarias. Del mismo modo han de imponerse algunas condiciones a estas funciones. Esto es, que la correspondencia  $(u, v)$  y  $(X, Y, Z)$  sea unívoca, que las funciones sean diferenciables hasta el orden  $n-1$  y existan las derivadas de orden  $n$  (en nuestro caso, al menos, hasta el orden 3) y que los parámetros  $u$  y  $v$  sean independientes. Todo ello, al menos, en un cierto recinto ‘rectangular’ cerrado:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= X(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{i} + Y(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{j} + Z(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{k} \\ (19) \quad \mathbf{u}_1 &\leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 &\leq \mathbf{v} \leq \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

La independencia entre los parámetros  $u$  y  $v$ , equivale a decir que la característica de la matriz  $\mathbf{M}$ , formada con las derivadas parciales de las funciones respecto a los parámetros, sea 2; aquellos puntos en que la característica sea 1 o 0 son singulares, y cuando en todos los puntos del recinto la característica es 1, las ecuaciones (19) representan una curva.

$$(20) \quad \mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{bmatrix} \text{ o bien } \mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{bmatrix}$$

Si se anulan dos de los menores implica que se anule el tercero (excepto si una misma columna tiene dos ceros); por el contrario el que se anule uno sólo de los menores no significa que el punto sea singular. La aparición de puntos singulares puede ser debida a la naturaleza de la superficie, pero también al sistema de coordenadas elegido. Ejemplo: se representa la *esfera* utilizando como parámetros: la latitud  $\varphi$  y la longitud  $\lambda$ ,  $\mathbf{r}(\varphi, \lambda)$

$$\begin{aligned}
 X &= R \cos \varphi \cos \lambda \\
 (21) \quad Y &= R \cos \varphi \sin \lambda \\
 Z &= R \sin \varphi
 \end{aligned}
 \quad
 \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda & -R \sin \varphi \sin \lambda & R \cos \varphi \\ -R \cos \varphi \sin \lambda & +R \cos \varphi \cos \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Aunque como superficie es obvio que no presenta puntos singulares, debido al sistema de coordenadas presenta puntos singulares en los polos ( $\varphi = \pm\pi/2$ )  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mp R \cos \lambda & \mp R \sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si se escribe la ecuación de la superficie en forma vectorial

$$(22) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$$

la condición que expresa que la característica de la matriz  $\mathbf{M}$  es 2 puede escribirse en la forma  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ , y aplicándolo al ejemplo anterior resulta:

$$(23) \quad \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin \varphi \cos \lambda & -R \sin \varphi \sin \lambda & R \cos \varphi \\ -R \cos \varphi \sin \lambda & +R \cos \varphi \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ que no se cumple para } \varphi = \pm\pi/2$$

Esta ecuación, o condición, permite una interpretación geométrica sencilla: si se mantiene constante el parámetro  $v=v_i=cte$ . en la ecuación (22)  $\mathbf{r}(u, v_i)$  depende sólo del parámetro  $u$  y, en consecuencia determina una curva sobre la superficie, que se denomina *curva paramétrica*  $v=constante$ .

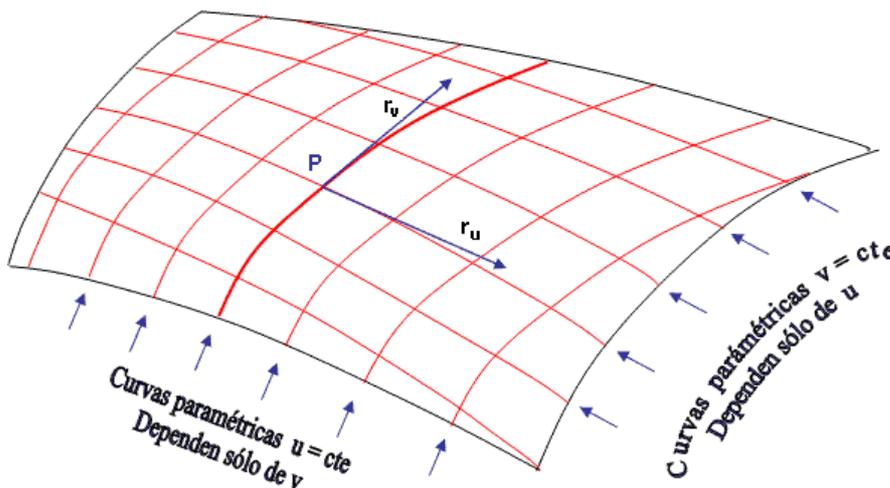


Figura 5.

Análogamente,  $u=constante$  representa otra curva paramétrica sobre la superficie que pasa también por el punto  $P(u_i, v_i)$ . De este modo, al variar los valores de las constantes, la superficie se recubre de una *red* de curvas paramétricas, tal que por cada punto  $P$  pasan dos de estas curvas.

En el punto P el vector  $\mathbf{r}_u$  es tangente a la curva  $v=\text{constante}$ , como se expresó en el apartado anterior, y  $\mathbf{r}_v$  lo es a la curva  $u=\text{constante}$ . La condición (23) significa que los vectores  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$  no se anulan en P y tienen direcciones distintas, no paralelas.

Se dice también que los parámetros  $(u, v)$  son las *coordenadas curvilíneas* de un punto de la superficie. Algunos ejemplos son:

- coordenadas curvilíneas que se eligen en la esfera o en el elipsoide de revolución: latitud y longitud, que se emplean en geografía y en geodesia.
- Las coordenadas polares son coordenadas curvilíneas del plano
- Incluso las cartesianas pueden considerarse un caso particular de coordenadas curvilíneas

### 54.3. Cambio de curvas paramétricas o curvas coordenadas

Supóngase que se va a cambiar de los parámetros  $(u, v)$  a la pareja  $(\alpha, \beta)$  que viene dado por las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}(\alpha, \beta) \\ (24) \quad \mathbf{v} &= \mathbf{v}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

que, sustituidas en la ecuación de superficie, hacen que ésta resulte representada en el nuevo sistema de coordenadas curvilíneas, cuyas curvas paramétricas responderán a  $\alpha=\text{constante}$   $\beta=\text{constante}$ , bajo la siguiente forma vectorial,:

$$(25) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$$

Los vectores tangentes a las nuevas curvas paramétricas  $\mathbf{r}_\alpha$  y  $\mathbf{r}_\beta$  se expresan en función de las anteriores  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$  en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\alpha &= \mathbf{r}_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} + \mathbf{r}_v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \\ (26) \quad \mathbf{r}_\beta &= \mathbf{r}_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} + \mathbf{r}_v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} \end{aligned}$$

A través del producto vectorial de ambas expresiones (26) se verifica que debe seguir cumpliéndose la condición (23) de independencia de los parámetros. Esto es

$$\begin{aligned}
\vec{x}_\alpha \times \vec{x}_\beta &= \left( \vec{x}_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} + \vec{x}_v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \right) \times \left( \vec{x}_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} + \vec{x}_v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} \right) = \\
&= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \underbrace{(\vec{x}_u \times \vec{x}_u)}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} \underbrace{(\vec{x}_v \times \vec{x}_v)}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) = \\
&= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)
\end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial(\alpha, \beta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta}$  es el jacobiano de la transformación

La expresión anterior queda así

$${}^{(27)} \vec{x}_\alpha \times \vec{x}_\beta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} \end{vmatrix} \left( \vec{x}_u \times \vec{x}_v \right) \neq 0$$

Es decir, el jacobiano de la transformación debe ser distinto de cero y el par de direcciones tangentes a las curvas coordenadas en cada uno de los sistemas deben ser distintas entre sí. Dicho de otra manera, sólo se considerarán aquellas transformaciones para las cuales se pasa de un sistema de parámetros independientes a otro de parámetros independientes también, al menos, en la región en estudio.

#### 54.4. Primera forma fundamental

Si se consideran la superficie curva de ecuación  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{i} + y(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{j} + z(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{k}$ , un punto de ella  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$  y las *curvas paramétricas* que lo definen, además de las tangentes a éstas  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$ , se puede suponer que tanto  $\mathbf{u}$  como  $\mathbf{v}$  sean funciones de un tercer parámetro  $\mathbf{t}$  adoptando la ecuación anterior la forma

$${}^{(28)} \mathbf{r}[\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad \mathbf{v}(\mathbf{t})] = x(\mathbf{t})\mathbf{i} + y(\mathbf{t})\mathbf{j} + z(\mathbf{t})\mathbf{k},$$

ecuación vectorial que representará otra curva sobre la superficie, distinta de las paramétricas  $u=\text{cte}$  y  $v=\text{cte}$ , y cuya tangente vendrá dada por

$${}^{(29)} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{o escrito así} \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_v \dot{\mathbf{v}} \quad \text{o} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u d\mathbf{u} + \mathbf{r}_v d\mathbf{v}$$

Como se ve el vector  $d\mathbf{r}/dt$  es tangente a la curva y por tanto a la superficie, y la última de las expresiones (29) nos dice que puede escribirse en una forma que es independiente del parámetro  $t$  elegido. La curva, pues, está dada por una relación de los parámetros  $f(u, v)=0$ , y diferenciándola resulta  $f_u du + f_v dv$ ; por ello la relación  $dv/du = -f_u/f_v$  es suficiente para determinar la dirección de la curva tangente a la superficie en P, que es el elemento diferenciador en el entorno de P.

La distancia de P a Q, próximo al primero a lo largo de dicha dirección, cuando se aproxima a él indefinidamente resulta de la expresión  $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ . Sustituyendo en ésta la última expresión de (29) resulta:

$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \cdot (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) = (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u) du^2 + 2(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v) dudv + (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) dv^2$  y denominando con  $E$ ,  $F$  y  $G$  las relaciones siguientes que son funciones de  $u$  y  $v$ , la expresión anterior se escribe así

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$$

$$(30) \quad ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

Esta expresión de  $ds^2$  se denomina *primera forma fundamental de la superficie*. Es una forma cuadrática diferencial; su raíz cuadrada  $ds$  puede considerarse la longitud o módulo del vector diferencial  $d\mathbf{r}$  ( $|d\mathbf{r}|$ ) sobre la superficie, y se denomina *elemento de arco*. En forma matricial se escribe:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}, \text{ donde el determinante se conoce como tensor métrico}$$

Por ser una longitud es siempre positiva –siempre que el estudio se limite a superficies reales- con la única excepción de que se anulen simultáneamente  $du$  y  $dv$ ; por eso a una forma de esta clase se llama *definida positiva*. Se puede escribir, también, de esta otra manera

$$(31) \quad ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{(Edu + Fdv)^2}{E} + \frac{EG - F^2}{E} dv^2$$

siendo  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u > 0$   
 $EG - F^2 > 0$

Mientras la primera condición es evidente por tratarse del producto escalar de un vector por él mismo, la segunda se apoya en el producto siguiente (ver la condición (27)  $\vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v \neq 0$ )

$$\left( \vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v \right) \cdot \left( \vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v \right) = \left( \vec{\mathbf{x}}_u \cdot \vec{\mathbf{x}}_u \right) \left( \vec{\mathbf{x}}_v \cdot \vec{\mathbf{x}}_v \right) - \left( \vec{\mathbf{x}}_u \cdot \vec{\mathbf{x}}_v \right)^2 = EG - F^2 > 0$$

De forma que dicha desigualdad se sigue verificando si se realiza una transformación de coordenadas curvilíneas dada la condición expresada por la ecuación (27).

Se puede obtener el ángulo  $\alpha$  de dos direcciones tangentes a la superficie en un punto genérico P en función de las expresiones  $E$ ,  $F$  y  $G$ . Sean ambas direcciones las dadas por las relaciones  $du/dv$  y  $\delta u/\delta v$ ; partiendo de ambos elementos de arco

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v$$

y como el producto escalar de ambos elementos es  $d\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r} = |d\mathbf{r}| \cdot |\delta\mathbf{r}| \cdot \cos \alpha$  resulta:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u du \delta u + (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)(du \delta v + dv \delta u) + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v dv \delta v}{|d\mathbf{r}| \cdot |\delta\mathbf{r}|} = \\ (32) \quad &= \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} = \\ &= E \frac{du}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} + F \left( \frac{du}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} \right) + G \frac{dv}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} \end{aligned}$$

Son importantes determinados casos particulares aplicados a esta ecuación

- La condición de ortogonalidad de dos direcciones sobre la superficie, es decir,  $\alpha = \pi/2$ , es decir, se anula el numerador.
- El ángulo  $\theta$  formado por las curvas paramétricas, esto es,  $u = \text{cte}$  ( $du = 0$ ;  $dv$  arbitrario) y  $v = \text{cte}$  ( $dv = 0$ ;  $du$  arbitrario), queda definido por las expresiones

$$(33) \quad \cos \theta = \frac{F dv \delta u}{\sqrt{G dv^2} \sqrt{E \delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

- De las expresiones anteriores y de (30) se deduce que las curvas paramétricas son ortogonales si  $F = 0$

Un caso interesante para geodesia y cartografía son las superficies de revolución, en particular la esfera y el elipsoide. Sobre estas superficies se definen las curvas *loxodromas* como aquellas que forman ángulo constante con los planos que contienen al eje de revolución.

La ecuación general de la superficie es  $\mathbf{r}(\mathbf{p}, \lambda) = X(\mathbf{p}, \lambda)\mathbf{i} + Y(\mathbf{p}, \lambda)\mathbf{j} + Z(\mathbf{p}, \lambda)\mathbf{k}$ , donde  $\mathbf{p}$  representa la distancia al eje de rotación y  $\lambda$  el ángulo diedro entre el plano origen (ejes  $x, z$ ) y el que contiene al punto P y el eje de rotación. Las componentes de este vector posición (34) y de sus derivadas parciales respecto a los parámetros (35) son:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [X \ Y \ Z] \vec{e} = [p \cos \lambda \ p \sin \lambda \ f(p)] \vec{e} \\ (34) \quad \vec{e} &= [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}]^T \end{aligned}$$

$$(35) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{r}_p &= [\cos \lambda \ \sin \lambda \ f'(p)] \vec{e} \\ \mathbf{r}_\lambda &= [-p \sin \lambda \ p \cos \lambda \ 0] \vec{e} \end{aligned} \right\} \text{y su primera forma fundamental}$$

(36)  $\mathbf{ds}^2 = (1 + \mathbf{f}'^2) \mathbf{dp}^2 + \mathbf{p}^2 \mathbf{d}\lambda^2 \Rightarrow$  la red de *curvas paramétricas* está constituida por dos familias de curvas ortogonales ( $F=0$ ): las de  $\mathbf{p}=\text{cte.}$  se llaman *paralelos* y las de  $\lambda=\text{cte.}$  de denominan *meridianos*.

Primer ejemplo. Si  $\mathbf{p}=\rho \sin \alpha$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{p})=\rho_0 - \rho \cos \alpha$ , donde  $\rho_0$  y  $\alpha$  son constantes,  $\rho$  es el nuevo parámetro que sustituye a  $\mathbf{p}$  y representa un cono de revolución con eje de revolución Z, siendo  $\rho_0$  la distancia del vértice al plano XY y  $\alpha$  el ángulo de abertura del cono. Su *primera forma fundamental* resulta ser  $\mathbf{ds}^2 = (1 + \mathbf{f}'^2) \mathbf{dp}^2 + \mathbf{p}^2 \mathbf{d}\lambda^2 \Rightarrow \mathbf{ds}^2 = \mathbf{d}\rho^2 + \mathbf{r}^2 \mathbf{d}\lambda^2$

Segundo ejemplo. Si  $\mathbf{p}=\mathbf{R} \cos \varphi$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{p})=\mathbf{R} \sin \varphi$ , donde  $\mathbf{R}$  es una constante (radio) y  $\varphi$  es el segundo parámetro que sustituye a  $\mathbf{p}$ , y se define como el ángulo de la dirección del radio vector  $\mathbf{r}$  con el plano XY. *La superficie representada es una esfera* y las coordenadas curvilíneas que son ortogonales ( $F=0$ ), se denominan '*latitud*'  $\varphi$  y '*longitud*'  $\lambda$ , siendo  $E=\mathbf{R}^2$  y  $G=\mathbf{R}^2 \cos^2 \varphi$ . Su *primera forma fundamental* resulta ser  $\mathbf{ds}^2 = (1 + \mathbf{f}'^2) \mathbf{dp}^2 + \mathbf{p}^2 \mathbf{d}\lambda^2 \Rightarrow \mathbf{ds}^2 = \mathbf{R}^2 \mathbf{d}\varphi^2 + \mathbf{R}^2 \cos^2 \varphi \mathbf{d}\lambda^2 = \mathbf{R}^2 \cos^2 \varphi (\mathbf{d}\varphi^2 / \cos^2 \varphi + \mathbf{d}\lambda^2)$ . Como  $F=0$ , y se desea hallar la ecuación de la *loxodroma* de ángulo fijo  $\alpha$  y, al comparar esta línea ( $\mathbf{ds}, \mathbf{d}\varphi, \mathbf{d}\lambda$ ) con el meridiano ( $\mathbf{u}=\varphi; \lambda=\text{cte.} \Rightarrow \delta v=\delta \lambda=0$ ), entonces, la ecuación intermedia de (33) será igual a  $\mathbf{cos} \alpha = \frac{\mathbf{E} \mathbf{d}\varphi \delta \mathbf{d}}{\mathbf{ds} \sqrt{\mathbf{E} \delta \delta^2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}} \mathbf{d}\varphi}{\mathbf{ds}} = \mathbf{R} \frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{ds}}$ .

Elevando al cuadrado la expresión y sustituyendo la primera forma fundamental queda la siguiente ecuación diferencial, y separando variables se puede integrar obteniendo la ecuación de la *loxodroma*.

$$\begin{aligned} \mathbf{cos}^2 \alpha (\mathbf{d}\varphi^2 + \mathbf{cos}^2 \varphi \mathbf{d}\lambda^2) &= \mathbf{d}\varphi^2 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{\mathbf{cos}^2 \alpha}\right) \mathbf{d}\varphi^2 + \mathbf{cos}^2 \varphi \mathbf{d}\lambda^2 = -\mathbf{tan}^2 \alpha \mathbf{d}\varphi^2 + \mathbf{cos}^2 \varphi \mathbf{d}\lambda^2 = 0 \\ \frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{cos} \varphi} &= \pm \mathbf{cot} \alpha \mathbf{d}\lambda \quad \text{e integrando esta se obtiene} \end{aligned}$$

$$(37) \quad \pm \mathbf{cot} \alpha (\lambda + \mathbf{C}) = \mathbf{tanh}^{-1}(\mathbf{sin} \varphi) = \mathbf{ln} \mathbf{tan} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{ecuación de la loxodroma}$$

El signo  $\pm$  indica que la curva (espiral) se arrolla sobre la esfera y el polo norte ‘a derechas’ ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) o ‘a izquierdas’ ( $0 > \alpha > -\pi/2$ ); en los polos se arrolla asintóticamente. Considerando el primer caso y las constantes ( $\alpha$  y  $C$ ) el valor de  $\lambda$  puede variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pasando por  $\lambda = -C$  cuando atraviesa el ecuador; el segundo miembro adquiere valores entre  $-\infty$  y  $+\infty$  mientras  $\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  crece desde 0 a  $+\infty$  pasando por el valor 1 cuando atraviesa el ecuador. Tiene un interés particular cuando se habla de *navegación por rumbo o acimut constante*, y para ello se confeccionan cartas en proyección Mercator en las que la loxodromas se representan como rectas.

### 54.5. Normal a la superficie y plano tangente

Todos los vectores  $d\mathbf{r}/dt$  tangentes en P a la superficie satisfacen la ecuación (29)  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_u + \dot{\mathbf{r}}_v$  y están, por tanto, en el plano de los vectores  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$ , como se dijo está unívocamente determinado en todo punto P donde se cumple la condición  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ . Este es el *plano tangente* en P y, la ecuación que lo representa, vector  $\mathbf{r}$ , es la suma del vector posición de P (le llamaremos  $\mathbf{r}_0$  para distinguirlo  $\mathbf{r}$ ) y un vector combinación lineal de ambos vectores a base de los parámetros ( $\lambda$ ,  $\mu$ ):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{r}_u + \mu \mathbf{r}_v \text{ o expresada de esta otra manera } \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 0 \text{ donde } x_u,$$

$y_u, z_u, x_v, y_v, z_v$ , representan los valores particularizados para el punto P.

La *normal* a la superficie es la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente. Como vector unitario para representar esta dirección,  $\mathbf{N}$  (se denomina con mayúscula para diferenciarlo de  $\mathbf{n}$ , el a una curva de la superficie que pase por P), se toma el del producto vectorial de los tangentes a las *curvas coordenadas* dividido, o escalado, por su módulo:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

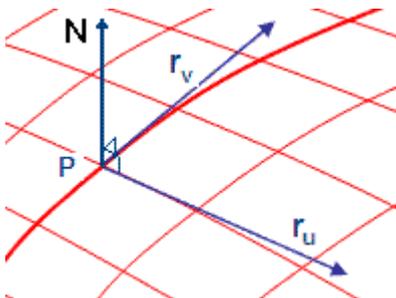


Figura 6.

De todos los planos que pasan por  $P$ , el tangente tiene con la superficie un contacto máximo.

### 54.6. Segunda fórmula fundamental

El estudio de una superficie depende de las formas diferenciales cuadráticas de la cuales se ha dado la *primera forma* que representa  $ds^2$ . Ahora, partiendo de una curva  $C$  sobre la superficie, que pasa por  $P$ , y considerando el vector curvatura de  $C$ , se puede obtener la denominada *segunda forma fundamental*.

El vector curvatura de  $C$  es  $\mathbf{k}$  y viene representado por  $d\mathbf{t}/ds$ ; se podría descomponer en dos direcciones ortogonales entre sí y perpendiculares a la curva  $C$ : la de la normal a la superficie  $\mathbf{N}$  y la de la perpendicular a ésta y a la tangente a la curva. Es decir, siguiendo la figura se tiene:

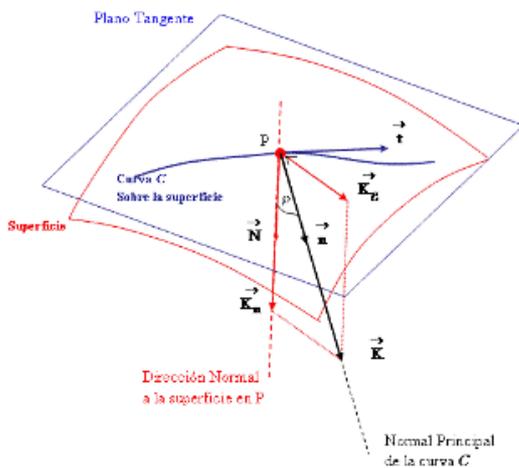


Figura 7.

$$d\mathbf{t} / ds = \mathbf{k} = \mathbf{k}_N + \mathbf{k}_G$$

El vector  $\mathbf{k}_N$  se llama *vector curvatura normal* y se puede expresar en función del vector unitario normal  $\mathbf{N}$  (normal a la superficie) así  $\mathbf{k}_N = k_N \mathbf{N}$ , llamando *curvatura normal* al escalar  $k_N$  cuyo signo depende del sentido de  $\mathbf{N}$  según el convenio adoptado. El vector  $\mathbf{k}_G$  se denomina *vector curvatura geodésica* o *vector curvatura tangencial*; debe su nombre a que cuando ésta es nula la curva  $C$  es una geodésica.

Sin embargo, la que interesa, por el momento, es la *curvatura normal* que se obtiene por derivación a lo largo de  $C$  de la expresión  $\mathbf{N} \bullet \mathbf{t} = 0$  (son ortogonales)

$$(38) \frac{d\mathbf{t}}{ds} \bullet \mathbf{N} + \mathbf{t} \bullet \frac{d\mathbf{N}}{ds} = 0$$

Es decir

$$(39) \frac{dt}{ds} \bullet N = -t \bullet \frac{dN}{ds} = -\frac{dr \bullet dN}{ds \bullet ds}$$

o bien

$$(40) k_N = -\frac{dr \bullet dN}{dr \bullet dr}$$

Atendiendo al segundo miembro de esta última ecuación, ya que  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{N}$  son funciones dependientes de los parámetros  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , se sustituyen sus expresiones diferenciales en dicha ecuación dando lugar a la siguiente relación importante:

$$(41) \begin{aligned} dN &= N_u du + N_v dv \\ dr &= r_u du + r_v dv \end{aligned}$$

$$k_N = -\frac{dr \bullet dN}{dr \bullet dr} = -\frac{(r_u \bullet N_u) du^2 + (r_u \bullet N_v + r_v \bullet N_u) dudv + (r_v \bullet N_v) dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2}$$

O bien

$$(42) k_N = \frac{-dr \bullet dN}{dr \bullet dr} = \frac{e du^2 + 2f dudv + g dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2} = \frac{II}{I}$$

En esta expresión (42) se encuentran la primera forma fundamental (denominador) y la segunda forma fundamental (numerador), en la que las funciones  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son funciones de punto con independencia de en que dirección se considere y, se pueden expresar de las tres formas siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -r_u \bullet N_u \\ \mathbf{f} &= -(r_u \bullet N_v + r_v \bullet N_u) \\ \mathbf{g} &= -r_v \bullet N_v \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} r_u \bullet N &= 0 \Rightarrow r_{uu} \bullet N + r_u \bullet N_u = 0 \\ r_u \bullet N &= 0 \Rightarrow r_{uv} \bullet N + r_u \bullet N_v = 0 \\ r_v \bullet N &= 0 \Rightarrow r_{vu} \bullet N + r_v \bullet N_u = 0 \\ r_v \bullet N &= 0 \Rightarrow r_{vv} \bullet N + r_v \bullet N_v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= r_{uu} \bullet N \\ \mathbf{f} &= r_{uv} \bullet N \\ \mathbf{g} &= r_{vv} \bullet N \end{aligned}$$

y substituyendo el valor de  $N = (r_u \times r_v) / \sqrt{EG - F^2}$

$$\mathbf{e} = \frac{(r_{uu} r_u r_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad \mathbf{f} = \frac{(r_{uv} r_u r_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad \dots \quad \mathbf{g} = \frac{(r_{vv} r_u r_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

### 54.7. Teorema de Meusnier

Volviendo a la ecuación (42), se aprecia que el segundo miembro sólo depende de los parámetros  $u, v$  y  $dv/du$ . Por tanto los coeficientes  $e, f, g, E, F, G$  son valores constantes en el punto  $P$ , de modo que la componente curvatura normal de una curva de la superficie que pase por  $P$  viene determinada por esos 6 coeficientes y la dirección  $dv/du$ . Así, *todas las curvas de la superficie que pasan por  $P$  –con el mismo sentido- y son tangentes a la misma dirección  $t$  tienen el mismo vector curvatura normal ( $k_N = k_N \mathbf{N}$ )*

Se denominan *direcciones asintóticas* aquellas para las que se anula  $\text{II}$  (*segunda forma fundamental*) y las curvas sobre la superficie que pasan por  $P$  con esa dirección se llaman *curvas asintóticas*.

Siguiendo la figura anterior, en  $P$ , el vector unitario  $\mathbf{N}$  (*normal principal de la superficie*) tiene el sentido de  $k_N$  y el sentido del vector unitario  $\mathbf{n}$  (*normal principal de la curva, en el plano osculador*) es el de  $\mathbf{k}$ , y su producto escalar  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$  relaciona el ángulo  $\theta$  entre ambos, y por tanto,  $k \cos \theta = k_N = \text{constante}$ . Para aquellas *direcciones no asintóticas* se pueden escribir los inversos de las curvaturas como radios ( $R = k^{-1}$  y  $R_N = k_N^{-1}$ )..de la curva genérica y la que contiene a la tangente  $t$  y forma ángulo cero con la normal a la superficie, lo que permite escribir

$$(43) \quad \boxed{R_N \cos \theta = R}$$

Esta expresión es la formulación del teorema conocida con el nombre de *teorema de Meusnier*, cuyo enunciado es:

*El centro de curvatura  $C_1$  de una curva en una dirección no asintótica de  $P$  es la proyección sobre su normal principal del centro de curvatura  $C_0$  de la sección normal que es tangente a  $C$  en dicho punto  $P$ .*

### 54.8. Teorema de Euler

Un paso más es el estudio del comportamiento del vector curvatura normal cuando varía la dirección de la tangente en  $P$ . La dirección del vector es siempre la misma y sólo cambia su módulo o longitud; el sentido depende del signo de  $k_N = \text{III/I}$  y, como el denominador es siempre positivo, más concretamente del numerador. Para ello se sigue el mismo razonamiento que con la primera forma fundamental (31) dándose tres casos según el signo de  $eg - f^2$ :

- La expresión II conserva el mismo signo cualquiera que sea la dirección lo expresa la condición  $eg-f^2 > 0$ . Los puntos en que se cumple esta condición se llaman *elípticos* y la superficie se mantiene a un solo lado del plano tangente. Por ejemplo cualquier punto de un elipsoide.
- La expresión II es un cuadrado perfecto:  $eg-f^2 = 0$ . La superficie se comporta como un punto elíptico, excepto en una dirección, donde  $k_N = 0$ , es decir, tiene una dirección asintótica; las curvas en esa dirección presentan un punto de inflexión y tales puntos se llaman *parabólicos*. Por ejemplo cualquier punto de un cilindro.
- La expresión II no conserva el mismo signo en todas las direcciones  $dv/du$ ; esta condición viene expresada por  $eg-f^2 < 0$ . Las regiones que separan las de uno y otro signo vienen determinadas por sendas direcciones asintóticas. Estos puntos se llaman *hiperbólicos o de ensilladura*. Por ejemplo cualquier punto de un paraboloides hiperbólico

Ahora se considerarán aquellas direcciones para las que la curvatura  $k_N$  adquiere valores extremos (máximo y mínimo). Sea la dirección considerada  $dv/du = \lambda$  y la curvatura normal  $k_N$  que, para simplificar, denominaremos sencillamente  $k$ ; con expresión

$$(44) \quad k = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} = \frac{(e + f\lambda) + \lambda(f + g\lambda)}{(E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda)} = k(\lambda)$$

Los valores buscados serán los que cumplan  $dk/d\lambda = 0$ ; esto es

$$2(f - g\lambda)(E + 2F\lambda + G\lambda^2) - 2(F - G\lambda)(e + 2f\lambda + g\lambda^2) = 0 \quad \text{de donde una forma más sencilla}$$

de  $k$  teniendo en cuenta esta condición para máximo y mínimo es

$$(45) \quad k = \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}} = \frac{(f + g\lambda)}{(F + G\lambda)} = \frac{(e + f\lambda) + \lambda(f + g\lambda)}{(E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda)} = \frac{(e + f\lambda)}{(E + F\lambda)} = k(\lambda)$$

De aquí se desprende la siguiente ecuación cuadrática en  $\lambda$  con raíces reales que determina dos direcciones  $dv/du = \lambda$  en las que  $k$  toma los valores extremos, salvo que se anule II o bien II y I sean proporcionales:

$$(46) \quad \boxed{(Fg - Gf)\lambda^2 + (Eg - Ge)\lambda + (Ef - Fe) = 0}$$

Estas direcciones, correspondientes a las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , se llaman *direcciones de curvatura principales* o *direcciones principales* y a las curvaturas  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  *curvaturas principales*. Si se sustituyen estos valores en la ecuación (32) se verifica que ambas direcciones son *ortogonales*.

$$\mathbf{G}\lambda_1\lambda_2 + \mathbf{F}(\lambda_1 + \lambda_2) + \mathbf{E} = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{E}\mathbf{f} - \mathbf{F}\mathbf{e}) - \mathbf{F}(\mathbf{E}\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{e}) + \mathbf{E}(\mathbf{F}\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{f})}{(\mathbf{F}\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{f})} = 0$$

Si se toman las *líneas de curvatura* como *curvas coordenadas* apoyándose en (46) se tiene:

- $u = \text{cte. } du = 0 \quad dv = \text{arbitrario} \Rightarrow \mathbf{F}\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{f} = 0$
- $v = \text{cte. } dv = 0 \quad du = \text{arbitrario} \Rightarrow \mathbf{E}\mathbf{f} - \mathbf{F}\mathbf{e} = 0$

Como, al ser ortogonales, es  $\mathbf{F} = 0$  y ni  $\mathbf{E}$  ni  $\mathbf{G}$  pueden anularse forzosamente debe anularse también  $\mathbf{f}$ . Es decir, *cuando las curvas coordenadas son líneas de curvatura las condiciones*

$$(47) \quad \boxed{\mathbf{F} = 0 \quad \mathbf{f} = 0}$$

*son necesarias y suficientes.*

La expresión de curvatura normal se simplifica, y de ella se extraen las curvaturas extremas  $\mathbf{k}_1$  y

$\mathbf{k}_2$  fácilmente  $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{e}du^2 + \mathbf{g}dv^2}{\mathbf{E}du^2 + \mathbf{G}dv^2} = \mathbf{e}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \mathbf{g}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$  si sustituimos en esta,

alternativamente,  $du = 0$  y  $dv = 0$

$$(48) \quad \boxed{\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{E}} \quad \mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{G}}}$$

A partir de aquí si se introduce el ángulo  $\alpha$  que forma la dirección  $dv/du$  con la dirección de curvatura  $\delta v = 0$  a partir de las ecuaciones (32) se tiene

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{E}du\delta d}{ds\sqrt{\mathbf{E}\delta d^2}} = \sqrt{\mathbf{E}} \frac{du}{ds} \quad \sin \alpha = \sqrt{\mathbf{G}} \frac{dv}{ds} \quad \text{que sustituyendo en k da}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{E}} \cos^2 \alpha + \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{G}} \sin^2 \alpha = \mathbf{k}_1 \cos^2 \alpha + \mathbf{k}_2 \sin^2 \alpha \quad \text{que en función de las radios da}$$

$$\frac{1}{\mathbf{R}_\alpha} = \frac{1}{\mathbf{R}_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\mathbf{R}_2} \sin^2 \alpha$$

Estas relaciones, que expresan la curvatura normal o el radio de curvatura en una dirección arbitraria en función de las curvaturas  $k_1$  y  $k_2$  o de los radios  $R_1$  y  $R_2$ , se conocen como *teorema de Euler*.

Cuando los coeficientes I y II son proporcionales indica que  $k_1=k_2$ , lo que significa que todos los vectores curvatura normal coinciden con independencia de la dirección. Estos puntos se conocen como *umbílicos* y, en general, el número de estos en una superficie es finito. El número de umbílicos en un elipsoide de 3 ejes es *cuatro*, en el de revolución es *dos* (los polos) y en una esfera *todos* son umbílicos.

### 54.9. Indicatriz de Dupin. Curvatura de Gauss y curvatura media

Las curvaturas principales  $k_1=k_2$  pueden deducirse al resolver el sistema de ecuaciones que se formula a partir de la ecuación (45)

$$\begin{aligned} k(F + G\lambda) - (f + g\lambda) &= 0 \Rightarrow (kG - g)\lambda + (kF - f) = 0 \\ k(E + F\lambda) - (e + f\lambda) &= 0 \Rightarrow (kF - f)\lambda + (kE - e) = 0 \end{aligned}$$

para los valores de  $\lambda$  que satisfagan el sistema la resultante es

$$^{(49)} \begin{vmatrix} (kG - g) & (kF - f) \\ (kF - f) & (kE - e) \end{vmatrix} = 0$$

La solución de la ecuación de segundo grado representada por (49) tiene como raíces  $k_1$  y  $k_2$

$$(EG - F^2)k^2 - (eG + Eg - 2Ff)k + (eg - f^2) = 0$$

Sin necesidad de hallarlas se deduce la *curvatura media* como media de ambas y la *curvatura total o de Gauss* como producto de ambas.

$$^{(50)} \begin{array}{l} \mathbf{M} = (k_1 + k_2) / 2 = \frac{(eG + Eg - 2Ff)}{(EG - F^2)} \quad \text{curvatura media} \\ \mathbf{K} = (k_1 k_2) = \frac{(eg - f^2)}{(EG - F^2)} \quad \text{curvatura total o de Gauss} \end{array}$$

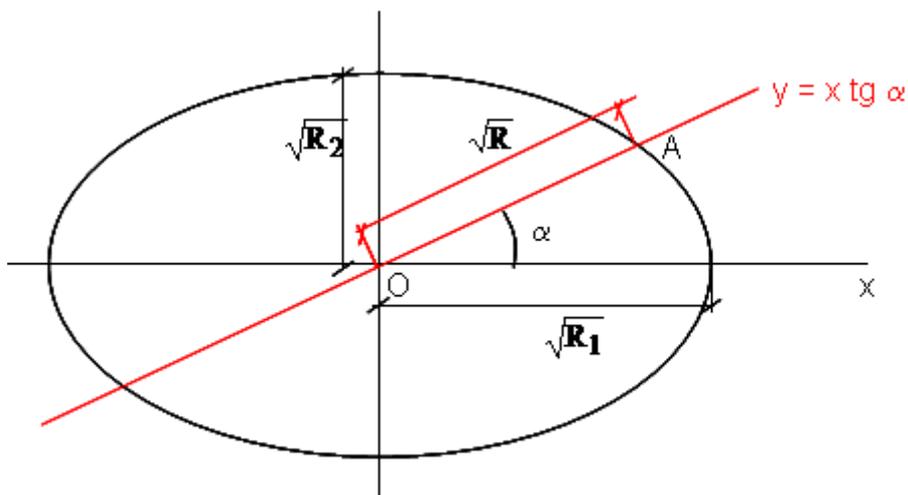
En un punto elíptico  $\mathbf{K}$  es positivo porque las dos curvaturas tienen el mismo signo, mientras que en uno hiperbólico serán de signos contrarios, y en uno parabólico la curvatura total es cero.

Para ilustrar el teorema de Euler se puede construir un diagrama sencillo, partiendo de un supuesto punto elíptico donde ambas curvaturas son positivas y considerando una elipse cuyos semiejes son  $\sqrt{R_1}$  y  $\sqrt{R_2}$  y, por tanto, de ecuación:

$$(51) \quad k_1 x^2 + k_2 y^2 = 1 = \frac{x^2}{(\sqrt{R_1})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{R_2})^2}$$

La recta de ecuación  $y = x \operatorname{tg} \alpha$  corta a la elipse en un punto **A** cuyas coordenadas son:

$$x = \frac{\pm \cos \alpha}{\sqrt{k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha}} \quad y = \frac{\pm \sin \alpha}{\sqrt{k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha}}$$



La distancia OA será por tanto  $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{R}$  que como se ve es el

radio de curvatura (normal) en la dirección que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje **X**.

Esta elipse se llama *indicatriz de Dupin*.

Si el punto fuera hiperbólico la indicatriz de Dupin será una pareja de hipérbolas conjugadas y las asíntotas marcan las *direcciones asíntóticas*, y si el punto es parabólico es un par de rectas paralelas en dirección de la única línea asíntótica.

Si se corta la superficie con un plano paralelo al plano tangente en un punto elíptico, a una distancia infinitesimal  $\varepsilon$  de él, y se proyecta la intersección sobre el plano tangente, en primera aproximación, es semejante a la indicatriz de Dupin.

## **Bibliografía**

- [1] Dirk J. Struik, 'Geometría diferencial clásica', Aguilar 1966
- [2] G.B: Lauf, 'Geodesy and Map Projections', TAFE Publications Unit 1983
- [3] Lev M. Bugayevskiy, Jhon P. Snyder, 'MAP PROJECTIONS a Reference Manual', Taylor & Francis 1995
- [4] Escuela de Topografía y Geodesia, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 1º', Servicio Geográfico del Ejército 1955
- [5] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 2º', SGE 1944
- [6] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 3º', SGE 1947
- [7] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Complementos sobre representación conforme', SGE 1951
- [8] Estado Mayor del Ejército, 'Reglamento de Cartografía Militar (1935), Tablas'. SGE 1942
- [9] Estado Mayor Central, 'Característica y tablas de la Proyección Lambert de Canarias'. SGE 1945
- [10] Estado Mayor Central, 'Proyección Universal Transversa Mercator'. SGE 1976
- [11] John P. Snyder 'Map Projections-A Working Manual', Professional paper 1395 US Government P. Office 1987
- [12] Juan Mena Berrios 'Geodesia Superior', Centro Nacional de Información Geográfica 2008
- [13] A. Lujan, 'Apuntes de cartografía', no publicados

## **Tema 55. Representación del elipsoide en el plano, proyecciones cartográficas. La retícula geográfica, ecuaciones. Transformación de elementos diferenciales, concepto de escala deformación angular y acimutal. Elipse de distorsión o indicatriz de Tissot. Distorsión por curvatura de las líneas geodésicas en la proyección y su corrección. Clasificación de las proyecciones atendiendo a las deformaciones**

### **55.1. Representación del elipsoide en el plano. Introducción**

La Cartografía, con carácter general, es la ciencia que se ocupa del trazado de *cartas o mapas* al objeto de representar la Tierra sobre un plano, bien en su totalidad o parte de ella. El nombre de *plano* es el más ilustrativo en este proceso aunque se aplica a extensiones muy reducidas a partir de las medidas topográficas, aunque subsiste el problema de la representación 3D, que se aborda con distintos artificios para representar la tercera dimensión (la altitud).

La geodesia sintetiza las medidas y forma de la Tierra asociando cada punto de su superficie con otro sobre la figura geométrica elipsoide –muy próximo al nivel medio de los mares o a una esfera-, y determina la por medio de dos parámetros o coordenadas: “latitud” y “longitud” ( $\varphi, \lambda$ ), más un tercer parámetro “altitud” ( $h$  o  $H$ ), que completa la terna especificando cuanto se separa el punto terrestre de esa superficie geométrica ideal, y que raramente supera el 0.5 por mil del radio medio terrestre.

A partir de aquí, la Cartografía Matemática podría decirse que da un paso más y estudia formas diferentes de asociar a cada punto del elipsoide o esfera un punto del plano, de forma continua, y manteniendo las inevitables deformaciones bajo ciertas condiciones o límites, ya que tanto el elipsoide como la esfera son figuras geométricas no desarrollables en un plano como, en contrario, lo son el cono o el cilindro.

La geometría diferencial y la geometría proyectiva constituyen dos herramientas esenciales, aunque no las únicas, que se utilizan en Cartografía Matemática. La segunda de ellas dio nombre a lo que conocemos, con carácter general, como “proyecciones cartográficas”, aunque implican un concepto más amplio como el de correspondencia biunívoca entre las dos superficies o partes de ellas.

Desde un punto de vista práctico, y ante la imposibilidad de conseguir una representación rigurosamente exacta de la Tierra sobre el plano, el objetivo principal de una *proyección* es encontrar la transformación más adecuada que caracterice la funcionalidad del mapa deseado. De este modo, ya que no es factible la conservación de las distancias en todas las direcciones, esto es, una semejanza perfecta, en ocasiones se elige una transformación donde se conserven las formas en detrimento de distancias y áreas, otras veces, se opta por la conservación de las áreas o por una solución ecléctica, aunque en todo caso se mantiene el conocimiento de las inevitables deformaciones en magnitud y los valores extremos de ellas en el ámbito del mapa.

## 55.2. Representación del elipsoide en el plano, proyecciones cartográficas

En rigor toda proyección cartográfica es una mera transformación de una red de líneas paramétricas coordenadas (paralelos y meridianos) que cubren una superficie –elipsoide o esfera- en su homóloga red sobre el plano, para lo cual es preciso definir una función de paso entre ambos espacios bidimensionales.

La correspondencia de las coordenadas curvilíneas ( $u, v$ ), que pueden ser: las geodésicas ( $\varphi, \lambda$ ), las isométricas ( $q, \lambda$ ) o las geocéntricas ( $\Phi, \lambda$ ), se representa mediante la expresión

$$(1) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Esta función, con la salvedad de las singularidades que pudiera presentar, resuelve el *paso directo* del problema cartográfico cuando hace corresponder todo punto de la superficie terrestre con una única imagen sobre el plano; o sea, cuando se trata de una aplicación. Aquellos casos en que, además, existe la respectiva función inversa:

$$(2) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

se dice que también está resuelto el *paso inverso*, siendo entonces la correspondencia biyectiva. La función de transformación (1) lleva implícitas las características fundamentales de la proyección elegida, principalmente en lo que se refiere a las deformaciones y a la precisión geométrica de la información indicada en los mapas que la utilizan. De su estudio y deducción se ocupa la Cartografía matemática, para lo cual esta ciencia establece una serie de expresiones generales para todo sistema de *proyección cartográfica*, que serán particularizadas a cada caso mediante la imposición de condiciones concretas.

Sin menoscabo de generalidad, en adelante, se acepta la transformación partiendo de las coordenadas geodésicas ( $\varphi, \lambda$ ) y, como es común, las relaciones particularizadas para cada coordenada del plano se expresan

$$\begin{aligned}
 \text{(3)} \quad \mathbf{x} &= \mathbf{f}_1(\varphi, \lambda) & \varphi &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{f}_2(\varphi, \lambda) & \lambda &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})
 \end{aligned}$$

Las funciones  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$ ,  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ , conjuntamente, han de ser finitas y continuas así como sus derivadas parciales de primero y segundo orden en el recinto de aplicación. El valor del jacobiano de la transformación  $J = \partial(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \partial(\varphi, \lambda)$  no debe anularse en los puntos del área a cartografiar.

### 55.3. La retícula geográfica, ecuaciones

Las ecuaciones de paralelos y meridianos en la carta se obtienen de las expresiones (3) con sólo particularizar las expresiones inversas para una latitud o una longitud determinadas. También se pueden obtener expresiones implícitas por eliminación entre las directas de la longitud y latitud respectivamente

$$\text{(4)} \quad \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varphi) = 0 \quad \text{paralelos} \quad \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = 0 \quad \text{meridianos}$$

Aún se pueden utilizar expresiones en forma paramétrica:  $\varphi_0$  para un paralelo y  $\lambda_0$  para un meridiano

$$\begin{aligned}
 \text{(5)} \quad \mathbf{x} &= \mathbf{f}_1(\varphi_0, \lambda) & \mathbf{y} &= \mathbf{f}_2(\varphi_0, \lambda) & \text{paralelo} & \varphi_0 \\
 \mathbf{x} &= \mathbf{f}_1(\varphi, \lambda_0) & \mathbf{y} &= \mathbf{f}_2(\varphi, \lambda_0) & \text{meridiano} & \lambda_0
 \end{aligned}$$

Se llama retícula geográfica a la representación en el mapa de dos familias de curvas que resultan de aplicar las expresiones (4) o (5) a intervalos regulares de latitud y longitud, cuya magnitud de intervalo depende de la finalidad del mapa.

La forma de la retícula depende de las ecuaciones que definen la proyección:

- Si  $\{\mathbf{x} = \mathbf{f}_1(\lambda), \mathbf{y} = \mathbf{f}_2(\varphi)\}$ , entonces meridianos y paralelos están representados por sendos haces de rectas paralelas y mutuamente perpendiculares.
- Si  $\{\mathbf{x} = \mathbf{f}_1(\varphi, \lambda), \mathbf{y} = \mathbf{f}_2(\varphi)\}$ , los paralelos están representados por un haz de rectas paralelas al eje X y los meridianos por curvas.
- Si  $\{\mathbf{x} = \mathbf{f}_1(\lambda), \mathbf{y} = \mathbf{f}_2(\varphi, \lambda)\}$ , los paralelos son representados por curvas y los meridianos por rectas.
- Si  $\{\mathbf{x} = \mathbf{f}_1(\varphi, \lambda), \mathbf{y} = \mathbf{f}_2(\varphi, \lambda)\}$ , meridianos y paralelos están representados por diferentes haces de curvas.

La representación del polo geográfico merece atención porque puede ser un punto, o un segmento de recta o de curva. Estos dos últimos casos son una singularidad donde no se cumple la condición de transformación punto-a-punto.

$$\mathbf{x}_P = 0, \quad \mathbf{y}_P = \mathbf{f}_2(\varphi_P) \quad \text{para un punto}$$

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{f}_1(\varphi_P, \lambda), \quad \mathbf{y}_P = \mathbf{f}_2(\varphi_P) \quad \text{para un segmento recto}$$

$$x_p = f_1(\varphi_p, \lambda), \quad y_p = f_2(\varphi_p, \lambda) \quad \text{para un segmento curvo}$$

La retícula de meridianos y paralelos, bajo las siguientes condiciones, puede presentar determinadas simetrías, que son fruto de las funciones de transformación:

Proyecciones con simetría respecto al meridiano central recto

- las ordenadas son una función par de la longitud  $y(\varphi, \lambda) = y(\varphi, -\lambda)$
- las abscisas son una función impar de la longitud  $x(\varphi, \lambda) = -x(\varphi, -\lambda) \quad \lambda_0=0 \Rightarrow x_0=0$
- si los paralelos cruzan ortogonalmente el meridiano central  $(\partial y / \partial \lambda)_{\lambda=0} = 0$

Proyecciones con simetría respecto a un ecuador recto

- las ordenadas son una función impar de la latitud  $y(\varphi, \lambda) = -y(-\varphi, \lambda)$
- las abscisas son una función par de la latitud  $x(\varphi, \lambda) = x(-\varphi, \lambda) \quad \varphi_0=0 \Rightarrow y_0=0$
- si los meridianos cruzan ortogonalmente el ecuador  $(\partial x / \partial \varphi)_{\varphi=0} = 0$

Si presentan ambas simetrías, es decir respecto al meridiano central y al ecuador, deberán cumplir todas las condiciones anteriores (por ejemplo, proyección Gauss-Krüger).

#### **55.4. Transformación de elementos diferenciales, concepto de escala, deformación angular y acimutal**

La transformación de la figura de la Tierra al plano la haremos considerando a ésta como elipsoide de revolución, toda vez que el supuesto de la esfera como espacio inicial constituye un caso particular de aquél.

La característica principal, común a toda proyección en su paso al plano, esto es, la deformación, requiere el estudio detallado en torno a la representación de un punto genérico y analizar las diferencias longitudinales, superficiales y angulares.

Sea el punto P ( $\varphi, \lambda$ ) y un punto Q( $\varphi+d\varphi, \lambda+d\lambda$ ) muy próximo al anterior y en una dirección arbitraria, definida por la relación  $d\lambda/d\varphi$ , de manera que la distancia  $PQ=ds$  es la diagonal del paralelogramo curvilíneo PAQB diferencial, que tiene su homólogo en mapa P'A'Q'B'(ver figura), también diferencial.

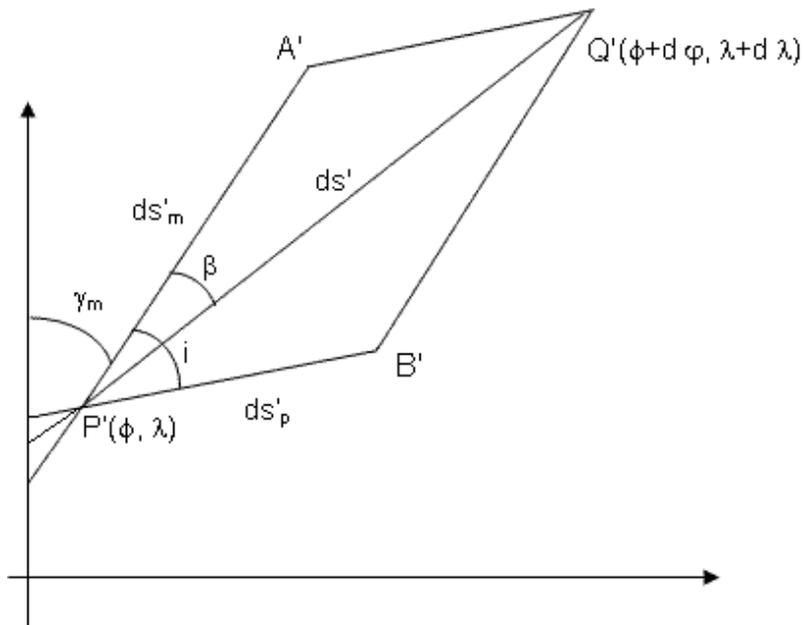


Figura 1.

Donde  $ds'$ ,  $ds'_m$ ,  $ds'_p$  son arcos homólogos de sus correspondientes sobre el elipsoide y, las relaciones mapa/elipsoide indican la deformación lineal según sus direcciones respectivas;  $P'A'$  es la representación del meridiano de P y  $P'B'$  la del paralelo; el ángulo  $i$  representa el ángulo de corte entre el meridiano y paralelo en el mapa, que cuando es distinto de  $\pi/2$  muestra otro tipo de distorsión; el ángulo  $\beta$  es la representación del acimut  $\alpha$  de la dirección considerada;  $\gamma_m$  es el ángulo de la dirección del meridiano respecto al eje de ordenadas, denominado usualmente convergencia de meridiano en P; finalmente la relación entre la superficie de ambos cuadriláteros proporciona la deformación superficial.

La ecuación de transformación se puede expresar mediante una función vectorial de variable vectorial tal como la (1), o bien como es más frecuente, a través del siguiente par de funciones genéricas definidas en el sistema cartesiano del plano:

$$(6) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda, \varphi), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\lambda, \varphi)$$

Aquí los criterios de signo para las coordenadas geodésicas son los usuales; es decir, longitudes y latitudes positivas hacia el Este y el Norte respectivamente. Se puede empezar por escribir los diferenciales de arco en paralelo y meridiano (elipsoidales) sobre la base de los radios principales de curvatura  $N$  y  $M$  en un punto cualquiera  $P(\varphi, \lambda)$ :

$$(7) \quad ds_p = rd\lambda = N \cos \varphi \quad ds_m = M d\varphi$$

Según estos elementos, el módulo del vector diferencial de línea (o diferencial de arco) que une P con Q, infinitamente próximo según una dirección arbitraria, viene dado por la expresión:

$$(8) \quad ds = \sqrt{ds_p^2 + ds_m^2} = \sqrt{N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + M^2 d\varphi^2}$$

Y suponiendo que esta dirección forma un ángulo  $(\pi/2-\alpha)$  con la dirección del paralelo, dicho ángulo queda determinado por la igualdad:

$$(9) \cot \alpha = \frac{ds_m}{ds_p} = \frac{M}{N \cos \varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

Por otro lado, el paso de  $P'(x, y)$  a  $Q'(x, y)$  –homólogos de P y Q– se hace diferenciando las ecuaciones (6) cuyas expresiones son:

$$(10) \mathbf{dx} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} d\varphi \quad \mathbf{dy} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} d\varphi$$

Por tanto el elemento de arco en el mapa, a partir de estas expresiones es:

$$(11) \mathbf{ds}'^2 = \mathbf{dx}^2 + \mathbf{dy}^2 = \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 + 2 \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} \right) \right] d\lambda d\varphi + \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2$$

que no es mas que la primera forma fundamental y, los corchetes son los coeficientes de Gauss

$$(12) \boxed{\mathbf{ds}'^2 = \mathbf{E} d\lambda^2 + 2\mathbf{F} d\lambda d\varphi + \mathbf{G} d\varphi^2 \quad \text{donde} \\ \mathbf{E} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} \right)^2 = \mathbf{x}_\lambda^2 + \mathbf{y}_\lambda^2; \quad \mathbf{F} = \mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\varphi + \mathbf{y}_\lambda \mathbf{y}_\varphi; \quad \mathbf{G} = \mathbf{x}_\varphi^2 + \mathbf{y}_\varphi^2}$$

Notación más reducida y apropiada que se utilizará en adelante.

Casos particulares interesantes son los arcos diferenciales de paralelo ( $d\varphi=0$ ) y de meridiano ( $d\lambda=0$ ) como curvas coordenadas en el mapa

$$(13) \boxed{\mathbf{ds}'_p = \sqrt{\mathbf{E}} d\lambda \quad \text{y} \quad \mathbf{ds}'_m = \sqrt{\mathbf{G}} d\varphi}$$

Y también, el ángulo  $i$  que forman estos elementos, es decir, el formado por meridiano y paralelo en la proyección cartográfica. Para ello, se puede tomar como función auxiliar el ángulo  $\theta$  que la dirección  $ds$  forma con el eje de ordenadas, que da lugar a las expresiones:

$$(14) \tan \vartheta = \frac{dx}{dy} \quad \sin \vartheta = \frac{dx}{ds'} \quad \cos \vartheta = \frac{dy}{ds'}$$

Estas ecuaciones referidas a los casos particulares del paralelo  $P'B'$  y del meridiano  $P'A'$  son:

$$(15) \begin{aligned} d\varphi = 0 &\Rightarrow \tan \vartheta_p = \frac{x_\lambda}{y_\lambda} \quad \sin \vartheta_p = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}}} x_\lambda \quad \cos \vartheta_p = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}}} y_\lambda \\ d\lambda = 0 &\Rightarrow \tan \vartheta_m = \frac{x_\varphi}{y_\varphi} \quad \sin \vartheta_m = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{G}}} x_\varphi \quad \cos \vartheta_m = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{G}}} y_\varphi \end{aligned}$$

El ángulo  $i$ , diferencia entre la orientación del meridiano y paralelo transformados ( $i=\theta_m-\theta_p$ ) se obtiene fácilmente desarrollando las expresiones trigonométricas de  $i$  en las que se sustituyen las expresiones (15) dando lugar a las siguientes expresiones sencillas:

$$(16) \quad i = \tan^{-1}\left(\frac{J}{F}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{J}{\sqrt{EG}}\right) \quad \text{en las que } J \text{ el jacobiano de la transformación}$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_\lambda & x_\varphi \\ y_\lambda & y_\varphi \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2}$$

Se puede considerar que el ángulo  $i$  varía entre  $0$  y  $\pi$ ; si  $F > 0$  entonces  $i < \pi/2$ , por el contrario, si  $F < 0$  entonces  $i > \pi/2$ ; y, como se sabe, si  $F = 0$  ambas líneas son ortogonales, también en la proyección.

Otro ángulo de interés el de la dirección del meridiano respecto al eje positivo de las ordenadas  $\gamma_m$  denominado convergencia y el del paralelo  $\gamma_p$  aunque este segundo se usa menos

$$(17) \quad \tan \gamma_m = \frac{x_\varphi}{y_\varphi} \quad \sin \gamma_m = \frac{1}{\sqrt{G}} x_\varphi \quad \cos \gamma_m = \frac{1}{\sqrt{G}} y_\varphi$$

$$(18) \quad \tan \gamma_p = \frac{x_\lambda}{y_\lambda} \quad \sin \gamma_p = \frac{1}{\sqrt{G}} x_\lambda \quad \cos \gamma_p = \frac{1}{\sqrt{G}} y_\lambda$$

El ángulo  $\beta$  de la dirección  $ds'$  respecto a la dirección del meridiano transformado  $ds'_m$  es aquel en que se ha convertido el acimut  $\alpha$  del elemento origen  $ds$ . Siendo  $\beta = \theta - \gamma_m$ , se hallan el coseno y el seno en función de esos dos ángulos; y su cociente, después de algunas operaciones, da

$$(19) \quad \cot \beta = \frac{N \cos \varphi}{M} \frac{G}{J} \cot \alpha + \frac{F}{J} \quad \text{o también}$$

$$(20) \quad \tan \beta = \frac{MJ \tan \alpha}{NG \cos \varphi + MF \tan \alpha}$$

El conocimiento del ángulo  $i$  y los arcos diferenciales de meridiano y de paralelo en la proyección proporcionan la superficie del cuadrilátero que es

$$(21) \quad d\Sigma = ds'_p ds'_m \sin i = \frac{J}{\sqrt{EG}} ds_p ds_m = J d\lambda d\varphi$$

Los conceptos de escala para líneas y para superficies se pueden formular a partir de las relaciones diferenciales descritas en los párrafos anteriores. Antes de desarrollar esta idea es menester distinguir entre la escala general de un mapa, que se aplica a toda o parte de la superficie del elipsoide para realizar la publicación de un mapa específico, y la que corresponde a un punto concreto como si esa escala general fuera 1:1.

A este respecto, en primer lugar, es inmediato definir la escala lineal o coeficiente de anamorfosis lineal  $k$ , en torno a un punto  $P'$  para una dirección determinada, como la relación de un elemento lineal y su homólogo:  $k = ds'/ds$ . Siendo el cuadrado del elemento lineal en la

imagen origen (elipsoide)  $ds^2$  igual a  $M^2d\varphi^2+r^2d\lambda^2$  ( $r$ =radio del paralelo) y estando definida una dirección cualquiera por la relación  $d\lambda/d\varphi=(M/r)\tan\alpha$ , se determina que

$$(22) \mathbf{k}^2 = \frac{\mathbf{E}d\lambda^2 + 2\mathbf{F}d\lambda d\varphi + \mathbf{G}d\varphi^2}{M^2d\varphi^2 + r^2d\lambda^2} = \frac{\mathbf{E}}{r^2} \sin^2 \alpha + \frac{\mathbf{F}}{rM} \sin(2\alpha) + \frac{\mathbf{G}}{M} \cos^2 \alpha$$

Los casos particulares de acimut cero (dirección del meridiano) y acimut pi medios (dirección del paralelo) merecen mención aparte y los factores de escala para estas dos direcciones se suelen denominar  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  respectivamente, siendo

$$(23) \mathbf{m} = \mathbf{k}_{\alpha=0} = \frac{\sqrt{\mathbf{G}}}{M} = \frac{(\mathbf{x}_\varphi^2 + \mathbf{y}_\varphi^2)^{1/2}}{M} \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}_{\alpha=\pi/2} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}}}{r} = \frac{(\mathbf{x}_\lambda^2 + \mathbf{y}_\lambda^2)^{1/2}}{r}$$

en función de estos valores y, como el producto ( $\mathbf{mncos i}$ ) es  $\mathbf{F}/(rM)$ , la expresión (22) queda así

$$(24) \mathbf{k}^2 = \mathbf{m}^2 \cos^2 \alpha + \mathbf{mn} \cos i \sin 2\alpha + \mathbf{n}^2 \sin^2 \alpha$$

Los valores máximo y mínimo de  $\mathbf{k}$  se obtienen derivando la expresión respecto a  $\alpha$  e igualando a cero por lo que deben satisfacer la ecuación resultante

$$(25) \tan(2\alpha) = \frac{2\mathbf{mn} \cos i}{\mathbf{m}^2 - \mathbf{n}^2} = \frac{2rMF}{r^2\mathbf{G} - M^2\mathbf{E}} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_0; \quad \alpha_2 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

Una vez hallados estos valores sería suficiente sustituirlos y obtener los factores de escala extremos. Sin embargo, es más conveniente aplicar los dos teoremas de Apolonio para diámetros conjugados de la elipse, resultando

$$(26) \mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \quad \mathbf{mn} \sin i = \mathbf{ab}$$

Por tanto

$$(27) \begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\mathbf{m}^2 + 2\mathbf{mn} \sin i + \mathbf{n}^2} + \sqrt{\mathbf{m}^2 - 2\mathbf{mn} \sin i + \mathbf{n}^2} \right) \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\mathbf{m}^2 + 2\mathbf{mn} \sin i + \mathbf{n}^2} - \sqrt{\mathbf{m}^2 - 2\mathbf{mn} \sin i + \mathbf{n}^2} \right) \end{aligned}$$

El *coeficiente de anamorfosis lineal*, expresión (24), puede adoptar forma diferente como función del acimut  $\alpha$  y de estos parámetros extremos y de su acimut ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\alpha_0$ ).

$$(28) \boxed{\mathbf{k}^2 = \mathbf{a}^2 \cos^2(\alpha - \alpha_0) + \mathbf{b}^2 \sin^2(\alpha - \alpha_0)}$$

En cualquier punto, se define *coeficiente de anamorfosis superficial*, de modo semejante, como relación entre elementos diferenciales de superficie. Por ejemplo, la superficie elemental considerada en la figura anterior es  $dS=MN\cos\varphi d\lambda d\varphi$  y su homóloga en la proyección, según ecuación (21)  $d\Sigma$ , por lo que

$$(29) \sigma = \frac{d\Sigma}{dS} = \frac{Jd\lambda d\varphi}{MN \cos \varphi d\lambda d\varphi} = \frac{J}{MN \cos \varphi}$$

Otra forma de esta expresión se deduce en función de los valores de la anamorfosis lineal en dirección del meridiano y del paralelo, o su semejante ecuación (26). Tal vez sean estas ecuaciones las más conocidas y usadas.

$$(30) \sigma = \frac{ds_p ds_m \sin i}{(N \cos \varphi d\lambda)(M d\varphi)} = mn \sin i = ab$$

### 55.5. Elipse de distorsión o indicatriz de Tissot

Centrada en un punto cualquiera  $P(\lambda, \varphi)$  se puede considerar una circunferencia de radio  $ds$  definido por la primera forma fundamental de la superficie elipsoide, ya establecida en la igualdad  $ds = \sqrt{ds_p^2 + ds_m^2} = \sqrt{N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + M^2 d\varphi^2}$ , que se introdujo anteriormente como ecuación (8).

La proyección de esta circunferencia sobre el plano, centrada en  $P'$  que es imagen de  $P$ , es una curva que se halla substituyendo en la ecuación las ‘coordenadas’  $(d\varphi, d\lambda)$  por sus expresiones en función de  $(dx, dy)$ . Dicha substitución puede realizarse mediante las diferenciales totales que salen de la ecuación (10) escrita en modo matricial, teniendo en cuenta que el determinante de la matriz de transformación es el jacobiano  $J$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\lambda & x_\varphi \\ y_\lambda & y_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{bmatrix} \quad \text{así} \quad \begin{bmatrix} x_\lambda & x_\varphi \\ y_\lambda & y_\varphi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{bmatrix} \quad \text{luego}$$

$$(31) \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_\varphi & -x_\varphi \\ -y_\lambda & x_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

En la figura siguiente están representados el objeto origen (izquierda) y objeto destino (derecha). En  $P$  sobre el elipsoide se tiene la circunferencia de radio  $ds$  con los ejes coordenados  $(\xi, \eta)$  sobre los que se llevan los valores de  $C(d\lambda, d\varphi)$  que la describe.

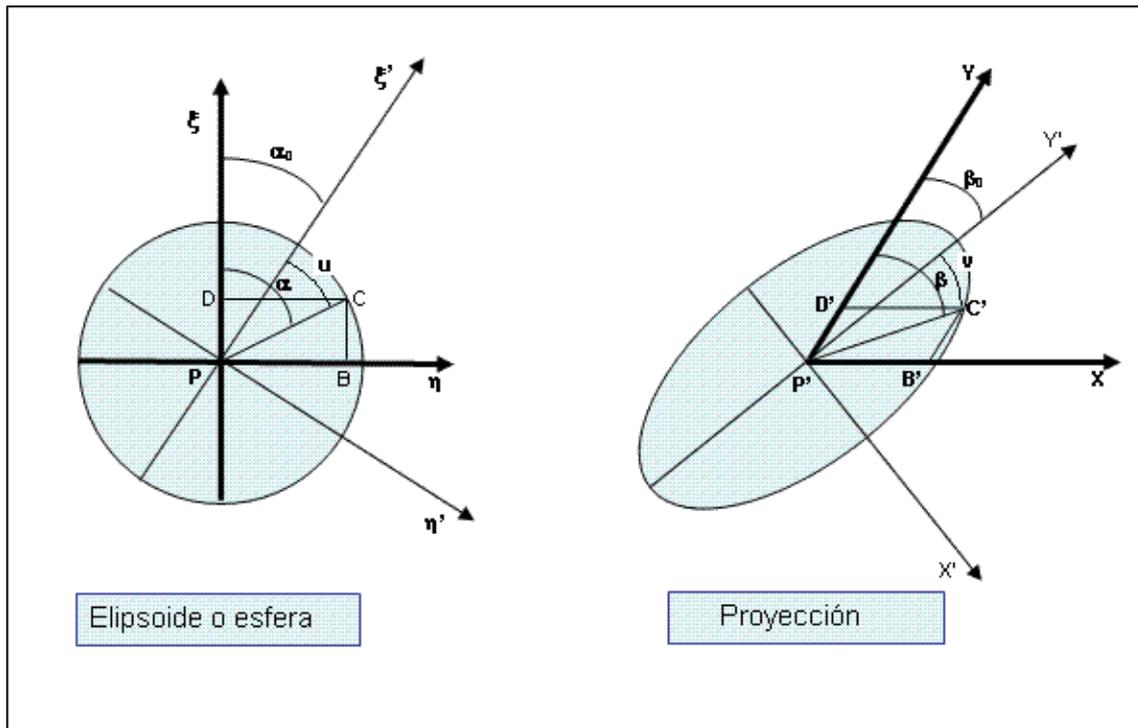


Figura 2.

Las expresiones obtenidas de la ecuación (31) se sustituyen en la primera forma fundamental y se tiene

$$\mathbf{J}ds^2 = \mathbf{N}^2 \cos^2 \varphi (y_\varphi dx - x_\varphi dy)^2 + \mathbf{M}^2 (-y_\lambda dx - x_\lambda dy)^2$$

Operando y reuniendo factores comunes se obtiene

$$(32) \quad ds^2 = \frac{1}{\mathbf{J}^2} (\mathbf{r}^2 y_\varphi^2 + \mathbf{M}^2 y_\lambda^2) dx^2 + \frac{1}{\mathbf{J}^2} (\mathbf{r}^2 x_\varphi^2 + \mathbf{M}^2 x_\lambda^2) dy^2 - \frac{2}{\mathbf{J}^2} (\mathbf{r}^2 x_\varphi y_\varphi + \mathbf{M}^2 x_\lambda y_\lambda)$$

La ecuación obtenida, donde para un punto determinado son constantes los distintos coeficientes, representa en general una curva cónica. Salvo en las singularidades de cada proyección, dicha curva resulta ser una elipse cuyos semiejes adquieren valores finitos cuando por radio del círculo infinitesimal se toma el valor  $ds = 1$ . La forma y medidas de esta elipse constituyen pues un elemento indicador sobre la naturaleza de la proyección concreta definida por (32) en los alrededores de cada punto; razón por la cual esta figura se conoce como *elipse de distorsión* o *elipse de Tissot* en honor al científico que le dio tal interpretación.

Una forma más sencilla de verlo es la siguiente: la circunferencia tiene un radio finito  $\rho$ , tan pequeño como se quiera para poder considerar el círculo plano, y su ecuación es

$$(33) \quad \xi^2 + \eta^2 = \rho^2$$

Los elementos transformados de  $\xi$  y  $\eta$  son  $ds_m' = P'B'$  y  $ds_n' = P'D'$  y siendo los módulos de deformación lineal según ambas direcciones  $m$  y  $n$  respectivamente, dan lugar a las ecuaciones siguientes:

$$\xi = \frac{\left(\overline{P'B'}\right)}{m} = \frac{y}{m} \quad \eta = \frac{\left(\overline{P'D'}\right)}{n} = \frac{x}{n} \quad \frac{x^2}{(n\rho)^2} + \frac{y^2}{(m\rho)^2} = 1$$

Esta última la ecuación es una elipse y para trazarla basta con el cálculo previo de  $m$  y  $n$ , o  $a$  y  $b$ , así como los ángulos  $i$  (o su complementario  $\varepsilon$ ),  $\beta$  y  $\beta_0$ ; todos ellos adquieren valores particulares para un punto dado  $P$  y, en consecuencia, se aplican a su homólogo  $P'$ .

En las proyecciones conformes, al ser el valor de  $k$  constante con independencia de la dirección considerada ( $m=n=k$ ), la elipse imagen será una circunferencia también. Propiedad que, a veces, se enuncia bajo la frase: *las proyecciones conformes mantienen la semejanza entre las formas (o figuras) diferenciales en la transformación.*

En la figura se representan también las direcciones de los diámetros conjugados ( $\xi'$ ,  $\eta'$ ) y sus homólogos ( $Y'$ ,  $X'$ ) que corresponden a los ejes máximo-mínimo de la elipse de distorsión. En consecuencia, los ángulos  $u$  y  $v$ , que forman  $C$  y  $C'$ , respectivamente, con los estos nuevos ejes de coordenadas permiten evaluar la desviación angular en el paso a la proyección. Así, resulta

$$\tan u = \frac{\eta'}{\xi'} \quad \text{y} \quad \tan v = \frac{X'}{Y'} \quad \text{siendo la alteración angular } \Delta u = u - v$$

Por otro lado, siendo la elipse proyección de la circunferencia de radio unidad, las relaciones de abscisas y ordenadas son:

$$a = \frac{Y'}{\xi'} \quad \text{y} \quad b = \frac{X'}{\eta'} \quad \text{por lo que} \quad \tan u / \tan v = \frac{\eta' Y'}{\xi' X'} = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{\tan u = \frac{a}{b} \tan v}$$

Siguiendo el gráfico, para referir las direcciones al meridiano, se pueden reescribir el acimut y su homólogo en el plano (direcciones de los elementos lineales) de esta forma

$$(34) \quad \alpha = u + \alpha_0 \quad \text{y} \quad \beta = v + \beta_0$$

La distorsión angular máxima ( $\Delta u_0$ ) se producirá en una dirección tal que se corresponderá con valores ( $u_0$ ,  $v_0$ ); si se hace  $\frac{\omega}{2} = u_0 - v_0$  y se halla el máximo de la función

$$\tan(\Delta u) = \tan(u - v) = \frac{(a - b)\tan u}{a + b \tan^2 u} \quad \text{derivando esta expresión respecto a } (\tan u) \text{ e}$$

igualando  $(\Delta u)' = 0$  se tiene

$$(\Delta u)' \sec^2(\Delta u) = \frac{(a - b)(a + b \tan^2 u) - (a - b)\tan^2 u(2b)}{(a + b \tan^2 u)^2} \quad \text{por tanto}$$

$$(35) \quad \boxed{\mathbf{a} - \mathbf{b} \tan^2 \mathbf{u}_0 = 0 \Rightarrow \tan \mathbf{u}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} \Rightarrow \tan \mathbf{v}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}} \Rightarrow \tan \frac{\omega}{2} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2\sqrt{\mathbf{a}\mathbf{b}}}}$$

En consecuencia, queda determinada aquella dirección, acimut elipsoidal y proyectado, en el que se produce la distorsión angular máxima

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} = \arctan \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} \\ \mathbf{v}_0 &= \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} = \arctan \sqrt{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}} \\ \alpha_{\omega=\max} &= \alpha_0 + \mathbf{u}_0 \quad \beta_{\omega=\max} = \beta_0 + \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

La distorsión máxima angular, a veces, interesa expresarla como función trigonométrica distinta de la tangente. En resumen, según las expresiones siguientes:

$$(37) \quad \boxed{\tan \frac{\omega}{2} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2\sqrt{\mathbf{a}\mathbf{b}}} \quad \cos \frac{\omega}{2} = \frac{2\sqrt{\mathbf{a}\mathbf{b}}}{\mathbf{a} + \mathbf{b}} \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} + \mathbf{b}}}$$

Se comprueba que, en las *proyecciones conformes*, no hay distorsión angular por ser  $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ .

La *distorsión de acimut*, de modo semejante a como se ha tratado la *distorsión angular*, queda definida como  $\Delta\alpha = \beta - \alpha$ , y dependerá de la relación entre las tangentes de  $\alpha$  y de  $\beta$  según la ecuación (20), la cual puede expresarse de esta otra manera, en función de  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\sin i$  y  $\cos i$ , valores tomados de las ecuaciones (23) y (16):

$$(38) \quad \tan \beta = \frac{\mathbf{n} \sin i \tan \alpha}{\mathbf{m} + \mathbf{n} \cos i \tan \alpha}$$

El análisis de esta ecuación muestra que cuando el acimut es cero resulta que no hay distorsión acimutal ( $\alpha = \beta = 0$ ); además, el acimut, distinto de cero, para el cual tampoco hay distorsión es el

que cumple la ecuación  $\tan \alpha = \frac{\mathbf{n} \sin i - \mathbf{m}}{\mathbf{n} \cos i}$

También existen, en general, dos direcciones donde el valor de la distorsión es máximo, para cuya obtención se diferencia la ecuación (38) llegando a una expresión  $d\alpha/d\beta$  igual a una fracción en que el numerador es el segundo miembro de la ecuación (24) y el denominador el segundo miembro de la ecuación (30), es decir,  $d\alpha/d\beta = k^2/\sigma$ . Por otro lado, si se diferencia la distorsión de acimut y se anula su derivada respecto a la dirección da lugar a

$$(39) \quad \frac{d(\Delta\alpha)}{d\beta} = 1 - \frac{d\alpha}{d\beta} = 0 \Rightarrow k^2 - \sigma = 0 \quad \text{que en su aspecto extenso}$$

da lugar a la fórmula para determinar las direcciones de máxima distorsión acimutal

$$(40) \quad \boxed{k^2 - \sigma = (\mathbf{n}^2 - \sigma) \tan^2 \alpha + 2\mathbf{m}\mathbf{n} \cos i \tan \alpha + (\mathbf{m}^2 - \sigma) = 0}$$

Además, se puede ver que en las *proyecciones equivalentes* ( $\sigma=1$ ) en esas direcciones donde se produce la máxima distorsión acimutal no hay distorsión lineal ( $k=1$ )

La fórmula que relaciona la distorsión angular y la distorsión acimutal,  $\Delta\alpha=(\beta_0-\alpha_0)-\Delta u$ , muestra otra consecuencia importante: *puede haber distorsión angular nula y distorsión acimutal distinta de cero*  $\{\Delta u = 0 \Rightarrow \Delta\alpha=(\beta_0-\alpha_0)\}$  y, recíprocamente, *se puede dar que no haya distorsión acimutal y haber distorsión angular del mismo valor anterior*  $\{\Delta\alpha = 0 \Rightarrow \Delta u=(\beta_0-\alpha_0)\}$ .

### 55.6. Distorsión por curvatura de las líneas geodésicas en la proyección y su corrección.

En la figura siguiente se representan las curvas paramétricas o curvas coordenadas de un punto cualquiera P (meridiano y paralelo) –normalmente curvas-, sus tangentes en P que determinan direcciones de referencia, y la línea geodésica de P a Q -igualmente curva- con su tangente que forma el pequeño ángulo  $\delta$  con la cuerda PQ.

Los ángulos  $\gamma$  (convergencia del meridiano de P) y  $\theta$  (orientación de la cuerda) se pueden determinar por fórmulas, pero, si se quiere hallar el acimut geodésico  $\alpha$  es menester calcular  $\delta$  aunque sea un término correctivo muy pequeño, ya que

$$(41) \alpha_{PQ} = \theta_{PQ} + \gamma_P + \delta_{PQ}$$

Siendo

$$(42) \theta_{PQ} = \arctan\left(\frac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P}\right) \quad \text{y} \quad \gamma = \arctan\left(\frac{x_\varphi}{y_\varphi}\right)_P$$

donde  $x_P, y_P, x_Q, y_Q$ , son las coordenadas rectangulares de los puntos P y Q del segmento en la proyección, y  $x_\varphi$  y  $y_\varphi$  son las derivadas parciales en el punto P.

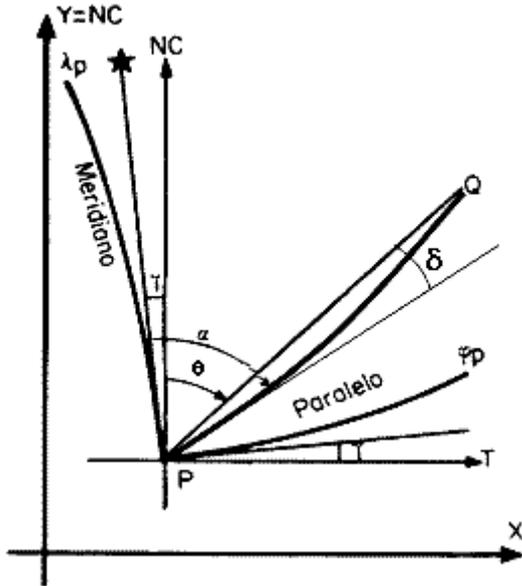


Figura 3.

Para una distancia  $s_{PQ}$  menor que el radio terrestre se pueden usar las siguientes fórmulas de los desarrollos de  $\delta$ , *corrección angular del arco a la cuerda*, y  $(s-d)$ , *diferencia del arco a la cuerda*

$$(43) \quad \delta_{PQ} = \frac{1}{2} k_P s_{PQ} + \frac{1}{6} \left( \frac{dK}{ds} \right)_P s_{PQ}^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{d^2K}{ds^2} \right)_P s_{PQ}^3 + \dots$$

$$(s-d)_{PQ} = \frac{1}{24} K_P^2 s_{PQ}^3 + \frac{1}{24} k_P \left( \frac{dK}{ds} \right)_P s_{PQ}^4 + \dots$$

Donde  $K_P$ ,  $(dK/ds)_P$  y  $(d^2K/ds^2)_P$  son la curvatura y sus derivadas primera y segunda en  $P$ .

En la práctica, usar las medidas de ángulos (direcciones) y distancias tomadas de coordenadas en la proyección, generalmente, se limita a las proyecciones conformes, únicas que se emplean para calcular redes geodésicas. En estos casos la curvatura  $K_{P\alpha}$  de una geodésica que pasa por  $P$  se puede determinar por la fórmula

$$(44) \quad K = \frac{1}{rm} \left( \frac{\partial \ln m}{\partial q} \sin \alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial \lambda} \cos \alpha \right)$$

Donde  $q, \lambda$  son las coordenadas isométricas de  $P$  y  $\alpha$  el acimut de la dirección  $PQ$ .

### 55.7. Clasificación de las proyecciones atendiendo a las deformaciones

Basándose en los conceptos anteriormente desarrollados, en relación con la deformación de elementos diferenciales entorno a un punto genérico (ángulo, superficie, distancia), y cuando la característica correspondiente se mantiene a lo largo y ancho de la superficie a cartografiar, las

proyecciones se clasifican en: conformes, equivalentes y arbitrarias cuando, en éstas, las distancias se conservan a lo largo de líneas de una determinada familia de curvas (por ejemplo meridianos, paralelos, almicantaratas o verticales).

- Las proyecciones conformes tienen como propiedad fundamental mantener la semejanza entre figuras diferenciales en torno a un punto P sobre el elipsoide y sus correspondientes en la proyección. Otra forma de expresarla es, que el ángulo que forman dos líneas cualesquiera que pasan por P es igual al formado por las homólogas en la proyección y la anamorfosis lineal en P es independiente de la dirección; o lo que es igual, la elipse de Tissot se convierte en un círculo y no hay distorsión angular.

En consecuencia, se cumple que

$$(45) \mathbf{n} = \mathbf{m} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}}}{\mathbf{r}} = \frac{\sqrt{\mathbf{G}}}{\mathbf{M}} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = 0$$

es decir, desarrollado con expresión de las coordenadas parciales adquiere la forma

$$\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right)^2 (\mathbf{x}_\lambda^2 + \mathbf{y}_\lambda^2) = \left(\frac{1}{\mathbf{M}}\right)^2 (\mathbf{x}_\varphi^2 + \mathbf{y}_\varphi^2) \Rightarrow (\mathbf{x}_\lambda^2 + \mathbf{y}_\lambda^2) = \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{M}}\right)^2 (\mathbf{x}_\varphi^2 + \mathbf{y}_\varphi^2) \text{ y simultáneamente}$$

$$\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\varphi + \mathbf{y}_\lambda \mathbf{y}_\varphi = 0$$

que se cumplen para las expresiones siguientes, denominadas condiciones de Cauchy-Riemann

$$(46) \boxed{\mathbf{x}_\lambda = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{M}} \mathbf{y}_\varphi \quad \mathbf{y}_\lambda = -\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{M}} \mathbf{x}_\varphi}$$

Pero, si se desea representar la esfera en vez del elipsoide, quedan reducidas a

$$(47) \boxed{\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{y}_\varphi \cos \varphi \quad \mathbf{y}_\lambda = -\mathbf{x}_\varphi \cos \varphi}$$

Otra forma de estas –común a la representación de elipsoide o esfera-, donde **q** es *latitud isométrica o variable de Mercator*, es

$$(48) \boxed{\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{y}_q \quad \mathbf{y}_\lambda = -\mathbf{x}_q}$$

Los tres últimos grupos de fórmulas se conocen como condiciones de Cauchy-Riemann

- Las proyecciones equivalentes o autálicas son aquellas cuya propiedad fundamental es la conservación de las áreas de recintos cerrados al ser proyectados. Esto es, si las integrales definidas de superficie halladas para un recinto sobre el elipsoide y su homólogo son idénticas.

$$(49) \mathbf{S} = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{M} \mathbf{r} d\varphi d\lambda \quad \Sigma = \iint_{\Sigma} \mathbf{J} d\varphi d\lambda = \iint_{\Sigma} (\mathbf{x}_\lambda \mathbf{y}_\varphi - \mathbf{x}_\varphi \mathbf{y}_\lambda) d\varphi d\lambda$$

$$(50) \boxed{\mathbf{S} \equiv \Sigma}$$

En consecuencia, si ha de cumplirse cualquiera que sea el recinto considerado, salvo singularidades, implica que los integrandos han de ser iguales

$$(51) \boxed{\mathbf{x}_\lambda \mathbf{y}_\varphi - \mathbf{x}_\varphi \mathbf{y}_\lambda} = \mathbf{M} \mathbf{r} \text{ elipsoide} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x}_\lambda \mathbf{y}_\varphi - \mathbf{x}_\varphi \mathbf{y}_\lambda} = \mathbf{R} \mathbf{c} \mathbf{o} \mathbf{s} \varphi \text{ esfera}$$

La condición de equivalencia, también se suele expresar de esta otra manera:

$$(52) \boxed{\sigma = \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{m} \mathbf{n} \sin i = \mathbf{m} \mathbf{n} \cos \varepsilon = 1}$$

- Las proyecciones *arbitrarias* no tienen una característica fundamental sino que se imponen determinadas condiciones de compromiso o reglas adecuadas a un fin determinado. No obstante, existen las denominadas equidistantes o automecoicas que no pueden cumplir el significado etimológico: conservar las distancias, pues lo contrario implicaría que tampoco existirían deformaciones en área ni en ángulo, lo cual es imposible. Sin embargo, es posible imponer esa condición a alguna determinada familia de curvas como a los meridianos, a los paralelos, a los verticales o a las almicantaratas. En estos casos es frecuente su aplicación a retículas ortogonales. Entre ellas se incluyen algunos ejemplos sobre la condición impuesta.

Por ejemplo, la *proyección equidistante a lo largo de meridianos* impone la condición de que  $\mathbf{m}$  sea idénticamente uno. Por tanto, según la ecuación (23)

$$(53) \mathbf{m} = \mathbf{k}_{\alpha=0} = \frac{\sqrt{\mathbf{G}}}{\mathbf{M}} = \frac{(\mathbf{x}_\varphi^2 + \mathbf{y}_\varphi^2)^{1/2}}{\mathbf{M}} = \mathbf{1} \Rightarrow \text{esta } \boxed{(\mathbf{x}_\varphi^2 + \mathbf{y}_\varphi^2) = \mathbf{M}} \text{ es la condición}$$

El mismo criterio se puede aplicar a los “*verticales*” desde un punto, polo u origen, de coordenadas  $\mathbf{P}_0(\varphi_0, \lambda_0)$ . En tal caso, basta con sustituir en la ecuación anterior las derivadas parciales respecto a la latitud por respecto al arco cenital desde  $\mathbf{P}_0$ .

Un segundo ejemplo, la *proyección equidistante a lo largo de paralelos* impone la condición de que  $\mathbf{n}$  sea idénticamente uno. Por tanto, según la ecuación (23)

$$(54) \mathbf{n} = \mathbf{k}_{\alpha=\pi/2} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}}}{\mathbf{r}} = \frac{(\mathbf{x}_\lambda^2 + \mathbf{y}_\lambda^2)^{1/2}}{\mathbf{r}} = \mathbf{1} \Rightarrow \text{esta } \boxed{(\mathbf{x}_\lambda^2 + \mathbf{y}_\lambda^2) = \mathbf{r}} \text{ es la condición}$$

Se sigue un razonamiento semejante al del primer ejemplo, es decir, almicantaratas en vez de paralelos. El cambio de la condición, en este caso, es permutar longitud por acimut. No obstante, en los dos ejemplos alternativos, el segundo miembro depende del cambio de coordenadas esféricas para estimar los radios de curvatura adecuados.

## **Bibliografía**

- [1] Dirk J. Struik, 'Geometría diferencial clásica', Aguilar 1966
- [2] G.B: Lauf, 'Geodesy and Map Projections', TAFE Publications Unit 1983
- [3] Lev M. Bugayevskiy, Jhon P. Snyder, 'MAP PROJECTIONS a Reference Manual', Taylor & Francis 1995
- [4] Escuela de Topografía y Geodesia, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 1º', Servicio Geográfico del Ejército 1955
- [5] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 2º', SGE 1944
- [6] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 3º', SGE 1947
- [7] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Complementos sobre representación conforme', SGE 1951
- [8] Estado Mayor del Ejército, 'Reglamento de Cartografía Militar (1935), Tablas'. SGE 1942
- [9] Estado Mayor Central, 'Característica y tablas de la Proyección Lambert de Canarias'. SGE 1945
- [10] Estado Mayor Central, 'Proyección Universal Transversa Mercator'. SGE 1976
- [11] John P. Snyder 'Map Projections-A Working Manual', Professional paper 1395 US Government P. Office 1987
- [12] Juan Mena Berrios 'Geodesia Superior', Centro Nacional de Información Geográfica 2008
- [13] A. Lujan, 'Apuntes de cartografía', no publicados

**Tema 56. Representación plana Conforme: Proyecciones conformes. Sistemas isométricos del elipsoide, de la esfera y del plano. Correspondencia entre sistemas isométricos mediante funciones analíticas. Condiciones de Conformidad Cauchy-Riemann. Líneas isométricas. Isométrica estacionaria o base. Ejemplos de proyecciones conformes. Proyecciones conformes en geodesia.**

**56.1. Representación plana Conforme: Proyecciones conformes**

Dos superficies  $S$  y  $S_1$  se dicen que están *representadas* una sobre otra si existe una correspondencia biunívoca entre sus puntos. Si  $S$  está dada por la ecuación vectorial  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y la superficie  $S_1$  por  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ , la representación de una región de  $S$  sobre  $S_1$  queda establecida por las relaciones

$$(1) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

donde  $u_i$  y  $v_i$  son funciones uniformes con derivadas parciales continuas tales que el determinante funcional o jacobiano no se anule,  $\partial(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) / \partial(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$ . Si se utiliza (1) para transformar las coordenadas  $(u_i, v_i)$  de la  $S_1$  en las  $(u, v)$  de la misma superficie, la ecuación de  $S_1$  resulta en la forma  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Dos puntos de  $S$  y  $S_1$ , que se corresponden, se designan por los mismos valores  $(u, v)$

$$(2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \Leftrightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Se entiende por *transformación o proyección conforme* entre dos regiones homólogas en sendas superficies aquel sistema donde el ángulo de dos curvas cualesquiera orientadas que pasen por un punto  $P$  de  $S$  es igual al formado por las curvas homólogas en  $S_1$ . Sean estos ángulos  $\theta$  y  $\theta_1$ , que han de ser iguales por condición, y están formados por los elementos  $\{(\mathbf{dr}, \delta\mathbf{r}) \in S; (d_1\mathbf{r}, \delta_1\mathbf{r}) \in S_1\}$ . Estando determinado el ángulo de dos direcciones que pasan por un punto  $P$  de una superficie por la expresión

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_u du\delta u + (\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v)(du\delta v + dv\delta u) + \mathbf{r}_v \bullet \mathbf{r}_v dv\delta v}{|\mathbf{dr}| \cdot |\delta\mathbf{r}|} = \\ (3) &= \frac{\mathbf{E}du\delta d + \mathbf{F}(du\delta v + dv\delta u) + \mathbf{G}dv\delta d}{\sqrt{\mathbf{E}du^2 + 2\mathbf{F}dudv + \mathbf{G}dv^2} \sqrt{\mathbf{E}\delta d^2 + 2\mathbf{F}\delta d\delta u + \mathbf{G}\delta u^2}} = \\ &= \mathbf{E} \frac{du}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} + \mathbf{F} \left( \frac{du}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} \right) + \mathbf{G} \frac{dv}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} \end{aligned}$$

se toman como par de elementos de referencia correspondientes  $\delta \mathbf{r}$  y  $\delta_1 \mathbf{r}$ , tales que sus coordenadas curvilíneas sean  $\delta \mathbf{u} = \text{arbitrario}$  y  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , se sustituyen en la expresión (3) para una y otra superficie, y se igualan ambas

$$\frac{\mathbf{E} d\mathbf{u} \delta \mathbf{d} + \mathbf{F} d\mathbf{v} \delta \mathbf{d}}{d\mathbf{s} \sqrt{\mathbf{E} \delta \delta^2}} = \frac{\mathbf{E}_1 d\mathbf{u} \delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_1 d\mathbf{v} \delta \mathbf{v}}{d\mathbf{s}_1 \sqrt{\mathbf{E}_1 \delta \mathbf{u}^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{\mathbf{E}} d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{F} d\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{E}} d\mathbf{s}} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}_1} d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}_1} + \frac{\mathbf{F}_1 d\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{E}_1} d\mathbf{s}_1}}$$

Y como esta igualdad ha de cumplirse cualquiera que sea la dirección, determinada por la relación  $d\mathbf{v}/d\mathbf{u}$  se cumplirán, simultáneamente las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{E}} d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}_1} d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}_1} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{F} d\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{E}} d\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{F}_1 d\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{E}_1} d\mathbf{s}_1}$$

En consecuencia, la relación de elementos lineales homólogos en un punto P es la misma con independencia de la dirección

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{s}_1}{d\mathbf{s}} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}_1}}{\sqrt{\mathbf{E}}} = \frac{\mathbf{F}_1 \sqrt{\mathbf{E}}}{\mathbf{F} \sqrt{\mathbf{E}_1}} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{E} = \mathbf{r}_{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{r}_{\mathbf{u}} \quad \mathbf{F} = \mathbf{r}_{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{r}_{\mathbf{v}}$$

Dicho de otra manera el cociente  $\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{s}_1}{d\mathbf{s}}$ , independiente de la dirección  $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{u}}$ , es una función de punto dependiente de los parámetros  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , y por tanto

$$(5) \quad \boxed{d\mathbf{s}_1 = \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{s}}$$

$$(6) \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{k}^2 \mathbf{E} \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{k}^2 \mathbf{F} \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{k}^2 \mathbf{G}$$

En resumen, queda establecido que *es condición necesaria y suficiente para que una representación sea conforme que exista proporcionalidad entre los elementos de arco ( $d\mathbf{s}$   $d\mathbf{s}_1$ ) correspondientes a puntos homólogos.*

Si esto se aplica a una figura pequeña con centro en P, la transformada correspondiente, centrada en P', resultará tanto más semejante a aquella cuanto más pequeña sea. Lo que se puede expresar así: *una condición necesaria y suficiente para que una representación sea conforme es que exista semejanza en lo infinitesimal.*

## 56.2. Sistemas isométricos del elipsoide, de la esfera y del plano

De la ecuación (5) se desprende que, si  $d\mathbf{s} = 0$ , también  $d\mathbf{s}_1 = 0$ . Por consiguiente, si se admiten elementos imaginarios, se puede decir que en una representación conforme se corresponden los elementos isotropos. Entonces, salvo singularidades, sobre cada superficie se tiene una red de curvas isotropas que pueden ser adoptadas como líneas coordenadas; en este caso es  $\mathbf{E} = \mathbf{G} = 0$  y la primera forma fundamental en ambas superficies queda reducida a

$$(7) \quad d\mathbf{s}^2 = 2\mathbf{F} d\mathbf{u} d\mathbf{v} \quad \text{y} \quad d\mathbf{s}_1^2 = 2\mathbf{F}_1 d\mathbf{u} d\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{F}_1 = \mathbf{k}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{F}$$

lo que prueba que si se corresponden las curvas isotropas los elementos lineales homólogos  $ds$  y  $ds_1$  son proporcionales. Es decir, *una condición necesaria y suficiente para que una representación sea conforme es que se correspondan las curvas isotropas.*

Introducido este concepto, se puede realizar una transformación de coordenadas en ambas superficies definida por

$$(8) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - i\mathbf{v}_1$$

Las primeras formas fundamentales en las nuevas coordenadas, son ahora escritas en función de éstas

$$(9) \quad d\mathbf{s}^2 = 2F(d\mathbf{u}_1^2 + d\mathbf{v}_1^2) \quad d\mathbf{s}_1^2 = 2F_1(d\mathbf{u}_1^2 + d\mathbf{v}_1^2)$$

donde  $F$  y  $F_1$  son funciones de estas nuevas coordenadas  $u_1$  y  $v_1$ .

En consecuencia, si se puede introducir un sistema de curvas como curvas coordenadas, de modo que la primera forma fundamental  $ds^2$  adopte la forma

$$(10) \quad \boxed{d\mathbf{s}^2 = \lambda(d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{v}^2) \quad \text{siendo} \quad \lambda = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

este sistema coordenado se denomina isométrico (o isotermo) y es necesariamente ortogonal ( $F=0$ ). Por ser iguales las longitudes de  $du$  y  $dv$  se puede calificar la naturaleza de estos sistemas coordenados como *isométricos* diciendo que *dividen la superficie en cuadrados infinitesimales.*

Por tanto, la ecuación (9) expresa la propiedad de que dos superficies admiten una representación conforme siempre que un sistema isométrico de una de ellas corresponda biunívocamente al sistema isométrico de la otra.

La primera forma en el elipsoide de revolución es

$$(11) \quad d\mathbf{s}^2 = (\mathbf{N} \cos \varphi)^2 d\lambda^2 + \mathbf{M}^2 d\varphi^2 = \mathbf{r}^2 d\lambda^2 + \mathbf{M}^2 d\varphi^2$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{V}} \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{V}^3} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{V}^2 = 1 + \mathbf{e}^2 \cos^2 \varphi$$

$$(12) \quad \boxed{d\mathbf{s}^2 = \frac{\mathbf{c}^2 \cos^2 \varphi}{\mathbf{V}^2} \left( d\lambda^2 + \left( \frac{1}{\mathbf{V}^2 \cos \varphi} d\varphi \right)^2 \right) = \frac{\mathbf{c}^2 \cos^2 \varphi}{\mathbf{V}^2} (d\lambda^2 + dq^2)}$$

Y la ecuación (12), *sistema isométrico en el elipsoide de revolución*, es la forma isométrica para las coordenadas latitud y longitud elipsoidal, habiendo introducido la nueva variable  $q$  denominada *latitud isométrica o variable de Mercator.*

El *sistema isométrico en la esfera* es fácil deducible a partir de (12) pues basta igualar la excentricidad a cero quedando de esta manera

$$(13) \quad \boxed{\mathbf{ds}_e^2 = R^2 \cos^2 \varphi \left( d\lambda^2 + \left( \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi \right)^2 \right) = R^2 \cos^2 \varphi (d\lambda^2 + dq^2)}$$

Por último, las coordenadas cartesianas rectangulares  $(x, y)$  del plano forman, per se, un sistema isométrico. Otra forma de sistema isométrico en el plano es la transformación del sistema de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , que da lugar a la expresión siguiente para la primera forma fundamental.

$$(14) \quad \mathbf{ds}_p^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\gamma)^2 = \rho^2 \left( \left( \frac{d\rho}{\rho} \right)^2 + d\gamma^2 \right) = e^{2u} (du^2 + d\gamma^2) \text{ siendo}$$

$$\mathbf{u} = \ln \rho$$

### 56.3. Correspondencia entre sistemas isométricos mediante funciones analíticas. Condiciones de Conformidad de Cauchy-Riemann

La teoría de funciones de variable compleja permite establecer las condiciones necesarias que deben cumplir la región y su contorno para la representación conforme de la superficie  $S$  en la superficie  $S_1$ . Tiene interés desde el punto de vista de los distintos sistemas de proyección utilizados en cartografía, y particularmente en aquellos íntimamente ligados con el ámbito geodésico.

Como es sabido, en el contexto de variable compleja una función  $w = f(z)$  expresa dentro de su dominio de existencia una cierta correspondencia entre puntos del espacio origen  $z$  y del espacio imagen  $w$ ; ambos bidimensionales, y por ello designados en adelante como planos. Esta interpretación geométrica de las funciones de variable compleja posibilita mostrar de forma sencilla las propiedades de  $f$  dibujando los planos  $z$  y  $w$  por separado y observando cómo, al pasar del plano origen al plano imagen, la función transforma los distintos elementos angulares, lineales y superficiales.

Dado que toda función de variable compleja se define en su región de existencia (salvo singularidades), si se considera que todo punto  $z$  tiene una y sólo una imagen en  $w$ , entonces se sustituye el término correspondencia por el de *aplicación*, escribiendo la función  $f$  mediante la expresión:

$$(15) \quad \mathbf{w} = \mathbf{f}(z) = \mathbf{u}(x, y) + i\mathbf{v}(x, y)$$

Aquí las funciones componentes  $u$  y  $v$  simbolizan las ecuaciones de transformación, siendo especialmente interesante el caso en el cual dichas ecuaciones hacen corresponder asimismo

cada punto del plano  $w$  con uno y sólo uno del plano  $z$ , en cuya circunstancia se dice que la aplicación compleja es *biunívoca*.

Las relaciones que establecen las aplicaciones complejas entre los planos  $z$  y  $w$  son de muy diversa índole. Así por ejemplo, según los efectos que una determinada función produce sobre un conjunto de puntos del plano  $z$ , la aplicación define una traslación, rotación, reflexión, dilatación, etc. En este caso interesan el tipo de funciones *conformes* que se utilizan en cartografía.

Interesa saber las condiciones que han de verificar las funciones  $u$  y  $v$  para que la aplicación (6) sea conforme. Para ello se supone una curva  $C$  definida en el plano  $z$  por la ecuación:

$\mathbf{C} \equiv \mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)$ , y como se considera la existencia en  $z_0$  de su derivada, la tangente a la curva en dicho punto está determinada por el complejo  $\mathbf{z}'(t_0) = \mathbf{x}'(t_0) + i\mathbf{y}'(t_0)$

Según esta expresión, resulta evidente que el ángulo de pendiente de la tangente en  $z_0$ , que designaremos como  $p_0$ , es igual al argumento del número  $\mathbf{z}'(t_0)$ :  $p_0 = \mathbf{arg} \mathbf{z}'(t_0)$

A continuación, se supone que  $C$  es una curva derivable en un cierto intervalo del parámetro  $t$  entre los cuales se encuentra  $t_0$ ; se aplica la transformación  $w=f(z)$  en todos los puntos del intervalo. Así, se obtiene la curva  $L$  obtenida en el plano  $w$  de ecuación:

$$(16) \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{z}(t)] = \mathbf{u}[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)] + i\mathbf{v}[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)]$$

Pero, también se supone que la curva  $L$  en este plano (homóloga de  $C$ ) es derivable en dicho intervalo de  $t$ , por lo que es lícito escribir:

$$(17) \quad \mathbf{w}'(t) = \mathbf{f}'[\mathbf{z}(t)] = \mathbf{u}'[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)] + i\mathbf{v}'[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)]$$

y, el ángulo de pendiente  $q_0$  en el punto  $w_0=f(z_0)$  de la curva  $L$  es:  $q_0 = \mathbf{arg} \mathbf{w}'(t_0)$

Por tanto, habrá de verificarse:

$$(18) \quad \mathbf{w}'(t_0) = \left( \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right)_0 = \left( \frac{d\mathbf{w}}{dz} \right)_0 \left( \frac{dz}{dt} \right)_0 = \mathbf{f}'(z_0) \mathbf{z}'(t_0)$$

De ahí, el argumento  $w'_0=f'(z_0)$  de la tangente a  $L$  en  $w_0$ , es la suma de los argumentos de las dos funciones  $f'$  y  $z'$  cuyo producto da esa derivada  $w'_0$

$$(19) \quad \boxed{\mathbf{arg} \mathbf{w}'(t_0) = \mathbf{arg} \mathbf{f}'(z_0) + \mathbf{arg} \mathbf{z}'(t_0)}$$

Si ahora se suponen dos curvas  $C_1$  y  $C_2$  definidas en el plano  $z$  que se cortan en  $z_0$ , y sus correspondientes en el plano  $w$  son las curvas  $L_1$  y  $L_2$  que se cortan en  $w_0 = f(z_0)$ , se aplica el razonamiento anterior, considerando parámetros genéricos  $t$  y  $s$ , y las ecuaciones de las curvas resultan ser:

$$(20) \quad \begin{array}{ll} C_1 \equiv z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) & C_2 \equiv z_2(s) = x_2(s) + iy_2(s) \\ L_1 \equiv w_1(t) = f(z_1(t)) & L_2 \equiv w_2(s) = f(z_2(s)) \end{array}$$

Operando según la ecuación (19), que se aplica a cada par de curvas homólogas por separado, y restando ambas se obtiene la igualdad:

$$(21) \quad \boxed{\arg w_1'(t_0) - \arg w_2'(t_0) = \arg z_1'(t_0) - \arg z_2'(t_0)}$$

Se verifica que, bajo las condiciones impuestas, el ángulo formado por las curvas  $C1$  y  $C2$  en el punto  $z_0$  del plano  $z$ , es el mismo que el formado por las curvas  $L1$  y  $L2$  en el punto  $w_0 = f(z_0)$  del plano  $w$ . La condición de conformidad queda confirmada, pero, siempre que exista la derivada en el punto considerado  $z_0$ , es decir, *si una función compleja de variable compleja  $f(z)$  tiene derivada no nula en todos los puntos de una región  $R$ , la aplicación  $w=f(z)$  es conforme en  $R$ .*

Una función  $w = f(z)$  es *analítica* en una región  $R$  del plano  $z$  cuando dicha función tiene derivada en todos los puntos de  $R$ . De esta definición y de lo indicado antes, se deduce que *una transformación es conforme en  $R$  si la correspondiente función es analítica y además no anula su derivada en ningún punto de  $R$ .*

Se obtiene una condición necesaria que nos indique, de forma sencilla, si una función es o no analítica en una determinada región. Para ello supongamos que la función en estudio es diferenciable en todos los puntos de  $R$ , con lo cual para todo  $z \in R$  existe el límite:

$$(22) \quad w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Considerando las componentes de  $w$ , este límite podemos escribirlo así

$$w' = f'(z) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

La existencia de este límite exige que, con independencia del modo como  $\Delta z$  tiende a cero, sea único. En consecuencia se elige primero la dirección OX-real con lo que  $\Delta y=0$  y, a continuación la paralela a OY-imaginaria con lo que  $\Delta x=0$ .

$$w' = f'(z) = \lim_{(\Delta x) \rightarrow (0)} \frac{[u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x}$$

$$w' = f'(z) = \lim_{(\Delta y) \rightarrow (0)} \frac{[u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{i\Delta y} = -iu_y + v_y$$

Agrupando partes reales e imaginarias estas expresiones quedan de la forma

$$w' = f'(z) = \lim_{(\Delta x) \rightarrow (0)} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)]}{\Delta x} + i \lim_{(\Delta x) \rightarrow (0)} \frac{[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} = u_x + iv_x$$

$$w' = f'(z) = \lim_{(\Delta y) \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)]}{i\Delta y} + i \lim_{(\Delta y) \rightarrow 0} \frac{[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{i\Delta y} = -iu_y + v_y$$

En virtud de la definición y unicidad del límite, el resultado de ambos tiene que ser idéntico y, por tanto, serán iguales sus partes reales e imaginarias y la *condición necesaria para que  $f(z)$  sea analítica en una región es que en todos sus puntos se verifiquen las ecuaciones siguientes:*

$$(23) \quad \boxed{u_x = v_y \quad u_y = -v_x}$$

Igualdades que reciben el nombre de *ecuaciones o condiciones de Cauchy-Riemann*

Como consecuencia de lo dicho, puede asegurarse que *una función de variable compleja es analítica en una región  $R$ , si existen, son continuas y las derivadas parciales de sus componentes satisfacen las ecuaciones de Cauchy – Riemann.* En tal caso la derivada de la función en un punto  $z$  de  $R$  se calcula mediante cualquiera de las expresiones:

$$(24) \quad \boxed{f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y}$$

Es frecuente que interese definir la función  $w = f(z)$  de manera que  $z$  venga en función de coordenadas polares por su módulo  $\rho$  y su argumento  $\theta$  en lugar de hacerlo por las componentes cartesianas  $x$  e  $y$ , por ejemplo, en las proyecciones cónicas. En tales casos (15) se escribe en la forma:

$$(25) \quad \boxed{w = f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)}$$

Expresión donde  $\rho$  y  $\theta$  están relacionadas con  $x$  e  $y$  por las igualdades:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

Se supone que las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  respecto a  $x$  e  $y$  existen y son continuas. Derivando las componentes de  $w$  se tiene:

$$(26) \quad \begin{aligned} u_\rho &= u_x x_\rho + u_y y_\rho & u_\theta &= u_x x_\theta + u_y y_\theta \\ \text{Por lo cual} \quad u_\rho &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta & u_\theta &= -u_x \rho \sin \theta + u_y \rho \cos \theta \end{aligned}$$

De forma análoga se obtienen las de  $v$

$$(27) \quad v_\rho = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \quad v_\theta = -v_x \rho \sin \theta + v_y \rho \cos \theta$$

Si, además, las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  verifican las ecuaciones de Cauchy – Riemann en un punto  $z$  de  $R$ , entonces se podrán escribir las relaciones (26) en la forma equivalente:

$$u_\rho = v_y \cos \theta - v_x \sin \theta \quad u_\theta = -v_y \rho \sin \theta - v_x \rho \cos \theta$$

Comparando esta con la ecuaciones (27) se obtienen las identidades que constituyen las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares:

$$(28) \quad \boxed{u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad u_\theta = -\rho v_\rho}$$

Para hallar la ecuación (24) en función de las expresiones en polares, se resuelve el sistema de las ecuaciones (26)

$$\begin{bmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{-1}{\rho} \sin \theta \\ \sin \theta & \frac{1}{\rho} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{bmatrix}$$

y se sustituyen en ella los valores  $u_x$  y  $u_y$  obtenidos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' = \mathbf{f}'(z) = u_x + i v_y &= u_\rho \cos \theta - \frac{u_\theta}{\rho} \sin \theta - i \left( u_\rho \sin \theta + \frac{u_\theta}{\rho} \cos \theta \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{f}'(z) &= u_\rho (\cos \theta - i \sin \theta) - \frac{u_\theta}{\rho} (i \cos \theta + \sin \theta); \quad \frac{u_\theta}{\rho} = -v_\rho \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{w}' = \mathbf{f}'(z) &= u_\rho (\cos \theta - i \sin \theta) + i v_\rho (\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned}$$

$$(29) \quad \boxed{\mathbf{w}' = \mathbf{f}'(z) = e^{-i\theta} (u_\rho + i v_\rho) = u_x + i v_x}$$

#### 56.4. Líneas isométricas. Isométrica estacionaria o base

En las ecuaciones anteriores, de la (8) a la (10), se inició la condición que asociaba los sistemas de coordenadas isométricas o isotermas con la característica de que dividen la superficie en cuadrados infinitesimales. Si el sistema  $(u, v)$  cumple tal condición y se supone la existencia de otro isométrico  $(\alpha, \beta)$ , definido en función del anterior por las expresiones

$$(30) \quad \alpha = \alpha(u, v) = \text{cte} \quad \beta = \beta(u, v) = \text{cte.}$$

Deberán existir dos funciones  $\lambda$  y  $\Lambda$  acordes con la definición de la ecuación (10)

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2) = \Lambda(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

Así, las condiciones de Cauchy-Riemann expresan que  $(\alpha + i\beta)$  sea una función analítica de la variable compleja  $(u + iv)$ , según la expresión

$$(31) \quad \boxed{(\alpha + i\beta) = f(u + iv)}$$

Teorema: si  $\{u=\text{cte.}, v=\text{cte.}\}$  forman un sistema de coordenadas isométricas, cualquier otro sistema isométrico esta definido por

$$(32) \quad \boxed{\mathbf{R}[f(u + iv)] = \alpha \quad \mathbf{I}[f(u + iv)] = \beta}$$

siendo R e I las componentes real e imaginaria de una función analítica arbitraria de la variable compleja  $(u + iv)$ .

Mediante estos sistemas isométricos se puede representar una superficie S sobre otra  $S_1$  de infinidad de maneras, dependientes de la elección de la función analítica arbitraria de variable compleja.

Según la expresión (6), en una representación conforme de una superficie S en otra  $S_1$ , las primeras formas diferenciales son proporcionales y, además, el factor  $k^2$  es el cuadrado del

módulo de deformación lineal en el punto considerado. *Líneas isométricas* son aquellas a lo largo de las cuales el módulo de deformación lineal es constante ( $ds_1/ds=k=m=n=cte.$ ) en cada punto de ella con independencia de la dirección considerada. Las trayectorias ortogonales a las isométricas se denominan *líneas isomorfas*. Ambas constituyen sendos haces de curvas ortogonales que representan la retícula de una superficie S en otra S<sub>1</sub>.

Propiedades de las isométricas son:

- por un punto de la superficie pasa una isométrica y sólo una; si pasara una segunda tendría que ser  $k_1$  igual a  $k_2$  cuando por hipótesis  $k_1 \neq k_2$ . Es decir, las isométricas no se cruzan.
- en las proyecciones no conformes no se puede definir una familia de líneas isométricas, aunque pueda darse una línea donde se cumpla la condición ( $ds_1/ds=k=m=n=cte.$ ), pero deja de cumplirse en su inmediata vecindad cuando la elipse de Tissot deja de ser circunferencia.
- la representación deja de ser biunívoca cuando el módulo de deformación  $ds_1/ds$  tiende a cero o a infinito, ya que el segmento  $ds_1$  se convertiría en un punto o en una superficie. Además, en general, existe una línea (o un punto) donde adquiere un valor mínimo.
- el valor mínimo de la isométrica suele ser la unidad y coincidir con una línea utilizada para imponer las condiciones iniciales. Por ejemplo, el meridiano central de la proyección transversa de Mercator o el paralelo origen de una cónica conforme de Lambert.
- La isométrica en que la deformación adquiere valor mínimo se denomina *estacionaria o base*. En su entorno, y alejándose, el módulo de deformación o anamorfosis crece muy lentamente, permanece casi estacionario, de ahí su nombre.

### 56.5. Ejemplos de proyecciones conformes

Es útil y común a las distintas proyecciones conformes, tal y como se ha dicho en el apartado 2, considerar un cambio de variable para trabajar con coordenadas isométricas que faciliten los desarrollos. Consiste en introducir la llamada *latitud isométrica q* en función de la latitud  $\varphi$ .

De las ecuaciones (12) y (13) se tiene la siguiente ecuación a integrar

$$dq = \frac{1}{V^2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi$$

Haciendo algunas transformaciones se puede presentar de forma más sencilla para su integración

$$dq = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \frac{e \cos \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{d(\sin \varphi)}{1 - (\sin \varphi)^2} - e \frac{d(e \sin \varphi)}{1 - (e \sin \varphi)^2}$$

Como quiera que ambos términos tienen la forma  $\frac{dt}{1-t^2}$ , cuya primitiva es el argumento tangente hiperbólica de  $t$ , resulta para la *latitud isométrica, o variable de Mercator*, la siguiente expresión

$$(33) \quad \boxed{q = \arg \operatorname{th}(\sin \varphi) - e \arg \operatorname{th}(e \sin \varphi)}$$

Sin embargo, es más conocida la expresión siguiente que es equivalente

$$(34) \quad \boxed{q = \operatorname{In} \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \operatorname{In} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} = \operatorname{In} \cot \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e}{2} \operatorname{In} \frac{1 + e \cos \theta}{1 - e \cos \theta} \text{ siendo}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi}$$

La latitud isométrica en la esfera se obtiene de las ecuaciones (33) y (34) haciendo  $e=0$

$$(35) \quad \boxed{q = \arg \operatorname{th}(\sin \varphi) = \operatorname{In} \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{In} \cot \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi}$$

Primer ejemplo: Proyección Mercator. Se trata de una proyección cilíndrica directa y conforme.

Su ecuación:  $\boxed{(x + iy) = R(\lambda + iq)}$ , donde  $R$  es una constante de escala. La representación de meridianos y paralelos son rectas ortogonales, paralelas a los ejes  $OX$  y  $OY$ , de respectivas ecuaciones  $(y=q)$  y  $(x=\lambda)$ . Los polos son puntos singulares. En principio, para la representación del globo hasta latitudes elevadas, se adopta como constante  $R$  el semieje ecuatorial  $a$ . La representación del ecuador es la isométrica base o estacionaria; el coeficiente de deformación lineal crece con la latitud, y más rápidamente cuanto mayor es ésta.

Su propiedad característica es que las *loxodromas* se representan como rectas, facilitando el trazado rumbos o acimutes constantes para la navegación. Tradicionalmente se utiliza para la confección de cartas náuticas, por esta misma razón. El inconveniente de la deformación considerable en latitudes altas, en la confección de cartas de costas y portulanos, se salva asignando a la constante  $R$  el valor  $N_h \cos \varphi_h$ , siendo  $\varphi_h$  la latitud ‘media’ de la hoja. Este valor es referencia para consignar la *escala general* de cada carta náutica que se encuentra reflejada en la información marginal con la expresión *escala 1:xxx en la latitud  $\varphi_h$* .

La convergencia y anamorfosis, partiendo de  $\boxed{(x + iy) = R(\lambda + iq)}$ , según las ecuaciones generales son:

$$(36) \quad \tan \gamma = \frac{x_\varphi}{y_\varphi} = \frac{0}{dq/d\varphi} = 0 \quad \text{los meridianos son rectas paralelas a } OY$$

$$(37) \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} = \frac{\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}}{\mathbf{M}} = \frac{d\mathbf{q}/d\varphi}{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}/(\mathbf{N} \cos \varphi)}{\mathbf{M}} = \frac{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}}{\mathbf{N} \cos \varphi} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \varphi}$$

Para la esfera los valores de anamorfosis adoptan una expresión más sencilla

$$(38) \quad \mathbf{m}_s = \mathbf{n}_s = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Segundo ejemplo: Proyección Cónica conforme de Lambert.

La mayoría de los desarrollos cónicos relacionan las coordenadas  $(\varphi, \lambda)$  con las coordenadas polares del plano  $(\rho, \gamma)$  para definir la proyección, y después, se calculan las cartesianas del plano  $(x, y)$ . Esas coordenadas (polares) presentan una dificultad, no son isométricas, pero se salva este problema con un cambio de variable. Para ello, y tratándose de una conforme, se introducirá la *latitud isométrica* en la formulación de la coordenada  $\rho$  (radio de la circunferencia que representa el paralelo  $\varphi$  en la proyección).

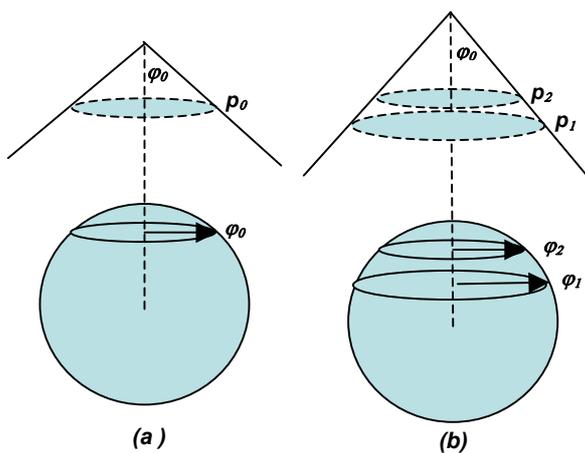


Figura 1.

Antes de continuar, es menester aclarar el concepto común a toda cónica en general, con independencia de otra característica, como que sea conforme, equivalente o equidistante. Se relacionan dos retículas, infinitesimales y no necesariamente isométricas, de manera que haya una correspondencia biunívoca: entre puntos de cada elipse meridiana y los puntos de una generatriz homóloga del cono, y entre puntos de cada paralelo y los de su homóloga circunferencia, “*paralelo del cono recto*”.

Lo primero es asignar, por algún medio, la abertura del cono  $\varphi_0$ , y consecuentemente la escala. Hecho esto, y “*abierto*” la superficie del cono por la generatriz opuesta a la

origen, se representa en el plano, cubriendo un sector circular. La coordenada  $\gamma$ , sea el tipo de cónica que sea, es la longitud respecto al meridiano origen multiplicada por el factor de conicidad  $\sin \varphi_0$ , es decir,  $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$ . El primer método (a), con el cual se abordan simultáneamente la asignación de abertura del cono y escala, es suponer el cono 'tangente' al elipsoide según un paralelo  $\varphi_0$ , elegido en función de la zona a cartografiar. Así, la conicidad viene dada por  $\sin \varphi_0$  y, en consecuencia, la escala es proporcionada por el radio (generatriz), obviamente asignada al paralelo,  $\rho_0 = N_0 \cot \varphi_0$

El segundo método (b), en esencia es similar, aunque no supone ni tangencia, ni secancia, pero a las proyecciones diseñadas así se suelen denominar, de modo impropio, como secantes. El parámetro  $\sin \varphi_0$  viene determinado por la diferencia  $\rho_1 - \rho_2 = N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2$  (radio de los paralelos 1 y 2), y el valor asignado en la proyección al arco de meridiano entre ambos paralelos, según el tipo de proyección: conforme, equivalente o equidistante, esto es

$$(39) \quad \sin \varphi_0 = \frac{N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2}{\rho_2 - \rho_1} \quad \text{y} \quad \rho_1 = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_0} \quad \text{o bien}$$

$$\rho_2 = \frac{N_2 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_0}$$

Dicho lo cual, se hace el cambio de variable  $\{u = \lambda \sin \varphi_0; v = \ln(\rho/\rho_e) = -q \sin \varphi_0\}$  que se basa en la definición de las generatrices del cono con la expresión  $\rho = \rho_e \varepsilon^{-q \sin \varphi_0}$ , donde  $\rho_e$  es el radio asignado al ecuador, que se halla aplicando a esta fórmula el dato del paralelo elegido como base

$$(40) \quad \rho_e = \rho_0 \varepsilon^{q_0 \sin \varphi_0} = N_0 \cot \varphi_0 \varepsilon^{q_0 \sin \varphi_0} \quad \varepsilon = \text{base de logaritmos neperianos}$$

La relación  $(u + iv) = \sin \varphi_0 (\lambda - iq) = \left( \lambda \sin \varphi_0 + i \ln \frac{\rho}{\rho_e} \right)$  representa un sistema

isométrico en el que la condición  $\rho = cte.$  genera líneas isométricas de módulo de deformación constante y la condición  $\lambda = cte.$  genera líneas isomorfas, rectas perpendiculares a las anteriores. La ecuación característica de los sistemas cónicos, bajo las condiciones de conformidad, lleva a la misma solución:

$$(41) \quad (x + iy) = \rho \sin \gamma + i(\rho_0 - \rho \cos \gamma)$$

La constante  $\rho_0$  será el radio vector del paralelo de latitud  $\varphi_0$  en la proyección, igual a la distancia de la tangente hasta el vértice del cono, y  $\sin \varphi_0$  la constante de abertura del cono, tal que  $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$ . Se entiende que las longitudes, contadas a partir del meridiano origen de la proyección deberían ser denominadas como  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ , pero es igualmente válido obviar esto a favor de mayor sencillez de notación, y finalmente, si se desea, se permutan ambas.

Las condiciones de conformidad se aplican al sistema (41), por las derivadas parciales siguientes:

$$(42) \quad \begin{aligned} x_\lambda &= \rho \cos(\lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0 & x_\varphi &= \rho_\varphi \sin(\lambda \sin \varphi_0) \\ y_\lambda &= \rho \sin(\lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0 & y_\varphi &= -\rho_\varphi \cos(\lambda \sin \varphi_0) \end{aligned}$$

que llevadas a las condiciones de Cauchy-Riemann, se obtienen las expresiones

$$\frac{\rho \cos(\lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0}{N \cos \varphi} = \frac{-\rho_\varphi \cos(\lambda \sin \varphi_0)}{M} \quad \frac{\rho \sin(\lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0}{N \cos \varphi} = \frac{-\rho_\varphi \sin(\lambda \sin \varphi_0)}{M}$$

ambas resultan idénticas e independientes de la longitud, proporcionando una ecuación diferencial a resolver

$$(43) \quad \frac{\rho \sin \varphi_0}{N \cos \varphi} = \frac{-\rho_\varphi}{M} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\sin \varphi_0 \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\sin \varphi_0 dq$$

Se integra y se toma como constante de integración  $-\ln \rho_e$  que correspondería al radio representativo del ecuador, ya que  $q = 0$  para  $\varphi = 0$ , resultando finalmente

$$(44) \quad \boxed{\ln \frac{\rho}{\rho_e} = -q \sin \varphi_0 \Rightarrow \left\{ \rho = \rho_e e^{-q \sin \varphi_0} ; \gamma = \lambda \sin \varphi_0 \right\}}$$

Tal y como se había considerado anteriormente. Estas mismas fórmulas presentadas en la forma más conocida es

$$(45) \quad \boxed{\gamma = \lambda \sin \varphi_0 \quad \rho = \rho_e \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\sin \varphi_0}}$$

Otra forma de presentar la proyección es ponerla en función de la colatitud  $\zeta = \pi/2 - \varphi$

$$(46) \quad \boxed{\gamma = \lambda \sin \varphi_0 \quad \rho = \rho_e \left[ \cot \left( \frac{\zeta}{2} \right) \left( \frac{1 + e \cos \zeta}{1 - e \cos \zeta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\sin \varphi_0}}$$

La convergencia de meridianos coincide con el ángulo en coordenadas polares, pero aplicando las derivadas parciales (42) a las fórmulas habituales se hallan convergencia y modulo de deformación

$$\tan \gamma = \frac{x_\varphi}{y_\varphi} = \frac{\rho_\varphi \sin(\lambda \sin \varphi_0)}{-\rho_\varphi \cos(\lambda \sin \varphi_0)} \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} = \frac{\sqrt{x_\lambda + y_\lambda}}{\mathbf{N} \cos \varphi} = \frac{\rho \sin \varphi_0}{\mathbf{N} \cos \varphi}$$

El signo de la convergencia se corresponde con la situación del punto al este o al oeste del meridiano central de referencia

El uso de la proyección Cónica conforme de Lambert está muy extendido. Es especialmente indicada para cartografiar zonas alargadas en el sentido este-oeste (p. ej. Las Islas Canarias, el Mediterraneo, Cuba, etc). La isométrica base coincide con la latitud  $\varphi_0$  incluso cuando se elijan dos paralelos automecóicos al norte y sur de la zona a cartografiar; en este caso, el módulo de anamorfosis varía más rápidamente en ellos que en las proximidades de la isométrica estacionaria.

Aun así, en latitudes medias, como España, es más ajustada para la publicación de la serie del mapa topográfico a escala 1:25.000 o 1:50.000, que la del anterior ejemplo, proyección de Mercator. Los puntos de un meridiano concreto tienen la misma convergencia y, los de determinado paralelo el mismo módulo de deformación.

Tercer ejemplo: Proyección Estereográfica Polar.

Es una proyección del grupo de las *acimutales*, ya que la superficie terrestre se representa en un plano tangente, y *polar* o *directa* porque la tangencia se produce en el polo, y *conforme* al cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann. Por otro lado, se podría suponer generada como una cónica Conforme de Lambert, como límite, cuando el ángulo de abertura del cono crece hasta tender a pi medios.

El método es correcto, pero, en principio, presenta una dificultad aparente. De las dos constantes, la primera,  $\sin \varphi_0 = \sin \pi/2 = 1$ , no presenta dificultad, pero como  $\tan(\pi/2 + \varphi) = \infty$  parece que  $r_e$  está indeterminado, sin embargo desarrollando la expresión resulta

$$\rho_e = \mathbf{N}_0 \cot \varphi_0 \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{e}{2}} = \mathbf{N}_0 \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} \frac{1 + \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} \left( \frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{e}{2}}$$

$$\rho_e = \mathbf{N}_0 \frac{1 + \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0} \left( \frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{e}{2}} \quad | \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_e = \frac{2a}{\sqrt{1 - e^2}} \left( \frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{e}{2}}$$

En resumen, las fórmulas de la proyección de paso del elipsoide al plano, convergencia y anamorfosis son:

$$(47) \quad \boxed{\gamma = \lambda \quad \rho = \rho_e \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} = \frac{\rho}{\mathbf{N} \cos \varphi}}$$

(48)

$$(49) \quad \boxed{\gamma = \lambda \quad \rho = \rho_e \tan\left(\frac{\zeta}{2}\right) \left(\frac{1 + e \cos \zeta}{1 - e \cos \zeta}\right)^{\frac{e}{2}} \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} = \frac{\rho}{\mathbf{N} \sin \zeta}}$$

Se trata, probablemente de la proyección más usada entre las conformes, pero bajo la modalidad de oblicua con centro en la zona a cartografiar y considerando la tierra como esfera; sin embargo, la modalidad polar completa el proyecto UTM, para la representación total del Globo, cubriendo las zonas polares donde no tiene sentido la estrechez de los ‘husos’ o ‘zonas’.

Cuando se aplica a la esfera coincide con una perspectiva cuyo punto de vista de la proyectividad es el antípoda del centro de la proyección; se demuestra que es conforme y el radio ecuatorial es  $2a$ , igual que la distancia al centro proyectivo, pero en la opción elipsoidal no coincide, aunque difiera poco de él.

Las fórmulas para la esfera son

$$(50) \quad \boxed{\gamma_s = \lambda \quad \rho_s = \rho_{es} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \mathbf{m}_s = \mathbf{n}_s = \frac{\rho}{\mathbf{R} \cos \varphi} \text{ siendo } \rho_{es} = 2a}$$

Son muchas más las soluciones conformes, pero entre ellas sobresale la UTM (Universal Transversa de Mercator), tanto como sistema ‘universal’ adaptado de la Gauss-Krüger como ésta y otras soluciones al planteamiento original de Gauss, quien la empleó en el cálculo de una red geodésica, y que presentan determinadas adaptaciones locales.

## 56.6. Proyecciones conformes en geodesia

El punto de vista de la Geodesia propiamente dicha se centra en son proyecciones que conservan los ángulos, característica interesante para su utilización en cálculo de redes. Este aspecto, dicho así, puede inducir a error porque una figura finita de considerables dimensiones aunque conserva los ángulos de las distintas direcciones que parten de un nodo o vértice, no necesariamente el ángulo de las dos rectas desde un vértice a sendos puntos alejados coincide con la representación de las “geodésicas” en el elipsoide (curvas).

No obstante, es extremadamente útil en cálculos geodésicos pues la curvatura de la línea plana, representación una geodésica, es realmente muy pequeña, especialmente en las proximidades de una isométrica estacionaria. Lados de pocos kilómetros en una triangulación presentan flechas en medio de la cuerda de pequeña entidad que pueden ser obviadas en la compensación de una red, máxime cuando el ajuste está constreñido por vértices fijos, siempre que la indeterminación de las medidas angulares (datos) sea netamente superior a las correcciones no tenidas en consideración (denominadas *corrección a la cuerda*). En este orden de cosas, los aspectos más positivos son, de una parte, la sencillez de los cálculos en el plano sobre su realización en el

elipsoide, y por otro lado que todas las direcciones de una vuelta de horizonte tienen la misma corrección, la convergencia. Otro tanto se puede decir para llevar las distancias medidas al plano, basta con controlar el módulo de anamorfosis.

Sin embargo, las correcciones no es difícil calcular e incluir las correcciones a la cuerda en el proceso, en especial cuando la red se extienda bastante y/o los lados de triangulación lleguen a la longitud de los de primer orden. En la figura siguiente se representan las curvas paramétricas o curvas coordenadas de un punto cualquiera P (meridiano y paralelo) –normalmente curvas-, sus tangentes en P que determinan direcciones de referencia, y la línea geodésica de P a Q -igualmente curva- con su tangente que forma el pequeño ángulo  $\delta$  con la cuerda PQ.

Los ángulos  $\gamma$  (convergencia del meridiano de P) y  $\theta$  (orientación de la cuerda) se pueden determinar por fórmulas, pero, si se quiere hallar el acimut geodésico  $\alpha$  es menester calcular  $\delta$ .

$$(51) \quad \alpha_{PQ} = \theta_{PQ} + \gamma_P + \delta_{PQ}$$

El caso inverso se da cuando las medidas de campo ('lecturas'=acimutes, salvo una constante de orientación) han de introducirse para un cálculo, por ejemplo en un ajuste. En primer lugar se hace un cálculo de coordenadas aproximadas, con las cuales se dispone de los valores de convergencia y correcciones a la cuerda necesarios para abordar los cálculos definitivos.

$$\text{Siendo } \theta_{PQ} = \arctan\left(\frac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P}\right) ; \quad \gamma = \arctan\left(\frac{x_\varphi}{y_\varphi}\right)_P \quad \text{y} \quad m = n = \frac{\sqrt{x_\lambda + y_\lambda}}{N \cos \varphi}$$

en la figura adjunta se representan: las curvas coordenadas meridiano y paralelo (en general, curvas), las direcciones de sus tangentes en P así como la geodésica hacia Q, la tangente a ésta y la cuerda PQ. En el cálculo intervienen las coordenadas rectangulares de los puntos P y Q,  $x_P$ ,  $y_P$ ,  $x_Q$ ,  $y_Q$ , y  $x_\varphi$  y  $y_\varphi$  que son las derivadas parciales evaluadas en el punto P.

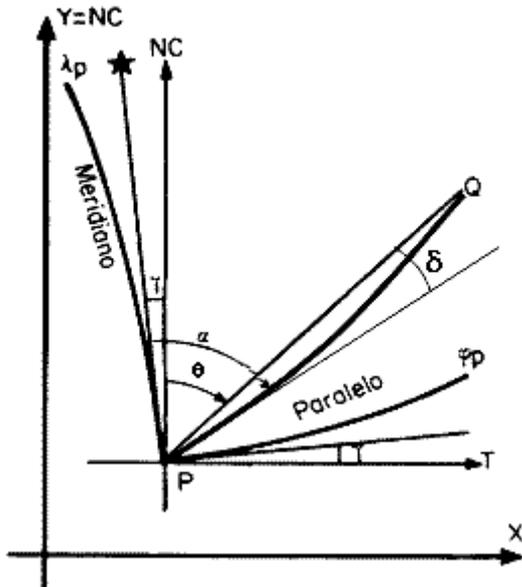


Figura 2.

Una lado PQ, tal que  $s_{PQ}$  sea menor que el radio terrestre, se pueden aproximar con independencia de la proyección conforme las diferencias de distancia y de dirección considerando las correcciones:  $\delta$ , *corrección angular del arco a la cuerda*, y  $(s-d)$ , *diferencia del arco a la cuerda*, por los siguientes desarrollos en serie (suele ser suficiente el primer término)

$$\begin{aligned}
 \delta_{PQ} &= \frac{1}{2} K_P s_{PQ} + \frac{1}{6} \left( \frac{dK}{ds} \right)_P s_{PQ}^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{d^2K}{ds^2} \right)_P s_{PQ}^3 + \dots \\
 (s-d)_{PQ} &= \frac{1}{24} K_P^2 s_{PQ}^3 + \frac{1}{24} k_P \left( \frac{dK}{ds} \right)_P s_{PQ}^4 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Donde  $K_P$ ,  $(dK/ds)_P$  y  $(d^2K/ds^2)_P$  son la curvatura y sus derivadas primera y segunda en P.

En las proyecciones conformes la curvatura  $K_{P\alpha}$  de una geodésica que pasa por P se puede determinar por la fórmula

$$K = \frac{1}{rm} \left( \frac{\partial \ln m}{\partial q} \sin \alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial \lambda} \cos \alpha \right)
 \tag{53}$$

Donde  $q, \lambda$  son las coordenadas isométricas de P y  $\alpha$  el acimut de la dirección PQ.

La figura anterior representa esquemáticamente el caso de la proyección UTM; por eso se ha dibujado la concavidad de la geodésica hacia el eje OY, regla que se cumple según sea la orientación del lado y su posición respecto al meridiano central. Las geodésicas ortogonales a este meridiano tienen curvatura nula salvo que se extendiera a varios husos o zonas contiguas (en la esfera son rectas perpendiculares). En la proyección de Mercator la concavidad de las geodésicas se presenta hacia el ecuador y en la proyección conforme de Lambert hacia el paralelo de referencia ( $\varphi_0$ ), es decir, hacia la isométrica base o estacionaria.

## **Bibliografía**

- [1] Dirk J. Struik, 'Geometría diferencial clásica', Aguilar 1966
- [2] G.B: Lauf, 'Geodesy and Map Projections', TAFE Publications Unit 1983
- [3] Lev M. Bugayevskiy, Jhon P. Snyder, 'MAP PROJECTIONS a Reference Manual', Taylor & Francis 1995
- [4] Escuela de Topografía y Geodesia, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 1º', Servicio Geográfico del Ejército 1955
- [5] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 2º', SGE 1944
- [6] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 3º', SGE 1947
- [7] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Complementos sobre representación conforme', SGE 1951
- [8] Estado Mayor del Ejército, 'Reglamento de Cartografía Militar (1935), Tablas'. SGE 1942
- [9] Estado Mayor Central, 'Característica y tablas de la Proyección Lambert de Canarias'. SGE 1945
- [10] Estado Mayor Central, 'Proyección Universal Transversa Mercator'. SGE 1976
- [11] John P. Snyder 'Map Projections-A Working Manual', Professional paper 1395 US Government P. Office 1987
- [12] Juan Mena Berrios 'Geodesia Superior', Centro Nacional de Información Geográfica 2008
- [13] A. Lujan, 'Apuntes de cartografía', no publicados

**Tema 57. Curvatura de la transformada plana de una geodésica. Fórmula de Schols-Laborde. Curvatura de la transformada plana conforme de una curva cualquiera. Cálculos sobre alteraciones lineales y angulares en las proyecciones conformes. Factor de reducción de escala.**

**57.1. Curvatura de la transformada plana de una geodésica**

La característica fundamental de una línea geodésica sobre una superficie es que la *curvatura geodésica* es nula. Esto es, una línea curva en el espacio (alabeada) presenta una curvatura en el plano osculador (inverso del radio del círculo osculador) la cual, si se halla sobre una superficie, se descompone según dos direcciones ortogonales a la curva: la normal a la superficie y la tangencial; es ésta la denominada geodésica y al ser nula califica a las líneas del mismo nombre (geodésicas). En particular, se van a considerar determinadas familias de curvas definidas sobre la superficie elipsoide de revolución, que al aplicarles las funciones de transformación de una proyección cartográfica se obtienen sus homólogas en el plano, o bien la operación inversa.

Una familia de *geodésicas* es, por ejemplo, el conjunto de meridianos que tiene importancia en las proyecciones cónicas directas porque se convierten en un haz de rectas concurrentes; también se puede poner otro ejemplo, interesante en la proyección cilíndrica transversa de Mercator, es el de las geodésicas ortogonales al meridiano central, que se transforman también en un haz de rectas, pero en este caso son paralelas (esto es riguroso en la hipótesis de Tierra esférica). Pero no ocurre así siempre para cualquier familia de geodésicas al transformarse.

La segunda familia de curvas interesante para estudiar el comportamiento, con carácter general, de la transformada de una geodésica en el plano, es la de las *isométricas*. Tal familia de curvas se define por la propiedad de que, a lo largo de cada una de estas líneas, el módulo de deformación lineal es constante (conformes). En los ejemplos anteriores, a las transformadas de los meridianos les corresponden: en el caso de las proyecciones cónicas directas, las transformadas de los paralelos según arcos de circunferencia y, en el de transversa de Mercator las transformadas de los círculos menores paralelos al meridiano central de la proyección rectas paralelas a la del meridiano central.

Otra forma de definir la línea geodésica que pasa por, o une, dos puntos  $A$  y  $B$ , sobre una superficie  $S$  que no presente “pliegues”, es la que sigue el camino de distancia mínima.

$$(1) \int_A^B ds = \text{mín}$$

En consecuencia, se puede establecer esta misma propiedad a partir de la trasformada de dichos puntos en la proyección de que se trate,  $A'$  y  $B'$ , partiendo de

$$(2) ds' = m ds \Rightarrow \int_{A'}^{B'} \frac{ds'}{m} \text{ mínimo}$$

## 57.2. Fórmula de Schols-Laborde

Los elementos  $ds'$ , en la proyección, van atravesando distintas líneas isométricas con valores  $m$  cambiantes según la posición del punto que va recorriendo la línea desde  $A'$  hasta  $B'$ . Se va a establecer una importante propiedad de la familia de isométricas de la proyección, en particular es conveniente recordar que en cada punto de la línea el módulo de deformación lineal es igual en todas las direcciones (proyecciones conformes).

Se considera la imagen en la proyección  $A'B'$  de la geodésica sobre el elipsoide que una  $A$  y  $B$  y, en el plano, se encuentra también la familia de isométricas que va atravesando en su recorrido mínimo, bajo ángulos diferentes.

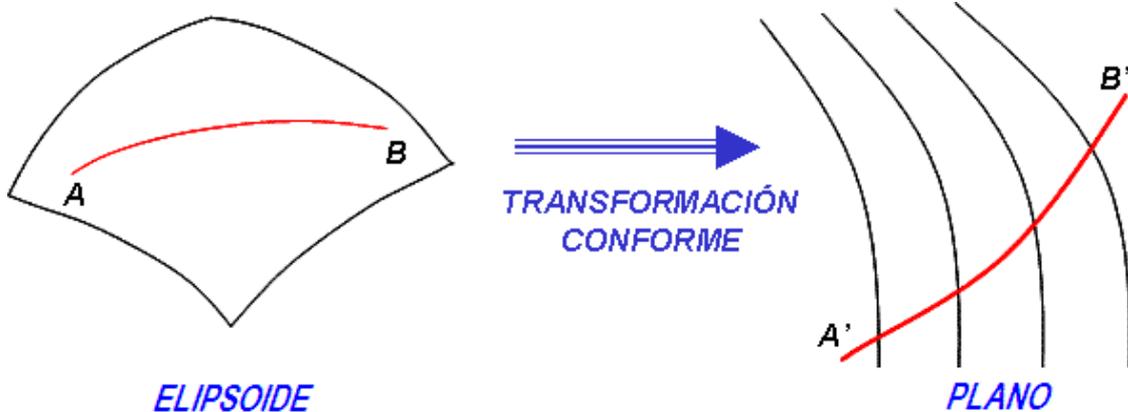


Figura 1.

La curvatura que adopta  $A'B'$  es función de la derivada de la escala local  $m$  ( o módulo de deformación local) respecto a la dirección normal a dicha curva

$$(3) K = \frac{1}{m} \frac{dm}{dn}$$

En la figura siguiente se consideran dos líneas isométricas infinitamente próximas de módulos  $m$  y  $m+dm$ , separadas el segmento  $IL$  de longitud  $dt_i$ ; la línea recorre en esa “capa”  $IJ$  igual a la distancia  $ds'$  (elemento de arco de la transformada); además, el elemento diferencial normal

en  $I$  a la curva geodésica es  $IH$  de longitud  $dn$ . Basándose en esta construcción se diría que el ángulo de incidencia  $i$  es  $\tan i = IJ/IH = ds'/dn$

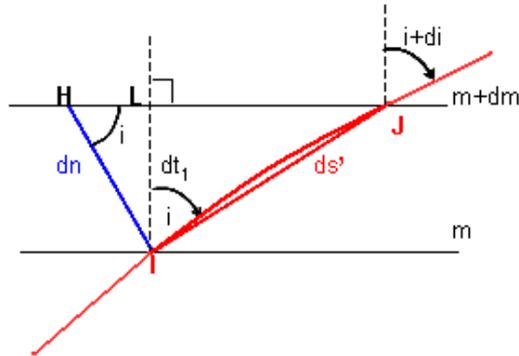


Figura 2.

y como, por otro lado, se cumple la proporcionalidad  $di/\tan i = dm/m$ , sustituyendo en ésta el valor de la tangente se obtiene

$$(4) \quad di = \frac{ds' \, dm}{dn \, m}$$

El ángulo diferencial  $di$  que representa la variación de dirección en un punto de una curva plana se denomina *ángulo de contingencia*, y es igual al elemento diferencial de línea  $ds'$  dividido por el radio del círculo osculador  $R$ , o lo que es igual el producto de  $ds'$  por la *curvatura*  $K$ , definida ésta como el inverso de  $R$  o variación proporcional del ángulo de contingencia a lo largo de la línea. Por tanto

$$(5) \quad \boxed{K = \frac{di}{ds'} \Rightarrow K = \frac{1}{m} \frac{dm}{dn}}$$

Por otro lado, es muy interesante averiguar la variación del ángulo de incidencia en el arco  $A'B'$  que relaciona la dirección de la geodésica en la proyección con la dirección constante de la cuerda que une ambos extremos.

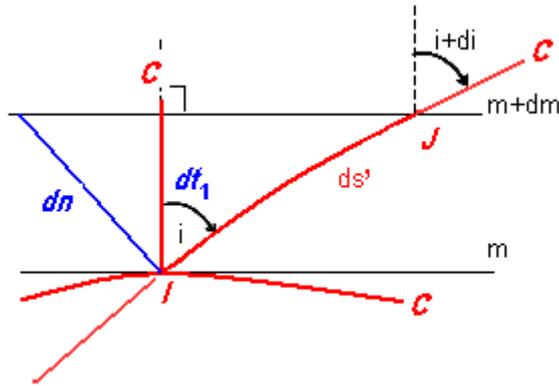


Figura 3.

Si se aplica a las distintas geodésicas  $C$  que pasan por un punto arbitrario  $I$ , perteneciente al segmento  $A'B'$  de la curva considerada, la fórmula anterior (Schols-Laborde) se comprueba que la curvatura  $K$  varía en función del denominador  $dn$  de la forma siguiente:

- si la geodésica es tangente a la isométrica de módulo  $m$ , su curvatura sería

$$(6) \quad dn = dt_1 \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt_1}$$

- y cualquiera otra, en función de  $K_0$  se puede escribir de esta forma

$$(7) \quad \boxed{K = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt_1} \frac{dt_1}{dn} = K_0 \sin i}$$

De esta expresión se pueden formular las características siguientes que relacionan la familia de isométricas y la forma de las líneas geodésicas transformadas en una proyección conforme:

- La curvatura de una línea geodésica que pasa por un punto  $P'$  adquiere el valor máximo  $K_0$  cuando su dirección es tangente a la isométrica  $i=90^\circ$ , que también pasa por dicho punto
- Si la línea geodésica tiene su dirección ortogonal a la isométrica ( $i=0^\circ$ ) presentará curvatura nula en la proyección. Refiriéndose a los ejemplos del principio, al cumplirse en todos los puntos de cada transformada, quiere decir que su representación es una línea recta; pero si se tratara de una geodésica, con ángulo de incidencia distinto de  $0^\circ$  y de  $90^\circ$ , y la transformada en ese punto  $P'$  fuera recta (curvatura nula) indicaría que el punto se encuentra sobre la isométrica estacionaria o base y la representación de la geodésica presenta un punto de inflexión.
- Si  $0 < |i| < 90^\circ \Rightarrow 0 < K < K_0$ . Propiedad que se puede enunciar diciendo que las geodésicas presentan su concavidad hacia la isométrica base

- Las líneas de trayectoria continuamente ortogonales a las isométricas se denominan *isomorfas*. Cuando las transformadas de los meridianos son isomorfas el ángulo formado con otra geodésica que la atraviesa es el acimut de ésta.
- la transformada de una geodésica que sea tangente a una isomorfa presenta curvatura nula

### 57.3. Curvatura de la transformada plana de una curva cualquiera, en una proyección conforme

En una proyección conforme, la curvatura  $K_C$  de la transformada de una curva cualquiera  $C$  que pasa por un punto  $P$ , se obtiene considerando que dicha curva, sobre la superficie (por ejemplo, elipsoide), presenta una curvatura en su plano osculador que se descompone en dos, la curvatura normal a la superficie  $K_n$  y la curvatura geodésica  $K_g$  (dirección de la binormal). La línea geodésica que es tangente en  $P$  a la curva considerada tiene la misma curvatura normal  $K_n$  y curvatura geodésica nula, por definición. Por tanto  $K_C$  es la suma del efecto de ambas componentes en la transformación:

- El primer sumando es el hallado anteriormente  $K$ , que coincide con la curvatura de la geodésica transformada.
- El segundo sumando es el debido a la curvatura geodésica  $K_g$  escalada por el módulo de deformación lineal  $m$ .

$$(8) \quad K_C = K + \frac{K_g}{m}$$

De esta expresión se pueden sacar algunas consecuencias importantes de aplicación en las proyecciones conformes:

- En la isométrica estacionaria  $m$  adquiere un valor mínimo, es decir,  $dm/dt=0$  o lo que es igual  $K=K_0=0$ ;  $m=m_0(\text{mínimo})$ ;  $K_{CE}=K_g/m_0$ . Un ejemplo ilustrativo es la *proyección cónica conforme de Lambert*; en el caso de un sólo paralelo estándar de latitud  $\varphi_0$  la curvatura geodésica  $K_g=N_0/\tan \varphi_0=K_{CE}$  porque se adopta  $m_0=1$ ; en el caso de dos paralelos estándar (automecoicos) existe el paralelo intermedio de latitud  $\varphi_0$ , que establece el ángulo del cono, y es donde se da el valor mínimo de  $m=m_0<1$ , tal que  $K_g=N_0/\tan \varphi_0/m_0=K_{CE}$
- En las proximidades de la isométrica estacionaria, donde el factor de escala  $m_0$  es mínimo, el módulo  $m$  crece a ambos lados, en primera aproximación, según

el cuadrado de la distancia de separación a la misma  $dt_1$ . Basta con desarrollar  $m$  en serie de Taylor

$$(9) \left. \begin{aligned} m &= m_0 + \left( \frac{dm}{dt_1} \right)_{t_{1m=m_0}} + \left( \frac{d^2m}{dt_1^2} \right)_{t_{1m=m_0}} t_1^2 \\ \left( \frac{dm}{dt_1} \right)_{t_{1m=m_0}} &= 0 \text{ por ser mínimo} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = m_0 + at_1^2$$

- Si este resultado se sustituye en la fórmula de Schols-Laborde anterior se tiene, de forma aproximada, el modelo de comportamiento de la curvatura en el entorno de la isométrica estacionaria

$$(10) K = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt_1} \sin i = \frac{2at_1}{m_0 + at_1^2} \sin i$$

#### 57.4. Cálculos sobre alteraciones lineales y angulares en las proyecciones conformes

Las proyecciones conformes por su propiedad de conservar los ángulos, esto es, dos líneas sobre el elipsoide forman un determinado ángulo en su punto de corte y coincide con el formado por sus transformadas en el plano, son útiles también para realizar cálculos geodésicos. Esta propiedad, como se ha visto en los apartados anteriores, no implica que las transformadas de las geodésicas (curvatura geodésica nula sobre la superficie) deban ser rectas, pero para lados de longitud finita y no muy largos la reducción a la cuerda siempre es pequeña, aunque no despreciable, alcanzando en las direcciones más curvadas (tangentes a las isométricas) algunos segundos. Los ángulos elipsoídicos pueden ser corregidos por estos valores y realizar los ajustes de red como si estuviera formada por triángulos planos.

El ángulo entre la dirección inicial y la final de un arco de curva plana viene representado por la integral de la curvatura a lo largo de la línea, es decir, la suma de los ángulos de contingencia

$$(11) \epsilon = \int_C K ds_1$$

Basta considerar en la figura siguiente la relación  $\epsilon_{12} = \epsilon_1 + \epsilon_2$ , que conduce a la expresión anterior cuando se pasa al límite

$$\epsilon_{12} = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{\Delta s}{\rho_1} + \frac{\Delta s}{\rho_2} = (K_1 + K_2) \Delta s \Rightarrow \epsilon_{1n} = \sum_1^n K_i \Delta s$$

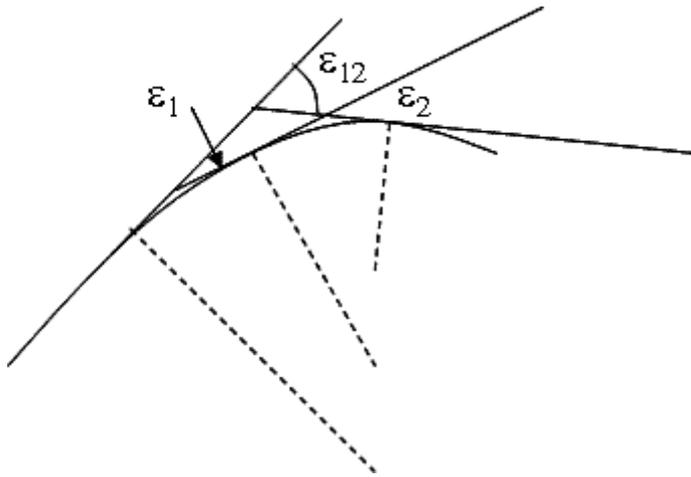


Figura 4.

Si se aplica a un polígono cerrado, o mejor a un triángulo esférico  $A_1B_1C_1$ , formado por los arcos transformados de sus homólogos sobre el elipsoide, los ángulos entre las direcciones (tangentes) y las cuerdas absorben el exceso esférico del triángulo ABC ya que, por ser la proyección conforme, los ángulos elipsóidicos en los vértices han de ser iguales al formado por las tangentes a los lados transformados.

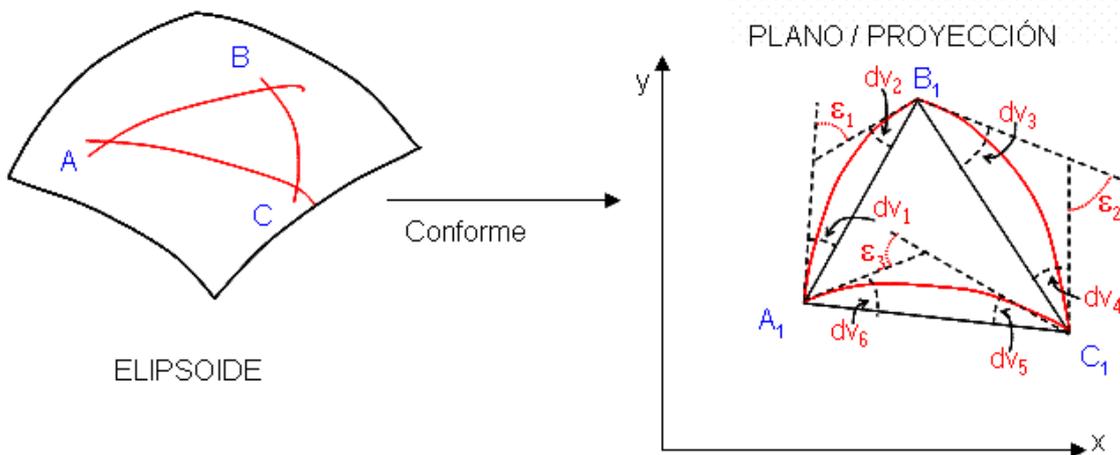


Figura 5.

La curvatura que presenta cada lado del triángulo transformado dependerá de la inclinación con que atraviesa la familia de isométricas y los valores locales del factor de escala lineal en la proyección considerada. Se puede establecer la relación entre el exceso esférico de un polígono sobre el elipsoide, cuyos lados son arcos de geodésicas, y el correspondiente transformado.

Por ejemplo, siendo el exceso esférico  $\varepsilon = A + B + C - \pi$  del triángulo esférico, y la suma de los ángulos del triángulo de las cuerdas  $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$ , se tiene que  $\varepsilon = (dv_1 - dv_2) + (dv_3 - dv_4) + (dv_5 - dv_6) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ . Se ha considerado que cada ángulo  $dv$  tiene su origen en la cuerda y será positivo

cuando se dirija a izquierdas, recorriendo el triángulo o polígono en el sentido de las agujas del reloj. Así,  $\varepsilon_1 > 0$   $\varepsilon_2 > 0$   $\varepsilon_3 < 0$

Falta determinar individualmente cuánto valen los dos sumandos  $dv_1$  y  $dv_2$ , que dependen de la anamorfosis lineal y se tratará después de estudiar la alteración lineal en la zona.

El estudio de la alteración lineal se aborda desde la ecuación diferencial que relaciona factor de escala lineal  $m$ , la curvatura de la isométrica que pasa por el punto  $K_i$ , y la curvatura de Gauss correspondiente al punto sobre el elipsoide  $K$  (no confundir con la de la fórmula (7)); denominada *ecuación diferencial de la escala local* que, referida a la proximidad de la isométrica estacionaria, es

$$(12) \quad m \left( \frac{d^2 m}{dt_1^2} \right) - \left( \frac{dm}{dt_1} \right)^2 + m \left( \frac{dm}{dt_1} \right) K_i - K = 0$$

donde la variable  $t_1$ , o mejor  $dt_1$ , representa la distancia que separa la isométrica que pasa por el punto y la inmediata, contada a lo largo de la isoterma. Esta fórmula se puede poner en función de la línea sobre la superficie (variable  $t$ , o  $dt$ ) homóloga a la isoterma, siendo  $dt_1 = m dt$

$$\frac{dm}{dt_1} = \frac{dm}{dt} \frac{dt}{dt_1} = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \quad \frac{d^2 m}{dt_1^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \right) \frac{dt}{dt_1} = \frac{1}{m^2} \frac{d^2 m}{dt^2}$$

$$(13) \quad m \left( \frac{d^2 m}{dt^2} \right) - \left( \frac{dm}{dt} \right)^2 + m^2 \left( \frac{dm}{dt} \right) K_i - m^2 K = 0$$

A partir de este momento se va a considerar el caso normal en la definición de las proyecciones conformes en la que el factor de escala en la isométrica base es  $m_0 = 1$ , el caso contrario se refiere a las denominadas “secantes” que se pueden considerar caso particular del anterior como una sencilla reducción de escala (multiplicar la anterior por  $m_0 < 1$ ). Esta circunstancia se ve aun con más claridad si en vez de reducir la escala en la proyección se reduce el semieje del elipsoide multiplicándolo por dicho factor, con lo que se consigue exactamente el mismo efecto sin tocar las funciones de paso al plano.

La alteración lineal, con frecuencia, se suele expresar como diferencia relativa de distancias, *proyección menos elipsoide con relación a éste*,  $(ds_1 - ds)/ds = m - 1$ .

En las proximidades de la isométrica base, se estiman la primera y segunda derivada de  $m$  a partir de la ecuación (9) y se sustituyen en la (12) lo que permite estimar el parámetro  $a = K/2$  siendo  $K$  la curvatura de Gauss, y por tanto

$$(14) \mathbf{m} = 1 + \frac{\mathbf{K}}{2} \mathbf{t}_1^2 \quad \mathbf{m} - 1 = \frac{\mathbf{K}}{2} \mathbf{t}_1^2$$

Estas expresiones permiten relacionar  $t_1$  con la distancia medida sobre la superficie  $t$ , al sustituir  $m$  en la igualdad  $dt_1 = m dt$  e integrar (la constante de integración es cero,  $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow t_1 \rightarrow 0$ )

$$(15) \int dt_1 = \int \left( 1 + \frac{\mathbf{K}}{2} t^2 \right) dt \Rightarrow t_1 = t + \frac{\mathbf{K}}{6} t^3 \quad t_1 - t = \frac{\mathbf{K}}{6} t^3$$

De las expresiones (14) y (15) surgen las consideraciones siguientes:

- $\frac{\mathbf{K}}{2} t^2 \cong \frac{\mathbf{K}}{2} t_1^2$  expresa la deformación lineal unitaria en un punto que se encuentra a la distancia  $t/t_1$  de la isométrica base o estacionaria
- $\frac{\mathbf{K}}{6} t^3 \cong \frac{\mathbf{K}}{6} t_1^3$  expresa la corrección métrica a la distancia  $t$  desde la línea base llevada a la superficie y el punto considerado también en la superficie, para hallar la correspondiente distancia  $t_1$  entre sus homólogos proyectados, a lo largo de la línea isomorfa
- Dando valores a las dos expresiones anteriores, representados en la tabla siguiente, se puede apreciar la entidad de las alteraciones lineales y, un posible límite práctico de la extensión máxima aconsejable en una proyección conforme a partir de la isométrica estacionaria ( $\mathbf{K}/2 \approx 0.5/6371^2 \approx 1.23\text{e-}8 \text{ km}^2$ ).

$t$ (km)	$\frac{\mathbf{K}}{2} t^2 = \mathbf{m}-1$	$\frac{\mathbf{K}}{6} t^3 = t_1-t$ (m)
100	1/8100	4.11
200	1/2030	32.85
300	1/900	110.87

No obstante, estos límites son meros indicadores, por eso muchas veces se emplean proyecciones cartográficas conformes extendidas bastante más allá de los 300 o 400 km de separación a la isométrica estacionaria, porque se controlan bien las expresiones de alteraciones lineales, superficiales y las reducciones angulares de las geodésicas a sus cuerdas. Además, se aplica el artificio de Tissot que equivale a la denominada “proyección secante” con lo que se promedian los factores de escala máximo y mínimo en todo el ámbito para el que se diseña la proyección concreta.

Un ejemplo ilustrativo de lo anterior se halla en la proyección Gauss-Krüger en la que el módulo de deformación lineal  $m_{GK}$ , escrito a continuación, coincide con lo descrito con carácter

general para las proyecciones conformes, pero limitándose a los dos primeros términos del desarrollo en serie

$$(16) \mathbf{m}_{GK} = 1 + \frac{\mathbf{x}^2}{2\mathbf{R}^2} + \frac{\mathbf{x}^4}{24\mathbf{R}^4} + \frac{\mathbf{x}^6}{720\mathbf{R}^6} + \dots \quad \frac{1}{\mathbf{R}^2} = \frac{1 + \boldsymbol{\eta}^2}{\mathbf{N}^2}$$

La proyección UTM coincide con la anterior salvo en que ésta se reduce globalmente por el factor  $\mathbf{m}_0=0.9996$ ,  $\mathbf{m}_{UTM}=0.9996\mathbf{m}_{GK}$ , por eso, a veces, se define la UTM como *cilíndrica transversa, secante y conforme*. Ha de recordarse que las isométricas son sensiblemente ‘rectas’ paralelas al meridiano central (eje YY’), obsérvese la pequeña variación que introduce el denominador (R) en función de la latitud, y en consecuencia las isomorfias son igualmente ‘rectas’ perpendiculares a las isométricas y, por tanto, paralelas entre sí y perpendiculares al meridiano central (representación de las geodésicas ortogonales a este meridiano); en el supuesto de Tierra esférica se pueden retirar las comillas a la palabra ‘rectas’ ya que rigurosamente lo son, porque en este caso  $\mathbf{m}=\cosh(\mathbf{x}/\mathbf{R})$  y siendo  $\mathbf{R}$  el radio de la esfera (constante) el módulo de escala lineal es independiente de la ordenada.

Hay proyecciones en las que no hay una línea base o isométrica estacionaria sino que existe un sólo punto que participa de esa característica. En tales casos las deformaciones se reducen a la mitad, y radialmente a la distancia  $\mathbf{t}$  desde dicho punto

$$(17) \mathbf{m} = 1 + \frac{\mathbf{K}}{4} \mathbf{t}^2 \quad \mathbf{m} - 1 = \frac{\mathbf{K}}{4} \mathbf{t}^2$$

Y en consecuencia resulta

$$(18) \mathbf{d}\mathbf{t}_1 = \left(1 + \frac{\mathbf{K}}{4} \mathbf{t}^2\right) \mathbf{d}\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t} + \frac{\mathbf{K}}{12} \mathbf{t}^3 \Rightarrow \mathbf{t}_1 - \mathbf{t} = \frac{\mathbf{K}}{12} \mathbf{t}^3$$

Un aspecto práctico es la transferencia de un segmento de geodésica, por ejemplo un lado de una triangulación, al plano de la proyección y recíprocamente. La relación entre la distancia finita de A a B en el elipsoide y su homóloga en la proyección A'B' responde al planteamiento siguiente:

$$(19) \begin{aligned} \mathbf{s}_{1A'B'} &= \int_A^B \mathbf{m} \mathbf{d}\mathbf{s} && \text{paso directo} \\ \mathbf{s}_{AB} &= \int_{A'}^{B'} \frac{1}{\mathbf{m}} \mathbf{d}\mathbf{s}_1 && \text{paso inverso} \end{aligned}$$

La resolución, en los dos casos, pasa por un método de integración numérica, que es suficiente para las longitudes normales de los lados de las redes geodésicas de triangulación, incluidas líneas relativamente largas obtenidas por translocación en observaciones de satélite, cuando la longitud no sea extremadamente larga. Las fórmulas habituales son:

$$s_{1A'B'} = \frac{1}{6}(m_A + 4m_m + m_B)s_{AB}$$

$$(20) \quad s_{AB} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m_A} + 4\frac{1}{m_m} + \frac{1}{m_B}\right)s_{1A'B'}$$

Surge una ligera duda ya que  $s_{1A'B'}$  en realidad no es el segmento recto  $D_{A'B'}$  entre los puntos proyectados  $A'$  y  $B'$  sino la distancia a lo largo de la geodésica proyectada, que generalmente es una curva aunque su curvatura sea muy pequeña

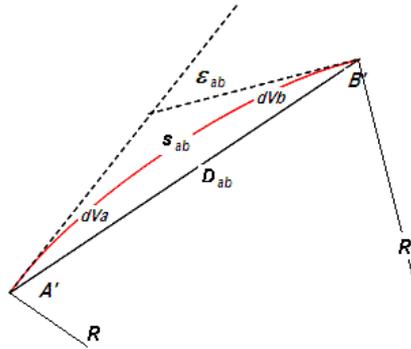


Figura 6.

La cuerda  $A'B'$  se puede calcular con mucha aproximación en función del arco, del radio medio del círculo osculador y/o ángulo de contingencia, según las siguientes expresiones

$$D_{A'B'} = 2R \sin \frac{\varepsilon_{A'B'}}{2} = 2R \sin \frac{s_{A'B'}}{2R}$$

Como el ángulo es extremadamente pequeño se puede desarrollar en serie el seno dejándole reducido a los dos primeros términos

$$D_{A'B'} = 2R \left( \frac{s_{A'B'}}{2R} - \frac{1}{3!} \left( \frac{s_{A'B'}}{2R} \right)^3 \right) = s_{A'B'} - \frac{s_{A'B'}^3}{24R^2}$$

Cuando se transporta la distancia  $s$  elipsoidal al plano conforme después de calcular  $s_l$  (longitud del arco en la proyección), si se considera recto, se desprecia la reducción del segundo término. Sin embargo, desde un punto de vista práctico es perfectamente válido dado su ínfimo valor; por ejemplo, un lado de triangulación de 30 km, situado a unos 350 km de la isométrica estacionaria, y tangente a la isométrica para que se de la máxima curvatura ( $\varepsilon \approx 30'' \approx 2 \cdot 15''$ ); en esa situación, ignorar dicho término supondría un error de 0.03 mm.

Despreciar esa corrección en las distancias, como se ha dicho, es válido, pero la corrección angular a las direcciones, según los siguientes razonamientos, es absolutamente necesario para ajustar redes de triangulación por mmcc. Tampoco es válido el razonamiento por el cual se

obvia la corrección cuando su valor es inferior a la precisión de los ángulos medidos, pues al obrar así se está ignorando que los errores cometidos son sistemáticos y, como tales, tienden a acumularse desvirtuando la solución mmcc.

Siguiendo la figura siguiente se dice que, la dirección observada de la geodésica en  $A$  hacia  $B$  (tangente en  $A'$ ) ha de corregirse en  $dV_{A'}$  (*positivo*) para trabajar con la dirección de la cuerda en cálculos geodésicos realizados en la proyección; recíprocamente, la dirección observada de la geodésica en  $B$  hacia  $A$  (tangente en  $B'$ ) ha de corregirse en  $dV_{B'}$  (*negativo*) para trabajar con la dirección de la cuerda. En resumen, si se recorre la geodésica de forma que la concavidad hacia la isométrica estacionaria, que queda a la derecha, el ángulo de contingencia  $\epsilon_{A'B'}$  (positivo) responde a la integral

$$(21) \epsilon_{ab} = dV_a - dV_b = \epsilon_a + \epsilon_b = \int_{A'}^{B'} K ds'$$

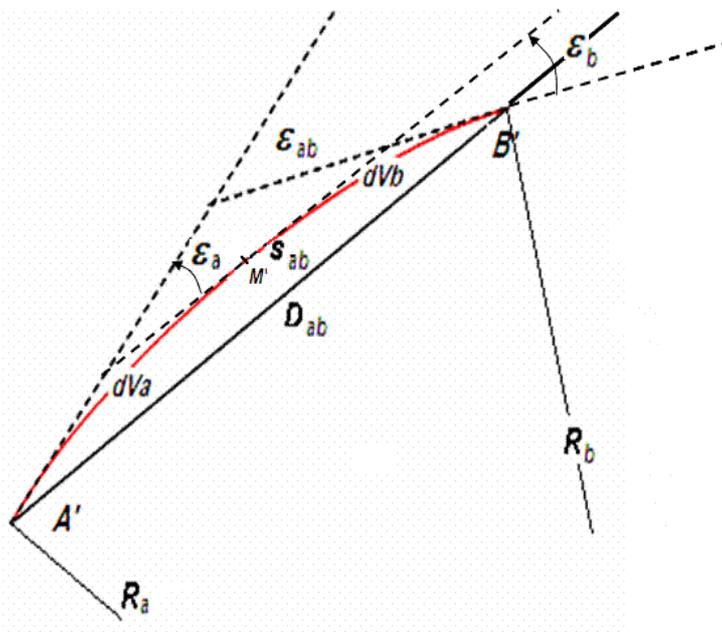


Figura 7.

Integral que se resuelve por métodos numéricos con ayuda de la curvatura que presenta en el punto medio  $M'$  donde la tangente a la representación de la geodésica presenta una dirección mucho notablemente mas próxima a la de la cuerda  $A'B'$ , por lo que se considera peso doble a los extremos. Así se llega a la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_{ab} = dV_a - dV_b = \varepsilon_a + \varepsilon_b \\
 (22) \quad \varepsilon_{ab} = \frac{s'_{ab}}{6} (K_a + 4K_m + K_b) & \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_a = \frac{s'_{ab}}{6} (K_a + 2K_m) = dV_a \\ \varepsilon_b = \frac{s'_{ab}}{6} (2K_m + K_b) = -dV_b \end{cases}
 \end{aligned}$$

que proporciona las denominadas *correcciones a la cuerda* en los extremos de un lado de triangulación, trilateración o poligonal. En algunos tratados se simplifica relacionando cada una con la curvatura del punto situado a un tercio de la distancia  $D_{AB}$

$$(23) \quad \varepsilon_a = \frac{1}{2} K_{\frac{1}{3}s_{ab}} \quad \varepsilon_b = \frac{1}{2} K_{\frac{2}{3}s_{ab}}$$

En Bugayevskiy se propugna usar el desarrollo en serie en función de la curvatura en  $A'$  y de sus derivadas

$$(24) \quad \varepsilon_a = dV_a = \frac{1}{2} K_a s'_{ab} + \frac{1}{6} \left( \frac{dK_a}{ds'} \right)_a s'^2_{ab} + \frac{1}{24} \left( \frac{d^2 K_a}{ds'^2} \right)_a s'^3_{ab} + \dots$$

Con la siguiente expresión general de la curvatura de la línea geodésica en las proyecciones conformes como función de las coordenadas isométricas  $(q, \lambda)$  y el módulo de escala lineal  $m$ , pudiendo particularizarse, por tanto, para la proyección específica utilizada en cada caso:

$$(25) \quad \begin{aligned}
 K &= \frac{1}{mN \cos \varphi} \left( \frac{\partial \ln m}{\partial q} \sin \theta_{ab} - \frac{\partial \ln m}{\partial \lambda} \cos \theta_{ab} \right) \\
 \theta_{ab} &= \arctan \left( \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} \right)
 \end{aligned}$$

### 57.5. Factor de reducción de escala

Se ha indicado anteriormente que el factor de escala lineal o módulo de anamorfosis, en general, adopta valores que crecen desde el mínimo  $m_0=1$  en todo punto de la isométrica estacionaria hasta un valor 'máximo'  $m_b$  en las isométricas extremas que se encuentran en los bordes exteriores que se han estimado para la aplicación de una proyección con diseño específico para representar una zona concreta.

Sea el valor de  $m_b=1+v$  y se pretende reducir este factor de escala de manera que en los extremos sea  $m_b=1+\tau$ , tal que  $\tau < v$ , a costa de que la deformación lineal en la isométrica estacionaria pase a ser  $m_0=1-\tau$ , por tanto

$$(1-\tau)(1+\nu) = (1+\tau) \quad 1-\tau+\nu-\tau\nu = 1+\tau$$

$$(26) \quad \tau = \frac{\nu}{2+\nu} \Rightarrow m_0 = 1-\tau = \frac{2}{2+\nu}$$

A esta forma de reducir las alteraciones lineales, promediando las zonas donde las distancias al pasar a la proyección son mayores con aquellas en que sean menores, sencillamente con multiplicar las funciones conformes de paso al plano por este factor  $m_0$ , se le denomina *artificio de Tissot*.

Es conveniente repetir que, naturalmente, existen ahora dos líneas isométricas, automecoicas, donde el factor de escala ha pasado a valer la unidad. Este hecho, al que algunas veces se ha llegado por otro camino, da lugar a calificar la proyección concreta definida de este modo particular como ‘secante’.

## **Bibliografía**

- [1] Dirk J. Struik, 'Geometría diferencial clásica', Aguilar 1966
- [2] G.B: Lauf, 'Geodesy and Map Projections', TAFE Publications Unit 1983
- [3] Lev M. Bugayevskiy, Jhon P. Snyder, 'MAP PROJECTIONS a Reference Manual', Taylor & Francis 1995
- [4] Escuela de Topografía y Geodesia, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 1º', Servicio Geográfico del Ejército 1955
- [5] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 2º', SGE 1944
- [6] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 3º', SGE 1947
- [7] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Complementos sobre representación conforme', SGE 1951
- [8] Estado Mayor del Ejército, 'Reglamento de Cartografía Militar (1935), Tablas'. SGE 1942
- [9] Estado Mayor Central, 'Característica y tablas de la Proyección Lambert de Canarias'. SGE 1945
- [10] Estado Mayor Central, 'Proyección Universal Transversa Mercator'. SGE 1976
- [11] John P. Snyder 'Map Projections-A Working Manual', Professional paper 1395 US Government P. Office 1987
- [12] Juan Mena Berrios 'Geodesia Superior', Centro Nacional de Información Geográfica 2008
- [13] A. Lujan, 'Apuntes de cartografía', no publicados

## **Tema 58. Proyecciones equidistantes, ejemplos de cilíndrica y cónica. Proyecciones equivalentes. Condiciones de equivalencia. Latitud autálica, radio de la esfera equivalente. Utilización de las proyecciones equivalentes y ejemplos.**

### **58.1. Proyecciones equidistantes y equivalentes: introducción**

La Cartografía, con carácter general, es la ciencia que se ocupa del trazado de *cartas o mapas* al objeto de representar la Tierra sobre un plano, bien en su totalidad o parte de ella. El nombre de *plano* es el más ilustrativo en este proceso aunque se aplica a extensiones muy reducidas a partir de las medidas topográficas. La primera idea es reproducir las distancias y formas a escala, pero se presenta una dificultad: la esfera o elipsoide de revolución, primera aproximación a la superficie terrestre, no es una figura geométrica desarrollable.

Desde un punto de vista práctico, y ante la imposibilidad de conseguir una representación de la Tierra, rigurosamente exacta, sobre el plano, el objetivo principal de una *proyección* es encontrar la transformación más adecuada que caracterice la funcionalidad del mapa deseado. De este modo, ya que no es factible la conservación de las distancias en todas las direcciones, esto es, una semejanza perfecta, en ocasiones se elige una transformación donde se conserven las formas en detrimento de distancias y áreas, otras veces, se opta por la conservación de las áreas o por una solución ecléctica. A este caso pertenecen las denominadas *proyecciones equidistantes* porque conserva, en la proyección, las distancias a lo largo de determinada familia de curvas sobre el elipsoide o esfera.

El otro grupo de proyecciones, que se van a tratar, es el de aquellas donde se conserva el área de recintos cerrados, con independencia de la deformación de su forma y distancias longitudinales de los distintos elementos representados en el mapa. Es el grupo de *proyecciones equivalentes*.

En resumen, los aspectos significativos a tener presente, en cada punto proyectado, son: el *coeficiente de deformación lineal en una dirección determinada* ( $k_\theta$ ), y el *coeficiente de deformación superficial* ( $\sigma$ ), en cada una de los sistemas de proyección referidos. No obstante, un objetivo importante de la cartografía matemática, además de la definición de las distintas proyecciones, es el estudio y el conocimiento de las inevitables deformaciones en magnitud, y sus valores extremos en el ámbito del mapa.

## 58.2. Proyecciones equidistantes: ejemplos de cilíndrica y cónica

Antes de avanzar su estudio es conveniente reiterar que los *sistemas equidistantes* de representación son aquellos que conservan las distancias sólo en determinadas direcciones, establecidas a priori para que puedan ser calificados como tales.

Esta denominación, aparentemente impropia, se acepta por convenio en virtud de lo dicho en el párrafo anterior. Sin embargo, en la mayoría de las proyecciones existen ciertas líneas cuyas longitudes, una vez transformadas por la escala del mapa, son exactamente iguales a las medidas sobre la superficie del elipsoide. Esto se expresa diciendo que dichas líneas son *automecoicas*, y por tanto, el factor de anamorfosis lineal  $k$ , en los respectivos puntos y según la dirección que corresponda en cada caso, es igual a la unidad.

No obstante, toda proyección incluida dentro del grupo de las equidistantes, aparte de contar con líneas automecoicas debidas a la definición geométrica y analítica del sistema, debe de contar con un conjunto de direcciones donde esta propiedad se de por definición. Y como el término “dirección” no especifica posición concreta de referencia, quiere decir que *en todo punto no singular, representado en un sistema equidistante, ha de existir como mínimo una dirección donde la deformación en distancia ( $k_\theta$ ) es nula*. Esta afirmación constituye realmente la característica diferencial de estos sistemas respecto de los restantes.

Las proyecciones cartográficas equidistantes pueden ser construidas mediante desarrollos acimutales, cilíndricos y cónicos; y también con otros tipos de transformación ‘arbitrarios’ siempre que se defina la familia de líneas a lo largo de las cuales se cumpla la condición. Existen, por ejemplo, sistemas acimutales donde se conservan las distancias medidas a partir de un único punto pero en cualquier dirección; sistemas cilíndricos donde se mantiene la escala en la línea de tangencia y en todas las direcciones perpendiculares a ella; sistemas cónicos en los cuales son automecoicos todos los meridianos; y también, entre los ‘arbitrarios’, la proyección sinusoidal, donde el ecuador y la totalidad de los paralelos representan distancias verdaderas.

Atendiendo pues al concepto de equidistancia, se desarrollan a continuación las construcciones analíticas de aquellas proyecciones que, pertenecientes a las categorías principales en relación con la superficie desarrollable, se consideran más indicativas. En los casos más importantes se hace para el supuesto general de Tierra elipsoidal, y después se simplifica para el caso de Tierra esférica sencillamente igualando la excentricidad a cero. Además, y dado que tanto la proyección acimutal como la cilíndrica pueden considerarse casos extremos del sistema cónico,

se comienza por la *proyección cónica directa equidistante según los meridianos* (Tierra elipsoidal).

Proyección cónica directa equidistante según los meridianos (Tierra elipsoidal).

En primer lugar, común a todas aquellas con meridianos automecóicos, es obtener el desarrollo de arco de meridiano como integral de la ecuación diferencial de la expresión  $d\beta = M d\varphi$  entre dos puntos de latitudes  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en un mismo meridiano. Esta integral elíptica no tiene una fórmula cerrada como solución, por ello se obtiene por la integral definida desde el ecuador  $\beta(\varphi)$  del desarrollo en serie de  $M$  en función de  $\varphi$ . Hay distintas expresiones y una muy extendida es la siguiente, y utiliza como parámetro de excentricidad la relación  $n = (a-b)/(a+b)$

$$\beta(\varphi) = Q(\varphi + u_2 \sin 2\varphi + u_4 \sin 4\varphi + u_6 \sin 6\varphi + u_8 \sin 8\varphi + \dots)$$

$$(1) \quad Q = \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \dots\right); \quad u_2 = \left(-\frac{3n}{2} + \frac{9n^3}{16} - \frac{3n^5}{32} + \dots\right); \quad u_4 = \left(\frac{15n^2}{16} - \frac{15n^4}{32} + \dots\right);$$

$$u_6 = \left(-\frac{35n^3}{48} + \frac{105n^5}{256} + \dots\right); \quad u_8 = \left(\frac{315n^4}{512} + \dots\right) \text{ siendo } n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{f}{2-f} \text{ y } b = a(1-f)$$

no se debe confundir la nomenclatura de  $n$  como excentricidad, este caso, con la deformación lineal según dirección del paralelo

No es el único grupo de proyecciones donde se emplea este desarrollo para el arco de meridiano desde el ecuador, es la condición de partida para el desarrollo de la proyección Conforme Transversa de Mercator. El valor  $Q$  es el radio de la esfera cuya medida de la circunferencia meridiana coincide con la de la meridiano elíptico, y da respuesta a la ecuación diferencial  $M d\varphi = R d\Phi$ . La latitud  $\Phi$  en la esfera, de radio  $R=Q$  constante, no está distribuida uniformemente y, es aquella tal que la distancia del arco desde el ecuador coincide el desarrollo de la elipse meridiana hasta la latitud  $\varphi$ . La diferencia máxima entre ambas latitudes  $\varphi$  y  $\Phi$  se produce hacia los 45°, mientras que la diferencia entre el radio de curvatura  $M$  y el de la esfera  $Q$  (constante) es máxima en los polos y en el ecuador. La longitud del cuadrante del meridiano es  $\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = Q(\varphi + u_2 0 + u_4 0 + \dots) = Q \frac{\pi}{2}$ .

Los métodos de cálculo numérico, con la ayuda del ordenador que permite procesamiento rápido e iterar procesos controlando la convergencia de la solución, son otra alternativa para hallar

$$(2) \quad \beta(\varphi) = \int_0^\varphi M d\varphi$$

Los desarrollos cónicos directos relacionan las coordenadas  $(\varphi, \lambda)$  con las coordenadas polares del plano  $(\rho, \gamma)$  para definir la proyección, y después, se calculan las cartesianas del plano  $(x, y)$ . Es característico que el radio polar  $\rho$  es función únicamente de la latitud  $\rho=f(\varphi)$ . Para ello, en este caso se aplicará la ecuación (1)

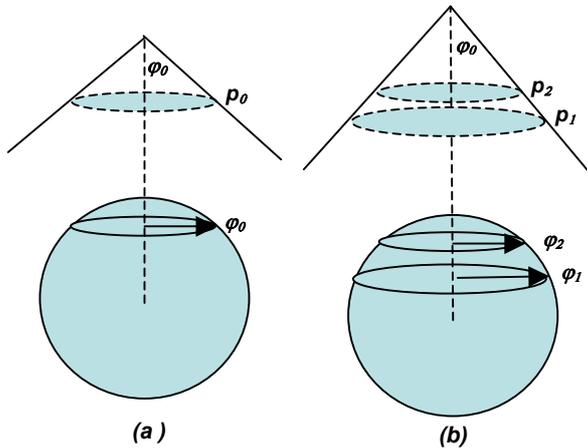


Figura 1.

Antes de continuar, es menester aclarar el concepto común a toda cónica en general, con independencia de cualquier otra característica, como que sea conforme, equivalente o equidistante. Se relacionan dos retículas, infinitesimales, de manera que haya una correspondencia biunívoca: entre puntos de cada elipse meridiana y los puntos de una generatriz homóloga en el cono, y entre puntos de cada paralelo y los de su homóloga circunferencia, “paralelo del cono recto”.

Lo primero es asignar, por algún medio, la abertura del cono  $\varphi_0$  y, al mismo tiempo, la dimensión métrica. Hecho esto, y “abierto” la superficie del cono por la generatriz opuesta a la origen, se representa en el plano, cubriendo un sector circular. La coordenada  $\gamma$ , sea el tipo de cónica que sea, es el producto de la longitud respecto al meridiano origen por el factor de conicidad sin  $\varphi_0$ , es decir  $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$ . El primer método (a), con el cual se abordan simultáneamente la asignación de abertura del cono y escala, es suponer el cono ‘tangente’ al elipsoide según un paralelo  $\varphi_0$ , elegido en función de la zona a cartografiar. Así, la conicidad viene dada por sin  $\varphi_0$  y, en consecuencia, la escala es proporcionada por el radio (generatriz), obviamente asignada al paralelo,  $\rho_0 = N_0 \cot \varphi_0$

El segundo método (b), en esencia es similar, aunque no supone ni tangencia, ni secancia, pero a las proyecciones diseñadas así se les suele denominar, de modo impropio, como secantes. El

parámetro  $\sin \varphi_0$  viene determinado por la diferencia  $p_1 - p_2 = N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2$  (radio de los paralelos 1 y 2), y el valor asignado en la proyección al arco de meridiano entre ambos paralelos, según sea la proyección conforme, equivalente o equidistante; esto es

$$(3) \quad \sin \varphi_0 = \frac{N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2}{\rho_2 - \rho_1} \quad \text{y} \quad \rho_1 = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_0} \quad \text{o bien} \quad \rho_2 = \frac{N_2 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_0}$$

Por otra parte, al tomar como sistema rectangular de ejes el definido en  $P_0$  por la imagen del meridiano origen y la tangente al paralelo de referencia  $\varphi_0$ , es evidente que las coordenadas de  $P$  en dicho sistema, eligiendo los signos habituales, están dadas por las expresiones siguientes

$$(4) \quad \boxed{x = \lambda \sin \varphi_0 \quad y = \rho_0 - \rho \cos \gamma}$$

Se impone ahora la condición de equidistancia de forma que los arcos de meridiano medidos desde el paralelo de tangencia sean iguales, tanto sobre la superficie terrestre como sobre el mapa. Resulta entonces que, para todo punto  $P$ , habrá de verificarse la relación:

$$(5) \quad \boxed{\rho = \rho_0 + \beta(\varphi_0) - \beta(\varphi)}$$

La función  $\beta(\varphi)$  se puede resolver según la ecuación (1) o con la integración numérica de (2). Sin embargo, al observar la figura siguiente (derecha), donde se ha dibujado una sección vertical del cono, se aprecia que el radio polar  $\rho_0$  correspondiente al punto  $P_0$  puede ser escrito en la forma:

$$(6) \quad \boxed{r_0 = \rho_0 \sin \varphi_0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{r_0}{\sin \varphi_0} \Rightarrow \rho_0 = \frac{N_0 \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} \Rightarrow \rho_0 = N_0 \cot \varphi_0}$$

Por otro lado, como se ha explicado anteriormente, en todas las cónicas directas la relación entre el ángulo  $\gamma$  formado por dos generatrices del cono circular cuyo ángulo en el vértice es  $\varphi_0$ , y el diedro  $\lambda$  definido por los dos planos formados por tales generatrices y el eje del cono (ver figura anterior), es la siguiente:

$$(7) \quad \boxed{\gamma = \lambda \sin \varphi_0}$$

Para mayor sencillez, en esta fórmula el ángulo  $\lambda$  se refiere a la longitud referida al meridiano origen elegido. Sin pérdida de generalidad, después, se puede sustituir  $\lambda$  por  $\lambda - \lambda_0$

Para completar el estudio se

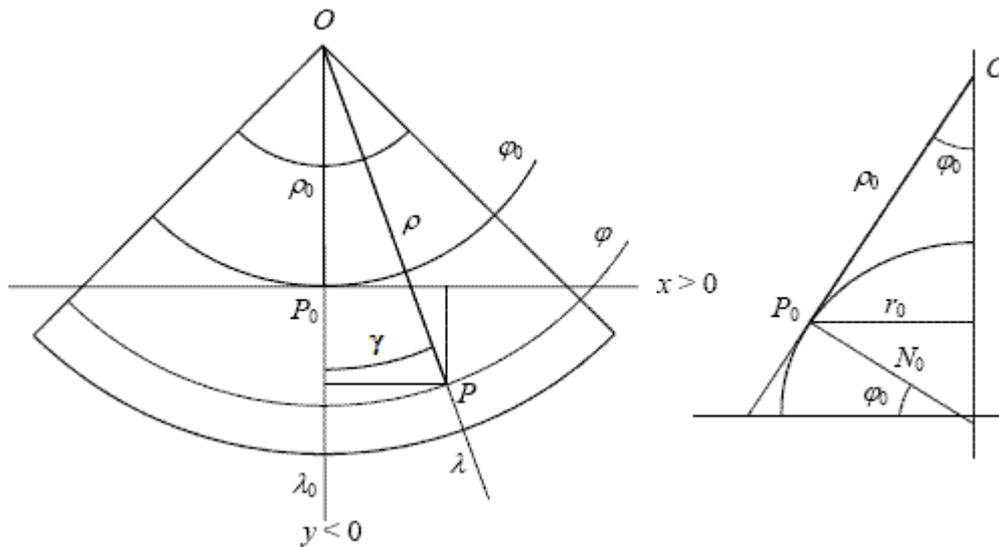


Figura 2.

La expresión de la proyección en coordenadas cartesianas tiene la siguiente forma

$$(8) \quad \begin{cases} x = x_0 + [N_0 \cot \varphi_0 + \beta(\varphi_0) - \beta(\varphi)] \sin(\lambda \sin \varphi_0) \\ y = y_0 - [N_0 \cot \varphi_0 + \beta(\varphi_0) - \beta(\varphi)] \cos(\lambda \sin \varphi_0) + N_0 \cot \varphi_0 \end{cases}$$

Se han introducido, como se hace habitualmente, la suma de  $x_0$  y de  $y_0$  a cada coordenada para evitar coordenadas negativas, que se suelen denominar *falso este* y *falso norte*.

Para completar el estudio se aplican las formas generales a toda proyección para la convergencia  $\tan \gamma = x_\varphi / y_\varphi$ , y para la anamorfosis según meridiano  $m = \sqrt{(x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2} / M$ , y según el paralelo,  $n = \sqrt{(x_\lambda)^2 + (y_\lambda)^2} / (N \cos \varphi)$ .

Siendo

$$\begin{cases} x_\varphi = -M \sin \gamma & y_\varphi = M \cos \gamma \\ x_\lambda = \rho \cos \gamma \sin \varphi_0 & y_\lambda = \rho \sin \gamma \sin \varphi_0 \end{cases}$$

Se comprueba que la convergencia coincide con la coordenada polar cambiada de signo lo que indica la dirección del meridiano respecto a eje OY

$$(9) \quad \tan \gamma_c = \frac{x_\varphi}{y_\varphi} = \frac{-M \sin \gamma}{M \cos \gamma} \quad m = \frac{\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}}{M} = 1 \quad n = \frac{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}}{N \cos \varphi} = \frac{\rho \sin \varphi_0}{N \cos \varphi}$$

De un análisis somero de las deformaciones se sacan las siguientes consideraciones:

- las elipses de Tissot se encuentran orientadas con su semieje menor  $a=m=1$  en dirección del meridiano y el mayor en dirección del paralelo.
- en el paralelo origen  $a=m=n=1$  es la única línea isométrica estacionaria. Podría decirse que solo en esa línea coincidiría la representación equidistante con la conforme que tuviera el mismo paralelo base.
- en la representación del polo se da una singularidad,  $n=(\rho \sin \varphi_0)/(N \cos \varphi) \rightarrow \infty$ , porque al ser  $\rho(\pi/2) \neq 0$

Las fórmulas para la hipótesis de Tierra esférica se simplifican al considerar nula la excentricidad y reducirse el desarrollo en serie (1) a  $\beta(\varphi)=R\varphi$ . En el caso de Cónica Oblicua Equidistante es común la consideración de Tierra esférica.

También se deducen a partir de esta proyección las fórmulas correspondientes a la *horizontal polar equidistante* y la *cilíndrica directa equidistante*, ambas para la hipótesis elipsoidal, ya que, respectivamente son casos límite en que  $\varphi_0$  tiende a valores extremos  $\pi/2$  y cero.

Proyección horizontal polar equidistante según los meridianos (Tierra elipsoidal).

Como  $\varphi_0=\pi/2$  la constante de conicidad  $\sin \varphi_0=1$  y las fórmulas de la proyección quedan así:

$$(10) \begin{cases} x = x_0 + [\beta(\pi/2) - \beta(\varphi)] \sin \lambda \\ y = y_0 - [\beta(\pi/2) - \beta(\varphi)] \cos \lambda \end{cases}$$

Y las de convergencia y deformación lineal son

$$(11) \begin{cases} m = \frac{\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}}{M} = 1 & n = \frac{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}}{N \cos \varphi} = \frac{\beta(\pi/2) - \beta(\varphi)}{N \cos \varphi} \end{cases}$$

En el polo  $P_0$  se produce una aparente indeterminación respecto al valor de  $n$  según la fórmula, sin embargo, su valor es la unidad dado que es el único donde se da isometría.

El cambio de versión polar a oblicua (en la esfera) se usa en algún atlas, representando el globo en dos hemisferios antípodas. En esos mapas se aprecia muy directamente la correlación de fenómenos o hechos con la distancia al punto origen  $P_0$ . La adecuación de la formulación, como en todo paso a oblicua, se consigue substituyendo en las fórmulas anteriores, el arco desde el polo al punto genérico  $P$  por el ángulo  $z$  (distancia cenital desde  $P_0$ ) y la convergencia  $\gamma$  por el acimut  $\alpha$  de  $P_0$  a  $P$ ; ángulos que se obtienen del triángulo de posición  $P_0 P$  polo mediante la fórmulas siguientes ( $\zeta$  es la colatitud  $\pi/2-\varphi$  y  $\Delta\lambda$  la longitud relativa a  $P_0$ ):

$$(12) \quad \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \zeta \sin \Delta \lambda}{\cos \zeta \sin \zeta_0 - \sin \zeta \cos \zeta_0 \cos \Delta \lambda} \\ \cos z &= \cos \zeta \cos \zeta_0 + \sin \zeta \sin \zeta_0 \cos \Delta \lambda \end{aligned}$$

$$(13) \quad \begin{cases} x = x_0 + R_z \sin \alpha \\ y = y_0 + R_z \cos \alpha \end{cases}$$

Proyección cilíndrica directa equidistante según los meridianos (Tierra elipsoidal).

La proyección extendida a la totalidad del globo se representa en un rectángulo como indica la figura siguiente. Para ello se considera un cilindro tangente en el ecuador como límite de la cónica cuando  $\varphi_0$  tiende a cero. El ecuador, como línea automecoica, actuará como eje de abscisas. El eje de ordenadas del mapa será la generatriz del cilindro que es tangente en el ecuador a un meridiano cualquiera determinado por su longitud geográfica  $\lambda_0$ . De esta forma el punto  $P_0$  intersección de ambos ejes es el origen de coordenadas en la carta.

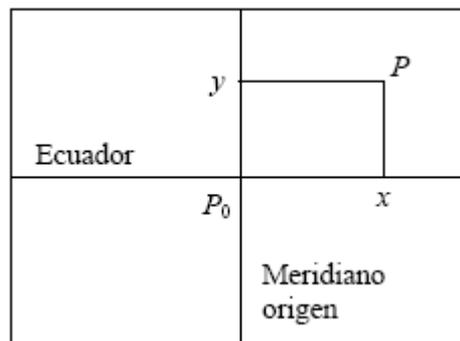


Figura 3.

En el sistema cartesiano así definido, la imagen sobre la superficie cilíndrica de un punto cualquiera  $P(\lambda, \varphi)$  tendrá por abscisa el producto de su incremento de longitud geográfica por el radio ecuatorial del elipsoide (para evitar confusión con el semieje de la elipse de Tissot, se denomina  $R_a$ ) y por ordenada, dada la condición de equidistancia desde el ecuador, el valor determinado anteriormente  $\beta(\varphi)$ . Sus fórmulas, en consecuencia, son las siguientes:

$$(14) \quad \begin{cases} x = x_0 + R_a \sin \alpha & y = y_0 + \beta(\varphi) \\ \gamma = 0 & m = 1 & n = \frac{R_a}{N \cos \varphi} \end{cases}$$

Un segundo grupo de proyecciones, basado en la equidistancia a lo largo de los paralelos, tiene una parte del desarrollo común a todas ellas. La deformación lineal en dirección del paralelo  $n$  ha de ser la unidad, por lo que se debe cumplir la siguiente ecuación que relaciona elipsoide y esfera

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R} \cos \psi d\Lambda}{\mathbf{N} \cos \varphi d\lambda} = 1 \quad \text{si} \quad \frac{d\Lambda}{d\lambda} = \alpha$$

$$(15) \Rightarrow \cos \psi = \frac{\mathbf{R}_a}{\alpha \mathbf{R}} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{3e^4}{8} \sin^4 \varphi + \dots \right) \cos \varphi$$

Dependiendo de los valores de  $\alpha$  y  $\mathbf{R}$  se pueden desarrollar diferentes proyecciones. Si se impone que las longitudes coincidan ( $\lambda = \Lambda$ ), y además se igualen las latitudes en el ecuador y el polo, se trata de la esfera de Jacobi. Es tangente al ecuador y con radio el semieje del elipsoide, ahora denominado  $\mathbf{R}_a$  para evitar confusión con la elipse de Tissot, y por tanto, la latitud  $\psi$  coincide con la latitud reducida, por lo que  $\tan \psi = \frac{\mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} \tan \varphi = \sqrt{1 - e^2} \tan \varphi$

### 58.3. Proyecciones equivalentes. Condiciones de equivalencia

De modo semejante a como se ha obrado con las proyecciones equidistantes y directas, se va a empezar por establecer la condición general de equivalencia y aplicarla a la cónica directa, para particularizar después al caso de la horizontal y de la cónica.

En primer lugar se relacionan los elementos diferenciales de superficie en elipsoide  $dS$ , como objeto inicial, y en esfera  $dS_1$ .

$$(16) \boxed{dS = \mathbf{M} \mathbf{N} \cos \varphi d\varphi d\lambda \Leftrightarrow dS_1 = \mathbf{R}^2 \cos \psi d\psi d\Lambda}$$

Se supone que coincidan las longitudes en los dos sistemas  $\lambda = \Lambda$  y las latitudes en los extremos  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi/2$ , lo que da lugar a la siguiente ecuación diferencial, cuyo resultado es esencial para el análisis de las proyecciones equivalentes o autálicas.

$$(17) \mathbf{R}^2 \cos \psi d\psi = \mathbf{M} \mathbf{N} \cos \varphi d\varphi = \frac{\mathbf{R}_a^2 (1 - e^2) \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi \quad \mathbf{u} = \sin \varphi$$

Para integrar el segundo miembro se puede expresar como suma de las fracciones siguientes:

$$\frac{\mathbf{R}_a^2 (1 - e^2)}{2} \int \frac{2du}{1 - e^2 u^2} = \frac{\mathbf{R}_a^2 (1 - e^2)}{2} \left[ \int d\left( \frac{u}{1 - e^2 u^2} \right) + \int \frac{du}{1 - e^2 u^2} \right]$$

Resultando la siguiente ecuación que relaciona la latitud en el elipsoide y en la esfera con el semieje del elipsoide y el radio de la esfera

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}^2 \sin \psi &= \frac{\mathbf{R}_a^2 (1 - e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \operatorname{argth}(e \sin \varphi) \right] + C \\ \mathbf{R}^2 \sin \psi &= \mathbf{R}_a^2 q_s(\varphi) \quad \text{siendo} \quad q_s(\varphi) = \frac{(1 - e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \operatorname{argth}(e \sin \varphi) \right] \end{aligned}$$

La variable auxiliar  $q_s(\varphi)$  es enormemente útil para la formulación práctica de las proyecciones equivalentes. En el caso de Tierra esférica la variable  $q_{se}(\varphi)$  es  $\sin \psi$

#### 58.4. Latitud autálica, radio de la esfera equivalente

El valor de  $\psi$  de esta expresión se denomina *latitud autálica*, y de la propia ecuación se deduce el radio de la esfera cuya longitud del cuadrante coincide con el desarrollo del de la elipse meridiana. La constante de integración C se anula para que se cumpla la ecuación en el valor  $\varphi=0$ . Las partes izquierda y derecha de la ecuación (18) representan áreas iguales en la esfera autálica y en el elipsoide desde el ecuador y con una amplitud en longitud de un radian. Así para  $\psi=\varphi=\pi/2$  se obtiene el radio de la esfera

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}_a^2 \frac{1 - e^2}{2} \left[ \frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right] \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}_a \left[ \frac{1}{2} + \frac{1 - e^2}{4e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Tanto latitud autálica como el radio de la esfera se pueden expresar mediante sendos desarrollos en serie (Bugayevskiy)

$$(19) \quad \begin{aligned} \sin \psi &= \frac{\mathbf{R}_a^2 (1 - e^2)}{2\mathbf{R}^2} \left( \sin \varphi + \frac{2e^2}{3} \sin^3 \varphi + \frac{3e^4}{5} \sin^5 \varphi + \frac{4e^6}{7} \sin^7 \varphi \dots \right) \\ \psi &= \varphi - A_1 \sin 2\varphi + B_1 \sin 4\varphi - \dots \quad A_1 = \frac{e^2}{3} + \frac{31e^4}{180} + \dots \quad B_1 = \frac{17e^4}{360} + \dots \end{aligned}$$

Con parámetros de SGR80, el valor de los coeficientes es  $A_1=461.864''$  y  $B_1=0.436''$ , y la mayor diferencia  $(\psi-\varphi) = 7'41.9''$  se produce en el paralelo  $45^\circ$  aproximadamente; para ese mismo elipsoide el radio de la esfera equivalente es  $\mathbf{R}=6371007$  cuyo desarrollo en serie es

$$(20) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_a \left( 1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17e^4}{360} - \dots \right)$$

### 58.5. Utilización de las proyecciones equivalentes y ejemplos

El coeficiente de deformación superficial constante e igual a la unidad ( $\sigma=ab=1$ ) es la característica principal, común a todas las proyecciones equivalentes.

Muchos países han adoptado distintos tipos de proyecciones equivalentes por su característica como especialmente indicada para catastro y aplicaciones afines. En mapas de escala pequeña también es patente la ventaja que ofrece su característica, por cuanto la temática asociada al mapa se correlaciona visualmente con la superficie de las áreas de países, regiones o provincias. No ha faltado el matiz político en el debate sobre la proyección más adecuada; por ejemplo, Peters, hacia los 70 del siglo XX, reinventa la versión de la cilíndrica equivalente de Gall (1855) para representación de planisferios. La razón esgrimida a favor de esta proyección era, más o menos, que, “el uso generalizado de la cilíndrica de Mercator había sido impulsada por los países ricos, capitalistas, para magnificar la representación de sus países (latitudes altas), marcando diferencias, en detrimento de los países del tercer mundo, situados más bien en la franja ecuatorial”.

Cuando se trata de representar sólo una parte de la superficie terrestre, un aspecto a tener en cuenta para la elección entre proyecciones equivalentes es reducir la diferencia máxima entre semiejes de la elipse de Tissot en el ámbito de aplicación.

#### *Proyección cilíndrica directa equivalente (Tierra elipsoidal).*

Con el fin de encontrar las fórmulas que definen la proyección se parte de la definición de cilíndricas  $\{x=f(\lambda), y=g(\varphi)\}$  y, si  $x$  ha de ser proporcional a las longitudes, se toma como constante de proporcionalidad  $R_a$ , es decir,  $x=f(\lambda)=R_a\lambda$  y, planteando la condición se tiene

$$\begin{aligned} dx dy &= MN \cos \varphi d\lambda d\varphi \\ dx &= R_a d\lambda \end{aligned} \Rightarrow R_a dy = MN \cos \varphi d\varphi = R_a^2 d(q_s(\varphi))$$

(21) En resumen, la formulación es  $\boxed{x = R_a \lambda, \quad y = R_a q_s(\varphi)}$

El cálculo de convergencia y coeficientes de deformación requiere de las derivadas parciales siguientes:  $x_\varphi=0 \quad x_\lambda=R_a \quad y_\varphi=R_a q'_s(\varphi)=MN \cos \varphi / R_a \quad y_\lambda=0$  luego la convergencia es nula, como cabía esperar y los módulos de deformación respecto a meridiano y paralelo son

$$(22) \quad m = \frac{\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}}{M} = \frac{N \cos \varphi}{R_a} \quad n = \frac{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}}{N \cos \varphi} = \frac{R_a}{N \cos \varphi}$$

Como el empleo habitual de esta proyección es en mapa de propósito general y escala pequeña es suficiente utilizar la formulación en Tierra esférica. A veces, con carácter más general, se

pretende que determinado paralelo sea línea de referencia donde el módulo de deformación lineal sea la unidad, resultando las ecuaciones:

$$(23) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{R}\lambda \cos \varphi_0, \quad \mathbf{y} = \mathbf{R} \sin \varphi / \cos \varphi_0, \quad \sigma = 1 \\ \mathbf{m} &= \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \quad \mathbf{m} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \end{aligned}}$$

Esto mismo se puede realizar en el caso de Tierra elipsoidal

*Proyección cónica directa equivalente (Tierra elipsoidal).*

La forma general de las cónicas va a servir para iniciar el camino hasta las fórmulas de esta proyección

$$(24) \quad \boxed{\mathbf{x} = \rho \sin \gamma \quad \mathbf{y} = \rho_0 - \rho \cos \gamma}$$

Previamente se plantea la forma de las funciones para las cónicas puras, y sobre todo que el ángulo polar es sólo función de función de la longitud y proporcional a ella según el seno del ángulo de abertura del cono recto, es decir

$$\rho = \mathbf{f}(\varphi), \quad \gamma = \mathbf{g}(\lambda) = \lambda \sin \varphi_0 \Rightarrow d\gamma = d\lambda \sin \varphi_0$$

Sentadas estas bases se formula la condición de equivalencia en la forma polar. Pero dado que la latitud crece en sentido contrario al radio polar, o dicho en sentido inverso, si se considera un radio polar mayor la superficie desde el ecuador es menor.

$$\rho d\rho d\gamma = -MN \cos \varphi d\varphi d\lambda \Rightarrow \rho \sin \varphi_0 d\rho d\lambda = -MN \cos \varphi d\varphi d\lambda$$

Este planteamiento da lugar a una ecuación diferencial que permite hallar el radio polar en función de la latitud, utilizando la variable auxiliar  $q_s(\varphi)$ , y al integrar dicha ecuación se obtiene (ver la fórmula (18))

$$(25) \quad \frac{\rho^2 \sin \varphi_0}{2} = -R_a^2 q_s(\varphi) + C \Rightarrow \rho^2 = -\frac{2}{\sin \varphi_0} R_a^2 q_s(\varphi) + C$$

la constante C se obtiene al imponer la condición de que el paralelo origen (de tangencia)  $\varphi_0$ , sea automecoico, esto es, el radio polar debe coincidir con  $N_0 \cot \varphi_0$

$$(26) \quad C = N_0^2 \cot^2 \varphi_0 + \frac{2}{\sin \varphi_0} R_a^2 q_s(\varphi_0)$$

Se sustituye este valor en (25) y resulta

$$(27) \quad \rho^2 = N_0^2 \cot^2 \varphi_0 + \frac{2}{\sin \varphi_0} R_a^2 [q_s(\varphi_0) - q_s(\varphi)]$$

Al poner  $N_0$  según su expresión queda de la siguiente forma

$$(28) \quad \begin{aligned} \rho &= \frac{R_a}{\sin \varphi_0} \left( \frac{\cos^2 \varphi_0}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} + 2[q_s(\varphi_0) - q_s(\varphi)] \sin \varphi_0 \right)^{\frac{1}{2}} & \gamma &= \lambda \sin \varphi_0 \\ q_s(\varphi) &= \frac{(1 - e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \operatorname{arg th}(e \sin \varphi) \right] \\ x &= x_0 + \rho \sin \gamma & y &= y_0 + N_0 \cot \varphi_0 - \rho \cos \gamma \end{aligned}$$

Los coeficientes de deformación, se hallarán por las fórmulas generales habituales, debiendo, previamente, obtener la derivada del radio polar respecto a la latitud y, aplicarla a las derivadas parciales respecto a las variables  $\lambda$  y  $\varphi$ . Para ello, es más sencillo partir de la ecuación (25)

$$(29) \quad \begin{aligned} 2\rho\rho_\varphi \frac{\sin \varphi_0}{2} &= -\frac{d(R_a^2 q_s(\varphi))}{d\varphi} = MN \cos \varphi \Rightarrow \rho_\varphi = \frac{MN \cos \varphi}{\rho \sin \varphi_0} \\ m &= \frac{(x_\varphi + y_\varphi)^{\frac{1}{2}}}{M} = \frac{N \cos \varphi}{\rho \sin \varphi_0} & n &= \frac{(x_\lambda + y_\lambda)^{\frac{1}{2}}}{N \cos \varphi} = \frac{\rho \sin \varphi_0}{N \cos \varphi} & \sigma &= mn = 1 \end{aligned}$$

La formulación para la hipótesis de Tierra esférica se deduce al hacer  $e=0$  en las expresiones anteriores. La aparente indeterminación de  $\frac{1}{e} \operatorname{arg th}(e \sin \varphi)$  en (28) se resuelve aplicando la regla de l'Hopital

$$(30) \quad \lim_{e \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{e} \operatorname{arg th}(e \sin \varphi) \right] = \lim_{e \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{\sin \varphi}{1 - (e \sin \varphi)^2}}{1} \right] \rightarrow \sin \psi \quad \text{entonces}$$

$$q_{se} = \sin \psi \Rightarrow \rho = \frac{R}{\sin \psi_0} \left( 1 + \sin^2 \psi_0 - 2 \sin \psi_0 \sin \psi \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad \gamma = \lambda \sin \varphi_0$$

Y el resumen de fórmulas es

$$(31) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \rho \sin \gamma & y &= y_0 + R \cot \psi_0 - \rho \cos \gamma \\ m &= \frac{\cos \psi \sin \psi_0}{(1 + \sin^2 \psi_0 - 2 \sin \psi_0 \sin \psi)^{\frac{1}{2}}} & n &= \frac{(1 + \sin^2 \psi_0 - 2 \sin \psi_0 \sin \psi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \psi \sin \psi_0} & \sigma &= mn = 1 \end{aligned}$$

Proyección acimutal polar equivalente

Se puede considerar esta proyección como un caso particular de la cónica cuando  $\varphi_0$  crece hasta alcanzar el valor  $\pi/2$ . Su formulación, en consecuencia, es

$$(32) \quad \begin{aligned} \rho &= R_a \left( 2 \left[ q_s \left( \frac{\pi}{2} \right) - q_s(\varphi) \right] \right)^{\frac{1}{2}} & \gamma &= \lambda \\ q_s(\varphi) &= \frac{(1-e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \operatorname{argth}(e \sin \varphi) \right] \\ x &= x_0 + \rho \sin \lambda & y &= y_0 - \rho \cos \lambda \end{aligned}$$

Y los coeficientes de deformación son

$$(33) \quad \begin{aligned} m &= \frac{(x_\varphi + y_\varphi)^{\frac{1}{2}}}{M} = \frac{N \cos \varphi}{\rho} & n &= \frac{(x_\lambda + y_\lambda)^{\frac{1}{2}}}{N \cos \varphi} = \frac{\rho}{N \cos \varphi} & \sigma &= mn = 1 \\ & & & \text{y si se considera tierra esférica} & & \\ m &= \frac{\cos \psi}{(2 - 2 \sin \psi)^{\frac{1}{2}}} & n &= \frac{(2 - 2 \sin \psi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \psi} & \sigma &= mn = 1 \end{aligned}$$

El centro de la proyección es el único punto isométrico, y los valores de los módulos de deformación aparentemente indeterminación se resuelve por la regla de l'Hopital

## Bibliografía

- [1] Dirk J. Struik, 'Geometría diferencial clásica', Aguilar 1966
- [2] G.B: Lauf, 'Geodesy and Map Projections', TAFE Publications Unit 1983
- [3] Lev M. Bugayevskiy, Jhon P. Snyder, 'MAP PROJECTIONS a Reference Manual', Taylor & Francis 1995
- [4] Escuela de Topografía y Geodesia, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 1º', Servicio Geográfico del Ejército 1955
- [5] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 2º', SGE 1944
- [6] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 3º', SGE 1947
- [7] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Complementos sobre representación conforme', SGE 1951
- [8] Estado Mayor del Ejército, 'Reglamento de Cartografía Militar (1935), Tablas'. SGE 1942
- [9] Estado Mayor Central, 'Característica y tablas de la Proyección Lambert de Canarias'. SGE 1945
- [10] Estado Mayor Central, 'Proyección Universal Transversa Mercator'. SGE 1976
- [11] John P. Snyder 'Map Projections-A Working Manual', Professional paper 1395 US Government P. Office 1987
- [12] Juan Mena Berrios 'Geodesia Superior', Centro Nacional de Información Geográfica 2008
- [13] A. Lujan, 'Apuntes de cartografía', no publicados

## Tema 59. Proyecciones cónicas y pseudocónicas. Proyección cónica conforme de Lambert: Definición a través de sistemas isométricos y construcción geométrica. Aplicaciones en España y al mapa del mundo. Proyección de Bonne. Proyección policónica.

### 59.1. Proyecciones cónicas y pseudocónicas

Se conocen como cónicas y pseudocónicas aquellas proyecciones cartográficas en las que los paralelos geográficos se representan con una familia de arcos de circunferencia concéntricos; alternativamente a las proyecciones directas se entienden también como tales las transversas u oblicuas en cuando se refieran a los círculos menores, respecto al diámetro correspondiente a un punto que constituye el polo de la proyección.

Este tipo de proyecciones suele formularse en coordenadas polares del plano  $(\rho, \gamma)$  como funciones de las coordenadas geográficas  $(\varphi, \lambda)$ . Así, se hace corresponder de forma biyectiva, salvo puntos singulares, la superficie cerrada esfera o elipsoide con una parte del plano. Después, se convierten las coordenadas planas  $(\rho, \gamma)$  en las cartesianas del plano  $(x, y)$ .

Se llaman *cónicas* aquellas que responden a la forma general  $\{\rho=f(\varphi), \gamma=\alpha\lambda\}$ , donde existe una correspondencia directa con la superficie de un cono que está cubierta desde el vértice o a partir un círculo menor (tronco de cono).

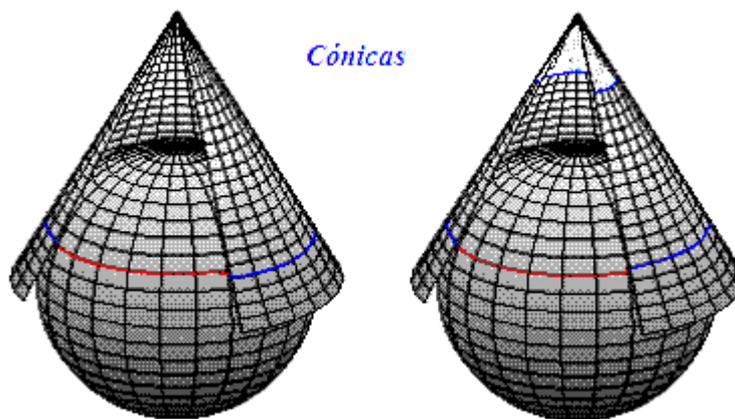


Figura 1.

La representación de meridianos y paralelos, al desarrollar el cono en el plano, son respectivamente circunferencias concéntricas y rectas que parten desde el centro. La constante de proporcionalidad  $\alpha$  se refiere a la abertura del cono  $\varphi_0$ , de modo tal que, el ángulo entre dos

generatrices “próximas” del cono  $d\gamma$  es la proyección del correspondiente  $d\lambda$  sobre el plano tangente según la generatriz, y por tanto,  $d\gamma = d\lambda \sin \varphi_0$  e integrando ésta resulta  $\alpha = \sin \varphi_0$ .

Por extensión se denominan *pseudocónicas* aquellas cuya forma general es  $\{\rho = f_1(\varphi), \gamma = f_2(\varphi, \lambda)\}$  ya que los paralelos se corresponden, también, con circunferencias concéntricas, mientras los meridianos son curvas simétricas respecto al meridiano central donde se encuentra el centro de las circunferencias de los paralelos.

La ventaja principal de formular estas proyecciones a partir de coordenadas polares radica en la sencillez con que se definen las deformaciones en las direcciones principales: meridianos y paralelos.

Las *proyecciones cónicas*, como se han definido, representan las direcciones principales según líneas ortogonales ( $i = \pi/2$ ); las fórmulas comunes a ellas se resumen a continuación

$$(1) \quad \boxed{\begin{aligned} x &= \rho \sin \gamma, \quad y = \rho_s - \rho \cos \gamma \Leftrightarrow \rho = f(\varphi), \quad \gamma = \lambda \sin \varphi_0 \\ m &= \frac{-\rho_\varphi}{M}, \quad n = \frac{\rho \sin \varphi_0}{N \cos \varphi}, \quad \sigma = mn \end{aligned}}$$

$\rho_s$  es el radio polar correspondiente a un punto arbitrario, a veces el más al sur de la carta, elegido sobre el meridiano origen.

Del mismo modo, para las *proyecciones pseudocónicas* se parte de las expresiones mencionadas  $\{\rho = f_1(\varphi), \gamma = f_2(\varphi, \lambda)\}$  que se diferencian y se aplican las fórmulas generales resultando el resumen siguiente.

$$\begin{aligned} x_\lambda &= \rho \cos \gamma \gamma_\lambda, \quad y_\lambda = \rho \sin \gamma \gamma_\lambda, \quad x_\varphi = \rho_\varphi \sin \gamma + \rho \cos \gamma \gamma_\varphi, \quad y_\varphi = -\rho_\varphi \cos \gamma + \rho \sin \gamma \gamma_\varphi \\ (2) \quad F &= x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = \rho^2 \gamma_\lambda \gamma_\varphi, \quad J = x_\lambda y_\varphi - x_\varphi y_\lambda = -\rho \rho_\varphi \gamma_\lambda \\ \sigma &= \frac{J}{Mr} = \frac{-\rho \rho_\varphi \gamma_\lambda}{Mr}, \quad \tan \varepsilon = \frac{\rho \gamma_\varphi}{\rho_\varphi}, \quad n = \frac{\sqrt{(x_\lambda^2 + y_\lambda^2)}}{r} = \frac{\rho \gamma_\lambda}{r}, \quad m = \frac{\sqrt{(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)}}{M} = \frac{\sqrt{\rho_\varphi^2 + \rho^2 \gamma_\varphi^2}}{M} \end{aligned}$$

De estas fórmulas se deduce que, en este grupo de proyecciones, las retículas de meridianos y paralelos no son ortogonales y la longitud de los arcos de meridiano es función de la latitud y de la longitud. Por tanto no pueden ser conformes y únicamente se conserva el desarrollo de arco de meridiano en el central. Ejemplo típico de este grupo de proyecciones es la de Bonne, que además es equivalente.

Antes de abordar el primer caso de proyección cónica es oportuno explicar que la constante del cono se puede fijar de dos maneras. Ello con independencia del tipo de proyección según deformaciones, sea conforme, equivalente o equidistante. La coordenada  $\gamma$ , sea el tipo de cónica que sea, es la longitud respecto al meridiano origen multiplicada por el factor de conicidad  $\sin \varphi_0$ , es decir,  $\gamma = \lambda \sin \varphi_0$ . El primer método (a), con el cual se abordan simultáneamente la asignación de abertura del cono y escala, es suponer un cono 'tangente' al elipsoide según un paralelo  $\varphi_0$  (implica dos condiciones, ), y se elige en función de la zona a cartografiar. Así, la conicidad viene dada por  $\sin \varphi_0$  y, en consecuencia, la escala es proporcionada por el radio (generatriz), obviamente asignada al paralelo,  $\rho_0 = N_0 \cot \varphi_0$

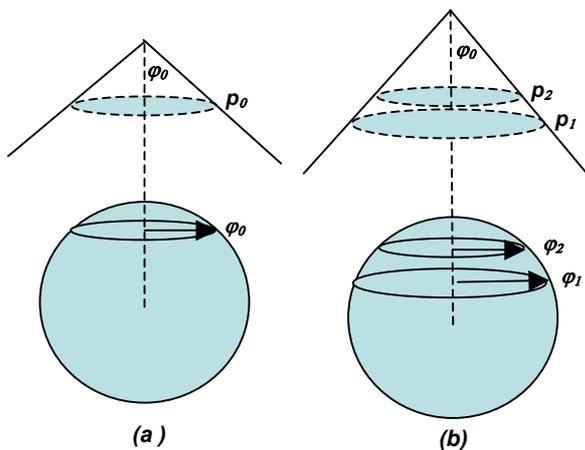


Figura 2.

El segundo método (b), en esencia es similar, aunque no supone ni tangencia, ni secancia, pero las proyecciones así diseñadas se suelen denominar, de modo impropio, como *secantes*. El parámetro  $\sin \varphi_0$  viene determinado por la diferencia  $\rho_1 - \rho_2 = N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2$  (radio de los paralelos 1 y 2, implica también dos condiciones), y el valor asignado en la proyección al arco de meridiano entre ambos paralelos, según el tipo de proyección: conforme, equivalente o equidistante, esto es

$$(3) \quad \sin \varphi_0 = \frac{N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2}{\rho_2 - \rho_1} \quad \text{y} \quad \rho_1 = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_0} \quad \text{o bien} \quad \rho_2 = \frac{N_2 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_0}$$

## 59.2. Proyección cónica conforme de Lambert: Definición a través de sistemas isométricos y construcción geométrica

Se trata de una proyección cónica y, por tanto, acorde con las ecuaciones (1) donde se relacionan entre sí coordenadas polares y cartesianas planas, y en las que se fijan el paralelo origen  $\varphi_0$ , y el radio de dicho paralelo en la proyección  $\rho_0$ . Además han de imponérsele las condiciones de conformidad.

$$(4) \quad x = \rho \sin \gamma, \quad y = \rho_0 - \rho \cos \gamma \Leftrightarrow \rho = f(\varphi), \quad \gamma = \lambda \sin \varphi_0$$

Para ello se ha de realizar un cambio de variable aplicado a las coordenadas polares para disponer de un sistema de coordenadas isométrico que facilite la condición de conformidad. El cambio de variable necesario es  $\{u = \lambda \sin \varphi_0; v = \ln(\rho/\rho_0) = -q \sin \varphi_0\}$ ; se basa en la definición de las generatrices del cono con la expresión  $\rho = \rho_e \varepsilon^{-q \sin \varphi_0}$ , donde  $\rho_e$  es una constante que significa el radio asignado al ecuador,  $q$  es la latitud isométrica y  $\sin \varphi_0$  es la constante del cono.

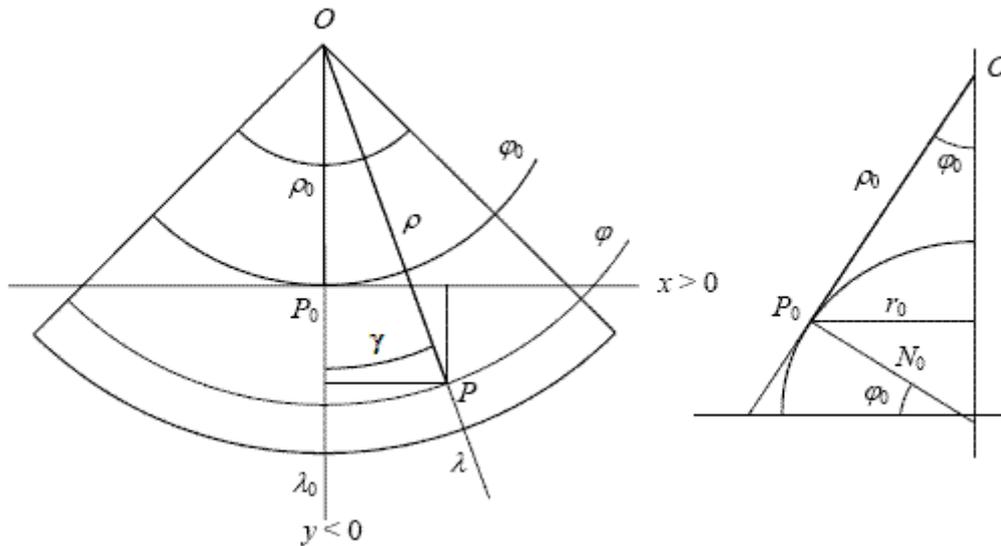


Figura 3.

*Latitud isométrica.* De un modo sencillo y breve se definen las *coordenadas curvilíneas isométricas* como aquellas que, tras el pertinente cambio de variable, permiten dividir la superficie en “cuadrados diferenciales” de la forma siguiente:

$$ds^2 = [(M)^2 d\varphi^2 + (N \cos \varphi)^2 d\lambda^2] = (N \cos \varphi)^2 [(M/N \cos \varphi)^2 d\varphi^2 + d\lambda^2] = (N \cos \varphi)^2 [dq^2 + d\lambda^2]$$

El cambio introducido con la relación diferencial  $dq = (M/N \cos \varphi) d\varphi$ , deja “separadas” las variables y simplemente produce un escalado del elemento  $ds$ , como función de punto. Integrando esta expresión se obtiene  $q$ , siendo

$$dq = \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi$$

Haciendo algunas transformaciones se puede presentar de forma más sencilla para su integración

$$dq = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \frac{e \cos \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{d(\sin \varphi)}{1 - (\sin \varphi)^2} - e \frac{d(e \sin \varphi)}{1 - (e \sin \varphi)^2}$$

Como quiera que ambos términos tienen la forma  $\frac{dt}{1-t^2}$ , cuya primitiva es el argumento tangente hiperbólica de  $t$ , resulta para la *latitud isométrica, o variable de Mercator*, la siguiente expresión

$$(5) \quad \mathbf{q} = \mathbf{arg th}(\sin \varphi) - e \mathbf{arg th}(e \sin \varphi)$$

Sin embargo, son más conocidas las expresiones siguientes; ambas son equivalentes y la segunda es en función de la colatitud

$$(6) \quad \mathbf{q} = \mathbf{In tan} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \mathbf{In} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} = \mathbf{In cot} \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e}{2} \mathbf{In} \frac{1 + e \cos \theta}{1 - e \cos \theta} \text{ siendo}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ es la colatitud}$$

El radio del ecuador  $\rho_e$  se halla sustituyendo en la fórmula de  $\rho$  la latitud del paralelo elegido como base  $\varphi_0$  y la tangente hasta el eje de rotación  $P_0O$  como radio  $\rho_0$

$$(7) \quad \rho_e = \rho_0 \varepsilon^{q_0 \sin \varphi_0} = N_0 \mathbf{cot} \varphi_0 \varepsilon^{q_0 \sin \varphi_0} \quad \varepsilon = \text{base de logaritmos neperianos}$$

La relación  $(\mathbf{u} + \mathbf{iv}) = \mathbf{sin} \varphi_0 (\lambda - \mathbf{iq}) = \left( \lambda \mathbf{sin} \varphi_0 + \mathbf{i} \ln \frac{\rho}{\rho_e} \right)$  representa un sistema

isométrico en el que la condición  $\rho = cte$ . genera líneas isométricas de módulo de deformación constante (paralelos) y la condición  $\lambda = cte$ . genera líneas isomorfas, rectas perpendiculares a las anteriores (meridianos).

La ecuación característica de los sistemas cónicos, bajo las condiciones de conformidad, lleva a la misma solución:

$$(8) \quad (\mathbf{x} + \mathbf{iy}) = \rho \mathbf{sin} \gamma + \mathbf{i}(\rho_0 - \rho \mathbf{cos} \gamma)$$

La constante  $\rho_0$  será el radio vector del paralelo de latitud  $\varphi_0$  en la proyección, igual a la distancia de la tangente hasta el vértice del cono, y  $\mathbf{sin} \varphi_0$  la constante de abertura del cono, tal que  $\gamma = \lambda \mathbf{sin} \varphi_0$ . Se entiende que las longitudes, contadas a partir del meridiano origen de la proyección deberían ser denominadas como  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ , pero es igualmente válido obviar esto a favor de mayor sencillez de notación, y finalmente, si se desea, se permutan ambas.

Las condiciones de conformidad se aplican al sistema (8), por las derivadas parciales siguientes:

$$(9) \quad \begin{aligned} x_\lambda &= \rho \cos(\lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0 & x_\varphi &= \rho_\varphi \sin(\lambda \sin \varphi_0) \\ y_\lambda &= \rho \sin(\lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0 & y_\varphi &= -\rho_\varphi \cos(\lambda \sin \varphi_0) \end{aligned}$$

que llevadas a las condiciones de Cauchy-Riemann  $\{x_\lambda = (r/M)y_\varphi; y_\lambda = -(r/M)x_\varphi\}$ , proporcionan las expresiones

$$\frac{\rho \cos(\lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0}{N \cos \varphi} = \frac{-\rho_\varphi \cos(\lambda \sin \varphi_0)}{M} \quad \frac{\rho \sin(\lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0}{N \cos \varphi} = \frac{-\rho_\varphi \sin(\lambda \sin \varphi_0)}{M}$$

ambas resultan idénticas e independientes de la longitud, proporcionando una ecuación diferencial a resolver

$$(10) \quad \frac{\rho \sin \varphi_0}{N \cos \varphi} = \frac{-\rho_\varphi}{M} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\sin \varphi_0 \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\sin \varphi_0 dq$$

Se integra y se toma como constante de integración  $-\ln \rho_e$  que correspondería al radio representativo del ecuador, ya que  $q = 0$  para  $\varphi = 0$ , resultando finalmente

$$(11) \quad \boxed{\ln \frac{\rho}{\rho_e} = -q \sin \varphi_0 \Rightarrow \left\{ \rho = \rho_e \varepsilon^{-q \sin \varphi_0}; \gamma = \lambda \sin \varphi_0 \right\}}$$

Tal y como se había considerado anteriormente. Estas mismas fórmulas presentadas en la forma más conocida es

$$(12) \quad \boxed{\gamma = \lambda \sin \varphi_0 \quad \rho = \rho_e \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\sin \varphi_0}}$$

Aun existe otra forma de presentar el radio polar de la proyección, es ponerla en función de la colatitud  $\zeta = \pi/2 - \varphi$

$$(13) \quad \boxed{\gamma = \lambda \sin \varphi_0 \quad \rho = \rho_e \left[ \cot \left( \frac{\zeta}{2} \right) \left( \frac{1 + e \cos \zeta}{1 - e \cos \zeta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\sin \varphi_0}}$$

La convergencia de meridianos coincide con el ángulo en coordenadas polares por ser los meridianos rectas convergentes en el polo, pero aplicando las derivadas parciales (9) a las fórmulas habituales se comprueba la convergencia y se halla el modulo de deformación

$$\tan \gamma = \frac{x_\varphi}{y_\varphi} = \frac{\rho_\varphi \sin(\lambda \sin \varphi_0)}{-\rho_\varphi \cos(\lambda \sin \varphi_0)} \quad \boxed{\mathbf{m} = \mathbf{n} = \frac{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}}{N \cos \varphi} = \frac{\rho \sin \varphi_0}{N \cos \varphi}}$$

El signo de la convergencia se corresponde con la situación del punto al este o al oeste del meridiano central de referencia

Es normal asignar al origen unas coordenadas  $(x_0, y_0)$  para evitar coordenadas negativas, pareja que se denomina, a veces, *falsos este y norte*, quedando las fórmulas de la proyección

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho \sin \gamma, & y &= y_0 + \rho_0 - \rho \cos \gamma \\ (14) \quad \gamma &= (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0, & \rho &= \rho_e \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\sin \varphi_0} \end{aligned}$$

El empleo inverso de la proyección consiste en hallar latitud y longitud correspondientes al par de coordenadas cartesianas en la proyección  $(x, y) \Rightarrow (\varphi, \lambda)$ . En primer lugar, se hallarán las coordenadas polares con las ecuaciones (15) –expresiones iniciales, a la izquierda,  $(\rho, \gamma)$ - y, a partir de éstos, con las fórmulas de la parte derecha se obtienen las geográficas

$$\begin{aligned} (15) \quad \gamma &= \arg \tan \frac{x - x_0}{y_0 + \rho_0 - y} \Rightarrow \lambda = \frac{\gamma}{\sin \varphi_0} + \lambda_0 \\ \rho &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y_0 + \rho_0 - y)^2} \Rightarrow \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\ln \rho - \ln \rho_e}{\sin \varphi_0} + \frac{e}{2} \ln \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right) \end{aligned}$$

La obtención de la latitud presenta el inconveniente de no disponer de una función aislada para despejar su valor. Sin embargo, dado que la expresión, función de la latitud que se mantiene en el segundo miembro, arroja un valor sumamente pequeño (próximo a cero) se puede prescindir de él en primera instancia e iterar aplicando en valor obtenido previamente; converge rápidamente. Pero se puede iniciar con una aproximación mayor si se considera que el primer valor obtenido, según la expresión siguiente, proporciona un valor cercano a la colatitud

geocéntrica  $\tan \frac{\theta_g}{2} = \left( \frac{\rho}{\rho_e} \right)^{\frac{1}{\sin \varphi_0}}$  y, a partir de la ecuación que relaciona latitudes geodésica y

geocéntrica  $\tan \theta = (1 - e^2) \tan \theta_g$ , se obtiene la geodésica acortando el proceso y, según la precisión necesaria, hace casi innecesaria la iteración.

El uso de la proyección Cónica conforme de Lambert está muy extendido. Es especialmente indicada para cartografiar zonas alargadas en el sentido este-oeste (p. ej. Las Islas Canarias, el Mediterraneo, Cuba, etc). Presenta distorsiones menores que otras proyecciones en latitudes medias. La isométrica base coincide con la latitud  $\varphi_0$  incluso cuando se elijan dos paralelos automecoicos al norte y sur de la zona a cartografiar; en este caso, el módulo de anamorfosis varía más rápidamente en ellos que en las proximidades de la isométrica estacionaria.

### 59.3. Aplicaciones en España y al mapa del mundo

En 1909 tuvo lugar en Londres una conferencia internacional, convocada por el gobierno británico, con objeto de acordar reglas para formar un mapa uniforme denominado *Carta del Mundo a escala 1:1.000.000*. La idea venía gestándose desde el congreso de geografía celebrado en Berna en 1891 y, en sucesivas ocasiones en Londres (1895) y en Ginebra (1908). Se pensó en dividir el Globo en 60 husos de 6° de longitud a partir del meridiano de Greenwich, con origen del huso en el meridiano central y, cada uno dividido en 44 trapecios y 2 triángulos. La proyección sería una “policónica” con ciertas licencias para simplificar la curvatura de los meridianos y estableciendo que fueran automecóicos los separados del central  $\pm 2^\circ$ .

Su interés radica en poner de manifiesto la constante preocupación de los países por unificar criterios en aspectos técnicos, como la cartografía. Además, parece como un anticipo de lo que más tarde evolucionaría hasta dar lugar al sistema UTM.

Ninguno de estos dos sistemas se apoya propiamente en la proyección Lambert conforme u ortomorfa, pero sí lo haría años después, la serie tipo World Map a escala 1:500.000 publicada también por el Instituto Geográfico para España. Con carácter más general, la proyección Lambert fue utilizada para la cartografía militar española y, finalmente, fue aprobada por Decreto de 18 de febrero de 1933 del Ministerio de la Guerra (D.O. 44) que promulgó aquel Reglamento de Cartografía Militar, en el cual se decía: “*Se adopta como reglamentaria la Proyección ortomorfa de Lambert, con un solo centro. .... Las tablas de esta proyección se calcularán y publicarán por la Comisión Militar de Enlace entre el Estado Mayor Central y el Instituto Geográfico, Catastral y de Estadística*”.

Esta proyección fue reglamentaria hasta el año 1968 en que el Ejército adopta la proyección UTM. Los parámetros particulares para la Península y Baleares eran: paralelo origen  $\varphi_0 = 40^\circ$ , longitud origen Madrid  $0^\circ$ , sistema geodésico de referencia Datum Madrid sobre elipsoide de Struve, factor de reducción de escala  $k_0=0.9988085293$ ; para Canarias eran: paralelo origen  $\varphi_0 = 28^\circ 30'$ , longitud origen Madrid  $12^\circ$  (longitud de Madrid respecto a Greenwich  $-3^\circ 41' 14'' 55$ ), sistema geodésico de referencia Datum Pico de las Nieves sobre elipsoide Internacional, factor de reducción de escala  $k_0=0.9999244799$ . La diferencia entre los factores de reducción de escala se debe a la muy diferente extensión entre las franjas de latitud utilizadas. La distancia entre la Península y las Canarias -unos 2000 kilómetros-, el diferente Datum de las redes geodésicas, y la separación en el tiempo para abordar los trabajos geodésicos justifican el diferente elipsoide asociado a cada red.

Hoy en día, la proyección Lambert está vigente para la cartografía digital escala 1:500.000 que publica el Instituto Geográfico Nacional. Se utilizan tres paralelos base según latitudes. La proyección se define eligiendo dos paralelos automecoicos para las bandas de Península e Islas Baleares. El juego de parámetros para la franja norte se corresponde con los paralelos automecoicos 39° 20'N y 43° 20'N, y el de la franja sur con los paralelos automecoicos 36° 40'N y 40° 40'N. Las hojas de las Islas Canarias usan el paralelo origen  $\varphi_0 = 28^\circ 50'$ . En todos los casos se considera meridiano origen  $\lambda_0 = 3^\circ 41' 16''$ ; sin embargo, los falsos este y norte son 600.000 / 600.000 para Península y Baleares y, 1.200.000 / 600.000 para Las Canarias. Los sistemas geodésicos de referencia son respectivamente ED50 y REGCAN95. En un futuro se producirán cambios relacionados con el reciente Real Decreto 1071/2007, de 27 de julio, por el que se regula el sistema geodésico de referencia, oficial en España. En este decreto se establece ETRS89 como sistema geodésico para Península y Baleares y, REGCAN95 para Canarias; ambos son geocéntricos y consistentes entre sí; en aplicaciones que no exijan diferenciación entre épocas como cartografía o navegación se pueden considerar un único común y en términos coloquiales como WGS84. También se hace eco este decreto de recomendaciones de EuroGeographics en cuanto la utilización de la proyección conforme de Lambert para cartografía paneuropea a escalas inferiores a 1:500.000, en especial para la cartografía temática.

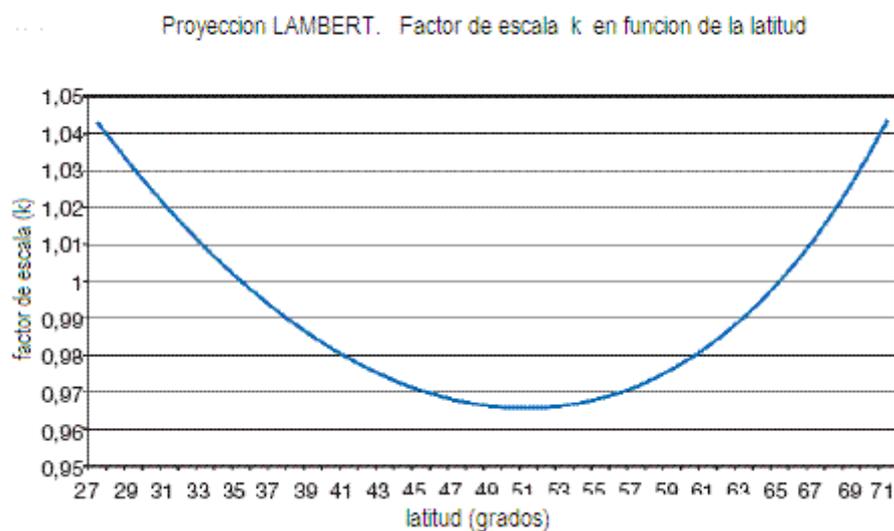


Figura 4.

Los paralelos automecoicos o paralelos “estandar” son 35°N y 65°N, origen de la proyección 52°N y 10°E con falsos norte y este, 2.800.000 y 4.000.000. Las deformaciones máximas se dan en el centro (isométrica base) 51°N con  $k=0,965622$  y, en los extremos 27°N y 71°N con  $k=1,043704$ .

### 59.4. Proyección de Bonne

Se trata de una proyección pseudocónica, y como tal tiene las características definidas en el apartado primero y está sujeta a las condiciones generales representadas por la ecuación (2) que, además, se han de particularizar para la condición adicional de equivalencia. Es ejemplo típico de pseudocónica equivalente. Fue usada con profusión por Rigobert Bonne en Francia des 1752, pero también fue adoptada en otros países como Portugal. Adopta una forma como la representada en la figura siguiente y, aunque parezca extraña, la deformación acusada se produce cuando se extiende ampliamente al este y oeste del meridiano central. Se repiten las ecuaciones (2) para mejor seguir su definición

$$\begin{aligned}
 x_\lambda &= \rho \cos \gamma \gamma_\lambda & y_\lambda &= \rho \sin \gamma \gamma_\lambda & x_\varphi &= \rho_\varphi \sin \gamma + \rho \cos \gamma \gamma_\varphi & y_\varphi &= -\rho_\varphi \cos \gamma + \rho \sin \gamma \gamma_\varphi \\
 F &= x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = \rho^2 \gamma_\lambda \gamma_\varphi & J &= x_\lambda y_\varphi - x_\varphi y_\lambda = -\rho \rho_\varphi \gamma_\lambda \\
 \sigma &= \frac{J}{Mr} = \frac{-\rho \rho_\varphi \gamma_\lambda}{Mr} & \tan \varepsilon &= \frac{\rho \gamma_\varphi}{\rho_\varphi} & n &= \frac{\sqrt{(x_\lambda^2 + y_\lambda^2)}}{r} = \frac{\rho \gamma_\lambda}{r} & m &= \frac{\sqrt{(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)}}{M} = \frac{\sqrt{\rho_\varphi^2 + \rho^2 \gamma_\varphi^2}}{M}
 \end{aligned}$$

Igual que los sistemas cónicos el radio polar es función exclusiva de la latitud, pero el ángulo polar es función tanto de la latitud como de la longitud. Su definición se hace a partir de un punto origen  $P_0(\lambda_0, \varphi_0)$ , de forma que los ejes de abscisas y ordenadas son la tangente al paralelo de punto (paralelo origen) y la recta transformada del meridiano que pasa por dicho punto. Es este el único meridiano rectilíneo y, tanto él como los paralelos serán automecóicos.



Figura 5.

Como la proyección es equivalente el módulo de deformación superficial debe ser igual a uno,  $\sigma = J/Mr = 1$  y teniendo en cuenta la expresión del módulo de deformación lineal en dirección del paralelo, resulta la siguiente expresión del jacobiano

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}r = -\rho\rho_\varphi\gamma_\lambda = -\rho_\varphi n r$$

que da lugar a la siguiente ecuación diferencial para definir el radio polar; integrable porque todas las variables son función de la latitud

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{M} = -\rho_\varphi n &\Rightarrow \rho = C - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathbf{M}}{n} d\varphi; \quad n = 1 \Rightarrow \rho = C - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{M} d\varphi \\ \rho &= \rho_0 + \beta(\varphi_0) - \beta(\varphi) \end{aligned}}$$

Por otro lado queda por resolver el ángulo polar que se supone con simetría respecto al meridiano central de la proyección

$$\gamma_\lambda = \mathbf{N} \cos \varphi / \rho \Rightarrow \gamma(\lambda, \varphi) = (\mathbf{N} \cos \varphi / \rho) / (\lambda - \lambda_0)$$

Finalmente, si en el paralelo origen se cumple la proporcionalidad de longitudes y ángulo polar, esto es, automecoísmo en éste (cono) y en el meridiano origen, se tendrá

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\lambda, \varphi_0) &= (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 \\ \gamma(\lambda, \varphi_0) &= (\mathbf{N}_0 \cos \varphi_0 / \rho_0) / (\lambda - \lambda_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_0 = \mathbf{N}_0 \cot \varphi_0$$

En resumen, sustituyendo estos valores en las fórmulas generales resultan las de la proyección de Bonne para Tierra elipsoidal

$$(16) \quad \boxed{\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \mathbf{N}_0 \cot \varphi_0 + \beta(\varphi_0) - \beta(\varphi) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \rho(\varphi) \sin[(\mathbf{N} \cos \varphi / \rho) / (\lambda - \lambda_0)] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_0 + \rho(\varphi_0) - \rho(\varphi) \cos[(\mathbf{N} \cos \varphi / \rho) / (\lambda - \lambda_0)] \\ \sigma = mn \cos \varepsilon = 1 \quad n = 1 \quad m &= \sec \varepsilon \quad \tan \varepsilon = \lambda(\sin \varphi - \mathbf{N} \cos \varphi / \rho) \end{aligned}}$$

En caso de considerar Tierra esférica de radio  $R$  la formulación se simplifica así

$$(17) \quad \boxed{\begin{aligned} \rho(\varphi) &= R(\cot \varphi_0 + \varphi_0 - \varphi) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \rho(\varphi) \sin[(R \cos \varphi / \rho) / (\lambda - \lambda_0)] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_0 + \rho(\varphi_0) - \rho(\varphi) \cos[(R \cos \varphi / \rho) / (\lambda - \lambda_0)] \\ \sigma = mn \cos \varepsilon = 1 \quad n = 1 \quad m &= \sec \varepsilon \quad \tan \varepsilon = \lambda(\sin \varphi - R \cos \varphi / \rho) \end{aligned}}$$

## 59.5. Proyección policónica

En realidad se puede considerar una familia de proyecciones cuyo denominador común es que la representación de los paralelos son arcos de circunferencia, no concéntricas, y cuyos centros se encuentran a lo largo del meridiano central u origen; los restantes meridianos son curvas simétricas respecto al central. En general se pueden establecer las fórmulas siguientes:

$$(18) \quad \boxed{\begin{array}{l} x = \rho \sin \gamma \quad y = Q - \rho \cos \gamma \\ Q = f_1(\varphi) \quad \rho = f_2(\varphi) \quad \gamma = f_3(\lambda, \varphi) \end{array}}$$

$$(19) \quad \tan \varepsilon = -\frac{F}{J} = -\frac{Q_\varphi \sin \gamma + \rho \gamma_\varphi}{Q_\varphi \sin \gamma - \rho_\varphi} \quad \leftarrow F = \rho \gamma_\lambda (Q_\varphi \sin \gamma + \rho \gamma_\varphi) \quad J = \rho \gamma_\lambda (Q_\varphi \sin \gamma - \rho_\varphi)$$

$$\sigma = \frac{J}{Mr} = \frac{\rho \gamma_\lambda (Q_\varphi \sin \gamma - \rho_\varphi)}{Mr} \quad n = \frac{\rho \gamma_\lambda}{r} \quad m = \frac{(Q_\varphi \sin \gamma - \rho_\varphi)}{r \cos \varepsilon}$$

Las distintas proyecciones se formularán en función de condiciones adicionales por lo que pueden ser conformes, automecoicas o arbitrarias según el caso.

### PROYECCIÓN DE LAGRANGE

Supónganse un círculo de radio  $\Pi$ , un arco de circunferencia BAB' (paralelo de A en proyección) de radio  $\rho_2$  ( $C_2B$ ) tangente en B, otro arco de circunferencia PAP' (meridiano de A) cuyo radio es  $\rho_2$  ( $C_1P$ ), y el ángulo de la tangente a ésta en P con el diámetro PP' es  $\alpha\lambda$ . Entonces, el corte de ambas circunferencias determina el punto genérico A, quedando determinados sus centros ( $C_1$  y  $C_2$ ) y los radios respectivos, según las fórmulas (20). Estas fórmulas son comunes a las denominadas globulares, porque tanto meridianos como paralelos son arcos de circunferencia.

$$(20) \quad \boxed{\begin{array}{l} C_1 \equiv \{x_1 = -\Pi / \tan(\alpha\lambda) ; y_1 = 0\} \quad \rho_1 = \Pi / \sin(\alpha\lambda) \\ C_2 \equiv \{x_2 = 0 ; y_2 = \Pi / \sin \gamma\} \quad \rho_2 = \Pi / \tan \gamma \end{array}}$$

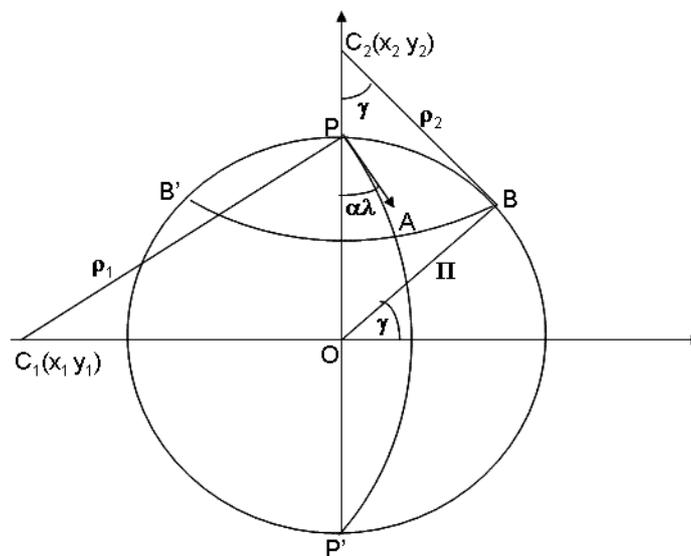


Figura 6.

Con estos valores y formando las ecuaciones de las circunferencias se pueden resolver las ecuaciones simultáneamente:

$$(21) \quad \boxed{\mathbf{x} = \frac{\Pi \cos \gamma \sin(\alpha\lambda)}{1 + \cos \gamma \cos(\alpha\lambda)} \quad \mathbf{y} = \frac{\Pi \sin \gamma}{1 + \cos \gamma \cos(\alpha\lambda)}}$$

Dado que la proyección de Lagrange es una proyección conforme, el valor de  $\gamma$ , paralelo a paralelo (ver cónica conforme de Lambert), debe cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann en relación con la latitud isométrica en la forma siguiente

$$(22) \quad \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \beta \varepsilon^{\alpha\lambda}}$$

Y el factor de escala será igual a

$$(23) \quad \boxed{\mathbf{m} = \mathbf{n} = \frac{\alpha \Pi \cos \gamma}{r(1 + \cos \gamma \cos(\alpha\lambda))}}$$

Los tres parámetros constantes ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Pi$ ) concretan la proyección deseada. El parámetro  $\alpha$  afecta a la forma que presentan las isolíneas de deformación lineal en torno al punto central de la proyección  $O(\lambda_0, \varphi_0)$ , por lo que se elegirá según convenga para cartografiar determinada área (ver la figura siguiente). Cuando  $\alpha < 1$  dichas líneas serán óvalos alargados en el sentido de los paralelos; si  $\alpha > 1$  dichas líneas serán óvalos alargados en el sentido de los meridianos;  $\alpha = 1$  dichas líneas serán círculos y la proyección se convierte en estereográfica; si  $\alpha = 0$  dichas líneas serán rectas paralelas (simétricas) y la proyección se convierte en la cilíndrica de Mercator.

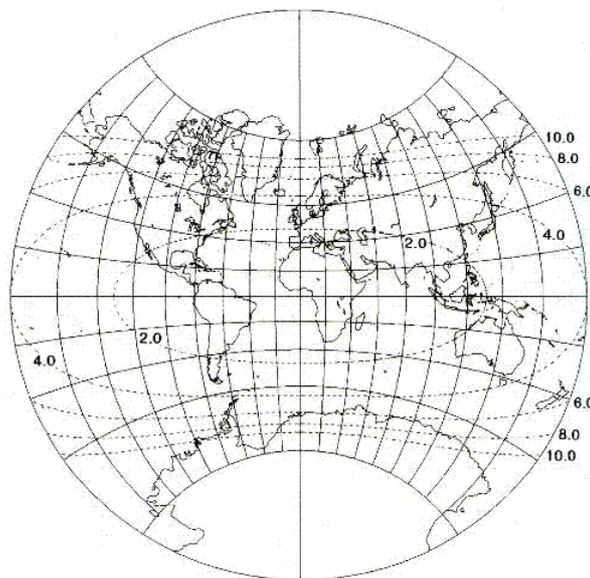


Figura 7. Proyección de Lagrange. Imagen tomada Bugayevskiy

En la práctica, el valor de  $\alpha$  se puede analizar a partir de la siguiente expresión y está referido al paralelo recto  $C_1O$  (ver croquis anterior); en la fórmula,  $\eta$  adopta el valor  $b/a$  siendo  $a$  y  $b$  los semiejes del óvalo correspondiente, lo que permite ajustarse a la zona a cartografiar

$$(24) \alpha = \sqrt{1 + \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} \cos \varphi_0}$$

Los parámetros  $\beta$  y  $\Pi$  se determinan por las siguientes fórmulas:

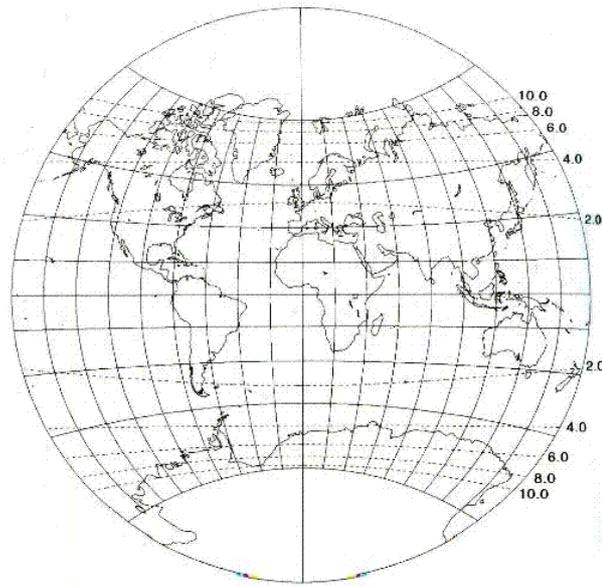
$$(25) \quad \beta = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma_0}{2}\right) \varepsilon^{-\alpha \eta_0} \quad \text{siendo} \quad \frac{\gamma_0}{2} = \arctan\left(\frac{\sin \varphi_0}{\alpha}\right)$$

$$\Pi = \frac{m_0 r_0}{\alpha} (1 + \sec \gamma_0)$$

Donde  $m_0$  es el valor dado al módulo de deformación lineal en el punto central de la proyección. La presencia de los tres parámetros y una elección adecuada de sus valores permite adecuar la proyección a los límites de la zona a cartografiar mediante una forma adecuada de la forma de las isolíneas de deformación.

Ejemplo, también, de proyección polinómica (modificada), es la ya citada del Mapa del Mundo a escala 1:1.000.000 (IMW), en la que los paralelos de las hojas tienen por radio  $\rho = N \cot \varphi$  que resultan de ajustar un cono tangente en el paralelo y su separación en el meridiano central equivale a la rectificación del arco de meridiano ( $m_0=1$ ); los meridianos extremos se acepta su rectificación según un determinado artificio.

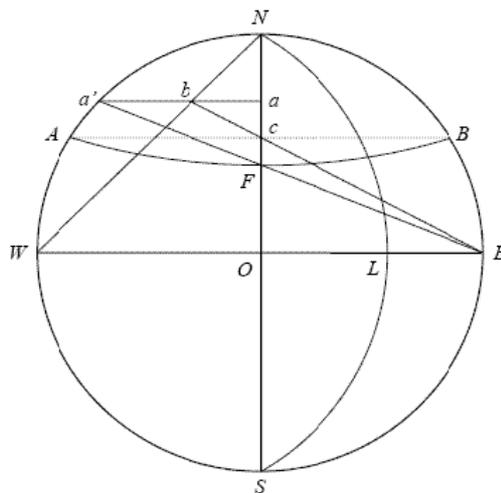
Otro ejemplo clásico de sistema policónico y esférico es la *proyección de Van der Grinten* en sus distintas variantes. En ésta toda la superficie de la esfera terrestre se traza dentro de un círculo cuyo radio es el producto del número  $\pi$  por el radio de la esfera. Como ejes rectangulares se toman el ecuador, que es la única línea automecica de la proyección, y el meridiano central. Aparte de éstas, todos los paralelos y meridianos se dibujan como círculos de radios finitos, de forma que los centros de los meridianos están situados sobre el eje de abscisas y los correspondientes de los paralelos sobre el de ordenadas. Solo en este aspecto coincide con la de Lagrange. La proyección se cataloga en una posición intermedia entre la conformidad y la equivalencia sin pertenecer rigurosamente a una u otra categoría; su objeto es dar respuesta al exceso de ampliación en latitudes altas que se da en la de Mercator, "cerrando" conforme nos separamos del ecuador y mejorando de este modo la representación de los planisferios.



**Figura 8.** Proyección de Van der Grinten. (Imagen tomada Bugayevskiy)

En esta imagen puede apreciarse cómo las isolíneas de deformación lineal no son paralelas al ecuador pero se curvan ligeramente, primero hacia el ecuador y luego, apretándose cada vez más, hacia los polos.

Esta proyección fue presentada por A.J. van der Grinten, de Chicago, en el año 1904. La retícula de meridianos y paralelos se define por un método de dibujo geométrico muy ingenioso, que se puede seguir en el gráfico siguiente:



**Figura 9.**

El meridiano de longitud  $\lambda$ , requiere la determinación del punto  $L$  que se obtiene al considerar  $WE$  (eje de abscisas) dividido de manera uniforme desde  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ . El meridiano buscado será entonces el arco de circunferencia que pasa por  $N$ ,  $S$  y  $L$ , y cuyo centro, por lo tanto, está situado sobre el eje de abscisas, donde corresponda por el corte de la mediatriz de  $NL$  o de  $SL$ .

El trazado de la proyección del paralelo de latitud  $\varphi$  exige dibujar previamente el segmento horizontal  $aa'$ ; para ello se supone eje de ordenadas  $SN$  dividido en intervalos regulares desde de latitud  $-90^\circ$  a latitud  $+90^\circ$ . Se une entonces el extremo  $a'$  con el punto  $E$  del eje de abscisas, obteniendo la intersección  $F$  de cruce del paralelo con el eje de ordenadas; faltan por hallar los puntos  $A$  y  $B$ , para lo cual primero se traza el segmento auxiliar  $WN$  señalando el punto  $b$  donde éste corta al segmento  $aa'$ , y a continuación se traza la recta que pasa por  $b$  y  $E$  encontrando el punto  $c$  intersección de la misma con el eje de ordenadas, por último la paralela por  $c$  al segmento  $aa'$  determina los puntos  $A$  y  $B$ . El arco del paralelo en la proyección será pues el correspondiente a la circunferencia que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $F$ , cuyo centro, por simetría, pertenece al eje de ordenadas como ocurría con el del meridiano respecto al de abscisas.

## **Bibliografía**

- [1] Dirk J. Struik, 'Geometría diferencial clásica', Aguilar 1966
- [2] G.B: Lauf, 'Geodesy and Map Projections', TAFE Publications Unit 1983
- [3] Lev M. Bugayevskiy, Jhon P. Snyder, 'MAP PROJECTIONS a Reference Manual', Taylor & Francis 1995
- [4] Escuela de Topografía y Geodesia, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 1º', Servicio Geográfico del Ejército 1955
- [5] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 2º', SGE 1944
- [6] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 3º', SGE 1947
- [7] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Complementos sobre representación conforme', SGE 1951
- [8] Estado Mayor del Ejército, 'Reglamento de Cartografía Militar (1935), Tablas'. SGE 1942
- [9] Estado Mayor Central, 'Característica y tablas de la Proyección Lambert de Canarias'. SGE 1945
- [10] Estado Mayor Central, 'Proyección Universal Transversa Mercator'. SGE 1976
- [11] John P. Snyder 'Map Projections-A Working Manual', Professional paper 1395 US Government P. Office 1987
- [12] Juan Mena Berrios 'Geodesia Superior', Centro Nacional de Información Geográfica 2008
- [13] A. Lujan, 'Apuntes de cartografía', no publicados

## Tema 60. Proyecciones cilíndricas y pseudocilíndricas. Proyecciones cilíndricas conformes directa y transversa. Proyección Mercator. Proyección cilíndrica transversa de Gauss-Krüger y UTM: características, desarrollo, convergencia y deformaciones

### 60.1. Proyecciones cilíndricas y pseudocilíndricas

Se conocen como cilíndricas y pseudocilíndricas aquellas proyecciones cartográficas en las que los paralelos geográficos se representan con una familia de rectas paralelas; alternatively a las proyecciones directas se entienden también como tales las transversas u oblicuas en cuando se refieran a los círculos menores, respecto al diámetro correspondiente a un punto que constituye el polo de la proyección.

Este tipo de proyecciones se formula directamente en coordenadas cartesianas del plano  $(x, y)$  como funciones de las coordenadas geográficas  $(\varphi, \lambda)$ . Así, se hace corresponder de forma biyectiva, salvo puntos singulares, la superficie cerrada esfera o elipsoide con una parte del plano.

Se llaman *cilíndricas* aquellas que responden a la forma general  $\{x=\alpha\lambda, y=f(\varphi)\}$ , donde existe una correspondencia directa con la superficie de un cilindro que está cubierto en su totalidad, incluidos puntos impropios, o hasta dos paralelos simétricos respecto al plano ecuatorial.

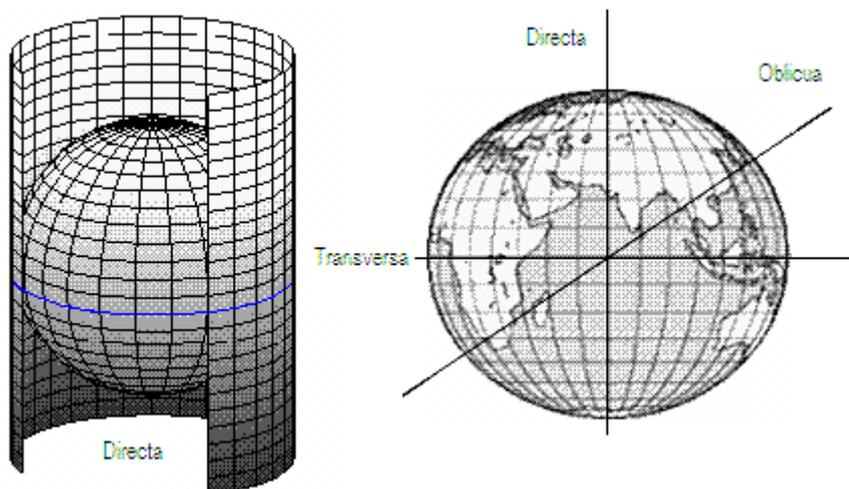


Figura 1.

La representación de meridianos, al desarrollar el cilindro en el plano, son rectas paralelas al eje de ordenadas, separadas proporcionalmente a las longitudes, y la representación de paralelos son

rectas paralelas al eje de abscisas, normalmente, simétricos respecto al ecuador los de igual latitud norte y sur. La constante de proporcionalidad  $\alpha$  da igual dimensión a todos los paralelos; si se le asigna el valor del semieje del elipsoide indica que sólo el ecuador mantiene la escala nominal del mapa, y si fuera menor habría dos paralelos en los que se mantiene la escala.

Por extensión se denominan *pseudocilíndricas* aquellas cuya forma general es  $\{x=f_1(\varphi, \lambda), y=f_2(\varphi)\}$  ya que los paralelos se corresponden, también, con rectas paralelas al ecuador o eje de abscisas, mientras los meridianos son curvas trascendentes, simétricas respecto al meridiano central o eje de ordenadas que representa el origen de la proyección.

Las *proyecciones cilíndricas*, como se han definido, representan las direcciones principales según dos familias de rectas ortogonales ( $i=\pi/2$ ); las fórmulas comunes a ellas se resumen a continuación

$$(1) \quad \boxed{\begin{array}{l} x = R\lambda \quad , \quad y = f(\varphi) \\ m = \frac{dy}{M d\varphi} \quad n = \frac{R}{N \cos \varphi} \quad \sigma = mn = \frac{R dy}{MN \cos \varphi d\varphi} \end{array}}$$

De acuerdo con lo dicho, cuando se fija el valor de  $n$  para los paralelos de latitud  $\pm\varphi_k$  igual a uno, es decir se eligen estos paralelos automecóicos, equivale a fijar el parámetro  $R$

$$(2) \quad n_k = \frac{R}{N_k \cos \varphi_k} = 1 \quad \Rightarrow \quad R = N_k \cos \varphi_k$$

En cuyo caso el módulo de deformación lineal en el ecuador ( $\varphi=0$ ) resultara  $n_a = \frac{N_k \cos \varphi_k}{a} < 1$ , y seguirá siendo la isométrica base donde el valor de  $n$  es mínimo. Se

han hecho estas consideraciones sobre una proyección cilíndrica directa y las isóneas de deformación lineal se corresponden con rectas que siguen la dirección de los paralelos (en las oblicuas o transversas se adecuaría a la dirección del eje en cada caso).

Las *cilíndricas* pueden ser conformes, equivalentes o presentar una dirección, como los meridianos en la directa, que mantienen la dimensión del elipsoide o esfera, y se denominan equidistantes.

Del mismo modo, para las *proyecciones pseudocilíndricas* se parte de las expresiones mencionadas  $\{x=f_1(\varphi, \lambda), y=f_2(\varphi)\}$  que una vez diferenciadas y sustituyendo las derivadas parciales en las fórmulas generales de las proyecciones adoptan la forma siguiente.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= x_\varphi x_\lambda & \mathbf{J} &= x_\lambda y_\varphi \\
 \sigma &= \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{M}r} = \frac{x_\lambda y_\varphi}{\mathbf{M}r} & \tan \varepsilon &= -\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{J}} = -\frac{x_\varphi}{y_\varphi} \\
 \mathbf{n} &= \frac{\sqrt{(x_\lambda^2 + y_\lambda^2)}}{r} = \frac{x_\lambda}{\mathbf{N} \cos \varphi} & \mathbf{m} &= \frac{\sqrt{(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)}}{\mathbf{M}} = \frac{y_\varphi}{\mathbf{M} \cos \varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

De estas fórmulas se deduce que, en este grupo de proyecciones, las retículas de meridianos y paralelos no tienen que ser ortogonales y la longitud de los arcos de meridiano es función de la latitud y de la longitud; el factor de escala lineal a lo largo de meridianos y paralelos generalmente no toma los valores extremos; únicamente se conserva el desarrollo de arco de meridiano en el central. Por tanto no pueden ser conformes pero sí equivalentes o arbitrarias. Se utilizan para el diseño de mapas a pequeña escala por lo que generalmente se considera el caso de Tierra esférica; una excepción extraordinaria a esta regla es la representación de zonas ecuatoriales mediante la proyección sinusoidal para el elipsoide.

Las *proyecciones cilíndricas equivalentes* tienen como factor de escala superficial o anamorfosis superficial la unidad.

Antes de abordar el paso a la proyección, como paso inicial, se van a relacionar los elementos diferenciales de superficie en elipsoide  $dS$  y en esfera  $dS_1$ .

$$\tag{4} \quad \boxed{dS = MN \cos \varphi d\varphi d\lambda \Leftrightarrow dS_1 = R^2 \cos \psi d\psi d\Lambda}$$

Se supone que coincidan las longitudes en los dos sistemas  $\lambda=\Lambda$  y las latitudes en los extremos  $\varphi=0$  y  $\varphi=\pi/2$ , lo que da lugar a la siguiente ecuación diferencial, cuyo resultado es esencial para el análisis de las proyecciones equivalentes o autálicas.

$$\tag{5} \quad R^2 \cos \psi d\psi = MN \cos \varphi d\varphi = \frac{R_a^2 (1-e^2) \cos \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi$$

Se realiza el cambio de variable  $u = \sin \varphi$  para integrar el segundo miembro que se puede expresar como suma de las fracciones siguientes:

$$\frac{R_a^2 (1-e^2)}{2} \int \frac{2du}{1-e^2 u^2} = \frac{R_a^2 (1-e^2)}{2} \left[ \int d\left(\frac{u}{1-e^2 u^2}\right) + \int \frac{du}{1-e^2 u^2} \right]$$

Resultando la siguiente ecuación que relaciona la latitud en el elipsoide y en la esfera con el semieje del elipsoide y el radio de la esfera

$$(6) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{R}^2 \sin \psi &= \frac{\mathbf{R}_a^2 (1 - e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \operatorname{arg th}(e \sin \varphi) \right] + C \\ \mathbf{R}^2 \sin \psi &= \mathbf{R}_a^2 \mathbf{q}_S(\varphi) \quad \text{siendo} \quad \mathbf{q}_S(\varphi) = \frac{(1 - e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \operatorname{arg th}(e \sin \varphi) \right] \end{aligned}}$$

La variable auxiliar  $\mathbf{q}_S(\varphi)$  es enormemente útil para la formulación práctica de las proyecciones equivalentes. En el caso de Tierra esférica la variable  $\mathbf{q}_{Se}(\varphi)$  es  $\sin \psi$

De las ecuaciones (1) se toma el módulo de deformación superficial  $\sigma$  que, como se ha dicho antes, ha de igualarse a la unidad y, así proporciona la siguiente ecuación diferencial

$$(7) \quad \sigma = \mathbf{mn} = \frac{\mathbf{R} dy}{\mathbf{MN} \cos \varphi d\varphi} = 1 \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{1}{\mathbf{R}} \mathbf{MN} \cos \varphi d\varphi$$

La integración de esa ecuación, salvo la constante  $1/\mathbf{R}$ , coincide con el segundo miembro de la ecuación (13) por lo que las ecuaciones de la proyección resultan ser:

$$(8) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{q}_S(\varphi) &= \frac{(1 - e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \operatorname{arg th}(e \sin \varphi) \right] \\ \mathbf{x} &= \mathbf{R}\lambda & \mathbf{y} &= \mathbf{R}\mathbf{q}_S(\varphi) \\ \mathbf{m} &= \frac{\mathbf{N} \cos \varphi}{\mathbf{R}} & \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{N} \cos \varphi} \end{aligned}}$$

Para obtener las siguientes fórmulas para la hipótesis de Tierra esférica, más sencillas, basta con considerar en las anteriores la excentricidad igual a cero. Suponiendo, además, que se desea mantener la escala general en el paralelo de latitud  $\varphi_0$  ( la constante  $\mathbf{R}$  pasa a ser  $\mathbf{R} \cos \varphi_0$ )

$$(9) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{R}\lambda \cos \varphi_0, \quad \mathbf{y} = \mathbf{R} \sin \varphi / \cos \varphi_0, \quad \sigma = 1 \\ \mathbf{m} &= \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} & \mathbf{n} &= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \end{aligned}}$$

Si es el ecuador el que mantenga las distancias en la proyección ( $\varphi_0=0$ ;  $\cos \varphi_0=1$ ) sencillamente se sustituye este valor en las fórmulas anteriores. James Gall la presentó en 1855 con el valor de  $\varphi_0=45^\circ$ , Walter Behrmann con  $\varphi_0=30^\circ$  lo hace en 1910 y Tristan Edwars con  $\varphi_0 \approx 51^\circ$  lo hace en 1953. Aun más, Arno Peter de Alemania la reinventa hacia 1970 y se le da un cierto matiz político argumentando algo así como que, “el uso generalizado de la cilíndrica de Mercator había sido impulsada por los países ricos, capitalistas, para magnificar la representación de sus países (latitudes altas), marcando diferencias, en detrimento de los países del tercer mundo, situados más bien en la franja ecuatorial”.

Las proyecciones cilíndricas equidistantes a lo largo de meridianos tienen como factor de escala lineal o anamorfosis la unidad a lo largo de los meridianos. Por tanto

$$\mathbf{m} = \frac{dy}{M d\varphi} = 1 \Rightarrow dy = M d\varphi$$

$$(10) \quad y = \beta(\varphi) = a(1 - e^2) \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

La integral de esta ecuación diferencial, al tratarse de una integral elíptica, se recurre al desarrollo en serie del integrando y no necesita de un número elevado de términos. Hay distintas expresiones y una muy extendida es la siguiente, y utiliza como parámetro de excentricidad la relación  $n=(a-b)/(a+b)$

$$\beta(\varphi) = Q(\varphi + u_2 \sin 2\varphi + u_4 \sin 4\varphi + u_6 \sin 6\varphi + u_8 \sin 8\varphi + \dots)$$

$$(11) \quad Q = \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \dots\right); \quad u_2 = \left(-\frac{3n}{2} + \frac{9n^3}{16} - \frac{3n^5}{32} + \dots\right); \quad u_4 = \left(\frac{15n^2}{16} - \frac{15n^4}{32} + \dots\right);$$

$$u_6 = \left(-\frac{35n^3}{48} + \frac{105n^5}{256} + \dots\right); \quad u_8 = \left(\frac{315n^4}{512} + \dots\right) \text{ siendo } n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{f}{2-f} \text{ y } b = a(1-f)$$

no se debe confundir la nomenclatura de  $n$  como excentricidad, este caso, con la deformación lineal según dirección del paralelo

Esta expresión se utilizará más adelante en la proyección UTM en la cual sólo es equidistante el meridiano central de la proyección.

En la cilíndrica equidistante, si se pretende que, además, resulte automecoico un determinado paralelo  $\varphi_k$  tiene las siguientes fórmulas de la proyección

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = N_k \cos \varphi_k \lambda & y = \beta(\varphi) \\ m = 1 & n = p = \frac{N_k \cos \varphi_k}{N \cos \varphi} \end{array} \right.$$

La proyección es una de las más sencillas y, a veces, se denomina *equirectangular* que en caso de hipótesis de Tierra esférica sus ecuaciones se simplifican así

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = R \cos \varphi_k \lambda & y = R\varphi \\ m = 1 & n = p = \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi} \end{array} \right\} \text{ si } \varphi_k = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = R\lambda & y = R\varphi \\ m = 1 & n = p = \frac{1}{\cos \varphi} \end{array} \right.$$

## 60.2. Proyecciones cilíndricas conformes directa y transversa. Proyección Mercator

Las proyecciones cilíndricas conformes tienen el factor de escala lineal o anamorfosis independiente de la dirección y dependiente sólo de la latitud, tal que  $m=n$ .

$$(14) \quad m = n = \frac{dy}{M d\varphi} = \frac{R}{N \cos \varphi} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{RM}{N \cos \varphi} d\varphi$$

En consecuencia, la solución de esta ecuación diferencial, salvo la constante  $R$ , coincide con la integral que da lugar a la denominada latitud isométrica  $q$  o variable de Mercator.

$$dq = \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{V^2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi$$

Haciendo algunas transformaciones se puede presentar de forma más sencilla para su integración

$$dq = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \frac{e \cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{d(\sin \varphi)}{1-(\sin \varphi)^2} - e \frac{d(e \sin \varphi)}{1-(e \sin \varphi)^2}$$

Como quiera que ambos términos tienen la forma  $\frac{dt}{1-t^2}$ , cuya primitiva es el argumento tangente hiperbólica de  $t$ , resulta para la *latitud isométrica, o variable de Mercator*, la siguiente expresión

$$(15) \quad \boxed{q = \arg \operatorname{th}(\sin \varphi) - e \arg \operatorname{th}(e \sin \varphi)}$$

Sin embargo, son más conocidas las expresiones siguientes que son equivalentes

$$(16) \quad \boxed{q = \operatorname{In} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2} \operatorname{In} \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} = \operatorname{In} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e}{2} \operatorname{In} \frac{1+e \cos \theta}{1-e \cos \theta} \text{ siendo}}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi}$$

La constante de integración no se ha puesto pues es nula al serlo para la latitud  $\varphi=0$ . En resumen las fórmulas de la proyección son

$$(17) \quad \boxed{\begin{array}{l} q = \arg \operatorname{th}(\sin \varphi) - e \arg \operatorname{th}(e \sin \varphi) \\ x = R\lambda \quad y = Rq \end{array}}$$

De igual modo se llega a esta ecuación partiendo de una función analítica de variable compleja tal que  $x+iy=f(\lambda+iq)$ . La función  $f$  es simplemente una constante de escala  $R$ . La representación de meridianos y paralelos son rectas ortogonales, paralelas a los ejes OX y OY, de respectivas ecuaciones ( $y=q$ ) y ( $x=\lambda$ ). Los polos son puntos singulares. En principio, para la representación del globo hasta latitudes elevadas, se adopta como constante  $R$  el semieje ecuatorial  $a$ . La

representación del ecuador es la isométrica base o estacionaria; el coeficiente de deformación lineal crece con la latitud, y más rápidamente cuanto mayor es ésta.

Su propiedad característica es que las *loxodromas* se representan como rectas, facilitando el trazado de rumbos o acimutes constantes para la navegación. Tradicionalmente se utiliza para la confección de cartas náuticas, por esta misma razón. El inconveniente de la deformación considerable en latitudes altas para la confección de cartas de costas y portulanos se salva asignando a la constante **R** el valor  $N_h \cos \varphi_h$ , siendo  $\varphi_h$  la latitud ‘media’ de la hoja. Este valor es referencia para consignar la *escala general* de cada carta náutica que se encuentra reflejada en la información marginal con la expresión *escala 1:xxxxx en la latitud  $\varphi_h$* .

La convergencia y anamorfosis, partiendo de  $(x + iy) = R(\lambda + iq)$ , según las ecuaciones generales (y  $R=a$ ) son:

$$(18) \tan \gamma = \frac{x_\varphi}{y_\varphi} = \frac{0}{dq/d\varphi} = 0 \quad \text{los meridianos son rectas paralelas a OY}$$

$$(19) m = n = \frac{\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}}{M} = \frac{adq/d\varphi}{M} = \frac{aM/(N \cos \varphi)}{M} = \frac{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}}{N \cos \varphi} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \varphi}$$

En la hipótesis de Tierra esférica las expresiones son igualmente sencillas pero se simplifica la de la latitud isométrica en la esfera, haciendo más fácil la resolución inversa.

Latitud isométrica en la esfera viene de integrar  $dq_{es} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{d(\sin \varphi)}{1 - (\sin \varphi)^2}$

Como tiene la forma  $\frac{dt}{1-t^2}$ , cuya primitiva es el argumento tangente hiperbólica de **t**, resulta

para la *latitud isométrica, o variable de Mercator*, la siguiente expresión

$$(20) q_{es} = \mathbf{arg th}(\sin \varphi)$$

Sin embargo, son más conocidas las expresiones siguientes que son equivalentes

$$(21) q_{es} = \mathbf{In tan} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \mathbf{In cot} \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{siendo } \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

En resumen, las fórmulas de la proyección Mercator para la esfera son:

$$(22) \begin{cases} x = R\lambda & y = Rq_{es} \\ \gamma = 0 & m = n = \frac{1}{\cos \varphi} \end{cases}$$

Proyección cilíndrica transversa de Mercator o de Gauss-Lambert

En realidad basta con considerar como eje del cilindro la perpendicular por el centro de la esfera al plano meridiano origen que, en este caso, se corresponde con el ecuador en la directa, y reciprocamente el ecuador pasa a ser el que era meridiano origen en la directa. Según la figura adjunta compuesta por círculos máximos, se establecen las relaciones pertinentes:

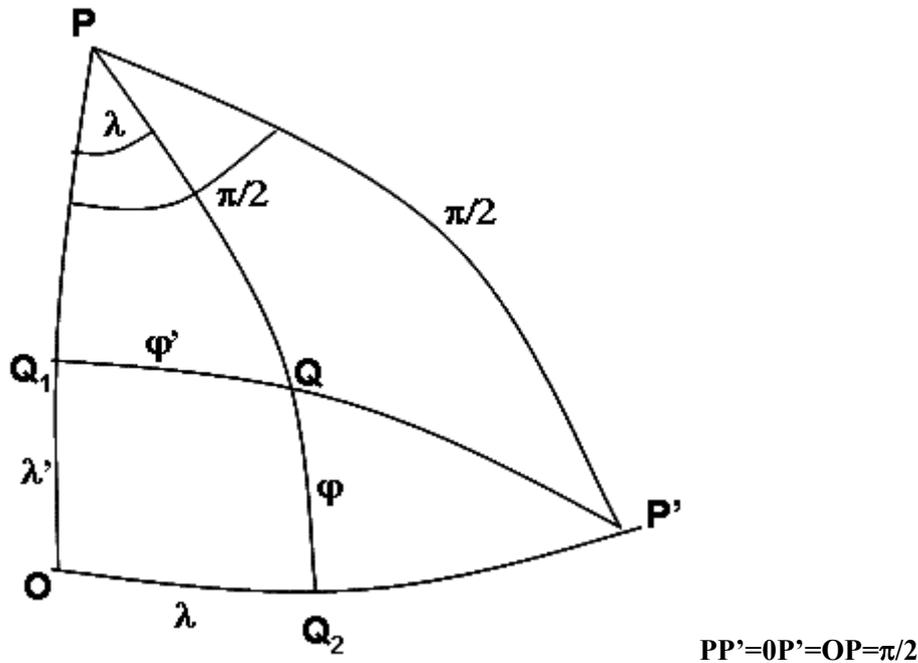


Figura 2.

El punto genérico Q de coordenadas  $(\varphi, \lambda)$  con el giro de  $90^\circ$  del eje está representado también por el par de valores  $(\varphi', \lambda')$  que servirán para determinar las fórmulas de la transversa apoyándose en las de la directa.

En los triángulos  $PP'Q$  y  $QP'Q_2$  se pueden establecer respectivamente las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{\sin(90 - \lambda)}{\sin(90 - \varphi')} = \frac{\sin(90 - \lambda')}{\sin(90 - \varphi)} \\
 \frac{\sin \lambda'}{\sin \varphi} = \frac{\sin 90}{\sin(90 - \varphi')}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 \cos \lambda \cos \varphi = \cos \lambda' \cos \varphi' \\
 \sin \varphi = \sin \lambda' \cos \varphi'
 \end{array} \right.$$

Y en consecuencia

$$(24) \quad \tan \lambda' = \frac{\tan \varphi}{\cos \lambda} \quad \sin \varphi' = \cos \varphi \sin \lambda$$

Que serán sustituidos en las siguientes ecuaciones de la proyección, aceptando que se mantendrán las distancias en el meridiano central, ahora  $OP'$

$$(25) \quad \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\varphi') \quad \mathbf{y} = \mathbf{R}\lambda' \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{q}' \quad \mathbf{y} = \mathbf{R}\lambda' \\ \mathbf{x} = \mathbf{R} \operatorname{arctg}(\cos \varphi \sin \lambda) \quad \mathbf{y} = \mathbf{R} \operatorname{arctan}(\tan \varphi \sec \lambda) \end{array}}$$

Sus derivadas parciales proporcionarán la obtención de *convergencia* y *anamorfosis* al sustituirlas en las fórmulas generales de las proyecciones. Esto es

$$\left. \begin{array}{l} x_{\varphi} = -\frac{\sin \varphi \sin \lambda}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} \quad y_{\varphi} = \frac{\cos \lambda}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} \\ x_{\lambda} = \frac{\cos \varphi \cos \lambda}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} \quad y_{\lambda} = -\frac{\sin \varphi \sin \lambda \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} \end{array} \right\} \text{por tanto}$$

$$(26) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{convergencia} \quad \tan \gamma = \frac{y_{\lambda}}{x_{\lambda}} = \frac{x_{\varphi}}{y_{\varphi}} = -\tan \lambda \sin \varphi \\ \text{el signo (-) en hemisferio N y longitud E del meridiano} \\ \text{central indica que la dirección del meridiano está al E} \\ \text{de la paralela al eje de ordenadas por Q} \end{array}}$$

$$(27) \quad \boxed{\text{anamorfosis} \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} = \frac{\sqrt{x_{\lambda}^2 + y_{\lambda}^2}}{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}}}$$

Una manera interesante de presentar las fórmulas de esta proyección es hacerlo en función de la variable latitud isométrica  $q$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \tanh q = \sin \varphi \\ 1 - \tanh^2 q = \cos^2 \varphi = \frac{1}{\cosh^2 q} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{1}{\cosh q} \quad \tan \varphi = \sinh q$$

apoyándose en estas sencillas relaciones y sustituyéndolas en (25), (26) y (27) se tienen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \tanh\left(\frac{x}{R}\right) &= \frac{\sin \lambda}{\cosh q} & \tan\left(\frac{y}{R}\right) &= \frac{\sinh q}{\cos \lambda} \\
 \tan \gamma &= \tan \lambda \tan q = \tanh\left(\frac{x}{R}\right) \tan\left(\frac{y}{R}\right) \\
 m = n &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \lambda}{\cosh^2 q}}} = \cosh\left(\frac{x}{R}\right)
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

El máximo interés de esta proyección radica en que fue el paso intermedio que Gauss utilizó para el cálculo de la triangulación de Hannover, también usado por otros, entre ellos Krüger, para abordar el caso de representación conforme del elipsoide.

### 60.3. Proyección cilíndrica transversa de Gauss-Krüger y UTM

Entre 1820 y 1830 Gauss desarrolló y publicó una doble proyección esfera y plano con mantenimiento de la escala a lo largo del meridiano central. En la práctica, generó una serie de tablas para facilitar los cálculos que empleó para resolver triangulación de Hannover. La teoría de esta proyección fue publicada también por Oskar Schreiber en 1866. Años más tarde, Louis Krüger continuó las investigaciones sobre la misma y las presentó en 1912 y 1919; él sugirió un método de transformación directa de elipsoide al plano sin pasar por la doble proyección anterior.

La proyección se basa en tres condiciones:

- 1) Es conforme
- 2) Es simétrica respecto al meridiano central
- 3) Mantiene la escala a lo largo del meridiano central

Cualquier proyección conforme puede ser expresada por medio de una función analítica de variable compleja entre sistemas isométricos

$$\tag{29} \boxed{\mathbf{y} + \mathbf{i}x = \mathbf{f}(\mathbf{q} + \mathbf{i}l)}$$

donde  $l$ , por simplificar las expresiones, es la longitud referida al meridiano central; es decir  $l = \lambda - \lambda_0$  siendo  $\lambda_0$  la longitud del meridiano central y  $\lambda$  la longitud del punto a transformar;  $q$  es la latitud isométrica correspondiente a la latitud geodésica  $\varphi$ , y la constante  $i$  es  $\sqrt{-1}$ .

Si se acepta que  $l$  es pequeño ( $l \ll 1 \text{ rad.}$ ) se puede expandir en serie de Taylor la función (1)

$$\mathbf{y} + \mathbf{i}x = \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}(\mathbf{i}l) + \frac{d^2\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^2} \frac{(\mathbf{i}l)^2}{2!} + \frac{d^3\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^3} \frac{(\mathbf{i}l)^3}{3!} + \dots$$

y como  $i^2=-1$ ,  $i^2=-i$ ,  $i^2=+I$ , etc. se pueden separar las partes reales e imaginarias e igualar los de ambos miembros

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} - \frac{\mathbf{l}^3}{6} \frac{d^3\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^3} + \frac{\mathbf{l}^5}{120} \frac{d^5\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^5} - \dots \\ (30) \quad \mathbf{y} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}) - \frac{\mathbf{l}^2}{2} \frac{d^2\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^2} + \frac{\mathbf{l}^4}{24} \frac{d^4\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^4} - \dots \end{aligned}$$

Por la misma razón  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  es el valor de la función  $\mathbf{f}(\mathbf{q}+i\lambda)$  en el meridiano central  $\lambda=0$  y, además, en cumplimiento de la tercera condición,  $\mathbf{m}_0=I$ , es el desarrollo del arco de meridiano

$$(31) \quad \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}(\varphi) = \int_0^\varphi \mathbf{M} d\varphi$$

Por tanto, las derivadas de los desarrollos (30) quedan determinadas al derivar sucesivamente la ecuación (31)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} &= \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\mathbf{q}} \\ \frac{d^2\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^2} &= \frac{d^2\mathbf{B}}{d\mathbf{q}^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{d\mathbf{q}} \\ \frac{d^3\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^3} &= \frac{d^3\mathbf{B}}{d\mathbf{q}^3} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d^2\mathbf{B}}{d\varphi^2} \right) \frac{d\varphi}{d\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Y siendo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} &= \mathbf{M} & \frac{d\varphi}{d\mathbf{q}} &= \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{N} \cos \varphi}{\mathbf{M}} = (1 + \eta^2) \cos \varphi & \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} &= -\mathbf{M} \sin \varphi \\ & & \text{variable auxiliar } \eta^2 &= \mathbf{e}^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

De esta manera se obtienen los desarrollos correspondientes a las coordenadas cartesianas  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  referidas al origen que se encuentra en el cruce del meridiano central con el ecuador. Para hacer más sencilla la notación de los desarrollos transcritos a continuación se ha convenido en sustituir tangente de latitud por  $t=\tan \varphi$  y coseno de latitud por  $c=\cos \varphi$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{B} + \mathbf{A}_0 (\mathbf{A}_2 \mathbf{l}^2 + \mathbf{A}_4 \mathbf{l}^4 + \mathbf{A}_6 \mathbf{l}^6 + \mathbf{A}_8 \mathbf{l}^8 + \dots) \\ \mathbf{A}_0 &= \mathbf{N} c^2 t / 2 & \mathbf{l} &= (\lambda - \lambda_0) \pi / 180^\circ \\ \mathbf{A}_2 &= 1 \\ (32) \quad \mathbf{A}_4 &= c^2 (5 - t^2 + (9 + 4\eta^2) \eta^2) / 12 \\ \mathbf{A}_6 &= c^4 (61 - 58t^2 + t^4 + (270 - 330t^2) \eta^2) / 360 \\ \mathbf{A}_8 &= c^6 (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) / 20160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \mathbf{Nc}(\mathbf{A}_1\mathbf{l} + \mathbf{A}_3\mathbf{l}^3 + \mathbf{A}_5\mathbf{l}^5 + \mathbf{A}_7\mathbf{l}^7 + \dots) \\
 \mathbf{A}_1 &= 1 \\
 (33) \quad \mathbf{A}_3 &= \mathbf{c}^2(1 - \mathbf{t}^2 + \boldsymbol{\eta}^2)/6 \\
 \mathbf{A}_5 &= \mathbf{c}^4(5 - 18\mathbf{t}^2 + \mathbf{t}^4 + 14\boldsymbol{\eta}^2 - 58\mathbf{t}^2\boldsymbol{\eta}^2)/120 \\
 \mathbf{A}_7 &= \mathbf{c}^6(61 - 479\mathbf{t}^2 + 179\mathbf{t}^4 - \mathbf{t}^6)/5040
 \end{aligned}$$

Falta la expresión del arco de meridiano desde el ecuador que por ser una integral elíptica se puede descomponer en un número limitado de términos del desarrollo en serie con precisión superior a un mm. Los parámetros usados en este desarrollo, basados en  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}$  son:

tercera excentricidad  $\mathbf{n}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})/(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{f}/(2-\mathbf{f})$ ; semieje menor  $\mathbf{b}=\mathbf{a}(1-\mathbf{f})$ ; radio médio  $\mathbf{R}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\beta} \sin 2\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\gamma} \sin 4\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\delta} \sin 6\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varepsilon} \sin 8\boldsymbol{\varphi} + \dots) \\
 \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{R}(\mathbf{n}^4 / 64 + \mathbf{n}^2 / 4 + 1) \\
 \boldsymbol{\beta} &= (-3\mathbf{n}^5 / 32 + 9\mathbf{n}^3 / 16 - 3\mathbf{n} / 2) \\
 (34) \quad \boldsymbol{\gamma} &= (-15\mathbf{n}^4 / 32 + 15\mathbf{n}^2 / 16) \\
 \boldsymbol{\delta} &= (105\mathbf{n}^5 / 256 - 35\mathbf{n}^3 / 48) \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &= (315\mathbf{n}^4 / 512)
 \end{aligned}$$

La *convergencia* y *anamorfosis* son elementos esenciales para el empleo de la proyección en geodesia y topografía; se pueden obtener conociendo las derivadas parciales de las coordenadas cartesianas respecto a la longitud. Por tanto, se deducen de las ecuaciones (32) y (33) ya que sus coeficientes han sido previamente calculados

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_1 &= \mathbf{A}_0(2\mathbf{A}_2\mathbf{l}^1 + 4\mathbf{A}_4\mathbf{l}^3 + 6\mathbf{A}_6\mathbf{l}^5 + 8\mathbf{A}_8\mathbf{l}^7 + \dots) \\
 \mathbf{x}_1 &= \mathbf{Nc}(\mathbf{A}_1 + 3\mathbf{A}_3\mathbf{l}^2 + 5\mathbf{A}_5\mathbf{l}^4 + 7\mathbf{A}_7\mathbf{l}^6 + \dots) \quad \text{por tanto} \\
 (35) \quad \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{arctan}(\mathbf{y}_1 / \mathbf{x}_1) \\
 \mathbf{m} = \mathbf{n} &= \frac{\sqrt{\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1}}{\mathbf{Nc}}
 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones (32), (33), (34) y (35) se ha completado el denominado problema o transformación directa, pero el empleo en topografía y en geodesia necesitan igualmente de la transformación inversa. Esto es, conocidas las coordenadas cartesianas  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en la proyección hallar las coordenadas geodésicas del punto  $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varphi})$ . Para ello, al igual que en el directo, se obtienen sendos desarrollos en serie hechos en función de una latitud  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y})$  que se corresponde con la del punto sobre el meridiano central que tiene por desarrollo desde el ecuador la ordenada  $\mathbf{y}$  del punto a transformar.

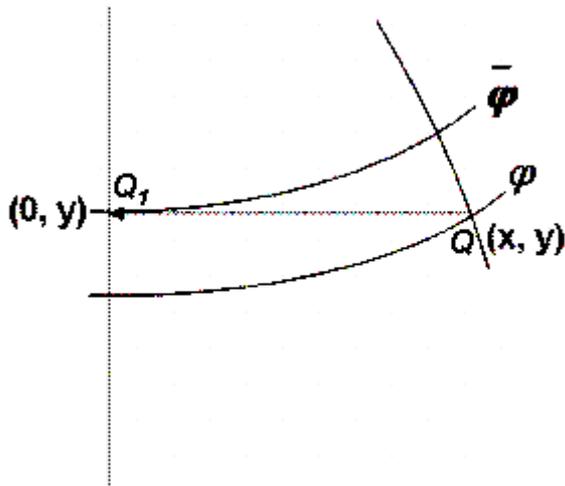


Figura 3.

Entre los desarrollos, el primero es el inverso del desarrollo de arco de meridiano  $\varphi(B)$  que proporciona la latitud auxiliar  $\bar{\varphi}$  que va a servir para obtener la latitud y longitud buscadas. Se apoya en que la línea  $Q'Q_1$  que es la representación de la línea geodésica  $QQ_1$  (ver figura primera), la cual atraviesa ortogonalmente las isótopas de anamorfosis prácticamente paralelas al meridiano central que es la línea isométrica base. El desarrollo es función de la tercera excentricidad  $n=(a-b)/(a+b)=f/(2-f)$ ; semieje menor  $b=a(1-f)$ ; radio medio  $R=(a+b)/2$ . Y el argumento de entrada es la relación adimensional  $(y/\alpha)$

$$\bar{\varphi}(y) = y/\bar{\alpha} + \bar{\beta} \sin\left(2y/\bar{\alpha}\right) + \bar{\gamma} \sin\left(4y/\bar{\alpha}\right) + \bar{\delta} \sin\left(6y/\bar{\alpha}\right) + \bar{\varepsilon} \sin\left(8y/\bar{\alpha}\right) + \dots$$

$$\bar{\alpha} = R(n^4/64 + n^2/4 + 1)$$

$$(36) \quad \bar{\beta} = (269n^5/512 - 27n^3/32 + 3n/2)$$

$$\bar{\gamma} = (-55n^4/32 + 21n^2/16)$$

$$\bar{\delta} = (-417n^5/128 + 151n^3/96)$$

$$\bar{\varepsilon} = (1097n^4/512)$$

El valor de latitud auxiliar obtenido sirve como argumento en los siguientes desarrollos en serie que proporcionan latitud y longitud (ésta referida al origen de longitudes elegido para la proyección). Para hacer más sencilla la notación de los desarrollos transcritos a continuación se ha convenido en sustituir tangente de latitud por  $t = \tan \bar{\varphi}$  y coseno de latitud por  $c = \cos \bar{\varphi}$ ,

además  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \bar{\varphi}$ , y se omite la raya superior para indicar que todo el proceso inverso

se hace con la variable auxiliar  $\bar{\varphi}$ . Para el cálculo de la latitud se utiliza  $z_1 = x / N(\bar{\varphi})$

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \bar{\varphi} + t(z_1^2 \mathbf{B}_2 + z_1^4 \mathbf{B}_4 + z_1^6 \mathbf{B}_6 + z_1^8 \mathbf{B}_8 + \dots) \\
 \mathbf{B}_2 &= -(1 + \eta^2) / 2 \\
 (37) \quad \mathbf{B}_4 &= (5 + 3t^2 + 6(1 - t^2)\eta^2 - 3(1 + 3t^2)\eta^4) / 24 \\
 \mathbf{B}_6 &= (-61 - 90t^2 - 45t^4 - 107\eta^2 + 162t^2\eta^2 + 45t^4\eta^2) / 720 \\
 \mathbf{B}_8 &= (1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6) / 40320
 \end{aligned}$$

Para el cálculo de la longitud  $l$  se utiliza  $z_2 = x / r = x / (N \cos \bar{\varphi})$

$$\begin{aligned}
 l &= z_2 \mathbf{B}_1 + z_2^3 \mathbf{B}_3 + z_2^5 \mathbf{B}_5 + z_2^7 \mathbf{B}_7 + \dots \\
 \mathbf{B}_1 &= 1 \\
 (38) \quad \mathbf{B}_3 &= c^2 (-1 - 2t^2 - \eta^2) \\
 \mathbf{B}_5 &= c^4 (5 + 28t^2 + 24t^4 + 6\eta^2 + 8t^2\eta^2) / 120 \\
 \mathbf{B}_7 &= c^6 (-61 - 662t^2 - 1320t^4 - 720t^6) / 5040
 \end{aligned}$$

Resta determinar *convergencia* y *anamorfosis* a partir de las coordenadas planas, para lo cual es preciso hallar las derivadas parciales de los desarrollos (37) y (38) respecto a la variable independiente en ambas, esto es respecto a  $x$

$$\begin{aligned}
 (39) \quad \mathbf{P} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} = t(2z_1 \mathbf{B}_2 + 4z_1^3 \mathbf{B}_4 + 6z_1^5 \mathbf{B}_6 + 8z_1^7 \mathbf{B}_8) / \bar{N} \\
 \mathbf{Q} &= \frac{\partial l}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial x} = (\mathbf{B}_1 + 3z_2^2 \mathbf{B}_3 + 5z_2^4 \mathbf{B}_5 + 7z_2^6 \mathbf{B}_7) / (\bar{N} \cos \bar{\varphi})
 \end{aligned}$$

Pero no es tan inmediato como en el problema directo, porque hay que tener en cuenta el haber trabajado con el paralelo auxiliar en vez del paralelo real y la relación  $dq/d\varphi$ . Por eso se llega a las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}
 \tan \gamma &= -\frac{P \, dq}{Q \, d\varphi} = -\frac{P}{Q} \frac{1}{(1-\eta^2) \cos \bar{\varphi}} \\
 (40) \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} &= \left( Q \cos \bar{\varphi} \cos \gamma - P \sin \gamma / (1-\eta^2) \right) \frac{N}{N} = \\
 &= \left( Q \cos \bar{\varphi} \cos \gamma - P \sin \gamma / (1-\eta^2) \right) \sqrt{\frac{(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)}}
 \end{aligned}$$

La proyección así definida, es decir, limitada a una serie de términos, no puede decirse con todo rigor que es una proyección conforme; sin embargo sí se comporta como tal siempre que se circunscriba al ámbito de aplicación para lo que se ha limitado a un determinado número de términos del desarrollo.

Las fórmulas de (32) a (40) pueden denominarse como de la proyección Gauss-Krüger pero también son la base de la Universal Transversa Mercator (UTM), con las variantes que se exponen a continuación.

El sistema UTM fue adoptado por el Army Map Service en 1947, poco después de la finalización de la segunda guerra mundial, con intención de normalizar su proyecto de obtener cartografía de todo el mundo. Se divide el Globo en 60 husos o zonas de 6° de longitud, 3° al este y al oeste del considerado meridiano central. La numeración de husos empieza por el antimeridiano de Greenwich, de modo que al huso 30 le corresponde como meridiano central el de 3° Oeste. Además se reduce la escala al considerar 0.9996 como valor del coeficiente de deformación lineal en el meridiano central y, para evitar valores negativos en coordenadas se suma a las abscisas 500.000 y a las ordenadas, en el hemisferio sur, 10.000.000.

Se pueden hacer determinadas consideraciones desde el punto de vista de la aplicación práctica:

- a) a todo punto de la superficie elipsoide, determinado por el par de valores  $(\varphi, \lambda)$ , le corresponden las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  más un huso  $HH$  y un hemisferio N|S.
- b) la Península se halla entre los husos 29, 30 y 31; las Islas Baleares se encuentran en el huso 31; las Islas Canarias se hallan en el 28, excepto una parte de la menor de las islas, El Hierro, que queda en el huso 27, pero aun en este caso se considera todo el territorio en el 28.
- c) en casos excepcionales, cuando el punto se encuentra en un huso y se desean las coordenadas en uno adyacente, es menester “obligar” al programa indicándole en cual se ha de hacer el cálculo. Para determinadas bases de datos peninsulares es práctica generalizada la utilización del “huso 30 extendido”; cuando se opera así es

preciso ser consciente de que se aceptan las consecuencias posibles: si se utilizan desarrollos en serie con menos términos la insuficiente precisión provoca que con las fórmulas inversas no se llega al valor primitivo, y en los límites externos la anamorfosis se “dispara”, pues crece aproximadamente con el cuadrado de la abscisa, pudiendo llegar a ser poco recomendable para cálculos topográficos o geodésicos.

- d) el empleo de las fórmulas (32) a (35) implica el cálculo de la longitud referida al meridiano central del huso  $\{Hu=fx((\lambda+180)/6)+1 \Rightarrow \lambda_0=(Hu-30)6-3 \Rightarrow l=\lambda-\lambda_0\}$  y la introducción de factor de reducción de escala de la proyección,  $m_0=0.9996$ , que se puede abordar de dos maneras: la primera, multiplicando  $x, y, m$  por  $m_0$  antes de sumar las *falsas abscisa y ordenada*; la segunda, en vez de reducir la proyección se reduce el elipsoide multiplicando el semieje del elipsoide por  $m_0$ , lo que es igual.
- e) en el caso inverso, el empleo de las fórmulas (36) a (40) implica: **1°** indicar, además de las cartesianas  $(x, y)$ , el huso de las mismas  $Hu$  y el hemisferio  $N|S$ ; **2°** deshacer *las falsas abscisa y ordenada*, en su caso; **3°** dividir las coordenadas por el factor de reducción de escala de la proyección,  $m_0=0.9996$ ; **4°** obtenidas las coordenadas geográficas referidas al centro del huso, sumar la longitud  $\lambda_0= (Hu-30)6-3$

El empleo de la proyección en cálculos geodésicos se puede simplificar al tratar las distorsiones controladas que sufre el segmento de línea geodésica entre dos puntos sobre el elipsoide al pasarlos al plano conforme. Sea el caso de la línea de  $P_1$  a  $P_2$  y su transformada de  $P_1'$  a  $P_2'$  que será una línea curva que presentará su concavidad hacia el meridiano central; curvatura que va tomando al atravesar las isométricas de igual anamorfosis (paralelas al meridiano central). De todos modos, la separación entre la cuerda y las tangentes en los extremos al arco, que es representación de la geodésica, son realmente pequeñas (ángulos de algunos segundos, que se denominan *reducción del arco a la cuerda*). Por eso, la distancia entre los puntos en la proyección dividida por el valor medio de anamorfosis entre los extremos proporciona la longitud del arco de geodésica sobre el elipsoide.

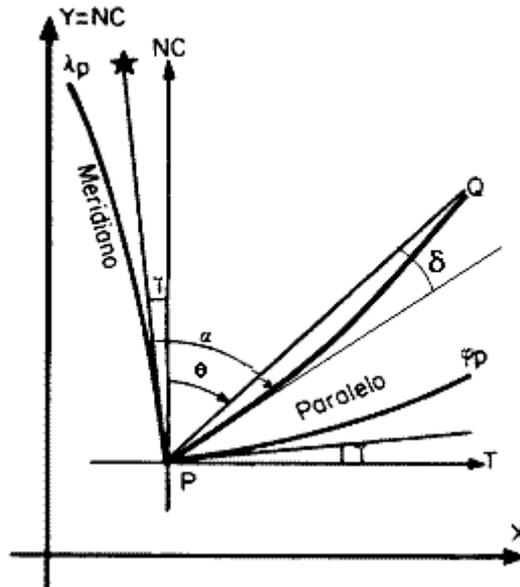


Figura 4.

Una expresión del valor medio, suficientemente aproximado, que se utiliza comúnmente es

$$(41) \frac{1}{m_{12}} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_{1/2}} + \frac{1}{m_2} \right)$$

Si la distancia de  $P_1'$  a  $P_2'$  es  $D_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  la de  $P_1$  a  $P_2$  es  $s_{12} = \frac{D_{12}}{m_{12}}$ ,

pero también se utiliza la siguiente fórmula, siendo  $x_m = (x_1 + x_2)/2$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ , y  $\frac{1}{R} = \frac{1 + \eta^2}{N}$

$$(42) \begin{aligned} s_{12} &= D_{12} \left( 1 - \frac{x_m^2}{2R_m^2} - \frac{\Delta x^2}{24R_m^2} + \frac{x_m^4}{24R_m^4} + \frac{x_m^6}{720R_m^6} \right) \text{ y su inversa} \\ D_{12} &= s_{12} \left( 1 + \frac{x_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta x^2}{24R_m^2} + \frac{5x_m^4}{24R_m^4} - \frac{61x_m^6}{720R_m^6} \right) \end{aligned}$$

La expresión, complemento de la anterior, que proporciona el pequeño ángulo de reducción a la cuerda es

$$(43) \delta_{12} = -\frac{\Delta y}{2R_1^2} \left( x_1 + \frac{\Delta x}{3} - \frac{x_1^2}{2R_1^2} \Delta x - \frac{x_1^3}{3R_1^2} \right) - \frac{e^2 \sin 2\phi_1}{2R_1^3} x_1^2 \Delta x$$

A veces, cuando la longitud del lado no es muy grande, la fórmula se limita al primer término reducido a su vez a los dos primeros términos del paréntesis.

Hay un método aplicable a la obtención de la proyección Gauss-Krüger para una extensión de la longitud  $\lambda$ , a ambos lados del meridiano central, muy considerable. Por supuesto  $\lambda$  ha de ser

menor de un radian ( $57^\circ$ ) y, para un valor de  $30^\circ$ , los errores de las coordenadas cartesianas son menores de 0.1 m. El sistema consta de tres proyecciones encadenadas por lo que se denomina *método de la triple proyección*; es conveniente recordar la propiedad que dice el producto de transformaciones conformes es una transformación conforme. Los tres pasos son:

- 1) Proyectar la superficie del elipsoide sobre la esfera según una transformación conforme, siguiendo el método descrito por Mollweide en 1807.
- 2) Transformar la esfera conforme sobre el plano con las fórmulas de la proyección conforme, cilíndrica transversa, de Gauss-Lambert (25), (26) y (27)
- 3) Realizar una transformación conforme de la proyección obtenida que preserve la escala a lo largo del meridiano central.

La primera proyección, sugerida por Mollweide, consiste en igualar las coordenadas isométricas del elipsoide ( $q, \lambda$ ) con las isométricas de la esfera ( $q_e, \lambda_e$ ). Por ser conforme debe cumplirse que los módulos lineales son independientes de la dirección considerada  $m=n$  (siendo  $R$  el radio de la esfera y  $\psi$  la latitud en la esfera)

$$(44) \quad \begin{aligned} m &= \frac{R d\psi}{M d\phi} & n &= \frac{R \cos \psi d\lambda_e}{N \cos \phi d\lambda} = \frac{R \cos \psi}{N \cos \phi} \alpha \\ m = n &\Rightarrow \frac{d\psi}{\cos \psi} = \frac{M d\phi}{N \cos \phi} \alpha = \frac{(1-e^2) d\phi}{(1-e^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} \alpha \end{aligned}$$

e integrando la última expresión se tiene

$$(45) \quad q_e = \alpha q + \ln C \quad \lambda_e = \alpha \lambda$$

Por otro lado, para que a  $\phi=0$  y a  $\lambda=0$  les correspondan respectivamente  $\psi=0$  y  $\lambda_e=0$ , las constantes  $\alpha$  y  $C$  tienen que ser iguales a uno, cumpliéndose la propuesta inicial.

La segunda proyección consiste en aplicar las fórmulas (25) de la proyección conforme, cilíndrica transversa, de Gauss-Lambert

$$(46) \quad \boxed{x = R \operatorname{argth}(\cos \psi \sin \lambda_e) \quad y = R \operatorname{arctan}(\tan \psi \sec \lambda_e)}$$

siendo  $\lambda_e=\lambda$  y  $\psi$  el valor obtenido por la *primera proyección* por medio de la expresión

$$(47) \quad \boxed{\operatorname{argtanh}(\sin \psi) = \operatorname{argtanh}(\sin \phi) - e \operatorname{argtanh}(e \sin \phi)}$$

El resultado, dicho de otra manera, es unas coordenadas ( $\eta, \xi$ ), adimensionales, a las que da escala un radio  $R$  de la esfera.

$$(48) \quad \boxed{\begin{aligned} x &= R\eta & y &= R\xi \\ \eta &= \operatorname{argth}(\cos \psi \sin \lambda_e) & \xi &= \operatorname{arctan}(\tan \psi \sec \lambda_e) \end{aligned}}$$

Por último, para realizar la tercera proyección, esto es, el paso de la proyección conforme, cilíndrica transversa, de Gauss-Lambert a la de Gauss-Krüger, se formula mediante una función analítica de variable compleja

$$(49) \mathbf{y} + i\mathbf{x} = \mathbf{f}(\xi + i\eta)$$

a la que se le impone la condición de que, para el meridiano central ( $\lambda_e = \lambda = 0$ ), sea  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\xi_0) = \mathbf{f}(\psi)$  correspondiendo al desarrollo de arco de meridiano

$$(50) \quad \mathbf{y}_0 = \beta(\varphi) = \mathbf{f}(\psi) = \mathbf{R}(\psi + \alpha_2 \sin 2\psi + \alpha_4 \sin 4\psi + \dots) \text{ donde}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{a}}{1+n} \left( 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \dots \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{15}{16}n^3 + \dots$$

$$\alpha_4 = \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \dots$$

Siendo  $n = (a-b)/(a+b)$  y  $a/(1+n) = (a+b)/2$

Por último, ha de extenderse la expresión con carácter general (fuera del meridiano central) para lo cual se escribe  $(\mathbf{y}+i\mathbf{x})$  donde se decía  $\mathbf{y}_0$  y, el valor  $(\xi+i\eta)$  en vez de  $\xi=\psi$ , obteniendo las fórmulas de la proyección Gauss-Krüger rigurosamente conforme:

$$(51) \quad \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{R}(\eta + \alpha_2 \cos 2\xi \sinh 2\eta + \alpha_4 \cos 4\xi \sinh 4\eta + \dots) \\ \mathbf{y} = \mathbf{R}(\xi + \alpha_2 \sin 2\xi \cosh 2\eta + \alpha_4 \sin 4\xi \cosh 4\eta + \dots) \end{cases}$$

Fórmulas elegantes, que presentan la *simetría de la conformidad*, en las cuales son ...

$$(52) \quad \begin{cases} \sinh 2\eta = \frac{2t}{z} & \cosh 2\eta = \frac{1+t^2}{z} \\ t = \cos \psi \sin \lambda_e & z = 1-t^2 \end{cases}$$

Como se dijo (Bugayevskiy) para longitudes igual o menor de 30° las coordenadas rectangulares calculadas tienen una fiabilidad de 0.1 m.

Para completar la formulación falta definir el *factor de escala m* y la *convergencia γ*. El producto de transformaciones conformes es una transformación conforme y, por tanto, el factor de escala lineal de la proyección resultante en este caso el producto de los tres factores de escala que resultan en cada una de las proyecciones,  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3$ . Finalmente, tanto el *factor de escala m* como la *convergencia γ* están basados en las derivadas parciales  $\mathbf{x}_\xi$  e  $\mathbf{y}_\xi$  que, con suficiente aproximación, se pueden usar las expresiones:

$$\begin{aligned} x_{\xi} &= -2 \sinh 2\eta \sin 2\xi (\alpha_2 + 8\alpha_4 \cosh 2\eta \cos 2\xi) \\ (53) \quad y_{\xi} &= 1 + 2\alpha_2 \cos 2\xi \cosh 2\eta + 4\alpha_4 (2 \cosh 2\eta - 1) (2 \cos^2 2\xi - 1) \end{aligned}$$

Así, con carácter general el módulo de deformación lineal o *factor de escala m* resulta

$$(54) \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{R} \cos \psi}{\mathbf{N} \cos \varphi} \sqrt{\frac{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}{z}}$$

Y la *convergencia*  $\gamma$  será la suma de las tres convergencias,  $\gamma = \gamma_2 + \gamma_3$  ya que  $\gamma_1 = 0$ , resultando

$$(55) \quad \gamma = \arctan(\sin \psi \tan \lambda_e) - \frac{x_{\xi}}{y_{\xi}}$$

Esta formulación es sencilla lo que constituye una ventaja innegable ya que es fácilmente programable, pero lo que la hace más interesante es que prácticamente no establece un límite en su extensión a lo largo de la longitud

## **Bibliografía**

- [1] Dirk J. Struik, 'Geometría diferencial clásica', Aguilar 1966
- [2] G.B: Lauf, 'Geodesy and Map Projections', TAFE Publications Unit 1983
- [3] Lev M. Bugayevskiy, Jhon P. Snyder, 'MAP PROJECTIONS a Reference Manual', Taylor & Francis 1995
- [4] Escuela de Topografía y Geodesia, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 1º', Servicio Geográfico del Ejército 1955
- [5] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 2º', SGE 1944
- [6] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 3º', SGE 1947
- [7] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Complementos sobre representación conforme', SGE 1951
- [8] Estado Mayor del Ejército, 'Reglamento de Cartografía Militar (1935), Tablas'. SGE 1942
- [9] Estado Mayor Central, 'Característica y tablas de la Proyección Lambert de Canarias'. SGE 1945
- [10] Estado Mayor Central, 'Proyección Universal Transversa Mercator'. SGE 1976
- [11] John P. Snyder 'Map Projections-A Working Manual', Professional paper 1395 US Government P. Office 1987
- [12] Juan Mena Berrios 'Geodesia Superior', Centro Nacional de Información Geográfica 2008
- [13] A. Lujan, 'Apuntes de cartografía', no publicados

## **Tema 61. Proyecciones acimutales ortográficas, gnomónicas y estereográficas. Perspectivas escenográficas. Proyección acimutal equivalente y equidistante. Proyecciones poliédricas.**

### **61.1. Proyecciones acimutales ortográficas, gnomónicas y estereográficas**

En su aspecto más general, la Cartografía es la ciencia que se ocupa del trazado de *cartas o mapas* al objeto de representar sobre un plano toda o parte de la superficie terrestre. En un principio, se representan espacios reducidos y es suficiente la consideración de una superficie plana sobre otra también plana (por ejemplo, *planos* de urbes), pero cuando crece la extensión de la zona de la Tierra a representar resulta evidente que, considerando la geometría del planeta, es el elipsoide de revolución la figura más idónea para esta finalidad, incluso la esfera para mapas de escala pequeña dado el escaso valor de la excentricidad de aquel.

Dado que la superficie de la esfera o el elipsoide no es desarrollable sobre un plano, las correspondientes cartas geográficas necesariamente han de adolecer de deformaciones en la información presentada, ya sean éstas en lo concerniente a las distancias, los ángulos o las áreas, las cuales se miden en la superficie esferoideica o han sido ya reducidas a ella. El proceso para establecer una correspondencia biunívoca entre elipsoide o esfera y el plano consiste en una transformación del *espacio origen*, que es la superficie del planeta considerada de forma esférica o elipsoidal, sobre un *espacio imagen* al que sólo se le exige como condición que sea una superficie desarrollable, tal como un plano, un cilindro o un cono. La transformación es, en esencia, geométrica y se puede apoyar en disciplinas como geometría diferencial o geometría proyectiva.

El nombre aplicado de forma general a estas transformaciones, *proyecciones cartográficas*, proviene más bien de las construcciones propias de la geometría proyectiva, aunque el concepto es más amplio y basta con determinar la función según la cual será transformada la red de meridianos y paralelos para su paso al plano. Sin embargo, en este tema se tratan principalmente proyecciones cartográficas de las que, en buena medida, responden a construcciones proyectivas desde una Tierra esférica directamente hacia el plano.

Entre los distintos criterios para clasificar los distintos sistemas de proyección cartográfica es según la superficie utilizada como espacio imagen: *acimutales, cónicos, cilíndricos y diversos*. De todos estos, como se ha dicho, se van a tratar los primeros.

*Acimutales*. Son sistemas donde el mapa se obtiene proyectando la superficie terrestre sobre un plano (o cuadro) tangente al elipsoide o la esfera en un punto **O** (*centro u origen de la proyección*). Y según la situación de este punto, se puede establecer la subdivisión siguiente, que, con criterio similar, también se da en los otros sistemas, como cilíndricos o cónicos:

- *Directa o polar*. Cuando **O** coincide con alguno de los polos terrestres.
- *Transversa o meridiana*. Cuando el punto **O** está situado sobre el ecuador.
- *Horizontal u oblicua*. Cuando **O** se encuentra en cualquier otra posición.

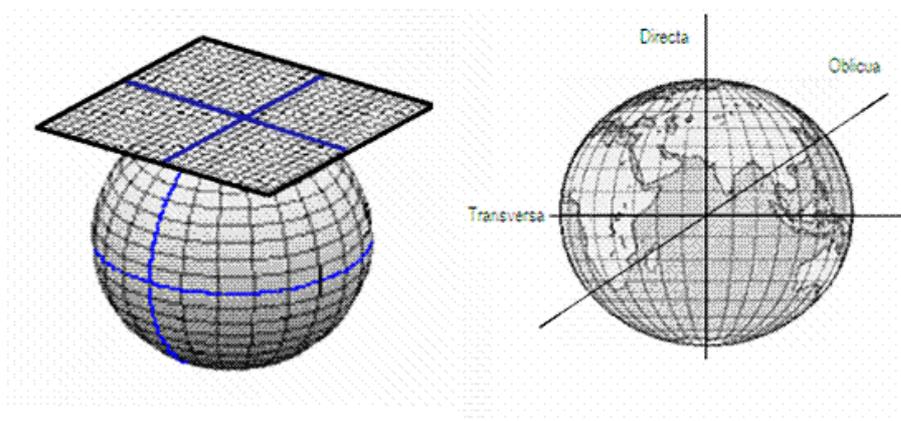


Figura 1.

Dentro de la categoría acimutal destacan los *sistemas perspectivas*, que son aquellos en los cuales la proyección se realiza desde un centro de perspectiva **C**, o punto de vista, situado en la recta perpendicular al plano del cuadro y que pasa por el centro de la Tierra esférica. Atendiendo a la posición del punto **C**, la perspectiva admite a su vez esta otra subdivisión:

- *Ortográfica*. Si el punto **C** se encuentra en el infinito.
- *Gnomónica*. Si **C** coincide con el centro de la Tierra.
- *Estereográfica*. Si **C** es el punto diametralmente opuesto al punto **O**.
- *Escenográfica*. Cuando **C** se halla a cualquier otra distancia del plano de proyección.

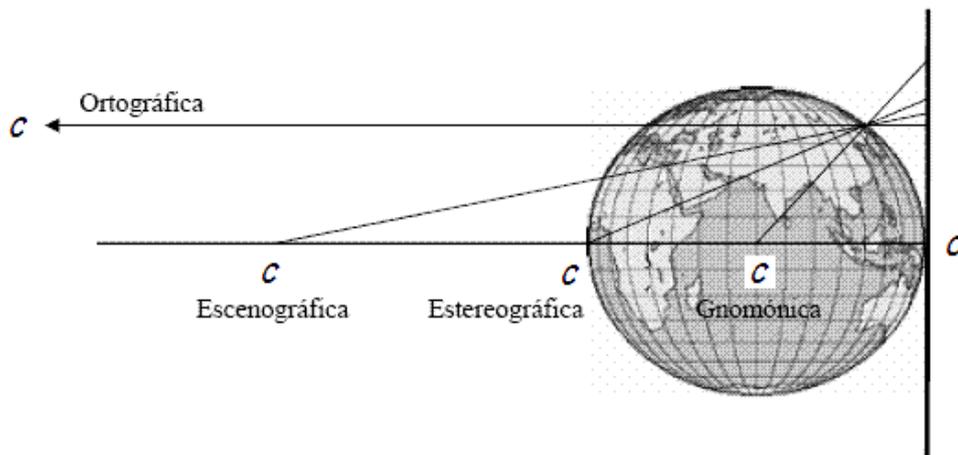


Figura 2.

Las perspectivas gozan de dos propiedades importantes, a saber:

- Toda circunferencia de círculo máximo, cuyo plano contiene el *punto de vista* o *centro de proyección*  $C$ , tiene por representación una recta, que es, al mismo tiempo, diámetro del círculo perspectivo que limita el cuadro; de esto último se exceptúan las gnomónicas en las que no existe círculo límite, pero todos los círculos máximos se proyectan según rectas.
- La perspectiva de cualquier otra circunferencia de la esfera se representa por una curva de segundo grado, pues resulta de la sección plana de un cono, o cilindro, cuya directriz es un círculo.
- Si el plano del cuadro, que se supone tangente en un punto del Globo, se sitúa en otra posición pero paralela al anterior por  $O'$ , la representación es semejante a la que resulta en el plano tangente (proporción  $CO'/CO$ )

Los elementos que caracterizan los sistemas perspectivos son la distancia  $D$  desde el punto de vista  $C$  al centro de la esfera y la latitud  $\varphi_0$  (o colatitud  $\theta_0$ ) del polo u origen de la proyección  $O$ . Las fórmulas de estas proyecciones se obtienen del caso general denominado *perspectiva escenográfica oblicua*, deducidas para la esfera de radio unidad y los dos parámetros anteriores, que serán particularizados para los restantes casos. El radio  $R$  puede adoptar un valor medio para la esfera o un valor apropiado para la zona a representar como  $R^2 = M_0 N_0$ , incluso sencillamente  $N_0$ .

## 61.2. Perspectivas escenográficas

Sea  $P_0(\lambda_0, \varphi_0)$  el punto sobre la esfera, elegido para situar el plano tangente a la misma (plano del cuadro), origen del sistema cartesiano: eje de ordenadas Y en dirección del meridiano y eje de abscisas X en dirección del primer vertical.

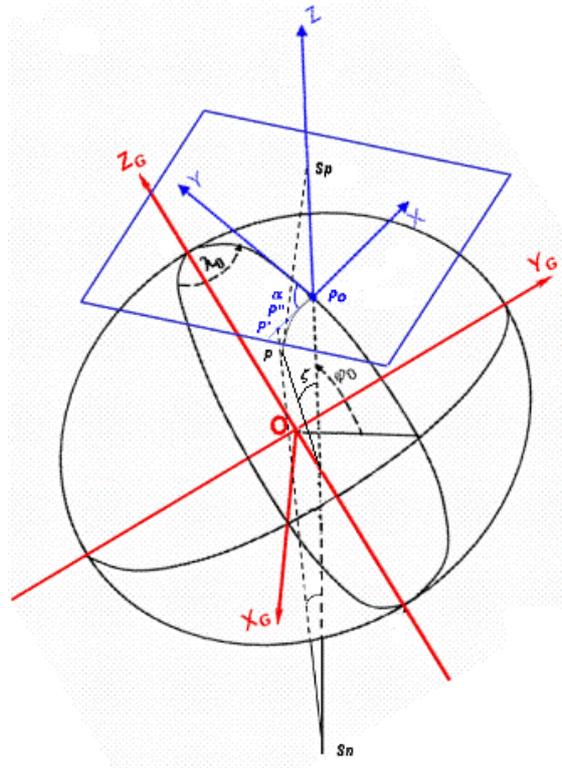


Figura 3.

El punto de vista se puede ubicar en la normal al elipsoide o esfera bien sobre el plano tangente (transformación positiva) a una distancia  $s_p$  o, por debajo del plano tangente (transformación negativa) a una distancia  $s_n$ . El primer supuesto es el correspondiente a las fotografías aéreas o desde satélite, que es objeto de otros temas, y da lugar al punto proyectado  $P''$ ; el segundo es el propiamente correspondiente a la familia de proyecciones que se tratan a continuación y da lugar al punto proyectado  $P'$ . Si la superficie proyectada es esférica la línea  $S_p P_0 S_n$  corta al eje  $Z_G$  en el origen  $O$ .

Ahora se van a deducir las fórmulas generales de la proyección escenográfica. Para ello, según la figura siguiente, se considera el centro de la proyección  $P_0$ , el punto de vista  $O$  y el centro del círculo  $C$ , siendo  $P$  el punto genérico sobre la esfera determinado por las coordenadas relativas al centro ( $\beta, \zeta$ ). El acimut de  $P_0 P$  desde el sur es  $\beta$ , y el ángulo en centro del arco que los une es  $\zeta$  (cenital); ambos valores son las coordenadas polares sobre la esfera a las que les

corresponden las polares planas en la proyección  $(\beta, \rho)$  y sus cartesianas, como en cualquier proyección acimutal, son

$$\boxed{x = x_0 + \rho \sin \beta \quad y = y_0 - \rho \cos \beta}$$

Los ejes  $x$  e  $y$ , asociados al plano del cuadro, son representación de los círculos máximos  $V$  (primer vertical) y  $M$  (meridiano) correspondientes al polo  $P_\theta$ , que se encuentran en planos ortogonales entre sí.

Como se puede apreciar, el ángulo  $\beta$  coincide en la superficie y en la proyección. Sin embargo para determinar  $\rho$  como función de  $\zeta$ , siguiendo la figura (derecha), donde se ha representado el rayo que, partiendo del punto de vista  $O$ , fija la posición de  $P'$ , se establece la semejanza entre los triángulos  $OPQ$  y  $OP'P_0$  con las expresiones siguientes:

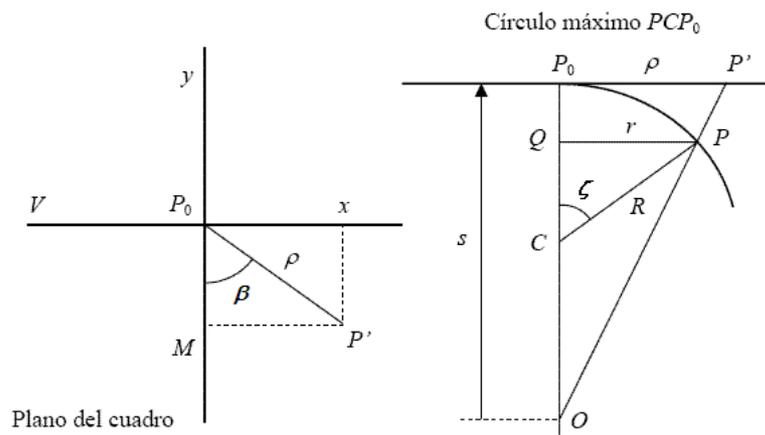


Figura 4.

$$\frac{\rho}{s} = \frac{r}{OQ} \Rightarrow \frac{\rho}{s} = \frac{r}{s - QP_0} \Rightarrow \frac{\rho}{s} = \frac{r}{s - (R - QC)}$$

Por tanto, al expresar  $r$  y  $QC$  en función del radio  $R$  y del ángulo  $\zeta$ , se tiene:

$$\rho = \frac{sR \sin \zeta}{s - R + R \cos \zeta} \Leftrightarrow \rho = \frac{s \sin \zeta}{(s/R) - 1 + \cos \zeta}$$

A continuación se sustituyen estos valores en la ecuación (1) obteniéndose:

$$\boxed{x = x_0 + \frac{s \sin \zeta \sin \beta}{(s/R) - 1 + \cos \zeta} \quad y = y_0 - \frac{s \sin \zeta \cos \beta}{(s/R) - 1 + \cos \zeta}}$$

Las relaciones entre las coordenadas geográficas de  $P$  y las esféricas polares referidas a  $P_0$ , se pueden establecer a partir del triángulo esférico *Polo Terrestre- $P_0$ - $P$*  hallando las siguientes expresiones

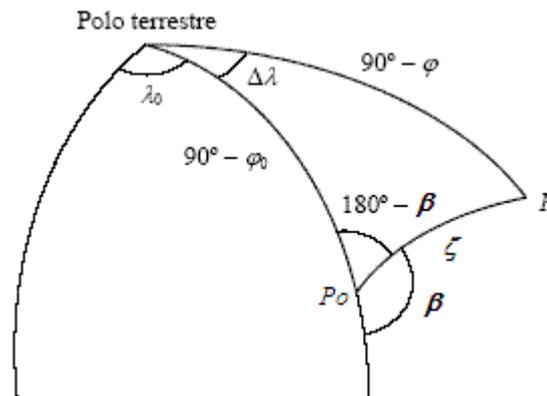


Figura 5.

$$\begin{aligned} \sin \beta \sin \zeta &= \cos \varphi \sin \Delta \lambda \\ -\cos \beta \sin \zeta &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta \lambda \\ \cos \zeta &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda \end{aligned}$$

Relaciones que llevadas a las expresiones (4) proporcionan las ecuaciones en coordenadas cartesianas en función de las coordenadas geográficas

$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{s \cos \varphi \sin \Delta \lambda}{(s/R) - 1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda} \\ y &= y_0 + \frac{s(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta \lambda)}{(s/R) - 1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda} \end{aligned}$
--

*Deformaciones.* Las tangentes principales en cada punto  $P$  de la proyección son las direcciones del plano vertical de  $P_0$  y la almicanatarat con centro en este punto  $P_0$ , que se cortan en  $P$ . Para todo  $P$ , que se encuentre en la misma almicanatarat, los valores de la elipse de Tissot  $a$  y  $b$  coinciden con  $m$  y  $n$  -sólo varía la orientación de la elipse-, por lo que se pueden calcular a partir de las fórmulas generales para las proyecciones acimutales directas, partiendo de sus expresiones en coordenadas polares (3). En tal caso, en el meridiano se da  $\zeta = \pm(\varphi_0 - \varphi)$  y, en general, sustituye a la colatitud referida al centro  $P_0$

$$\begin{aligned}
 m &= -\frac{\rho_\varphi}{M} \Rightarrow m = \frac{\rho_\zeta}{R} = \frac{\frac{s}{R}(1 + (\frac{s}{R}-1)\cos\zeta)}{(\frac{s}{R}-1 + \cos\zeta)^2} \\
 n &= \frac{\rho}{N \cos\varphi} \Rightarrow n = \frac{\rho}{R \sin\zeta} = \frac{\frac{s}{R}}{\frac{s}{R}-1 + \cos\zeta}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en éstas  $\cos \zeta$  por su expresión –última de las ecuaciones (5)- se encuentran los semiejes de la elipse de Tissot:

$$\begin{aligned}
 b = m &= \frac{\rho_\zeta}{R} = \frac{\frac{s}{R}(1 + (\frac{s}{R}-1)(\sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda))}{(\frac{s}{R}-1 + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda)^2} \\
 a = n &= \frac{\rho}{R \sin\zeta} = \frac{\frac{s}{R}}{\frac{s}{R}-1 + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda}
 \end{aligned}$$

La distancia  $s=R+D$ , separación del centro de la proyección  $P_0$  al punto de vista  $O$ , se compone del radio  $R$  y la distancia del centro de la esfera al punto de vista  $D>R$ . El valor de  $D$  ha dado lugar a múltiples soluciones ideadas con el fin de representar un hemisferio. Por ejemplo, entre las más conocidas, la de valor pequeño es la de Clarke con  $D=1.3666 R$ , la primera de Parent con  $D=1.595R$  o la de Lowry con  $D=1.690R$ , y con valores mayores como la tercera de Parent con  $D=2.105R$ . También las de Tissot: la *perimecoica* (reducir a un mínimo las alteraciones lineales) con  $D=1.618R$  y la *perihálica* (reducción al mínimo de la deformación superficial) con  $D=2.148R$ . Pero la más conocida la de La Hire por su sencillo planteamiento y condición: “el radio  $\rho_{45^\circ}$  para  $\zeta=45^\circ$  ha de ser igual a la mitad del radio  $\rho_{90^\circ}$  para  $\zeta=90^\circ$ ”. En la figura siguiente se puede seguir la condición para hallar el valor de  $D$ :

$$\begin{aligned}
 P_0P' &= P'E' = P_0E'/2 \quad ; \quad OE = OP = OP_0 = R \quad ; \quad OC = D \\
 \frac{P_0E'}{R} &= \frac{R+D}{D} \Rightarrow \rho_{45^\circ} = \frac{(R+D)\sin 45^\circ}{\frac{D+R}{R}-1 + \cos 45^\circ} = \frac{(R+D)R \frac{\sqrt{2}}{2}}{D+R \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{(R+D)R}{2D} = P_0P' \\
 \frac{\sqrt{2}D}{2} &= D+R \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow D = R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1.7071R
 \end{aligned}$$

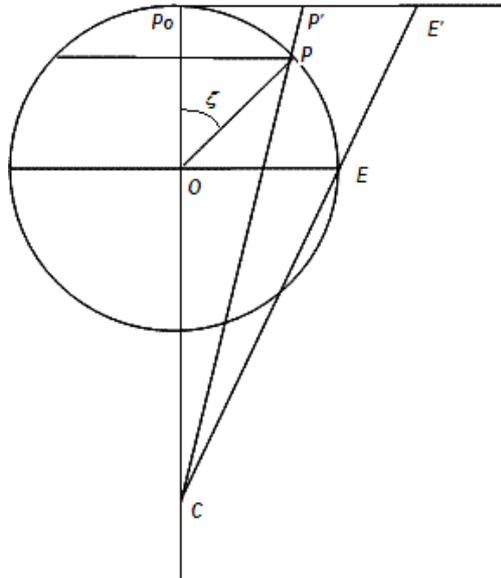


Figura 6.

La Perspectiva Escenográfica Polar o directa tiene por ecuaciones de transformación y factores de escala lineal **a** o **b** los que se hallan con facilidad cuando se sustituye en las fórmulas (3) y (6)  $\zeta$  por  $(\pi/2-\varphi)$  y  $\beta$  por  $(\lambda-\lambda_0)$  ya que el centro o polo de la proyección pasa de  $P_0$  al polo geográfico:

$$x = x_0 + \frac{s \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)}{(s/R) - 1 + \sin \varphi} \quad y = y_0 - \frac{s \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)}{(s/R) - 1 + \sin \varphi}$$

$$b = m = \frac{\frac{s}{R} (1 + (\frac{s}{R} - 1) \sin \varphi)}{(\frac{s}{R} - 1 + \sin \varphi)^2} \quad a = n = \frac{\frac{s}{R}}{\frac{s}{R} - 1 + \sin \varphi}$$

La Perspectiva Escenográfica Meridiana o transversa tiene por ecuaciones de transformación y factores de escala lineal **a** o **b** los que se hallan con facilidad cuando se sustituye en las fórmulas (5) y (7) el valor de la latitud de  $P_0=0^\circ$

$$x = x_0 + \frac{s \cos \varphi \sin \Delta \lambda}{(s/R) - 1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \quad y = y_0 + \frac{s \sin \varphi}{(s/R) - 1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda}$$

$$b = m = \frac{\frac{s}{R} (1 + (\frac{s}{R} - 1) \cos \varphi \cos \Delta \lambda)}{(\frac{s}{R} - 1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda)^2} \quad a = n = \frac{\frac{s}{R}}{\frac{s}{R} - 1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda}$$

De las mismas ecuaciones se deducen las fórmulas de la proyección *GNOMÓNICA* en sus tres correspondientes modalidades *directa*, *transversa* y *oblicua*. La deducción de sus fórmulas es tan sencilla como considerar en las anteriores  $s=D+R=R$  por ser  $D=0$  ya que el punto de vista coincide con el centro de la esfera.

Las fórmulas de la *Gnomónica Polar o directa* resultan de aplicar esa condición a las (8) y (9)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\tan \varphi} & y &= y_0 - \frac{\cos(\lambda - \lambda_0)}{\tan \varphi} \\ a = m &= \frac{1}{(\sin \varphi)^2} = b^2 & b = n &= \frac{1}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

Las fórmulas de la *Gnomónica Meridiana o transversa* resultan de aplicar esa condición a las (10) y (11)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R \tan \Delta\lambda & y &= y_0 + \frac{R \tan \varphi}{\cos \Delta\lambda} \\ a = m &= \frac{1}{(\cos \varphi \cos \Delta\lambda)^2} = b^2 & b = n &= \frac{1}{\cos \varphi \cos \Delta\lambda} \end{aligned}$$

Las fórmulas de la *Gnomónica Oblicua* resultan de aplicar esa condición a las (5) y (7)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{R \sin \Delta\lambda}{\tan \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} & y &= y_0 + \frac{R(\cot \varphi_0 - \cot \varphi \cos \Delta\lambda)}{1 + \cot \varphi \cot \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \\ a = m &= \frac{1}{(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)^2} = b^2 \\ b = n &= \frac{1}{\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \end{aligned}$$

También de las mismas ecuaciones para la proyección escenográfica se deducen las fórmulas de la proyección *ESTEREOGRÁFICA* en sus tres correspondientes modalidades *directa*, *transversa* y *oblicua*. La deducción de sus fórmulas es tan sencilla como considerar en las anteriores  $s=D+R=2R$  por ser  $D=R$  ya que el punto de vista coincide con el antípoda del punto de vista  $P_0$ . Se comprueba que es una proyección conforme al resultar  $a=b$ , semiejes de la elipse de Tissot que pasa a ser un círculo.

Las fórmulas de la *Estereográfica Polar o directa* resultan de aplicar esa condición a las (8) y (9)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2R \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi} & y &= y_0 - \frac{2R \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi} \\ a = b = m = n &= \frac{2}{1 + \sin \varphi} \end{aligned}$$

Las fórmulas de la *Estereográfica Meridiana o transversa* resultan de aplicar esa condición a las (10) y (11)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2R \cos \varphi \sin \Delta\lambda}{1 + \cos \varphi \cos \Delta\lambda} & y &= y_0 + \frac{2R \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \Delta\lambda} \\ a = b = m = n &= \frac{2}{1 + \cos \varphi \cos \Delta\lambda} \end{aligned}}$$

Las fórmulas de la *Estereográfica oblicua* resultan de aplicar esa condición a las (5) y (7)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2R \cos \varphi \sin \Delta\lambda}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \\ y &= y_0 + \frac{2R(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \\ a = b = m = n &= \frac{2}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \end{aligned}}$$

Por último, de las ecuaciones para la proyección escenográfica se deducen las fórmulas de la proyección *ORTOGRÁFICA* en sus tres correspondientes modalidades *directa*, *transversa* y *oblicua*. La deducción de sus fórmulas es tan sencilla como considerar en las anteriores que el punto de vista  $P_0$  se separa tendiendo a infinito,  $s \Rightarrow \infty$ , resolviendo la aparente indeterminación.

Las fórmulas de la *Ortográfica Polar o directa* resultan de aplicar esa condición a las (8) y (9) dividiendo numerador y denominador por  $s$  y llevando  $s$  al límite,  $\infty$ .

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + R \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0) & y &= y_0 - R \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) \\ b = m &= \sin \varphi & a = n &= 1 \end{aligned}}$$

Las fórmulas de la *Ortográfica Meridiana o transversa* resultan de aplicar esa condición a las (10) y (11) dividiendo numerador y denominador por  $s$  y llevar éste al límite.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + R \cos \varphi \sin \Delta\lambda & y &= y_0 + \sin \varphi \\ b = m &= \cos \varphi \cos \Delta\lambda & a = n &= 1 \end{aligned}}$$

Las fórmulas de la *Ortográfica oblicua* resultan de aplicar esa condición a las (5) y (7) dividiendo numerador y denominador por  $s$  y llevar éste al límite.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R \cos \varphi \sin \Delta\lambda & y &= y_0 + R(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda) \\ b = m &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda & a = n &= 1 \end{aligned}$$

A modo de resumen de las *proyecciones perspectivas* puede decirse que, los meridianos y paralelos, se representan por cónicas: elipses, parábolas, hipérbolas, circunferencias o rectas (cónica degenerada), según se recoge en el siguiente cuadro.

<i>Forma de las líneas coordenadas meridianos y paralelos</i>			
<b>PERSPECTIVAS</b>	<b>Polar o directa</b>	<b>Meridiana o transversa</b>	<b>Horizontal u oblicua</b>
<b>Gnomónica</b> meridianos paralelos	rectas circunferencias	rectas paralelas hipérbolas	rectas elip.   parab.   hiper.
<b>Estereográfica</b> meridianos paralelos	rectas circunferencias	circunferencias circunferencias	circunferencias circunferencias
<b>Ortográfica</b> meridianos paralelos	rectas circunferencias	elipses rectas paralelas	elipses elipses
<b>Escenográfica</b> meridianos paralelos	rectas circunferencias	elipses elipses	elipses elipses

### 61.3. Proyección acimutal equivalente y equidistante

Las proyecciones acimutales, en general, se generan sobre un plano que se supone tangente en un punto de la superficie elipsoide o esfera  $P_0$ , como origen o centro de la proyección (Fig.1) donde confluyen los ejes coordenados cuyas direcciones son: el de ordenadas hacia el polo geográfico y el de abscisas en dirección al Este y ortogonal al anterior. Las coordenadas de todo punto genérico  $P$ , que se desplaza a lo largo de un círculo máximo que pasa por  $P_0$ , se encuentra sobre una recta a partir de este punto, por lo cual estas proyecciones se formulan en coordenadas polares,  $[\rho=f(\zeta) \quad \gamma=\lambda-\lambda_0]$ , y luego se pasan a cartesianas rectangulares según la ecuación (1), que se repite aquí con esta notación

$$x = x_0 + \rho \sin \gamma \quad y = y_0 - \rho \cos \gamma$$

#### ACIMUTAL EQUIDISTANTE

Se considera esta proyección en su versión *directa*, en primer lugar, por su sencillez. Su centro  $P_0$  corresponde al polo geográfico,  $\rho$  es el desarrollo de arco de meridiano desde el polo hasta la latitud  $\varphi$  del punto y, el ángulo  $\gamma$  es igual  $\lambda-\lambda_0$ . Por otro lado, es habitual expresar el arco de meridiano desde el ecuador por la integral elíptica  $\int_0^\varphi M d\varphi = \beta(\varphi)$ , por lo que las fórmulas de la proyección son:

$$\rho = \beta(\pi/2) - \beta(\varphi) \quad \gamma = \lambda - \lambda_0$$

$$x = x_0 + [\beta(\pi/2) - \beta(\varphi)] \sin \gamma \quad y = y_0 - [\beta(\pi/2) - \beta(\varphi)] \cos \gamma$$

La integral elíptica anterior no tiene una fórmula cerrada como solución, por ello, se obtiene la integral definida desde el ecuador  $\beta(\varphi)$  mediante el desarrollo en serie de  $M$ , como función de  $\varphi$ . Hay distintas expresiones y una muy extendida es la siguiente, que utiliza como parámetro de excentricidad la relación  $n=(a-b)/(a+b)$

$$\beta(\varphi) = Q(\varphi + u_2 \sin 2\varphi + u_4 \sin 4\varphi + u_6 \sin 6\varphi + u_8 \sin 8\varphi + \dots)$$

$$Q = \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \dots\right); \quad u_2 = \left(-\frac{3n}{2} + \frac{9n^3}{16} - \frac{3n^5}{32} + \dots\right); \quad u_4 = \left(\frac{15n^2}{16} - \frac{15n^4}{32} + \dots\right);$$

$$u_6 = \left(-\frac{35n^3}{48} + \frac{105n^5}{256} + \dots\right); \quad u_8 = \left(\frac{315n^4}{512} + \dots\right) \text{ siendo } n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{f}{2-f} \text{ y } b = a(1-f)$$

no se debe confundir la nomenclatura de  $n$  excentricidad -este caso- con la deformación lineal según dirección del paralelo

En consecuencia la constante  $\beta(\pi/2)$  es igual a  $Q(\varphi + u_2\theta + u_4\theta + u_6\theta + u_8\theta + \dots) = Q\pi/2$ . Es decir, bajo la hipótesis de Tierra esférica el radio de la esfera  $R$ , que tiene el mismo desarrollo longitudinal del cuadrante que el elipsoide, es  $Q$ , y la proyección del elipsoide sobre esa esfera, manteniendo las longitudes, consiste en que la latitud se cambia por  $\Phi = \varphi + u_2 \sin 2\varphi + u_4 \sin 4\varphi + u_6 \sin 6\varphi + \dots$ . En este caso el factor de escala  $m$  a lo largo de los meridianos es, por definición, la unidad, pero en los paralelos será  $n = (Q \cos \phi) / (N \cos \varphi)$

La convergencia de meridianos, en el paso al plano, es  $\gamma = \lambda - \lambda_0$  y los parámetros de la elipse de Tissot son  $m=1$ , por definición, y  $n = \rho d\lambda / (N \cos \varphi d\lambda) = [\beta(\pi/2) - \beta(\varphi)] / (N \cos \varphi)$

Las fórmulas (22) de la proyección para Tierra esférica se simplifican de la forma siguiente:

$$\rho = R(\pi/2 - \phi) \quad \gamma = \lambda - \lambda_0$$

$$x = x_0 + R(\pi/2 - \phi) \sin(\lambda - \lambda_0) \quad y = y_0 - R(\pi/2 - \phi) \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$m = b = 1 \quad n = a = (\pi/2 - \phi) / \cos \phi$$

El radio  $R$  a emplear dependerá de la amplitud desde el polo que se vaya a representar; si fuera un hemisferio, puede ser  $R=Q$  y convertir la latitud geodésica a la esfera como se ha indicado anteriormente, pero si se restringe al casquete polar se puede adoptar el de la esfera tangente a una latitud media  $N_m$  entre el polo y la latitud extrema pero sin modificar las latitudes.

La representación de un hemisferio, pero eligiendo como centro una determinada ciudad  $P_0$ ; es una de las formas de usar esta proyección, apoyando la virtualidad de que las distancias relativas a ella son directamente observables y apreciar los puntos que se encuentran en el mismo almicantarato, a mayor o menor distancia del centro de la proyección.

En este caso. la proyección es la acimutal equidistante oblicua. Las fórmulas generales (1), requieren la determinación de  $\rho$  y de  $\beta$ , para lo cual se pueden utilizar la figura 5 y las ecuaciones (4) que se transcriben a continuación

$$\begin{aligned} \sin \beta \sin \zeta &= \cos \varphi \sin \Delta\lambda \\ -\cos \beta \sin \zeta &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda \\ \cos \zeta &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda \end{aligned}$$

Dividiendo las dos primeras se obtiene  $\beta$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{-\sin \varphi \cos \varphi_0 + \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda}\right)$$

Y de la tercera se despeja  $\zeta$

$$\zeta = \arccos(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)$$

Estos valores pueden ser sustituidos en la fórmula general para obtener las coordenadas cartesianas.

$$\boxed{x = x_0 + R\zeta \sin \beta \quad y = y_0 - R\zeta \cos \beta}$$

A partir de estas fórmulas se puede establecer la ecuación de verticales (rectas) y almicantaratas

<i>vertical</i>	$y = y_0 - (x - x_0) \cot \beta$	<i>recta</i>
<i>almicantarat</i>	$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R\zeta$	<i>circunferencia</i>

Pero, siendo  $\rho=R\zeta$ , se puede establecer la relación del arco al seno  $\zeta \sin \zeta = F(\Delta\lambda, \varphi)$ , y sustituir en la fórmula general  $\rho=R \cdot F(\Delta\lambda, \varphi) \cdot \sin \zeta$  con el resultado siguiente

$$x = x_0 + RF(\Delta\lambda, \varphi) \sin \beta \sin \zeta \quad y = y_0 - RF(\Delta\lambda, \varphi) \cos \beta \sin \zeta$$

Y por tanto, teniendo en cuenta las expresiones anteriores del triángulo esférico, se tienen las fórmulas de la acimutal equidistante oblicua

$x = x_0 + RF(\Delta\lambda, \varphi) \cos \varphi \sin \Delta\lambda$
$y = y_0 + RF(\Delta\lambda, \varphi) (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda)$
$F(\Delta\lambda, \varphi) = \frac{\arccos(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)}{\sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)^2}}$

Con estas expresiones se puede dibujar la retícula geográfica: cada paralelo fijando el valor  $\varphi$  y dando valores a  $\lambda$ , a intervalos pequeños, partiendo desde  $\lambda_0$ ; y cada meridiano procediendo recíprocamente.

Por último, la proyección *acimutal equidistante transversa* tiene por ecuaciones las deducidas a partir de las (26) y (27) donde se aplica  $\varphi_0=0$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{-\sin \varphi}\right) \quad \zeta = \arccos(\cos \varphi \cos \Delta\lambda)$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R \arccos(\cos \varphi \cos \Delta\lambda) \frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Delta\lambda}} \\ y &= y_0 - R \arccos(\cos \varphi \cos \Delta\lambda) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Delta\lambda}} \end{aligned}$$

ACIMUTAL EQUIVALENTE

Se va a empezar por la condición de equivalencia, para lo cual, en primer lugar se relacionan los elementos diferenciales de superficie en elipsoide  $dS$ , como objeto inicial, y en la esfera  $dS_1$ , donde las coordenadas del punto homólogo son  $(\lambda, \psi)$ .

$$dS = MN \cos \varphi d\varphi d\lambda \Leftrightarrow dS_1 = R^2 \cos \psi d\psi d\lambda$$

Se supone que coincidan las longitudes en los dos sistemas  $\lambda=\lambda$  y las latitudes en los extremos  $\varphi=0$  y  $\varphi=\pi/2$ , lo que da lugar a la siguiente ecuación diferencial, cuyo resultado es esencial para el análisis de las proyecciones equivalentes o autálicas en general.

$$R^2 \cos \psi d\psi = MN \cos \varphi d\varphi = \frac{R_a^2(1-e^2)\cos \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi \quad u = \sin \varphi$$

Se emplea  $R_a$  para semieje mayor del elipsoide con objeto de no confundirlo con el semieje de la elipse de Tissot. Para integrar la expresión (32), su segundo miembro se puede expresar como suma de las fracciones siguientes:

$$\frac{R_a^2(1-e^2)}{2} \int \frac{2du}{(1-e^2u^2)^2} = \frac{R_a^2(1-e^2)}{2} \left[ \int d\left(\frac{u}{1-e^2u^2}\right) + \int \frac{du}{1-e^2u^2} \right]$$

Resultando la siguiente ecuación que relaciona la latitud elipsoidal y la de la esfera autálica, con los radios ecuatorial del elipsoide y el de la esfera.

$$\begin{aligned} R^2 \sin \psi &= \frac{R_a^2(1-e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \arg \operatorname{th}(e \sin \varphi) \right] + C \\ R^2 \sin \psi &= R_a^2 q_s(\varphi) \quad \text{siendo} \quad q_s(\varphi) = \frac{(1-e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \arg \operatorname{th}(e \sin \varphi) \right] \end{aligned}$$

La constante de integración  $C$  es nula para que se cumpla para  $\varphi=0$ , y por otro lado, si se ha de cumplir para  $\varphi=\pi/2$  donde, también,  $\Psi=\pi/2$ , se obtiene el radio de la esfera autálica

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}_a^2 \frac{1-e^2}{2} \left[ \frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right] = \mathbf{R}_a^2 \mathbf{q}_S(\pi/2)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_a \left[ \frac{1}{2} + \frac{1-e^2}{4e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right]^{1/2} = \mathbf{R}_a [\mathbf{q}_S(\pi/2)]^{1/2}$$

Dividiendo la ecuación (33) por la (34), miembro a miembro se despeja la latitud autálica

$$\psi = \arcsin \frac{\mathbf{q}_S(\varphi)}{\mathbf{q}_S(\pi/2)}$$

Sobre esta base se aborda la deducción de las fórmulas para las proyecciones equivalentes pudiendo utilizar la esfera equivalente como paso intermedio.

Las ecuaciones de la proyección acimutal equivalente Polar o directa, pasan por igualar el área de un sector de círculo de un radian de abertura con el mismo sector de casquete esférico o elipsoidal

$$\int_0^1 \frac{\rho^2}{2} d\lambda = \int_0^1 \mathbf{R}^2 (1 - \sin \psi) d\lambda = \int_0^1 2\mathbf{R}^2 \sin^2 \frac{\Psi}{2} d\lambda = \int_0^1 \mathbf{R}_a^2 [\mathbf{q}_S(\pi/2) - \mathbf{q}_S(\varphi)] d\lambda \quad \text{de donde}$$

para el elipsoide  $\rho = \mathbf{R}_a \sqrt{2(\mathbf{q}_S(\pi/2) - \mathbf{q}_S(\varphi))}$

para la esfera  $\rho = 2\mathbf{R} \sin \frac{\Psi}{2}$  siendo  $\psi = \arcsin[\mathbf{q}_S(\varphi) / \mathbf{q}_S(\pi/2)]$

(\*) Algunos autores llaman  $\mathbf{q}_S$  al doble de la expresión anterior considerada en este texto

Las ecuaciones de la proyección acimutal equivalente de Lambert (Polar o directa) quedan de la forma siguiente

$$\rho = \mathbf{R}_a \sqrt{2(\mathbf{q}_S(\pi/2) - \mathbf{q}_S(\varphi))} = 2\mathbf{R} \sin \frac{\Psi}{2}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}_a \sqrt{2(\mathbf{q}_S(\pi/2) - \mathbf{q}_S(\varphi))} \sin(\lambda - \lambda_0) \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 - \mathbf{R}_a \sqrt{2(\mathbf{q}_S(\pi/2) - \mathbf{q}_S(\varphi))} \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{m} = (\mathbf{N} \cos \varphi) / \mathbf{R}_a \sqrt{2(\mathbf{q}_S(\pi/2) - \mathbf{q}_S(\varphi))} \quad \mathbf{a} = \mathbf{n} = \mathbf{R}_a \sqrt{2(\mathbf{q}_S(\pi/2) - \mathbf{q}_S(\varphi))} / (\mathbf{N} \cos \varphi)$$

El caso de la esfera permite definir las coordenadas esféricas a partir del polo de la proyección hacia su horizonte –coordenadas  $[\rho(\zeta), \beta]$ - e imponer directamente la condición de equivalencia  $ab=1$ . Como los valores de deformación en dirección del meridiano y del paralelo son, respectivamente  $b=d\rho/(Rd\zeta)$  y  $a=\rho/(R\sin\zeta)$ , se puede establecer la ecuación diferencial siguiente

$$\rho d\rho = \mathbf{R}^2 \sin \zeta d\zeta = 2\mathbf{R}^2 \sin(\zeta/2) \cos(\zeta/2)$$

Después de integrarla se obtiene para radio polar la expresión siguiente ya que la constante de integración es nula

$$\frac{\rho^2}{2} = 2R^2 \sin^2 \frac{\zeta}{2} \Rightarrow \rho = 2R \sin \frac{\zeta}{2}$$

Resumiendo, otra forma de llegar a las fórmulas de esta proyección *directa*, también llamada de Lorena, es sustituir  $\zeta/2$ , que ahora es la semi-colatitud, por su valor  $(\pi/4 - \varphi/2)$ , y  $\beta$  por  $(\lambda - \lambda_0)$

$$\begin{aligned} \rho &= 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ x &= x_0 + 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin(\lambda - \lambda_0) & y &= y_0 - 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos(\lambda - \lambda_0) \\ b &= m = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) & a &= n = 1 / \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

Una de las aplicaciones más interesantes y recientes de esta proyección es la modalidad *oblicua en hipótesis de Tierra elipsoidal*, recomendado su uso por Eurogeographics para cartografía paneuropea de carácter estadístico. El sistema geodésico de referencia es ETRS89, el elipsoide asociado es GRS80, y el polo de la proyección  $P_0(\lambda=10^\circ E; \varphi=52^\circ N)$ . Se conoce bajo el acrónimo ETRS89-LAEA, la ficha completa conforme a ISO19111 se reproduce como anexo a este tema,

El sistema se basa en el paso previo a la esfera autálica según ecuaciones de (35) a (37) y de ésta al plano, para lo cual se utiliza el triángulo esférico Polo geográfico-polo de la proyección-punto genérico, dando lugar al siguiente proceso:

- I. Variable autálica  $q(\varphi)$  y latitud autálica  $\Psi$  (ecuaciones 35 a 37)
- II. Constantes asociadas a las variables anteriores:

$$q_0 = q(\varphi_0) \text{ en el centro; } q_p = q(\pi/2) \text{ en el polo geográfico; } R_q = a(q_p)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} q(\varphi) &= \frac{(1 - e^2)}{2} \left[ \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{e} \operatorname{arg th}(e \sin \varphi) \right] \\ \psi &= \arcsin(q / q_p) & \psi_0 &= \arcsin(q_0 / q_p) \end{aligned}$$

- III. Hasta ahora se trabaja con cantidades unitarias referidas a esfera de radio 1 autálica. Se pasa al plano conforme, según las fórmulas (17) de la estereográfica oblicua, considerando la esfera tangente al paralelo  $\varphi_0$  como de radio 1

$$\begin{aligned} u &= \frac{2 \cos \psi \sin \Delta \lambda}{1 + \sin \psi \sin \psi_0 + \cos \psi \cos \psi_0 \cos \Delta \lambda} \\ v &= \frac{2(\sin \psi \cos \psi_0 - \cos \psi \sin \psi_0 \cos \Delta \lambda)}{1 + \sin \psi \sin \psi_0 + \cos \psi \cos \psi_0 \cos \Delta \lambda} \end{aligned}$$

IV. La relación este oeste del elipsoide a la esfera autálica es  $D=(N_0 \cos \varphi_0)/(R \cos \Psi_0)$  que multiplicará a  $u$  y su inverso multiplicará a  $v$  para que se siga cumpliendo la condición de equivalencia en cualquier punto. Finalmente, se proporciona la escala multiplicando por el radio de la esfera autálica  $R_p$

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + R_p \cdot D \cdot u & y &= y_0 - R_p \cdot \frac{1}{D} \cdot v \\
 x &= x_0 + R_p \cdot D \cdot \frac{2 \cos \psi \sin \Delta \lambda}{1 + \sin \psi \sin \psi_0 + \cos \psi \cos \psi_0 \cos \Delta \lambda} \\
 y &= y_0 - R_p \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{2(\sin \psi \cos \psi_0 - \cos \psi \sin \psi_0 \cos \Delta \lambda)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta \lambda}
 \end{aligned}$$

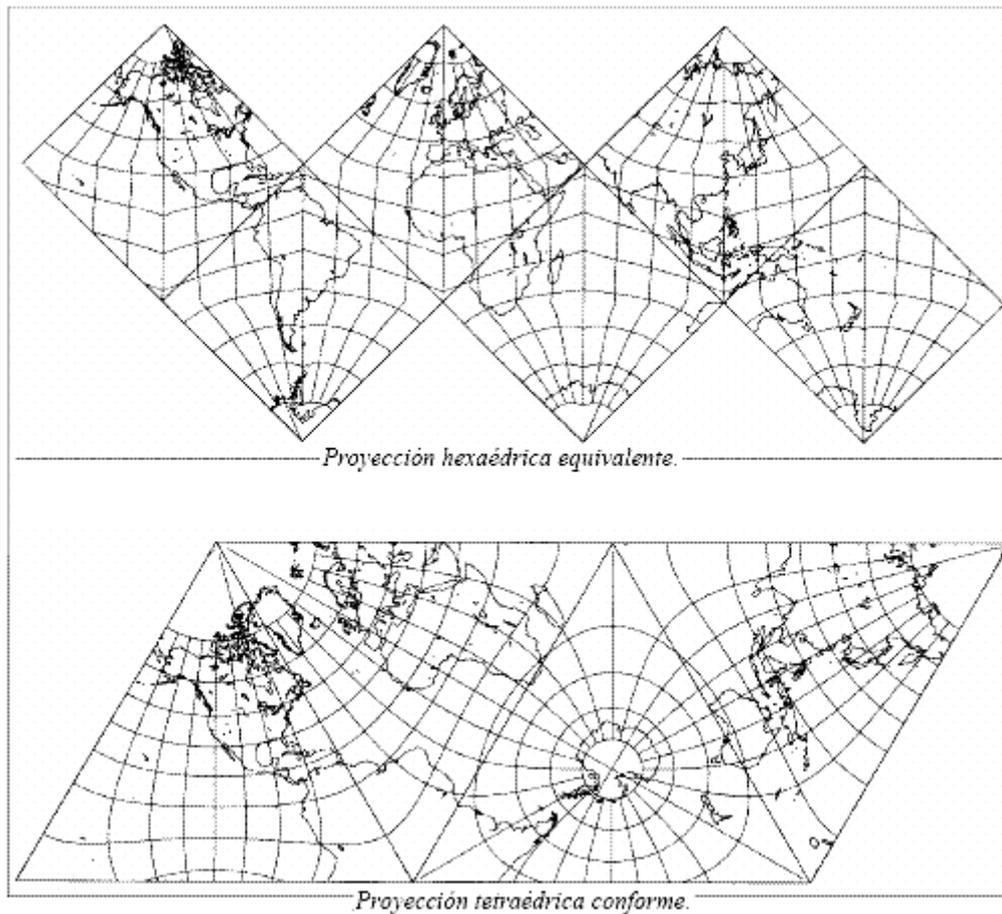
La solución del problema inverso requiere, como tantas veces, el proceso iterativo de los valores del radio, de la latitud autálica y geodésica, que converge rápidamente, o emplear los desarrollos específicos descritos en ‘Map Projections for Europe’, European Commission, Joint Research Centre 2001.

#### 61.4. Proyecciones poliédricas

Los sistemas poliédricos se caracterizan por utilizar múltiples superficies, o mejor planos, de representación. Hay que distinguir dos grupos, uno dedicado a representaciones a escala pequeña o muy pequeña cuando se proyecta la esfera terrestre en su totalidad sobre un poliedro regular y, un segundo grupo de sistemas diseñados para representar un país o una región más amplia, incluso el Globo, dividiendo la superficie del elipsoide en cuadriláteros curvilíneos cada uno de los cuales es una hoja del mapa obtenida con el mismo sistema proyectivo pero con parámetros diferentes.

En el primer grupo se elige un poliedro con un número determinado de caras. Se proyecta sobre ellas utilizando una de las proyecciones perspectivas y luego se despliega el poliedro desdoblándolo por las aristas más convenientes. Como figuras geométricas de mayor uso se emplean el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, siendo frecuente trazar este tipo de mapas con la condición de equivalencia, aunque también se encuentran algunos donde se conservan los ángulos. En las dos figuras que siguen puede contemplarse el aspecto de una *proyección hexaédrica equivalente*, así como el de una *tetraédrica conforme*.

Dada la deformación o variación de escala en los límites de cada cara (proyección), es obligado elegir convenientemente la posición y orientación del poliedro respecto a la esfera.



**Figura 7.**

Distinto es el segundo grupo en el que, igual que se hace con otras proyecciones (cónica de Lambert, UTM, Bonne y otras), para cubrir el territorio se divide en hojas y, en las poliédricas la división geográfica de cada hoja se considera, por así decirlo, una “proyección natural” referida a su centro, en la cual no cambia la formulación (muy sencilla) pero sí los parámetros que son propios de la hoja. Por eso, la unión de las distintas hojas del mapa no se puede hacer de forma continua; sólo se pueden unir sin que se formen “cuñas vacías” las pertenecientes a una franja con las que tienen los mismos paralelos norte y sur o las correlativas en columna.

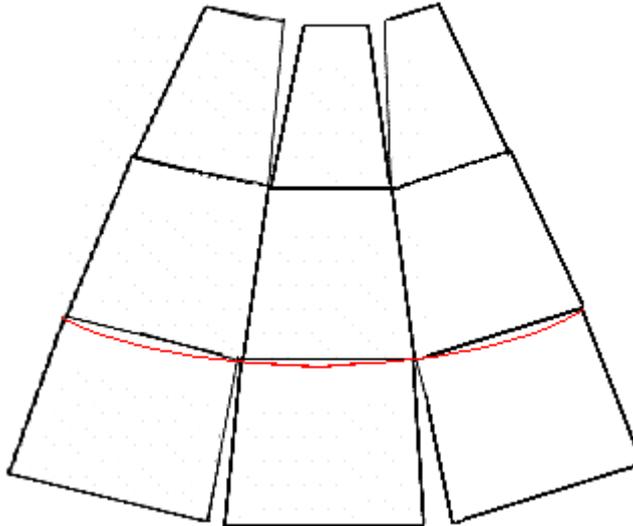


Figura 8.

Un ejemplo, el Mapa Topográfico Nacional de España cuyas reglas fueron propuestas por el Instituto Geográfico para su formación, aprobadas en 1870 por la Regencia, y consistían en estos tres puntos:

- la publicación se hará en escala 1:50.000
- se dividirá en hojas de 20' de base en el sentido de los paralelos por 10' de altura en el de los meridianos
- la parte de superficie terrestre que comprende cada hoja deberá poder considerarse como plana.

La geodesia como soporte-marco de mapa y el propio mapa estaban referidos al elipsoide de Struve cuyos parámetros son  $a=6378298^m3$  y  $e^2=0.00677436$  (o  $b=6356657^m1$ ). Cada trapezoido esferoide de la superficie terrestre origina una hoja del mapa, cuyo contorno se obtiene rectificando su arco de meridiano central –la variación del radio de curvatura en su ámbito es muy pequeña-, y por los extremos del segmento se trazan los dos paralelos extremos rectificadas resultando así un trapezoido plano rectilíneo que, prácticamente, puede considerarse equivalente al primero. El recuadro de las hojas lleva una doble escala sexagesimal: la exterior dividida en grados y minutos, y la interior con divisiones de 10''.

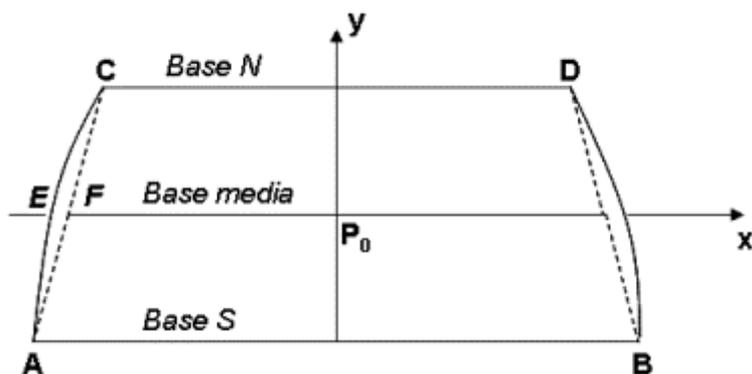


Figura 9.

Las fórmulas adoptadas para las coordenadas rectangulares, que se refieren al centro de la hoja en cuestión, son las siguientes para cualquier punto geodésico o topográfico  $P(\lambda, \varphi)$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta\lambda'' \sin 1'' N \cos \varphi \\ y &= \Delta\varphi'' \sin 1'' M_m \end{aligned} \right\} \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 ; \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \text{ siendo } P_0(\lambda_0, \varphi_0) \text{ el central}$$

El radio meridiano  $M_m$  se refiere a la latitud media de la hoja  $(\varphi_n + \varphi_s)/2$  y el radio del primer vertical  $N$  el correspondiente al paralelo del punto considerado. En esencia las fórmulas se corresponden con la proyección sinusoidal, denominada de Sanson-Flamsteed, por lo que se puede considerar equivalente, aunque, como se ha dicho aplicándolas hoja a hoja y no de un modo continuo a todo el territorio. Además se ha adoptado otra licencia, los meridianos este y oeste, que en rigor serían curvas trascendentes, se rectifican como segmentos rectos. Esto requiere estudiar la diferencia máxima que supone esta simplificación; en el cuadro siguiente se pueden ver que estas diferencias son despreciables

Latitudes extremas de las hojas	Paralelos medios Rectificados (2P <sub>0</sub> E)	Bases medias (2P <sub>0</sub> F)	Diferencias (EF)
43° 50' a 43° 40'	26848 <sup>m</sup> 61	26848 <sup>m</sup> 57	0 <sup>m</sup> 020
40° 10' a 40° 00'	28431 <sup>m</sup> 18	28431 <sup>m</sup> 15	0 <sup>m</sup> 015
36° 10' a 36° 00'	30024 <sup>m</sup> 08	30024 <sup>m</sup> 06	0 <sup>m</sup> 010

En resumen, se parece a las franjas de una policónica si se rectifican totalmente los bordes laterales (meridianos) y, en compensación, se curvan las bases, con separación constante igual al arco de meridiano (10'), para hojas con los mismos paralelos extremos; solución equivalente a la adoptada para el Mapa del Mundo a escala 1:1.000.000 en el que las “cuñas” se abrirían entre las franjas de hojas con el mismo paralelo central al tener distinto radio los círculos de las bandas inmediatas al norte y al sur.

Otra cifra interesante es la altura de las hojas calculadas para el dibujo de las hojas según el elipsoide de Struve. Mientras a las hojas más al norte (n<sup>os</sup> 1 a 5) les corresponde 0.37035 m, las de la franja sur (n<sup>os</sup> 1076 a 1078) tienen una altura de 0.36986 m, ambos valores muy cercanos al correspondiente a la milla  $1852 \cdot 10 / 50000 = 0.3704$  m. Por eso, a esta proyección, se la conoce también como *proyección natural*, y en el período de transición, cuando se ha cambiado al sistema de referencia geodésico ED50 (elipsoide internacional), se permitía superponer la retícula geográfica nueva y la cuadrícula UTM del huso correspondiente al marco de hoja de las minutas para la publicación del mapa. Algo parecido sucede actualmente cuando se acaba de adoptar el nuevo sistema de referencia ETRS89 (elipsoide SGR80) por RD 1071/2007.

## **Bibliografía**

- [1] Dirk J. Struik, 'Geometría diferencial clásica', Aguilar 1966
- [2] G.B: Lauf, 'Geodesy and Map Projections', TAFE Publications Unit 1983
- [3] Lev M. Bugayevskiy, Jhon P. Snyder, 'MAP PROJECTIONS a Reference Manual', Taylor & Francis 1995
- [4] Escuela de Topografía y Geodesia, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 1º', Servicio Geográfico del Ejército 1955
- [5] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 2º', SGE 1944
- [6] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Fascículo 3º', SGE 1947
- [7] ETG, 'Apuntes de Cartografía. Complementos sobre representación conforme', SGE 1951
- [8] Estado Mayor del Ejército, 'Reglamento de Cartografía Militar (1935), Tablas'. SGE 1942
- [9] Estado Mayor Central, 'Característica y tablas de la Proyección Lambert de Canarias'. SGE 1945
- [10] Estado Mayor Central, 'Proyección Universal Transversa Mercator'. SGE 1976
- [11] John P. Snyder 'Map Projections-A Working Manual', Professional paper 1395 US Government P. Office 1987
- [12] EuroGeographics 'Map Projections for Europe', European Commission, Joint Research Centre 2001.
- [13] Juan Mena Berrios 'Geodesia Superior', Centro Nacional de Información Geográfica 2008
- [14] A. Lujan, 'Apuntes de cartografía', no publicados

## Apéndice al tema 61

### Ficha de la proyección Acimutal Equivalente de Lambert para Europa (ISO19111)

Entity	Value
CRS ID	ETRS-LAEA
CRS alias	ETRS89 Lambert Azimuthal Equal Area CRS
CRS valid area	Europe
CRS scope	CRS for pan-European statistical mapping at all scales or other purposes where true area representation is required
Datum ID	ETRS89
Datum alias	European Terrestrial Reference System 1989
Datum type	geodetic
Datum realization epoch	1989
Datum valid area	Europe/EUREF
Datum scope	European datum consistent with ITRS at the epoch 1989.0 and fixed to the stable part of the Eurasian continental plate for georeferencing of GIS and geokinematic tasks
Datum remarks	see Boucher, C., Altamimi, Z. (1992): The EUREF Terrestrial Reference System and its First Realizations. Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung, Heft 52, München 1992, pages 205-213 - or - <a href="ftp://lareg.ensg.ign.fr/pub/euref/info/guidelines">ftp://lareg.ensg.ign.fr/pub/euref/info/guidelines</a>
Prime meridian ID	Greenwich
Prime meridian Greenwich longitude	0°
Elipsoid ID	GRS 80
Elipsoid alias	New International
Elipsoid semi-major axis	6 378 137 m
Elipsoid shape	true
Elipsoid inverse flattening	298.257222101
Elipsoid remarks	see Moritz, H. (1988): Geodetic Reference System 1980. Bulletin Geodesique, The Geodesists Handbook, 1988, Internat. Union of Geodesy and Geophysics
Coordinate system ID	LAEA
Coordinate system type	projected
Coordinate system dimension	2
Coordinate system axis name	Y
Coordinate system axis direction	North
Coordinate system axis unit identifier	metre
Coordinate system axis name	X
Coordinate system axis direction	East
Coordinate system axis unit identifier	metre
Operation ID	LAEA
Operation valid area	Europe
Operation scope	for pan-European statistical mapping at all scales or other purposes where true area representation is required
Operation method name	Lambert Azimuthal Equal Area Projection
Operation method formula	US Geological Survey Professional Publication 1395, "Map Projection – A Working Manual" by John P. Snyder
Operation method parameters number	4
Operation parameter name	latitude of origin
Operation parameter value	52° N
Operation parameter name	longitude of origin
Operation parameter value	10° E
Operation parameter remarks	
Operation parameter name	false northing
Operation parameter value	3 210 000.0 m
Operation parameter remarks	
Operation parameter name	false easting
Operation parameter value	4 321 000.0 m
Operation parameter remarks	

**Tema 62. Definición de cartografía y mapas. Mapas: función; características básicas; tipos según la escala: según la adquisición de los datos (cartografía básica y derivada); según la función y según el tema. Conceptos de cartografía; enfoque geométrico, tecnológico, de presentación, artístico, de comunicación. Fases del proceso cartográfico y su relación con los enfoques citados.**

### **62.1. Definición de cartografía y mapas**

Desde mediados del siglo XIX la cartografía ha ido adquiriendo paulatinamente una mayor presencia e importancia en nuestra sociedad, hasta convertirse en un elemento habitual en nuestra vida diaria.

A la **cartografía topográfica** elemento básico para conocer la superficie del planeta tierra, sobre el que nos asentamos y nos movemos, se ha unido el nacimiento y desarrollo de la **cartografía temática**, que ha permitido ir incrementando los temas susceptibles de ser cartografiados y transmitidos a través del mapa. Hoy en día los *mapas de los transportes* son un elemento de vital importancia en nuestro mundo, sean las rutas viarias, los ferrocarriles, o las redes del transporte urbano y los *mapas del tiempo* aparecen, como lo más natural del mundo, en todos los noticieros de las cadenas de TV y en todas las ediciones de la prensa diaria. Observar un mapa del metro o del tiempo, casi sin darnos cuenta, forma ya parte de nuestro diario quehacer.

La creciente importancia de la cartografía, está dando lugar a una permanente revisión y puesta al día de los conocimientos teóricos de esta materia. A cualquier observador desde el exterior, le debe sorprender, sin duda, la discrepancia existente entre el gran desarrollo técnico- matemático que se observa en todo lo relacionado con los levantamientos topográficos, la fotogrametría, los cálculos en los sistemas de proyección, y aun la propia informática como herramienta indispensable en nuestros días, en contraposición con la subjetividad de la representación cartográfica, sobre todo en las fases del diseño y redacción cartográfica, basados muchas veces en la tradición y en la propia experiencia del autor del mapa.

El doctor Manuel García de Castro, profesor titular de Cartografía de la Universidad de La Habana y vicedirector de desarrollo tecnológico del Instituto de Geografía, del Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente, de Cuba, señalaba en 1995, que “*muchos especialistas,*

*obnubilados por las posibilidades (ciertas) de la computación, piensan que con ella se resuelve cualquier problema cartográfico y manifiestan un desprecio olímpico por los fundamentos teóricos de la cartografía. Los resultados son realmente deplorables*". Creo que todos estarán de acuerdo con esta afirmación.

0000000000

La primera vez que encontramos la palabra **CARTOGRAFIA**, es en una carta escrita en París el 8 de diciembre de 1839 por el portugués Manuel Francisco de Barros e Souza de Mesquita, segundo Vizconde de Santarem, y dirigida al historiador brasileño Francisco Adolfo Varnhagen, donde se lee: *"invento esta palavra (cartografia) já que ahí se tem inventado tantas"*. A partir del último cuarto del siglo XIX su uso se extendería por todo el planeta.

En el "Diccionario multilingüe de términos técnicos cartográficos", publicado el año 1973 por la Asociación Cartográfica Internacional, en inglés, francés, español, ruso y alemán, podemos encontrar unas definiciones de esta nueva "voz".

Y hemos señalado "unas definiciones", en plural, debido a que en este y en otros numerosos casos, las definiciones en los cinco idiomas no se corresponden exactamente entre sí.

Así en la definición en español leemos:

**CARTOGRAFIA:** *"Conjunto de estudios y de operaciones científicas y técnicas que intervienen en la formación o análisis de mapas, modelos en relieve y globos que representan la Tierra o parte de ella, o cualquier parte de Universo. La formación de estos documentos será resultado de observaciones directas o del aprovechamiento de una documentación preexistente"*, lo que en principio parece no hacer ninguna referencia a la Cartografía como arte, o incluso a la propia cartografía temática.

En la definición inglesa aparece *"The art, science and technology of making maps, together with their study as scientific documents and works of art. In this context maps may be regarded and including all types of maps, plans, charts and sections, three-dimensional models and globes representing the Earth or any celestial body at any scale"*

Hoy en día está comúnmente aceptado que la CARTOGRAFIA no es exclusivamente ciencia y técnica, sino que también tiene un componente de arte. Véase al respecto Erwin Raisz "Cartografía General" 1953 (versión española de Ediciones Omega S.A.) que señala que

un cartógrafo tiene “*un 30 por 100 de artista*”, o James Cowan “*El sueño de un cartógrafo*” (Ediciones Península, 1997) donde señala que; “*la cartografía es un arte sublime*” (Pág. 51).

oooooooooooo

Pero el cartógrafo hace mapas. ¿Cuándo aparece la palabra mapa? ¿Qué es un mapa?

Parece que el origen de la palabra MAPA proviene del latín “*mappa*”, pañuelo o servilleta, en alusión a las telas donde se dibujaban o pintaban los mapas.

Maria Moliner en “*Diccionario de uso del español*” (Editorial Gredos, 2000), del que hay una reciente tercera edición y versión en CD-ROM, señala que en el bajo latín se denominaba “*mappa mundi*” (genitivo de *mundus*, del mundo) a las representaciones que del mundo entonces conocido se hacían sobre telas o lienzos, y posteriormente se aplicaría esta palabra “*mappa*” a las representaciones de otras áreas mas reducidas (reinos, estados,...).

El “*Nuevo diccionario Latino-Español etimológico*” de Raimundo de Miguel y el marques de Morante, 1867, señala “*mappa*” como voz punica, de genero femenino, y significado de mantel o servilleta.

En el “*Universal vocabulario en latín y en romance*” de Alfonso de Palencia, 1490, (existe una edición facsimil de 1967), aparece “*mappa*” en latín.

Las primeras referencias a “*mapa*”, ya en español, aparece en las obras de Fray Luís de Granada, 1582-1585, con genero femenino (la *mapa*), y un poco mas tarde en Fonseca, 1596, ya con genero masculino.

En el capitulo IV del celebre “*Don Quijote de la Mancha*”, Miguel de Cervantes nos deja esta bellísima y descriptiva frase. “*Porque los cortesanos, sin salir de sus aposentos ni de los umbrales de la corte, se pasean por todo el mundo **mirando un mapa**, sin costarles blanca, ni padecer calor ni frío, hambre ni sed*”.

Esa moda o costumbre de los lienzos con mapas la vemos persistiendo en la Europa del siglo XVII. Sirva como ejemplo la obra pictórica de Johannes Vermeer, de Delft, (1632-1675), donde en sus celebres cuadros “*La lectora en azul*”, “*La alegoría de la pintura*”, “*La mujer del aguamanil*”, “*Mujer tocando el laúd*” o “*El soldado y la joven sonriente*” aparece siempre un lienzo con mapa como motivo decorativo domestico.

Sobre la expresión “*pintar un mapa*”, utilizada en algunos países iberoamericanos, cabe señalar la primera acepción que de “*pintar*” hace el Diccionario de la Lengua Española: “*Representar o figurar un objeto en una superficie con las líneas y los colores convenientes*” ¿Y no es eso lo que aparece en un mapa?

En cualquier caso definir MAPA no es una tarea fácil. El doctor ingeniero Fernando Aranaz en “*Diseño y composición de mapas y atlas*” (Master en Cartografía, Sistemas de Información Geográfica y Teledetección, Universidad de Alcalá, 2002), lo define de la siguiente manera:

**“Es un documento que proporciona al usuario información geográfica y/o temática sobre una determinada área territorial. Esta información viene proporcionada por medios gráficos (simbología y color) y esta referida a un sistema de referencia y localización espacial y/o temporal”.**

## **62.2. Mapas: función, características básicas, tipos según la escala; según la adquisición de los datos (cartografía básica y derivada); según la función y según el tema**

Hemos de comenzar señalando que el objetivo de la CARTOGRAFIA consiste en preparar MAPAS que reflejan lo más adecuadamente posible aquello que queremos representar y que permita al usuario comprenderlo de la forma más sencilla y rápida posible.

El cartógrafo se limita pues, a ser un INTERMEDIARIO entre aquello que queremos representar (un territorio, una estadística,...) y el resultado final en la forma de un mapa.

Se atribuye a Lord Kelvin (mas conocido por aquello del cero absoluto a  $-273^{\circ}$  C) la frase “*si puedes expresar con un numero aquello de lo que estas hablando es que sabes algo del asunto*”. Nosotros podemos extrapolarla a “*si puedes expresar con un mapa aquello de lo que estas hablando es que sabes bastante del asunto*”. (Fernando Aranaz, obra citada).

Este es nuestro objetivo, expresar con un mapa o mejor mediante un mapa aquello de lo que estamos hablando, y hacerlo como todo en esta vida de la manera mejor, de la manera mas económica y de la manera mas rápida posible. Es lo que en el lenguaje coloquial se denominaría Bueno, Bonito y Barato.

¿Qué es un buen mapa? Un buen mapa, para un usuario determinado es aquel que representa bidimensionalmente las características del territorio (tridimensional) que le son de interés y que además las representa con la fidelidad y fiabilidad que le son necesarias al uso previsto del mapa.

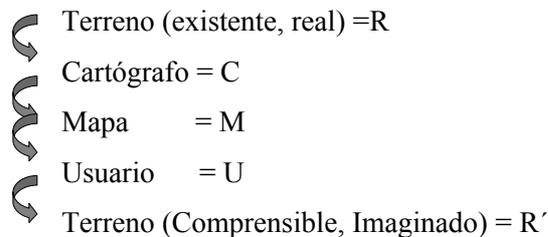
Estamos haciendo referencia a cartografía topográfica y geográfica. En cartografía temática es necesario considerar otros factores adicionales, tales como la fiabilidad estadística de la información temática, y las relaciones espaciales y/o temporales.

Entra aquí en juego un factor eminentemente subjetivo, como es la relación

MAPA  $\Leftrightarrow$  USUARIO

Desde que A. Kolacny en “*Cartographic Information: A fundamental concept and term in modern cartography*” (1964), propuso un primer modelo de comunicación cartográfica, diversos autores (L. Ratajski; J.L.Morrison,...) han desarrollado diferentes modelos, eminentemente subjetivos, estableciendo las relaciones fundamentales que tienen lugar en todo proceso de transmisión de una información cartográfica desde la realidad de un terreno.

Vamos a escoger como punto de referencia el modelo presentado por L. Ratajski en “*The research structure of theoretical cartography*” (1973). Es un modelo sencillo que nos permite comprender fácilmente los procesos de interrelación que tienen lugar en las secuencias.



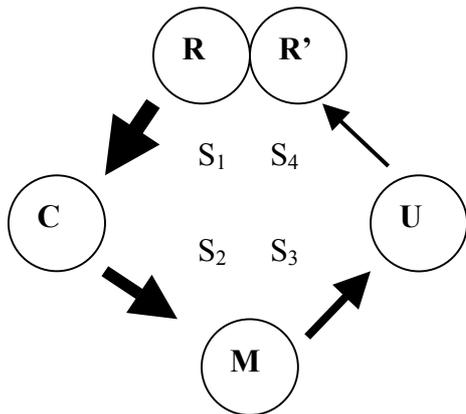
El modelo nos debe expresar estas cuatro relaciones fundamentales, en cada una de las cuales aparece una pérdida de información con respecto a la situación de partida de cada una de las relaciones.

Es evidente que:

Terreno (Existente, Real)  $R \neq R'$  Terreno (Comprensible, Imaginado) ya que el modelo mental  $R'$  que el usuario  $U$  puede hacerse a partir del mapa  $M$  preparado por el cartógrafo  $C$  será distinto de la realidad del terreno  $R$  que se trató de representar.

En la medida que  $R' \rightarrow R$ , o que  $R - R' = \Delta \rightarrow 0$  podremos definir unos estándares de calidad del producto cartográfico, del Mapa.

El modelo de transmisión de Ratajski puede representarse en un primer escalón de la siguiente manera:



Modelo elemental de Ratajski.

La transferencia mental de la realidad observada en conceptos expresables en un lenguaje cartográfico tiene lugar en la relación.

$$\text{Terreno (Existente, Real) } R \rightarrow C \text{ Cartógrafo} \quad \xrightarrow{S_1}$$

La transformación a un modelo bidimensional, iniciada en la relación anterior, se completa aquí expresando en lenguaje cartográfico (simbología, colores, sombreados,...) la realidad tridimensional captada. Estamos en la relación

$$\text{Cartógrafo } C \rightarrow M \text{ Mapa} \quad \xrightarrow{S_2}$$

La decodificación o retransformación del lenguaje expresado por el Mapa en elementos perceptibles ocurre en la relación

$$\text{Mapa } M \rightarrow U \text{ Usuario} \quad \xrightarrow{S_3}$$

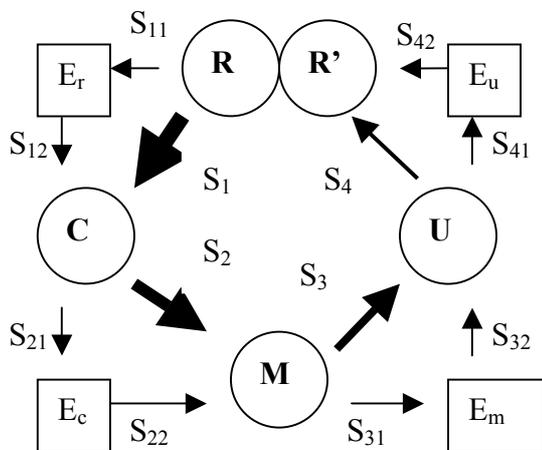
La decodificación o retransformación mental del mensaje leído en el Mapa y percibido por el Usuario en un modelo del terreno tiene lugar en la relación

$$\text{Usuario } U \rightarrow R' \text{ Terreno (Comprensible, Imaginado)} \rightarrow S_4$$

En la medida que  $R \neq R'$ , se verificara  $R-R' = \Delta$ , y también

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \Delta \neq 0$$

En un segundo escalón el modelo de transmisión de Ratajski puede ser expresado de la siguiente manera, Introduciendo algunas variaciones sobre el modelo original:



Modelo evolucionado de Ratajski

Las relaciones anteriormente descritas

$$R \rightarrow C \quad C \rightarrow M \quad M \rightarrow U \quad U \rightarrow R'$$

pueden ser ahora analizadas con mayor detalle:

Relación  $R \rightarrow C$

$E_R$ , es la emisión informativa de que se dispone a partir de la realidad de un terreno R, y viene condicionado por dos vectores:

$S_{11}$ , información efectiva que emite el terreno R, en alguna manera el OUTPUT del sistema R

$S_{12}$ , percepción que realiza el cartógrafo C en función de las tecnologías utilizadas en la captación de dicha información.

En esta fase del modelo que podríamos denominar proceso de ELABORACION intervienen elementos tales como:

- técnicas de aerofotogrametría
- técnicas de topografía y geodesia
- técnicas de aerotriangulación

### Proceso en C

En el cartógrafo C se produce una degradación de la información. Por una parte a los procesos anteriores, teóricamente objetivos, deben superponerse algunos otros tales como

- técnicas de fotointerpretación
- y los propios elementos de subjetividad inherentes a todo cartógrafo.

Esta percepción es selectiva, ya que generalmente el cartógrafo va a seleccionar, aquellas características, aquella información que considera o le parecen interesantes para un fin determinado, desechando u obviando las restantes.

Se pasa así a un proceso de depuración de la información utilizando elementos tales como:

- técnicas de generalización de la información
- técnicas de dibujo, de delineación, de esgrafiado, de sombreado, etc.

Configurando lo que podríamos denominar proceso de ELABORACION

### Relación C → M

$E_C$ , es la emisión de un mensaje informativo por parte del emisor, cartógrafo C a través de un canal de comunicación, mapa M, y viene condicionado por dos vectores:

$S_{21}$ , emisión de un mensaje que se va a traducir a unos códigos de simbología y colores en la fase final del proceso de REDACCION, y

$S_{22}$ , realidad perceptible del mensaje después de estar construido, fabricado el mapa. Estamos en lo que podríamos denominar proceso de IMPRESIÓN.

Ya hemos indicado con anterioridad, la necesidad de normalizar todo lo relativo a simbología y colores, por lo que no volveremos aquí sobre la cuestión.

### Relación $M \rightarrow U$

Ya tenemos el elemento base de nuestro estudio: el Mapa

$E_M$ , es la emisión del mensaje a través de un canal de información, Mapa M, y viene condicionado por dos vectores:

$S_{31}$ , emisión informativa que puede estar afectada negativamente, degradada, por errores conceptuales, imperfecciones técnicas, defectuosa utilización del color,..., y

$S_{32}$  es la disposición del usuario (conocimientos, entrenamiento,...) y su interrelación con el medio ambiente (iluminación, condiciones de lectura, comodidad,...) en relación con el análisis y lectura del mapa, con el lenguaje cartográfico. Estamos en lo que podríamos denominar proceso de PERCEPCION.

### Proceso en U

Al igual que hicimos antes en el cartógrafo C, detengámonos unos momentos en el usuario U que tiene un mapa en sus manos o acaba de examinarlo.

Para el cartógrafo C, los procesos  $R \rightarrow C \rightarrow M$  donde él se encuentra inmerso, son básicamente degradantes, transformando la realidad tridimensional de un terreno en un documento bidimensional: el Mapa.

Para un usuario U, los procesos  $M \rightarrow U \rightarrow R'$  donde él se encuentra inmerso, son básicamente creativos, transformando un documento bidimensional: el Mapa, en una idealidad tridimensional, **su** modelo del terreno  $R'$ .

### Relación $U \rightarrow R'$

$E_U$ , podemos definirlo como un proceso de elaboración cerebral, y viene condicionado por dos vectores:

S<sub>41</sub>, en el proceso de elaboración de la información captada, de su estructuración y análisis cognoscitivo comparándola cerebralmente con otras experiencias habidas anteriormente. Es el conocimiento, la memoria,..., y

S<sub>42</sub>, es el proceso de transformación, de capacidad de imaginación, de transformación bidimensional en tridimensional. Es un INPUT del sistema.

Matemáticamente es evidente que:

$$\begin{array}{cccccccc} \rightarrow & \rightarrow \\ S_{11} + S_{12} + S_{21} + S_{22} + S_{31} + S_{32} + S_{41} + S_{42} = \Delta \end{array}$$

El problema práctico que se presenta es que a lo largo de todo el complejo proceso se entremezclan fases medibles, correspondientes a estructuras técnicas, físicas, químicas,... con fases no medibles, aunque pueden ser evaluables, correspondientes a estructuras subjetivas y mentales. Como cuantificar estas estructuras es la cuestión con la que nos enfrentamos. Solo avanzando en esta dirección podremos ser capaces de evaluar la utilidad de un mapa.

Muchas veces el cartógrafo piensa o cree, que una vez diseñado y redactado un mapa, su trabajo ha finalizado, obviando dos importantes procesos; la producción, esto es la impresión o fabricación final, y su comercialización, entendiendo como tal la distribución y venta.

Pasó el tiempo en el que el usuario iba al mapa. Ahora es el mapa el que debe ir al encuentro del usuario. No podemos olvidar que todo mapa es un producto comercial que hay que distribuir y vender para que llegue a las manos de los usuarios. Y en este aspecto le son de aplicación las leyes de la economía y del mercado. Hablar de marketing o de mercadotecnia de la cartografía, de los mapas, no deben ser términos ajenos a los profesionales de este sector.

### **62.3. Clasificación de la cartografía**

La palabra MAPA es un sustantivo de género masculino, que obviamente puede complementarse con un adjetivo del mismo género. Así hablamos de mapa meteorológico, mapa morfológico, mapa forestal, mapa topográfico,...

Otras veces se añade la expresión “de...”. Así tenemos mapa de pendientes, mapa de rutas aéreas, mapa de carreteras,...

A veces pueden utilizarse indistintamente ambos formatos; mapa edafológico/ mapa de suelos, mapa aeroportuario/ mapa de aeropuertos,...

En el “*Diccionario multilingüe de términos técnicos cartográficos*” anteriormente citado, aparecen reseñadas y definidos 162 entradas con la palabra MAPA.

Un primer problema surge cuando queremos clasificar los diferentes tipos de mapas encuadrándoles en diferentes apartados o bloques. Como hemos visto hay numerosos tipos de mapas, y casi diríamos que infinitas posibilidades, y consecuentemente tantas clasificaciones como autores han abordado este tema.

Erwin Raisz, en su “*Cartografía General*”, anteriormente citado, señala que los mapas pueden clasificarse por su escala y por su contenido del modo siguiente:

#### 1. Mapas generales

- a) Mapas topográficos a escala grande, con información general.
- b) Mapas cartográficos que representan grandes regiones, países o continentes a pequeña escala (los atlas pertenecen a esta clase).
- c) Mapas del mundo entero (mapamundis).

#### 2. Mapas especiales

- a) Mapas políticos.
- b) Mapas urbanos (planos de población).
- c) Mapas de comunicaciones (ferrocarriles, carreteras, etc.).
- d) Mapas científicos de diferentes clases.
- e) Mapas económicos y estadísticos.
- f) Mapas artísticos y de anuncios o reclamo (propaganda).
- g) Cartas para la navegación marítima y aérea.
- h) Mapas catastrales, dibujados a gran escala, que representan las parcelas de los diferentes propietarios, con cultivos, etc.

Artur H. Robinson y otros, en su “*Elementos de Cartografía*” 1987 (Versión española de Ediciones Omega S.A.) hace una clasificación en base a tres puntos de vista, que podríamos resumir de la siguiente manera:

- POR SU ESCALA: Gran escala (denominador pequeño)  
Pequeña escala (denominador grande)
- POR SU FUNCIÓN: Mapas generales  
Mapas topográficos (generales a gran escala)  
Mapas temáticos.  
Cartas de navegación (náutica o aérea).
- POR SU TEMA: Catastrales  
Planos urbanos  
De suelos  
Geológicos  
Climáticos  
De población  
De transportes  
Económicos  
Estadísticos  
.....

UNA CLASIFICACION ESPAÑOLA. LA LEY 7/1986 DE ORDENACION DE LA CARTOGRAFIA.

Encontrándonos en España parece obligado acudir a la Ley 7/1986, de 24 de enero (B.O.E. 29 de enero) de Ordenación de la Cartografía, donde al menos a efectos oficiales la cartografía oficial se clasifica en:

- BASICA
- DERIVADA
- TEMATICA

como señala el artículo segundo de la misma.

El artículo tercero define la cartografía BÁSICA

*Uno.* Es cartografía básica, cualquiera que sea la escala de su levantamiento, aquella que se realiza de acuerdo con una norma cartográfica establecida por la Administración del Estado, y se obtiene por procesos directos de observación y medición de la superficie terrestre. La norma cartográfica será establecida por orden del ministro de la Presidencia, tratándose de Cartografía Terrestre, o por orden del ministro de Defensa, en el caso de Cartografía Náutica.

*Dos.* La norma cartográfica correspondiente a cada serie cartográfica especificará

necesariamente el datum de referencia de las redes geodésica y de nivelación, el sistema de proyección cartográfica y el sistema de referencia de hojas, para la cartografía terrestre, y, además, por lo que respecta a la náutica, el datum hidrográfico al que estén referidas las sondas.

*Tres.* Además de lo establecido en el apartado anterior, la norma cartográfica contendrá cuantas especificaciones técnicas sobre el proceso de formación del mapa sean necesarias para garantizar que éste refleja la configuración de la superficie terrestre con la máxima fidelidad posible según los conocimientos científicos y técnicos de cada momento.

*Cuatro.* La cartografía básica será objeto de aprobación oficial, a propuesta del Consejo Superior Geográfico, por el mismo órgano de la Administración del Estado competente para establecer la norma aplicable

El artículo cuarto define la cartografía DERIVADA

*Uno.* Cartografía derivada es la que se forma por procesos de adición o generalización de la información topográfica contenida en la cartografía básica preexistente.

*Dos.* La Administración del Estado establecerá la Norma Cartográfica a que habrá de atenerse la formación de cartografía derivada para las series que hayan de cubrir todo el territorio nacional. El establecimiento de dicha norma se hará por orden del ministro de la Presidencia, si se trata de cartografía terrestre, o por orden del ministro de Defensa, si se trata de cartografía náutica.

*Tres.* La cartografía correspondiente a estas series nacionales será objeto de aprobación por el procedimiento establecido en el apartado cuarto del artículo anterior.

El artículo quinto define la cartografía TEMÁTICA

*Uno.* Cartografía temática es la que, utilizando como soporte cartografía básica o derivada, singulariza o desarrolla algún aspecto concreto de la información adicional específica.

*Dos.* Los organismos públicos responsables de la realización y publicación de cartografía temática establecerán sus propias normas cartográficas, sin perjuicio de que puedan recabar para tal fin el asesoramiento del Consejo Superior Geográfico.

*Tres.* La cartografía temática sólo será objeto de inscripción en el Registro Central de Cartografía en los supuestos en que, por razones de interés nacional, así lo acuerde el ministro de la Presidencia, previo informe del Consejo Superior Geográfico, y tratándose de cartografía temática militar, la aprobación del ministro de Defensa.

Por su indudable interés incluimos también el artículo sexto, que nos ayudará a clasificar los conceptos e ideas:

*Uno.* Es competencia de la Administración del Estado:

a) A través del Instituto Geográfico Nacional:

1. El establecimiento y mantenimiento de las redes nacionales geodésica y de nivelaciones.

2. La formación y conservación de las series cartográficas a escala 1/25.000 y 1/50.000 que constituyen el Mapa Topográfico Nacional.

3. La formulación de series cartográficas a otras escalas, de ámbito nacional, que en su momento fueren aprobadas reglamentariamente.

b) A través del Instituto Hidrográfico de la Marina: la formación y conservación de la cartografía náutica básica.

*Dos.* Cualesquiera otras producciones de cartografía básica o derivada que se realicen por los distintos organismos de las Administraciones públicas conforme a sus propias necesidades cartográficas y recursos disponibles serán coordinadas a través del Plan Cartográfico Nacional.

*Tres.* El ejercicio de las competencias referidas en el presente artículo y la ejecución de los correspondientes trabajos podrán realizarse mediante acuerdos de cooperación entre los distintos órganos de las Administraciones públicas. Los acuerdos de cooperación que se celebren para la formación y conservación del Mapa Topográfico Nacional se realizarán preferentemente con los órganos cartográficos del Ministerio de Defensa.

De estos textos ya podemos deducir unas conclusiones:

La Cartografía BASICA implica **NORMALIZACIÓN**

La Cartografía DERIVADA implica **GENERALIZACIÓN**

La Cartografía TEMÁTICA implica **SINGULARIZACIÓN**

EL REAL DECRETO 585/1989, EN MATERIA DE CARTOGRAFÍA CATASTRAL

El Real Decreto 585/1989, de 26 de mayo (B.O.E. 1 de junio) por el que se desarrolla la Ley 7/1986, de 24 de enero en materia de cartografía catastral, dispone:

Art 1º. La cartografía catastral se regulará de acuerdo con lo dispuesto en la ley 7/1986 de 24 de enero, de Ordenación de la Cartografía, y en las normas del presente real decreto.

Art 2º. La cartografía catastral es la documentación gráfica que define, entre otras características que se consideren relevantes, la forma, dimensiones y situación de las diferentes parcelas o fincas que integren el territorio nacional, cualquiera que sea el uso o actividad a que estén destinadas, constituyendo en su conjunto el soporte básico del Catastro

Art 3º. La cartografía catastral tendrá la consideración de básica o temática de acuerdo con lo dispuesto en los artículos 3º. , uno y 5º., uno, de la ley 7/1986

#### EL REAL DECRETO 1071/2007

El Real Decreto 1071/2007, de 27 de julio (B.O.E. 29 de agosto) por el que se regula el sistema geodésico de referencia oficial en España, realiza, siquiera sea por vía indirecta una separación / clasificación de escalas, tal como se señala en su artículo 5.

1. Para cartografía terrestre, básica y derivada, a escala igual o menor de 1:500.000, se adopta el sistema de referencia de coordenadas ETRS-Cónica Conforme de Lambert.

2. Para cartografía terrestre, básica y derivada, a escalas mayores de 1:500.000, se adopta el sistema de referencia de coordenadas ETRS-Transversa de Mercator

### **62.4. Mapa topográfico versus mapa temático**

Al llegar a este punto hemos de realizar algunas consideraciones sobre las diferencias existentes entre los adjetivos TOPOGRAFICO/A y TEMATICO/A.

En el “*Diccionario multilingüe de términos técnicos cartográficos*”, anteriormente citado, encontramos en inglés, francés, español, ruso y alemán, definiciones que nos van a clarificar conceptos.

En la definición francesa MAPA TOPOGRAFICO es “*mapa sobre el cual figuran esencialmente los resultados de observaciones topográficas*”, y TOPOGRAFIA es “*conjunto de observaciones concernientes, en un momento dado, a la posición planimétrica y altimétrica, forma, dimensiones e identificación de los elementos concretos fijos y perdurables existentes en la superficie del suelo o subsuelo*”.

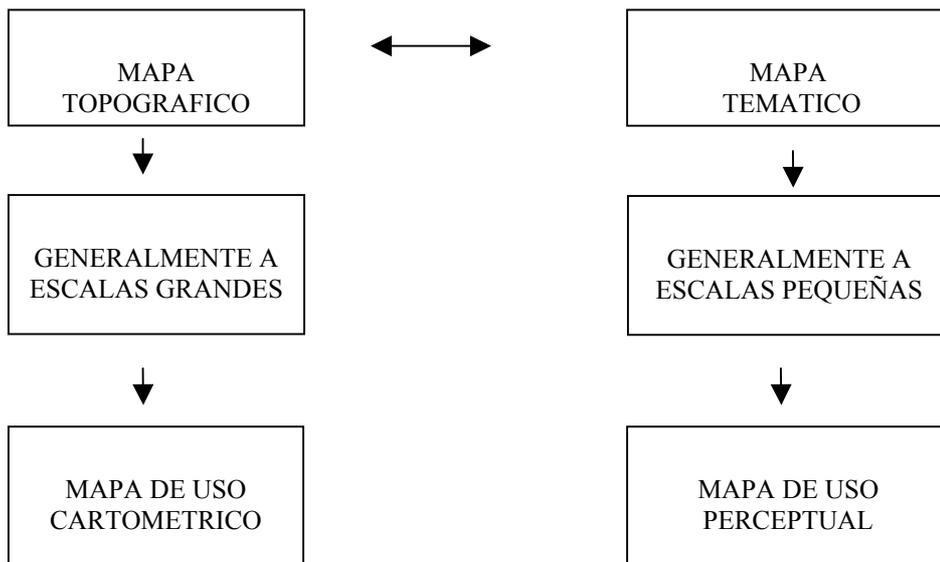
Estamos pues hablando del concepto de metricidad, de un sitio donde podemos medir. En la misma definición francesa MAPA TEMATICO es “*mapa representado sobre un fondo de referencia topográfico, hidrográfico o corográfico fenómenos localizables de cualquier naturaleza, cualitativos o cuantitativos*”.

Incluso podríamos añadir la apostilla que introduce la definición inglesa “*In conventional use this term (Thematic Map) excludes Topographic Map*”.

En resumen, un MAPA TEMATICO

- 1º- Es un mapa ≠ MAPA TOPOGRAFICO
- 2º- Sobre una base de referencia.
- 3º- Representando fenómenos localizables de cualquier tipo.
- 4º- Cualitativamente o Cuantitativamente.

Surge así un esquema “*filosófico*” o conceptual.



### **62.5. Conceptos de cartografía: enfoques, geométrico, tecnológico de presentación, artístico y de comunicación**

Una disciplina que abarca campos tan dispares como puede ser un hoja de un mapa topográfico nacional a escala 1: 25000 y un mapa temático a escala 1: 6.000.000 mostrando la matriculación de vehículos en las diversas comunidades autónomas en el último año, ha de presentar diversas caras o facetas que permitan una visión general del problema.

Es evidente que cada autor señalara o focalizar aspectos diferentes, que en ningún caso hemos de analizar como contradictorios, sino más bien como complementarios.

Artur H. Robinson y otros en su “*Elementos de Cartografía*”, anteriormente citado, señala explícitamente cinco puntos principales de atención “basándose en la importancia dada al coste de los mapas, a su exactitud, a las actividades esenciales para su realización, a la efectividad de la comunicación y a los aspectos estéticos”. En resumen a lo que hemos denominado en el argot popular; bueno, bonito y barato.

Estos cinco puntos principales o enfoques son:

- ENFOQUE GEOMETRICO
- ENFOQUE TECNOLOGICO
- ENFOQUE DE PRESENTACION
- ENFOQUE ARTISTICO
- ENFOQUE DE COMUNICACIÓN

### **ENFOQUE GEOMETRICO**

Desde un punto de vista geométrico los conceptos que nos atañen son básicamente tres:

- LA ESCALA
- LA PROYECCION
- LA BASE GEODESICA

#### LA ESCALA

Sabemos que el mapa como una representación convencional de la superficie de la tierra, ha de tener unas dimensiones reducidas, ajustadas al papel o al soporte, generalmente plano, donde se lleva a cabo la impresión.

La vana pretensión del mapa 1:1 en el que los objetos y las relaciones se vuelven ellos mismos es una quimera como la que José Luís Borges dibujara con precisión de cartógrafo en “*Historia Universal de la Infamia*” (1935), (hay una edición de Alianza Editorial, Madrid, 1987).

La escala es la medida de la relación de magnitud entre las dimensiones de los elementos representados en un mapa y las correspondientes reales. Habitualmente se representa mediante la expresión 1/E o también 1: E.

Por ejemplo hablamos de una escala 1/ 25.000 ó también 1: 25.000, significando que una parte en el mapa equivale a 25.000 partes en el terreno (esto es 1 centímetro en el mapa equivale a 250 metros en el terreno).

El problema práctico se presenta cuando queremos representar objetos muy pequeños en el terreno, por ejemplo un campo de fútbol de 100× 60 metros en la realidad, que se nos reduce a 4× 2,4 milímetros en el mapa. Si utilizamos un signo convencional más grande, su implantación provoca un desplazamiento de los elementos contiguos.

Otro problema es la representación de los viales (calles y carreteras). Si estamos trabajando en una escala 1: 50.000, 1 centímetro del mapa corresponde a 500 metros del terreno. En esta escala, la representación de una carretera de dos carriles con dos arcenes (2, 50 + 3, 50 + 3, 50 + 2, 50 = 12 metros) se nos reduce a 0, 24 milímetros. Obviamente si estamos dando a la carretera convencionalmente una anchura de 1 milímetro, estamos suponiendo que la carretera tiene una anchura de 50 metros, provocando desplazamiento de los elementos contiguos (edificios, gasolineras,...).

## LA PROYECCION

Es imposible representar la superficie esférica del globo terrestre sobre una superficie plana sin que se produzcan algunas deformaciones de lo que se pretende reflejar en los mapas. En los de escalas de pequeño denominador, que abarcan superficies de pocos kilómetros cuadrados, estas deformaciones son despreciables. En los que comprenden grandes extensiones, bien sean mapas de países muy grandes; continentes, o de todo el mundo, las inevitables deformaciones resultan considerables, y a menos que se conozcan de antemano, pueden dar lugar a graves errores.

Estas deformaciones pueden afectar a las distancias, las direcciones, o a las formas y dimensiones de las superficies representadas.

Una proyección cartográfica es un sistema ordenado de paralelos y meridianos sobre el cual puede dibujarse un mapa. Hay centenares de proyecciones cartográficas en uso, pero ninguna evita que se deformen las relaciones espaciales, que solo un globo terráqueo puede conservar fielmente. Es imposible representar a la vez con fidelidad en un mismo mapa, las superficies, formas, ángulos y escalas. Sin embargo, puede seleccionarse entre los muchos sistemas de proyección alguno que sea apropiado para representar adecuadamente un aspecto particular, o bien que suponga una solución aproximada del problema (limitando las deformaciones de uno o

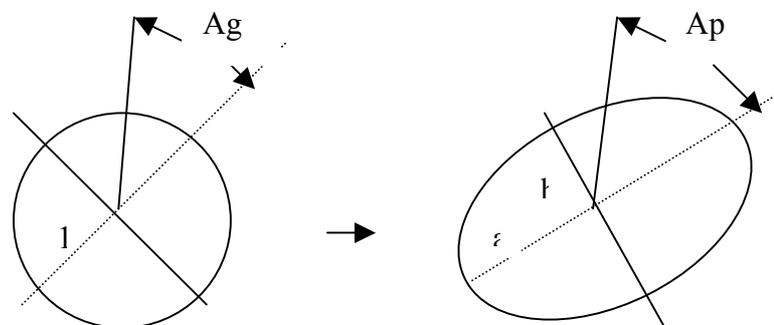
mas elementos a expensas de los otros) lo cual puede ser relativamente satisfactorio para el fin que se persiga.

La exactitud de las superficies es de capital importancia en muchos mapas. La mayoría de los que están hechos con fines geográficos, en especial los empleados para cartografiar la distribución espacial de un fenómeno, están dibujados sobre proyecciones equivalentes (equiareas). En dichas proyecciones, cualquier centímetro cuadrado del mapa representa la misma porción de superficie terrestre que cualquier otro de sus centímetros cuadrados. Continentes, océanos, islas, territorios, todos están dibujados con su verdadero tamaño relativo.

Tan importante como la igualdad de las superficies es que los contornos representados reproduzcan fielmente los reales. Esta característica estética, hasta cierto punto, lo es también practica, dado que el lector se familiariza con la figura real de un continente, una isla o una masa de agua tal y como aparecen sobre un globo terráqueo. La distorsión de estos contornos sobre un mapa, rayando casi en lo irreconocible es incongruente y desconcertante.

La exactitud de la dirección es especialmente importante en el estudio de la distribución de factores significativos en las relaciones mundiales. Para mostrar como se distribuyen latitudinal o zonalmente tales factores, es aconsejable que las líneas de latitud sean paralelas o, incluso mejor, líneas rectas paralelas al Ecuador.

A través de la “*indicatriz de Tissot*”, podemos estudiar como un circuito infinitesimal de la superficie esférica se transforma sobre el plano en una elipse infinitesimal.



- |                   |                |                                  |                      |
|-------------------|----------------|----------------------------------|----------------------|
| a. $b = 1, 00$    | $A_g \neq A_p$ | mapa equivalente                 | conserva áreas       |
| a. $b \neq 1, 00$ | $A_g = A_p$    | mapa conforme                    | conserva direcciones |
| a. $b \neq 1, 00$ | $A_g \neq A_p$ | mapa ni equivalente, ni conforme |                      |

Obviamente no es posible obtener una escala constante y única en un mapa, salvo si la representación corresponde a un territorio muy pequeño. En el caso contrario, el mas frecuente en cartografía, la escala del mapa habrá de referirse a unos paralelos determinados (el de tangencia o los secantes en los casos de proyecciones cónicas o cilíndricas) que se denominan “*automecoicos*”.

## LA BASE GEODESICA

Existe en nuestra profesión de ingeniero geógrafo (o de cartógrafo) un conjunto de conocimientos matemáticos que nos describen la figura de la Tierra, su forma y dimensiones, necesarios para proceder a su representación que vamos a denominar BASE GEODESICA.

En nuestro país un reciente Real Decreto 1071/ 2007 de 27 de julio (B.O.E. 29 de agosto) ya citado anteriormente, ha regulado el sistema geodésico de referencia oficial en España, que en su Capitulo I “*Disposiciones generales y sistemas de referencia*”, dispone:

### Artículo 1. Objeto.

Este real decreto regula el sistema de referencia geodésico sobre el que se debe compilar toda la información geográfica y cartografía oficial, permitiendo una completa integración de la información geográfica y de la cartografía oficial española con la de otros países europeos y con los sistemas de navegación.

### Artículo 2. Ámbito subjetivo de aplicación.

Este real decreto será de aplicación a la producción cartográfica e información geográfica oficiales referida a todo o parte del territorio español.

### Artículo 3. Sistema de Referencia Geodésico.

Se adopta el sistema ETRS89 (European Terrestrial Reference System 1989) como sistema de referencia geodésico oficial en España para la referenciación geográfica y cartográfica en el ámbito de la Península Ibérica y las Islas Baleares. En el caso de las Islas Canarias, se

adopta el sistema REGCAN95. Ambos sistemas tienen asociado el elipsoide GRS80 y están materializados por el marco que define la Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales, REGENTE, y sus densificaciones.

#### Artículo 4. Sistema de Referencia Altimétrico.

1. Se tomará como referencia de altitudes los registros del nivel medio del mar en Alicante para la Península y las referencias mareográficas locales para cada una de las islas. Los orígenes de las referencias altimétricas serán definidos y publicados por la Dirección General del Instituto Geográfico Nacional.

2. El sistema está materializado por las líneas de la Red de Nivelación de Alta Precisión.

3. El datum hidrográfico al que están referidas las sondas, cero hidrográfico, será definido y publicado por el Instituto Hidrográfico de la Marina y representará la referencia altimétrica para la cartografía náutica básica.

### **ENFOQUE TECNOLÓGICO**

Desde un punto de vista tecnológico hemos de considerar como han evolucionado todas y cada una de las fases de la producción cartográfica (diseño+ redacción + producción) en este último cuarto de siglo.

Fernando Aranaz en “*Diseño y composición de mapas y atlas*”, obra ya citada, señala que **“La cartografía es una ciencia que si bien se puede definir como conservadora en cuanto a la simbología, a los sistemas de representación, a las proyecciones, a los colores,... ha evolucionado espectacularmente en estos últimos años en cuanto a los medios de producción se refiere. Hoy en día nadie piensa en esgrafiar un estabillene, o en preparar una serie de rótulos por fotocomposición para adherirlos al positivo mediante acetato o parafina”**.

Recordamos que el éxito en un proyecto cartográfico se logra, cuando sucede que:

LOS COLORES DEL MAPA son idénticos a LOS COLORES DE LA CARTA BASE  
y LOS COLORES DE TODAS LAS HOJAS en la impresión, son idénticas.

En nuestro esquema de trabajo un flujo del proceso puede ser:



Las mejoras tecnológicas han afectado favorablemente a todas las etapas del proceso.

Véanse como ejemplos:

- La introducción de la tecnología del CTP (computer to plate), del ordenador a la plancha que ha permitido eliminar los procesos de filmación.
- Las mejoras en las calidades de tintas (homogeneidad de colores) y papeles (disminución de gramajes).
- La impresión en máquinas rotativas de varios cuerpos y mayores velocidades.

### **ENFOQUE DE PRESENTACION**

Ha pasado el tiempo en el que el ingeniero geógrafo (o el cartógrafo) se limitaba al diseño y a la redacción cartográfica, y a veces, como mucho, a la impresión.

Como vimos anteriormente, en los modelos de Ratajski, el ciclo no se cierra hasta que el usuario adquiere un mapa y lo utiliza.

Nos queda pues pendiente de considerar la fase de comercialización del producto. Ya pasaron los tiempos de “*el buen paño en el arca se vende*”, y más aun cuando nos estamos moviendo en un mercado que aunque pueda considerarse monopolístico para la cartografía básica, es, o puede ser, altamente competitivo para la cartografía derivada y la cartografía temática.

Eso nos llevara a tener que realizar encuestas y estudios de mercados para conocer cuales son las necesidades y/o deseos de los clientes, e incluso en que manera hay que presentarle el producto (liso, enrollado, plegado, encuadernado,...).

Empieza a ser practica como en algunos países europeos (Francia, Reino Unido,...) que las administraciones estatales solamente garanticen una parte o porcentaje del presupuesto de sus organizaciones cartográficas nacionales (Institute Geographique Nationale, Ordnance Survey,...) por lo que estas se ven obligadas a tener que actuar comercialmente, ofreciendo a los potenciales clientes nuevos y mejores productos y servicios, que les permitan generar recursos.

### **ENFOQUE ARTISTICO**

*“Gudú les escucho con atención, y cuando hubieron callado, tomo la palabra. Como no se tenía noticia de aquel reino, lo primero que hizo fue pedir al Hechicero que le trajera aquellos extraños dibujos que de niño le llamaban la atención. El Maestro los llamaba Cartas Geográficas, y allí, en delicados colores que iban del azul profundo al tenue verde esmeralda, pasando por ocre y sombras, se contemplaba, como a vista de pájaro, el Reino de Olar y sus reinos vecinos. Exceptuando, claro esta, las Tierras Desconocidas de donde llegaban las Hordas: desiertos espantosos, donde todo ser humano moría de sed y hambre, les separaban de ellos. Y se sabia de un peregrino que por error se adentro allí, y contó que, tras miles de calamidades, había vislumbrado en su conñin azules y altísimas murallas que, si no fuera por el color y el brillo, podría tratarse de montañas inaccesibles.*

*Observando los delicados dibujitos, en los que, incluso, a ratos perdidos el Hechicero había incluido casitas, las blancas iglesias que la Reina había hecho edificar – mantenía excelentes relaciones con la iglesia, y en especial con los Abundios-, castillos, ríos, bosques, las murallas, e incluso las cabañas de los Desdichados, Gudú se irritó un poco al ver aquel inútil hormigueo de cosas que no interesaban, pero se contento en contemplar con fruición las tierras lindantes al Reino de Usurpino, y al espacio que, tras el gran barranco de los Gigantes de Piedra, enfilaba hacia el vecino país.”*

Este texto de Ana Maria Matute en “*Olvidado Rey Gudú*” (Espasa Narrativa 1996) nos pone sobre la pista del enfoque artístico de un mapa.

El ingeniero geógrafo (el cartógrafo) es hombre de ciencia y artista a la vez. Debe conocer profundamente aquello que quiere representar, esto es, el planeta Tierra en primera instancia y ha de poseer los conocimientos suficientes en una serie de temas (escalas, sistemas de

proyección, objetivos del mapa,...) a la vez que un nivel de discernimiento que le permita escoger de entre varias opciones en función de su experiencia.

El cartógrafo tiene que utilizar símbolos y colores, y de su uso acertado, en el que evidentemente juega un papel importante el sentido artístico y estético, tanto o más que los conocimientos teóricos, se obtendrá la satisfacción final del usuario ante el mapa.

Las perspectivas conceptuales son extraordinariamente diferentes según los tipos de cartografía.

En cartografía básica, donde prima el concepto de NORMALIZACION, la norma ya ha previsto la definición y el uso de la simbología y del color, de tal manera que ante el mismo mapa, cien cartógrafos no escogerán (por que no pueden) sino seguirán idénticos caminos.

En cartografía derivada, donde prima el concepto de GENERALIZACION, este trabajo en general permite pocas posibilidades de creación, ya que si se realiza por procedimientos automáticos, este debe ser idéntico cualquiera que sea el realizador y si se realiza por procedimientos manuales los campos de libertad son reducidos. Los procesos de adición también suelen estar normalizados.

Si consideramos que estos proyectos de cartografía derivada suelen corresponder a escalas medias entre 1: 100.000 y 1 : 1.000.000, y se refieren a todo un territorio bien por unidades administrativas (provincias, comunidades autónomas,...) o bien por series, la realidad nos presenta una fuerte NORMALIZACION, casi como en el caso de la cartografía básica.

En cartografía temática, donde prima el concepto de SINGULARIZACION, existe una amplia libertad de trabajo, ya que la normalización solo afecta a la estructura de la obra (paginación, tipos de paginas,...) y a la cartografía de base (generalmente en escalas entre 1: 2.000.000 y 1: 10.000.000). Aquí, ante el mismo mapa, cien cartógrafos escogerán caminos distintos para resolver y presentar el mismo problema. Puede que técnicamente haya varias o muchas soluciones correctas, pero el adecuado uso de la simbología y del color, fruto, sin duda, del conocimiento teórico y de la experiencia, nos destacaran las soluciones adecuadas, que podremos resumir en buena, bonita y barata.

### **ENFOQUE DE COMUNICACIÓN**

En todo trabajo cartográfico se producen dos procesos de codificación/ descodificación de la información.

Si nos fijamos en el modelo de Ratajski, en una primera fase el cartógrafo ha de codificar la información (territorial, tridimensional, estadística,...) para mediante simbología y color implantarla en un mapa.

En una segunda fase corresponderá al usuario descodificar la información existente en un mapa para extraer de él todo cuanto en él se encuentra, y poder imaginar y comprender la realidad de ese territorio tridimensional o de esa información estadística.

Resulta evidente que análogamente como al cartógrafo le son de utilidad la experiencia y sus conocimientos teóricos, al usuario también le son de utilidad en la tarea de descodificación de un mapa sus conocimientos teóricos y su experiencia y frecuencia en el uso de los mapas.

Es habitual que en los mapas, entre la información exterior al mismo, aparezca una tabla, mas o menos grande, de signos convencionales, que facilite al usuario la comprensión y descodificación del mapa.

La información que se ha codificado para un mapa:

- consta de puntos, líneas y superficies,
- definidos o referenciados a un punto o a un espacio concreto, respecto a un sistema de coordenadas,
- y dotados de unos ciertos atributos (nombres, tamaños, colores, ...),

pero al decidir los anteriores aspectos, el cartógrafo no debe olvidar nunca que esa transmisión de la información del terreno y/o de la estadística al mapa, le obligara SIEMPRE a unos procesos de SIMPLIFICACION Y ELECCION, en función de la ESCALA del mapa, que siempre conlleva necesariamente una pérdida de información.

Veamos un ejemplo sencillo. En el Mapa Topográfico Nacional 1: 50.000, un símbolo en rojo  identifica “*Edificio religioso cristiano*”. Por supuesto no especifica a que religión cristiana pertenece (católica, protestante,...) (primera pérdida de información), ni tampoco si arquitectónicamente es románica, gótica, barroca,... (segunda pérdida de información).

Estos procesos de SIMPLIFICACION Y ELECCION se llevan a cabo mediante unos mecanismos de:

- **CLASIFICACION**
- **PRIORIZACION**
- **SELECCIÓN**
- **GENERALIZACION**

La CLASIFICACION nos conduce a agrupar en función de características similares. Por ejemplo las ciudades en función de su número de habitantes; los ríos por su caudal o importancia. Es un proceso de organización de la información.

La PRIORIZACION, o también JERARQUIZACION, nos conduce a definir e incluso a ordenar todo aquello que podemos representar en relación con su importancia, interés y posibilidades.

La SELECCIÓN implica un proceso de decisión, al que podríamos aplicar, sin lugar a dudas, las típicas preguntas:

- ¿QUE debe hacerse?
- ¿POR QUE debe hacerse?
- ¿CUAL es el objeto de hacerlo?
- ¿COMO es preciso hacerlo?

Incluso planteando una serie de cuestiones contradictorias como:

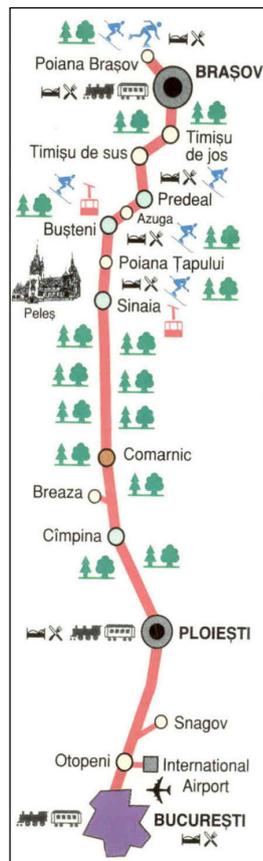
- ¿Puede ELIMINARSE esa información?
- ¿Puede COMBINARSE esta información con otra?
- ¿Se puede CAMBIAR LA PRIORIDAD de las informaciones?
- ¿Puede SIMPLIFICARSE esa información?

Solamente la respuesta, mejor la propia respuesta del cartógrafo a estas cuestiones, le permitirán una toma de decisiones acertada.

La GENERALIZACION facilita la disminución de la información por medio de suavizados de contornos, rectificadas de curvas, procesos de simplificación grafica y clareado de la información

En este mundo sin fronteras en el que estamos inmersos, en el siglo XXI no es posible soslayar el problema de la normalización de todo este LENGUAJE DE LA CARTOGRAFIA a nivel supranacional. Un mapa debe ser entendido lo mismo por un francés o alemán que por un propio español.

Veamos el pequeño mapa de la figura adjunta, procedente de una publicación turística rumana. Aquí no hace falta incluir ninguna tabla o leyenda de signos convencionales, pues cualquier persona lo entiende e interpreta fácilmente.



En estos últimos años la aparición de una nueva ciencia, la SEMIOLOGÍA GRÁFICA, ha aportado un nuevo campo de trabajo para el cartógrafo.

Etimológicamente derivada de las palabras griegas SEMEION (signo) y de los LOGOS (tratado), SEMIOLOGÍA es simplemente el TRATADO DE LOS SIGNOS.

El Comité Francés de la Cartografía define SEMIOLOGÍA GRÁFICA como “**Estudio de los signos gráficos, de sus propiedades y de sus relaciones con los elementos de información que ellas expresan**”.

La aparición de la obra “Semiologie Graphique” del francés **Jacques Bertin**, en 1967, supuso un hito importante en el desarrollo de esta nueva ciencia, marcando un antes y un después. Esta obra se divide en tres partes:

- I. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN
- II. LOS MEDIOS DEL SISTEMA GRÁFICO
- III. LAS REGLAS DEL SISTEMA GRÁFICO

que ya por sí mismas nos dan una idea de los pasos o procesos que debe seguir un cartógrafo en su trabajo. Sin analizar profundamente la información no sabremos aplicar correctamente el lenguaje gráfico, y esta aplicación debe seguir unas reglas.

## **62.6. Fases del proceso cartográfico y su relación con los enfoques citados**

Un proceso cartográfico habitual puede constar de las siguientes fases:

- Diseño
- Redacción
- Producción / Publicación
- Comercialización
- Utilización

### **FASE DE DISEÑO**

El Diccionario de la Lengua Española, Real Academia Española, vigésima primera edición, Madrid, 1992, señala varias acepciones para el sustantivo DISEÑO. De ellas podríamos sacar por su mayor aplicación:

1. Traza, delineación de figura
5. Concepción original de un objeto u obra destinados a la producción en serie.
6. Forma de cada uno de esos objetos.

Sin que ninguna de ellas, per se, nos optimice una definición o un concepto claro.

En base a estas consideraciones Fernando Aranaz en “Diseño y composición de mapas y atlas”, ya citado anteriormente, señala que:

**“El mapa debe ser concebido originalmente (5), dándole una forma (dimensiones, configuración,...) determinada (6), para ser delineado o trazado (1) según el procedimiento escogido, para finalmente poder editado, producido en serie (5)”.**

Evidentemente todo el proceso anterior requiere una estructura, en la que un error en uno de los pasos repercutirá inmediatamente en todos los siguientes, afectando a la calidad de la obra.

Este proceso de diseño ha venido evolucionando a lo largo de la historia de la cartografía como hemos visto.

Pero también si hablamos de DISEÑO se hace necesario hablar de DISEÑADOR, en tanto en cuanto es la persona que se ocupa de realizar un diseño, y al que se le ha de suponer entre otras, cualidades como los conocimientos, la experiencia, unas aptitudes estéticas y artísticas y una comprensión de las necesidades del mercado y de los usuarios.

Pasó el tiempo en que todo, bueno o malo, se vendía, y en el que el cliente/usuario no podía elegir. En el mundo comercial actual, más competitivo y agresivo, con productos de valor añadido competitivos, es necesario no esperar al cliente sino salir en su busca.

El viejo dicho “el buen paño en el arca se vende” ya no es de aplicación en las actividades comerciales y tampoco, por supuesto, en el campo de la cartografía.

Un mapa puede estar excelentemente diseñado, en sus aspectos estético, informativo, de calidad y simplemente temas y aspectos como sus dimensiones, su plegado, la calidad del papel o simplemente el precio de venta al público, amén de unos deficientes procesos de comercialización, pueden hacerlo fracasar.

La persona que se adentra en el campo de la cartografía debe tener en cuenta estos conceptos.

Simplemente la calidad del papel puede complicar un ajuste de colores y propiciar una mala calidad de tirada, o las condiciones de temperatura y humedad del taller pueden igualmente complicar la calidad de la tirada.

## **FASE DE REDACCIÓN CARTOGRÁFICA**

El Diccionario de la Lengua Española, Real Academia Española, vigésima primera edición, Madrid, 1992, señala REDACCIÓN como la “acción o efecto de redactar” y REDACTAR como “poner por escrito cosas sucedidas, acordadas o pensadas con anterioridad”.

Fernando Aranaz en “Diseño y composición de mapas y atlas”, ya citado anteriormente, señala que

Esta definición nos proporciona la verdadera dimensión de la REDACCIÓN CARTOGRÁFICA en cuanto a una manera general y salvo excepciones específicas trata de:

<b>PONER POR ESCRITO</b>	Representar gráficamente
<b>COSAS SUCEDIDAS</b>	La propia configuración de la tierra en mayores o menores dimensiones y/o escalas, o una estadística o fenómeno.
<b>ACORDADAS</b>	mediante unos códigos de simbología y color.
<b>PENSADAS CON ANTERIORIDAD</b>	Normalizados nacional o internacionalmente, o específicamente diseñados para tal mapa.

Estos mecanismos, estos procesos, permitirán al cartógrafo REDACTAR UN MAPA.

Del conjunto DISEÑO + REDACCION obtendremos un producto final denominado MAPA, en un todo armónico. Y en ese todo armónico no excluimos la PUBLICACION y la COMERCIALIZACION.

Anteriormente ya mencionamos algo sobre la comercialización del mapa. Pensemos un momento sobre los problemas que pueden presentarse en un proceso de publicación. De nada nos sirve diseñar y redactar un mapa de, por ejemplo dimensiones de 150 por 120 centímetros, si la filmadora que tenemos en nuestro organismo o empresa solo admite película en rollo de 112 centímetros de anchura y/o la impresora de nuestro taller solamente permite tiradas de 140 por 100 centímetros.

De nada nos sirve diseñar un mapa geológico, con sobrecargas y mascaradas, por el sistema tradicional, donde al final nos encontraremos con ocho, diez o mas planchas de tirada. Eso es antieconómico frente a producciones de modernos equipos de pantalla, donde al final podemos resolver el problema con solamente cuatro planchas o pasadas por maquina.

Al final, no lo olvidemos, INGENIERO deriva de INGENIO, y el ingeniero tendrá que acompañar su vida profesional de soluciones ingeniosas. La suma de todas estas ideas pueden configurar el concepto de CARTOGRAFIA.

En MATEMATICAS  $2 + 2$  son 4;  $(a + b)^2$  son  $a^2 + b^2 + 2ab$ ;...En FISICA un rayo de luz incidente sobre una superficie plana se refleja con el mismo ángulo de reflexión que el incidente,... En CARTOGRAFIA esto no es así. Es evidente que hay NORMAS, CONCEPTOS,... pero hay un toque final de REALIZACION PERSONAL. Esto es el encanto y el embrujo de la CARTOGRAFIA.

Finalmente se presenta una tabla de doble entrada, donde se muestra la relación entre las diferentes fases del proceso cartográfico y los enfoques anteriormente considerados.

FASES DE UN PROYECTO CARTOGRÁFICO	ENFOQUES				
	GEOMÉTRICO	TECNOLÓGICO	DE PRESENTACIÓN	ARTÍSTICO	DE COMUNICACIÓN
DISEÑO	FUNDAMENTAL				
REDACCIÓN			IMPORTANTE	FUNDAMENTAL	FUNDAMENTAL
PRODUCCIÓN		FUNDAMENTAL			
COMERCIALIZACIÓN			FUNDAMENTAL	IMPORTANTE	
UTILIZACIÓN	IMPORTANTE	IMPORTANTE		IMPORTANTE	FUNDAMENTAL

## **Bibliografía**

- [1] Fernando Aranaz- “*Diseño y Composición de Mapas y Atlas*”, Master en Cartografía, Sistemas de Información Geográfica y Teledetección, Universidad de Alcalá, 2002.
- [2] International Cartographic Association- “*Diccionario Multilingüe de Términos Técnicos Cartográficos*”, Franz Steiner Verlag GMBH, Wiesbaden, Germany, 1973
- [3] Erwin Raisz- “*Cartografía General*”, versión española. Ediciones Omega S.A. Barcelona, tercera edición, 1965.
- [4] Artur H. Robinson y otros- “*Elementos de Cartografía*”, versión española, Ediciones Omega S.A. Barcelona, 1987

**Tema 63. Cartografía y sistemas de producción: definiciones y objetivos. Sistemas cartográficos y modelos de comunicación. Fases generales del sistema de producción cartográfica. Cartografía digital de imagen**

ÍNDICE

- 1.- Sistemas de Información Territorial.
- 2.- Requerimientos actuales en la Información Territorial
- 3.- La Cartografía como Sistema de Información:
  - 3.1.- Introducción
  - 3.2.- Sistema de Comunicación en Cartografía
- 4.- Cartografía Digital de Imagen.
- 5.- Sistemas de Producción Cartográfica.
- 6.- Conclusiones.
- 7.- Anexos: Acrónimos utilizados.
- 8.- Bibliografía.

## 1.-SISTEMAS DE INFORMACIÓN TERRITORIAL.

La Información Territorial se puede definir como el Conocimiento del Espacio Físico donde se realizan las Actividades Humanas.

Con tal definición un acercamiento posible a ese conocimiento se realizaría mediante la Cartografía y los Sistemas de Información con el fin de describir, evaluar y analizar dichas actividades.

Un procedimiento de obtener conocimiento cartográfico (cultura) estaría sustentado en un esquema como el siguiente:



Cultura: adquisición de los conocimientos humanos mediante el ejercicio de las facultades intelectuales del hombre.

Cartografía: conocimiento del territorio mediante la obtención y tratamiento de datos espaciales.

Mapa: abstracción física de la realidad.

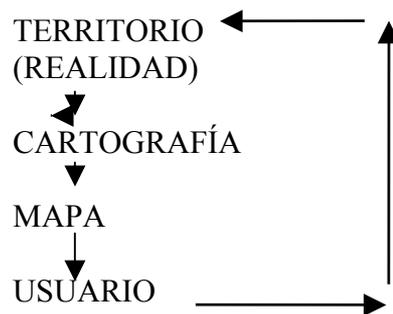
Ortoimagen Digital “OD”: matriz de números enteros codificados. Su posición interna nos dará su localización geométrica y su valor digital (número entero) nos representará una

característica determinada del territorio (función de la energía reflejada, transmitida o emitida por los objetos).

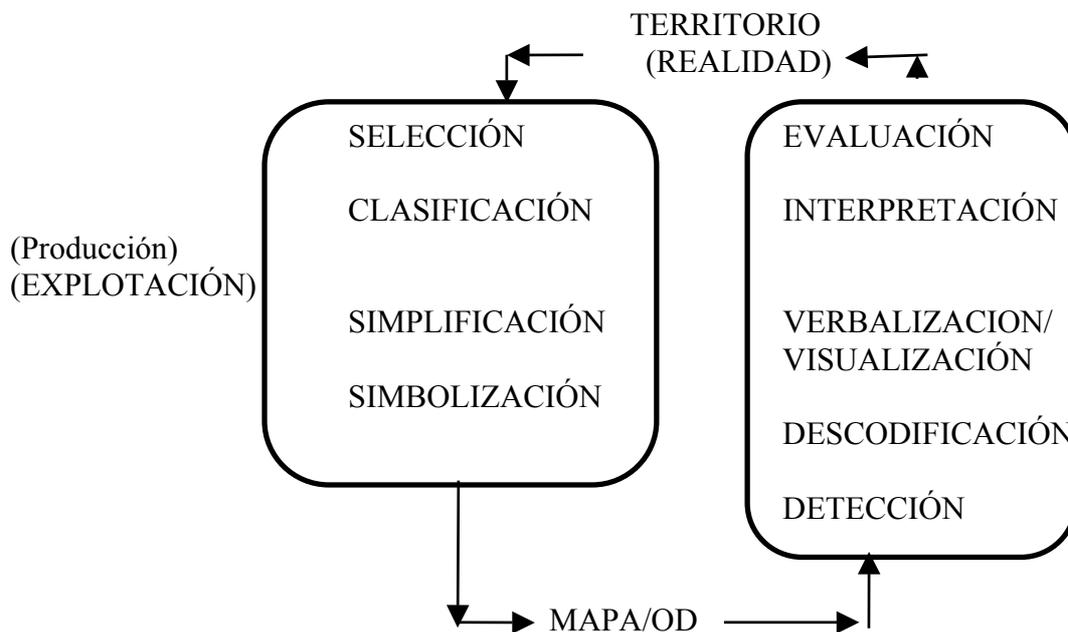
Desde el punto de vista actual de la Cartografía, y considerándola como un "Sistema de Comunicación", se pueden aplicar a la misma todas las teorías actuales de la Comunicación de Shannon, tanto en la "transformación" como en la "transmisión" de la información territorial.

El esquema completo de funcionamiento en la "transmisión" de la información se puede comprender de las formas siguientes:

- Según la teoría de Ratajski el mundo de la Cartografía se integra en el siguiente esquema:



De una forma más completa y actual, según Morrison:



En ambos procesos, la realidad subjetiva obtenida al final de la lectura del mapa, diferirá más o menos de la realidad objetiva en función de la calidad de dichos procesos.

En resolverlos se han venido aplicando todos los conceptos de la Teoría de Información Matemática convencional de transmisión de datos (aunque el concepto de Comunicación Cartográfica, dado que se encarga de la percepción y reproducción espacial de la realidad incluye datos que no son continuos en el tiempo), es decir, tendremos en cuenta las fases normales de almacenamiento, procesamiento y transmisión de datos.

De una forma más actual y como respuesta a una aproximación mayor a la Comunicación Cartográfica, se han desarrollado las teorías de Transmisión Cartográfica, consistentes básicamente en tres fases:

- Funcionamiento de la Transmisión Cartográfica (estudio de las fuentes y de la percepción)
- Transformación Cartográfica (codificación y generalización cartográfica)
- Canales de información (básicamente el mapa u ortoimagen digital –OD- hoy día), estudiando su contenido con posterior traducción al usuario y las formas de expresión -signos utilizados- estudiados en la "Semiología Gráfica" (Ratajski, Bertin).

Esta última forma de entender la Cartografía es la empleada en las técnicas de Cartografía Asistida por Ordenador (CAO), aunque debido fundamentalmente a la complejidad de la implantación de ciertas normas basadas en el desarrollo de mapas convencionales, se ha hecho necesario desarrollar nuevos conceptos de mapa.

En todo el proceso de comunicación aparece claramente como medio típico de transmisión y transformación el mapa "modelo figurativo del mundo real" (Board 1967) y asimismo, la Ortoimagen Digital (OD) ,forma virtual de entender actualmente el "mundo real" .

- Los Sistemas de Información Territorial (uso y explotación) se incluyen por tanto dentro del concepto de "Cartografía", dado que es esta parte la que cierra el esquema de "transmisión de información" entre el mapa u OD y la realidad mediante unas determinadas reglas y métodos, función del tipo de Cartografía y de la información que se desea extraer.

- El Uso del mapa y de la OD, se puede efectuar bajo tres aspectos:

- Como "medio de comunicación", quizás la forma más empleada, sirviendo tanto para almacenamiento como diseminación de la información espacial.
- Como "medio operativo", sobre el que resolveríamos diversos problemas.
- Como "medio cognoscitivo", investigando diversos fenómenos que se ponen de manifiesto.

Cada uno de estos aspectos, se puede desarrollar a diversos "niveles de lectura":

- Nivel elemental (análisis)
- Nivel de conjunto (síntesis)
- Nivel medio (comparación)

Estos niveles son abordados hoy día de forma valiosa y eficaz mediante los algoritmos e interfaz que ofrecen los diversos SIG existentes.

## **2.- REQUERIMIENTOS ACTUALES EN LA INFORMACIÓN TERRITORIAL (IT).**

La demanda creciente de información territorial ponen cada vez mas de manifiesto los requerimientos que dicha información debería cumplir y que con las nuevas tecnologías son cada día más factibles de conseguir en un alto porcentaje.

La información territorial debería ser:

Homogénea

Objetiva

Exacta a la escala correspondiente

Descentralizada

Rápida de ejecución

Actualización en plazos lógicos

Independiente de los métodos captura

Permitir la fusión de datos (sensores/tratamiento)

Multiespecífica

Susceptible de ser Integrada en Redes Internacionales

Como es sabido , la cartografía existente hoy día, en un alto porcentaje, no cumple dichos requerimientos, tanto debido a los sistemas de captura de la información como a los propios sistemas de tratamiento.

Los sistemas basados en Imágenes Digitales -(CDI)- por su sistema de captura, estructura interna y tratamiento, propician en gran medida un acercamiento a dichos requerimientos.

Asimismo, se puede destacar que la IT tiene actualmente entre otros los siguientes aspectos:

La distribución de datos condicionará la viabilidad del proyecto.

La información será digital, estereoscópica y de resolución espacial  $< 1m$

Sistema físico:

Abierto.

Conectividad total.

Descentralizados.

Sistema lógico:

Orientado a objetos

Fusión raster/vector

Sistemas de información geográfica mixtos.

Transmisión de datos mediante redes (locales-mundiales).

Cooperación Internacional.

### **3.- LA CARTOGRAFÍA COMO SISTEMA DE INFORMACIÓN.**

#### **3.1.- INTRODUCCIÓN.**

El término Cartografía se ha venido empleando durante cientos de años con criterios más o menos amplios dependiendo del perfil profesional de las personas que lo han utilizado, tanto por su experiencia con los mapas, como del tipo o nivel de uso del mismo.

El primer y más elemental objetivo que persiguió la Cartografía fue el representar zonas importantes para el hombre que sirvieran en su orientación. Posteriormente este criterio se ha ampliado, representando además “fenómenos” que el hombre tiene en cuenta en sus decisiones, tanto visibles (un bosque por ej.), como no visibles (líneas de términos municipales por ej.)

- De forma genérica el concepto de Cartografía, por tanto, se puede considerar como un Sistema de Comunicación.

- De manera más precisa, de acuerdo con la Asociación Cartográfica Nacional (ACI) la definió como : "El conjunto de estudios y operaciones científicas, artísticas y técnicas que intervienen a partir de resultados de las observaciones directas o de la explotación de una documentación existente, en el establecimiento de mapas, planos y otras formas de expresión, así como en su utilización".

- Asimismo, según el Diccionario Multilingüe de Términos Técnicos en Cartografía, se define como "El arte, ciencia y técnica de ejecución de mapas, junto con su estudio como documento científico"

En estas definiciones hay que destacar que el mapa, como medio de comunicación, es la forma más importante de expresión cartográfica, incluyéndose también como tales, diagramas, secciones, modelos tridimensionales, globos, etc.

- Las Naciones Unidas, de forma sencilla han interpretado y definido la Cartografía como "todas las operaciones que se incluyen, desde los levantamientos o adquisición de datos, hasta la reproducción de mapas" . Esta forma de entender la Cartografía concuerda con la visión que de la misma se tenía en el siglo XVI, donde el Cartógrafo adquiría la información (en sus viajes y expediciones terrestres o marítimas), la trataba, creaba símbolos, dibujaba e ilustraba los mapas.

- La Cartografía, hoy día, se puede entender, por tanto, como un Sistema de Comunicación que incluye todas las operaciones de recogida, tratamiento y edición de información espacial, siendo todavía el mapa el medio de comunicación más utilizado hasta la fecha, pero debiéndolo contemplar como una de las diversas formas de explotación de la información. Si todo el proceso se ha realizado en forma numérica o digital, tenemos lo que se conoce como Cartografía Asistida por Ordenador (CAO), concepto éste que incluye, con el criterio antes expuesto, los procesos de Producción Automática de mapas, Actualmente la Cartografía Digital de Imagen (CDI) nos permite abordar, no solo el Sistema de Comunicación definido anteriormente, si no que se nos presenta como un instrumento verdaderamente eficaz para resolver los problemas que la Cartografía convencional aborda de forma no eficiente, siendo las características más destacables: la objetividad, homogeneidad, actualización, obtención de cartografía derivada, etc.

Para finalizar esta introducción, conviene recordar las formas de dividir y clasificar la Cartografía:

Dependiendo del fin último del mapa, así como por su concepción y ejecución, se ha venido dividiendo la Cartografía en Cartografía topográfica y Cartografía temática.

La Cartografía topográfica se encarga de la elaboración de mapas topográficos, que se pueden definir como una "representación exacta y detallada de la superficie terrestre, referente a la posición, forma, dimensiones e identificación de los accidentes del terreno así como de los objetos concretos que se encuentran permanentemente sobre ellos".(F. Joly). Todos los mapas topográficos son representaciones convencionales más o menos similares entre ellos.

La Cartografía temática, se encarga de la producción de mapas temáticos, que se puede definir como "la representación convencional, sobre un fondo de referencia (topográfico) mediante símbolos cualitativos y cuantitativos, de los fenómenos localizables de cualquier naturaleza y de sus correlaciones". (F.Joly).

Se puede considerar, por tanto, que el mapa no solo es un estado de información, sino que es un lenguaje internacional. (Bertin).

La forma de clasificación de los mapas (Metacartografía), sería la siguiente:  
 Los mapas topográficos, según su escala:

- Grandes: hasta 1/10.000
- Medios: 1/10.000-1/100.000
- Pequeños: 1/100.000-1/1.000.000
- Muy pequeños: Superiores 1/1.000.000

Los mapas temáticos:

- |                            |             |           |
|----------------------------|-------------|-----------|
| - Analíticos (referencia)  | Correlación | Estáticos |
| - Sintéticos (explicación) |             |           |

### 3.2.- SISTEMA DE COMUNICACIÓN EN CARTOGRAFÍA.

Según las teorías de Ratajski expuestas anteriormente, el concepto clásico de comunicación cartográfica sería el siguiente: FIG.nº.:1, y 2

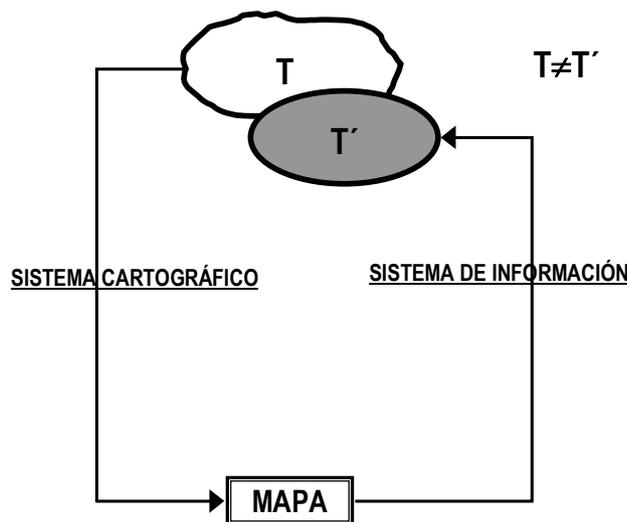


FIG.: 1

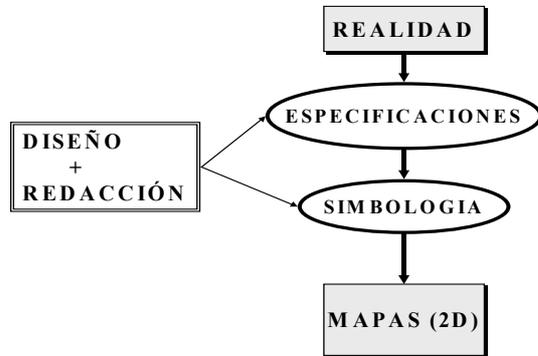


FIG.: 2

Hoy , debido al empleo eficaz de las Técnicas de Tratamiento Digital de Imágenes Digitales(TDID) y su gran utilización en los nuevos conceptos de Mapa Virtual ,que luego se definirá, es posible sustituir dicho esquema por los siguientes:FIG.nº.: 3 y 4

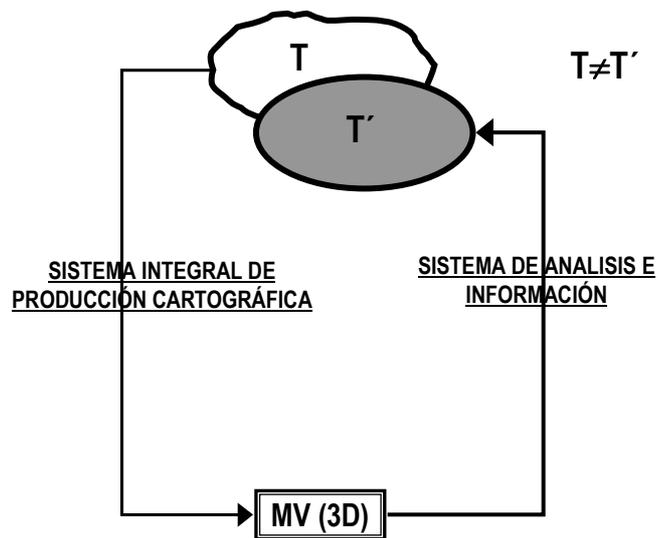
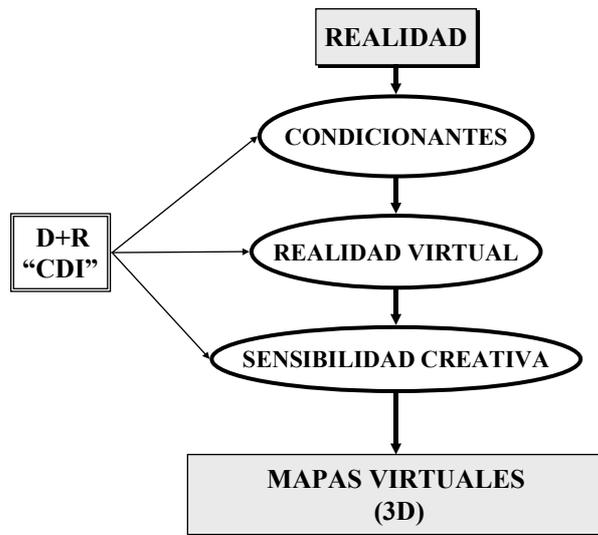


FIG.: 3



Realidad Virtual (RV): proceso de creación artificial que el ser humano asemeja a la realidad.  
 Mapa Virtual (MV): visualización de la realidad virtual mediante ciertos factores.

FACTORES QUE ACTUAN SOBRE LA "RV" (condicionados por la sensibilidad humana):

- Iluminación
- Clima
- Sombra
- Transparencia
- Conversión de color
- Proyección cartográfica
- Texturas y símbolos

Desarrollando el esquema anterior de la FIG. n°3 obtendremos los esquemas representados en las FIGS. n°.: 5, 6, 7, y 8.

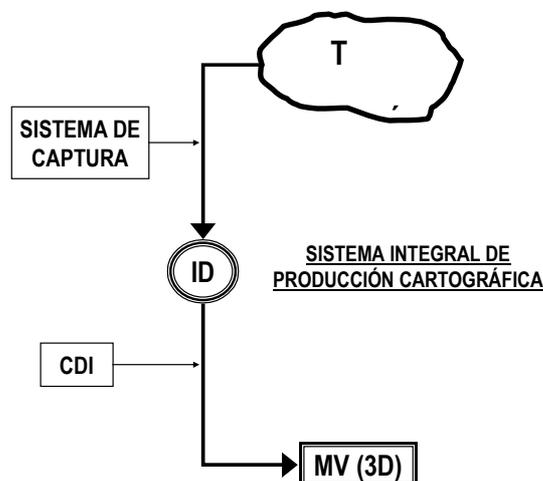


FIG.: 5

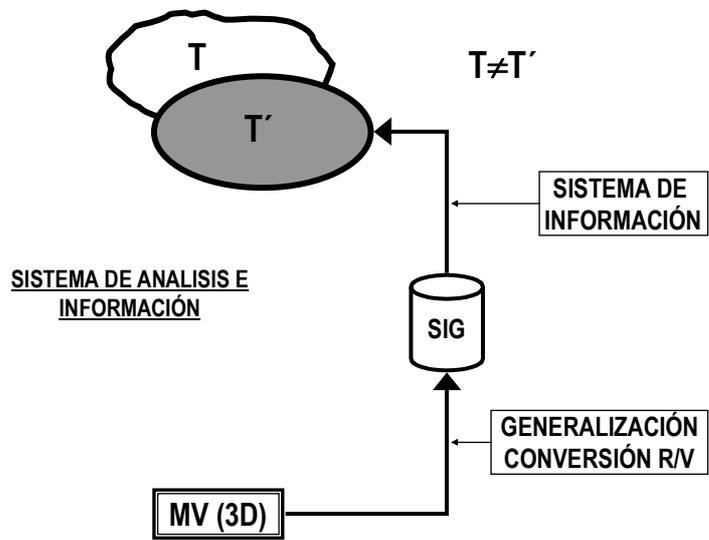


FIG.: 6

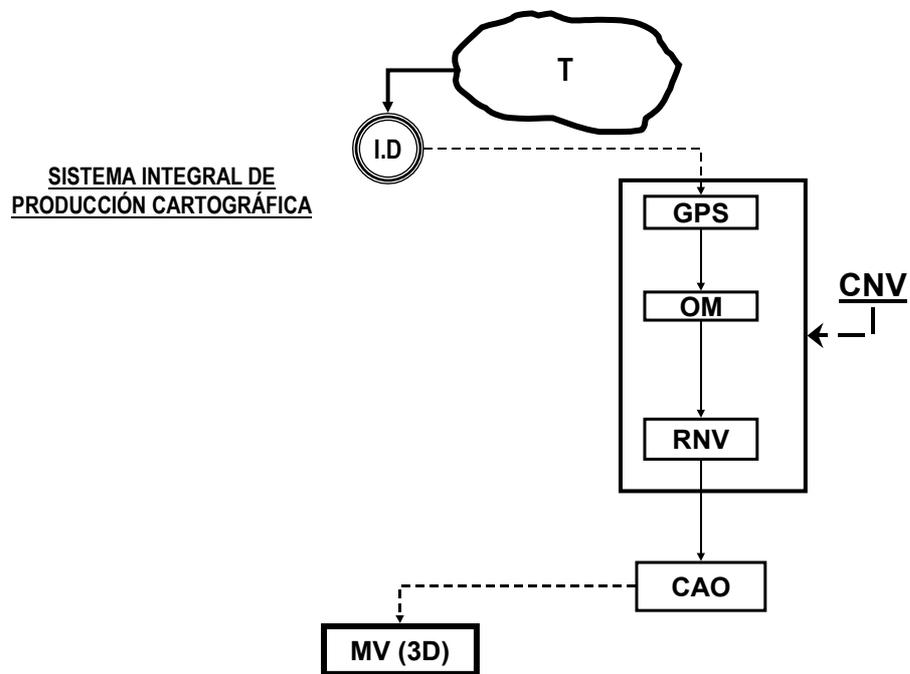


FIG.: 7

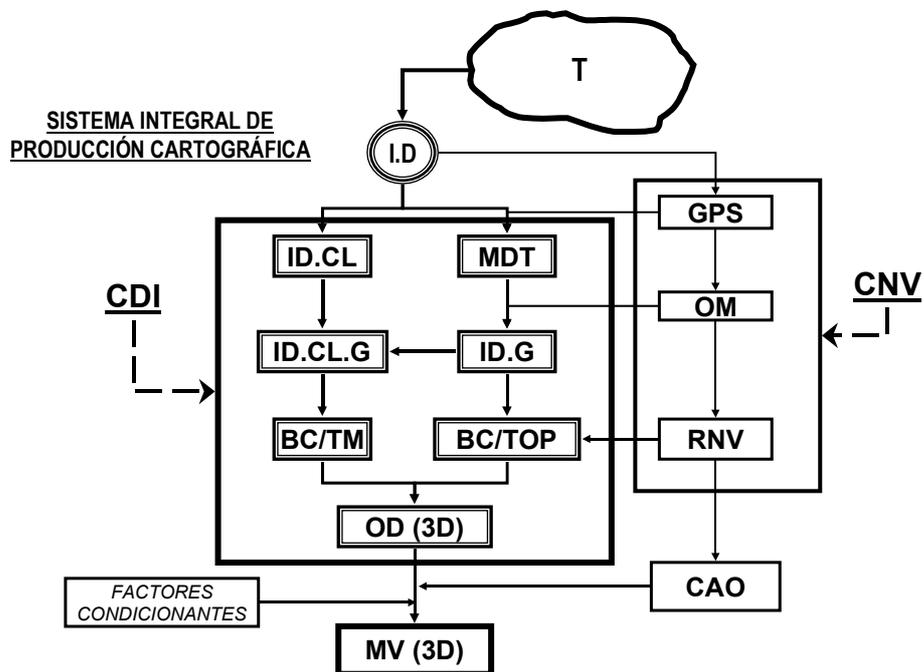


FIG.: 8

#### 4.- CARTOGRAFIA DIGITAL DE IMAGEN (CDI).

La CDI basada en ID y su posterior tratamiento específico (TDID) no solo posibilitarán , como ya se ha indicado anteriormente, un mayor acercamiento a los cada día más necesarios requerimientos de los usuarios, si no que nos abren las puertas a lo que será, sin duda alguna, el futuro de la demanda cartográfica y de información como son los Mapas Virtuales.

Hay que tener presente que uno de los principales condicionantes en el desarrollo de la IT ha sido la dificultad de adquisición de datos espaciales a bajo costo ,gran resolución y en plazos razonables. Todo ello hoy es posible de obtener a partir de los datos digitales de imágenes proporcionados por la última generación de satélites artificiales que nos facilitan ID con las siguientes características:

Gran resolución espacial:	1-2 m y recubrimiento estereoscópico.
Gran resolución radiométrica:	más de 10 bits/px
Gran resolución espectral:	256 bandas e ID Hiperespectrales.
Alta periodicidad:	menor de 4 días.

Para terminar este apartado y como nota aclaratoria la breve descripción de un concepto altamente empleado hoy día en la producción cartográfica junto con el TDID , como es la Cartografía Asistida por Ordenador (CAO):

Este concepto ha sufrido y está sufriendo diversos cambios con el transcurso de los años, especialmente cuando ha superado en los últimos tiempos la fase de investigación y

desarrollo y los Centros Cartográficos proceden a la instalación de diversos sistemas con fines productivos.

De forma genérica se puede definir como el Sistema Informático" capaz de producir digitalmente productos cartográficos (desde procesos hasta mapas).

Las diversas etapas por las que ha atravesado el concepto de CAO, están ligadas básicamente a las capacidades reales de los diversos sistemas informáticos.

## **5.- SISTEMAS DE PRODUCCIÓN CARTOGRÁFICA.**

Los Sistemas de Producción Cartográfica son todos los procesos encadenados y relacionados entre sí que llevarán al cartógrafo, de acuerdo con un esquema de transmisión de información dado y según una determinada tecnología empleada (manual-automática y/o analógica-digital), a la obtención de un determinado producto cartográfico: Mapas, OD, base de datos, modelos digitales, etc.

Los esquemas de producción numérica actualmente utilizados, se pueden agrupar en dos metodologías o Sistemas:

La que se puede considerar convencional, en la que la separación de la Cartografía Topográfica y Temática es prácticamente total en todos sus procesos, y donde los sistemas de producción, en el caso de ser digital, se especializan en el tratamiento vectorial para la topográfica y matricial para la temática.

La forma más actual e integral de efectuar todos los procesos es hoy día en forma digital en todas sus fases. En esta forma, todo el proceso de producción para Cartografía Topográfica y Temática sería similar, utilizándose equipos y sistemas idénticos (CDI + CAO). Todo el tratamiento en este caso sería matricial en su mayor parte y la posterior creación de Mapas Virtuales .

Las fases a seguir en el Sistema Cartográfico serían:

### **a) Definición de objetivos.**

Definición de los diversos objetivos perseguidos, así como el tipo de usuario y forma de explotación esperada.

Asimismo se tendrá en cuenta el periodo de actualización y/o de obsolescencia de la información.

### **b) Cartografía Matemática.**

“Rama de la Cartografía relativa a la base matemática de la ejecución de un mapa”. ACI (1873).

En esta fase se estudiarán y definirán:

- Escala: Concreción de fenómenos del espacio geográfico en el espacio y el tiempo
- .- Proyección Cartográfica: Sistema de representación de la superficie terrestre en una superficie plana.

Las transformaciones a seguir serían: "Superficie terrestre" → "Geoide" (nivel medio de los océanos prolongados por debajo de las montañas) → "Elipsoide" (superficie matemática de revolución-objeto de la "Geodesia") → "Proyección Cartográfica".

En todo sistema de proyección, habría que definir, tanto el reticulado de meridianos y paralelos, como las líneas bordes de hojas, según un proyecto de distribución de las mismas.

### **c) Expresión Cartográfica (Diseño + Redacción).**

El "mapa" como tradicional canal de información (y actualmente OD), quedará representado en sus detalles mediante una forma de expresión y un contenido, ambos conceptos son el objetivo de la Expresión Cartográfica.

Para ello, los pasos a seguir más significativos serían los siguientes:

Leyenda marginal: Escala gráfica, numeración de hojas, etc.

Posicionamiento riguroso de datos sobre el mapa (precisa corrección geométrica en OD). La localización sobre el mapa, es lo que se conoce como variables visuales, y depende de sus coordenadas (X,Y). Se tendrán en cuenta criterios de percepción, separación y diferenciación.

- Bases del lenguaje Cartográfico: Los puntos, líneas y superficies, serán estudiados de acuerdo con la valoración de las variables retinianas (correspondería a la coordenada Z), definidas como "forma, tamaño, orientación, color, valor y grano" (Bertin y Witt).

En Imágenes Digitales serán necesarios, para una adecuada interpretación posterior, los procesos de filtraje y realces digitales.

- Diseño y Redacción de leyendas y símbolos: Un símbolo es una representación gráfica de un objeto o característica, en forma evocadora, simplificada, sin implantación geométrica rigurosa.

Cualquier forma de expresión, deberá ser fácil de ver, interpretar y memorizar.

El resultado final será la obtención de una minuta cartográfica en Cartografía analógica o los procesos de mejora de Imagen para el caso de OD, en la que se basarán las transformaciones técnicas posteriores.

### **d) Recogida o captura de la información.**

Este capítulo, quizás uno de los de mayor importancia, incluye todas las ciencias y técnicas de las cuales la Cartografía se sirve para obtener información, más tarde se plasmará en un mapa o en una base de datos numérica. Así, se pueden citar como las más empleadas las siguientes:

Geodesia: Determinación rigurosa de ciertos puntos sobre la Tierra.

Topografía: Estudio de instrumentos y métodos para representar la superficie de la Tierra.

Fotogrametría: Captura de información detallada de toda la superficie terrestre mediante la restitución (analítica o digital) de fotografías obtenidas a partir de un vuelo aerofotogramétrico.

Teledetección: Obtención de información digital del territorio, topográfica y temática, mediante un sensor a distancia del objeto. En esta definición queda incluida la Fotogrametría, si bien se ha empleado más dicho término para la obtenida a partir de satélites artificiales, tanto activos (radar), como pasivos (barredores multiespectrales).

Levantamientos de campo y encuestas

Bibliografía y fondos cartográficos existentes

Estadísticas y censos, etc.

De los datos adquiridos anteriormente, se estudiará la relación existente entre ellos, bajo un criterio cuantitativo y de orden, en los casos que sea necesario.

En todos los casos, a la hora de elegir el método de captura y el volumen de información necesaria, así como del cálculo y procesamiento posterior de datos, habrá que tener en cuenta que la información resultante será función de: Escala, fin último del mapa, tipo de explotación posterior, expresión cartográfica.

### **e) Técnicas Cartográficas.**

Son todos los procesos que se necesitan realizar para transformar una minuta cartográfica en unos materiales o soportes (positivos) que faciliten su posterior reproducción.

En el caso de Cartografía Digital , serán los diversos programas y equipos informáticos que de forma automática a partir de una minuta digitalizada, asignarán, seleccionarán y producirán las diversas "variables retinianas" (z) correspondientes a las "variables visuales" (x, y) citadas anteriormente.

#### **f) Reproducción de mapas.**

Proceso para la obtención de un número variable de copias del documento cartográfico (mapa) a partir de la minuta cartográfica ya tratada mediante las técnicas previamente descritas.

Hasta el año 1970, prácticamente el único sistema empleado era la obtención del mapa por medio de impresión litográfica (offset) a partir de unos positivos ya separados por colores. Este sistema se sigue empleando, tanto en Cartografía analógica como digital para aquellos casos en que se necesita un número elevado de copias (más de 1.000 normalmente).

Los sistemas de Cartografía Asistida por Ordenador (CAO), tanto en su aspecto de Base de Datos Numérica, como de producción, están cambiando substancialmente los hábitos del usuario, dado que si no es necesario un número elevado de copias, se pueden obtener bajo pedido un número pequeño de ejemplares con otros sistemas de reproducción. Entre ellos, con aplicaciones cartográficas, se pueden destacar:

Impresoras:

- Láser (láser sobre material fotosensible)
- Chorro de tinta (para color)
- Magnetotérmicas (mediante cabezas magnéticas y calor).
- Térmicas (calor sobre material termosensible).
- Magnéticas (mediante cabezas magnéticas).

Registradoras de películas: Filmadoras fotográficas digitales

De forma esquemática y secuencial un Sistema (Integral) de Producción Cartográfica se compone de los siguientes subsistemas:

#### **1.-SISTEMA GEODESICO DE REFERENCIA**

#### **2.-SISTEMA CARTOGRAFICO**

#### **1.-SISTEMA GEODESICO Y DE REFERENCIA:**

##### **ASTRONOMIA DE POSICIÓN**

Fijar algunos puntos sobre el terreno en coordenadas geográficas absolutas, así como Datum. PA Geoide (hoy día mediante sistemas GPS).

##### **GEODESIA:**

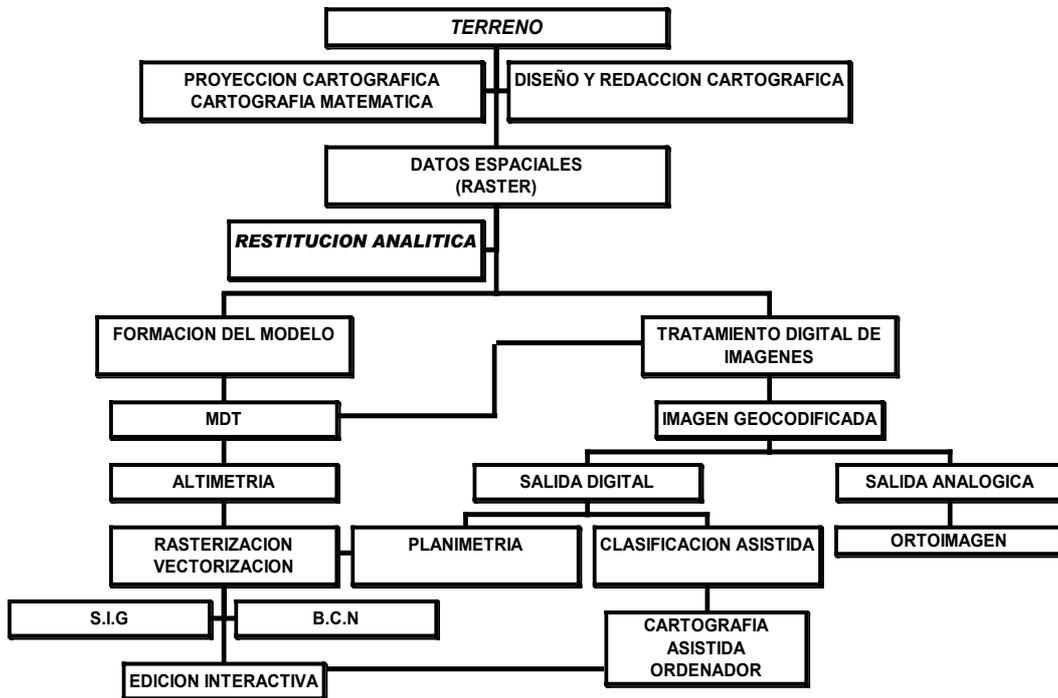
Red de puntos sobre el terreno en coordenadas geográficas, a partir de los P.A: red geodésica.

#### **2.-SISTEMA CARTOGRAFICO:**

**CARTOGRAFIA:** Procesos que incluyen desde la recogida de la información hasta la utilización de la misma

- CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA:  
PROYECCIÓN CARTOGRÁFICA
- DISEÑO CARTOGRAFICO  
DISEÑO Y REDACCIÓN CARTOGRÁFICA. ESCALA
- CAPTURA DE DATOS
  - TOPOGRAFÍA
  - FOTOGRAMETRÍA
  - FOTOINTERPRETACIÓN
  - TELEDETECCIÓN
  - SISTEMAS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN TOPOGRAFICA Y TEMÁTICA EN DIVERSAS FORMAS Y FORMATOS (ANALÓGICO Y/O DIGITAL).
- TÉCNICAS CARTOGRÁFICAS:  
EDICIÓN CARTOGRÁFICA. CAD: PREPARACIÓN DE ORIGINALES
- REPRODUCCIÓN
- EXPLOTACION DE DATOS:
  - BASE DE DATOS NUMÉRICOS
  - SISTEMAS ANALÓGICOS
  - SIG

## PRODUCCION INTEGRAL EN FORMA DIGITAL



## 6: CONCLUSIONES.

En esta nueva visión de los conceptos cartográficos que afectan a la Información Territorial se pueden extraer los siguientes puntos fundamentales de unión entre las diversas ciencias y tecnologías implicadas:

El Conocimiento del Territorio (que se asemeja a conceptos de Información Territorial) lo realiza el Hombre mediante los mecanismos lógicos de adquisición de la Cultura.

La Información Territorial tiene su gran desarrollo en el “mundo” de La Cartografía.

La Cartografía es en sí misma un Sistema de Comunicación.

El usuario final de la Información Territorial, demanda cada vez con mayor rigidez unos requerimientos específicos, característicos de dicha información.

Este Sistema de Comunicación Cartográfica tiene sus vías de actuación mediante la Transformación de la Información (previamente capturada) y la Transmisión de la misma.

La Transformación de la Información se realiza desde los conceptos, aquí expuestos, del Sistema (Integral) de Producción Cartográfica.

La Transmisión se efectúa mediante el uso y explotación de los Sistemas de Información Geográfica.

El punto de inflexión en todo el Sistema de Comunicación pasa por la obtención del Mapa tradicionalmente y Mapa Virtual en un futuro (prácticamente presente hoy día).

Para la obtención de Mapas Virtuales se emplearán básicamente las herramientas convencionales en Tratamiento Digital de Imágenes Digitales (TDID) dentro del ámbito de lo aquí descrito como Cartografía Digital de Imagen (CDI), así como, las técnicas de Cartografía Asistida por Ordenador (CAO).

Un paso previo será la obtención , a partir del procesamiento de Imágenes Digitales, de Ortoimágenes Espaciales (CDI).

Los factores que inciden hoy día en la obtención de Mapas Virtuales a partir de ID ,se encuentran todavía en fase de desarrollo, aunque no parece que dicha situación sea un impedimento para el mayor empleo de dichos Mapas Virtuales.

Las ventajas fundamentales de la utilización de la CDI, es el mayor grado de acercamiento a los requerimientos de los usuarios, especialmente en lo que a actualización, homogeneidad, subjetividad, rapidez y costo se refiere.

El usuario final, asimismo, diseñará a su medida tanto el tipo información requerida como la forma de expresión deseada en cada caso.

## **7.- ANEXOS.**

### **7.1.- ACRONIMOS UTILIZADOS.**

BC/TM = BASE CARTOGRAFICA TEMATICA

BC/TOP = BASE CARTOGRAFICA TOPOGRAFICA

CAO = CARTOGRAFIA ASISTIDA POR ORDENADOR

CDI = CARTOGRAFIA DIGITAL DE IMAGEN (RASTER)

CNV= CARTOGRAFIA NUMERICA VECTORIAL

GPS = SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL

ID = IMAGEN DIGITAL

ID.CL = IMAGEN DIGITAL CLASIFICADA

ID.CL.G = IMAGEN DIGITAL CLASIFICADA Y GEORREFERENCIADA

ID.G = IMAGEN DIGITAL GEORREFERENCIADA

MDT = MODELO DIGITAL DEL TERRENO

MV (3D) = MAPA VIRTUAL EN 3 DIMENSIONES

OD (3D) = ORTOIMAGEN DIGITAL EN 3 DIMENSIONES

OM = ORIENTACION DE MODELOS

RNV = RESTITUCION NUMERICA VECTORIAL

TDID = TRATAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES DIGITALES.

## 8.- BIBLIOGRAFÍA.

- Arozarena, A., <<La Teledetección en El IGN>> , MAPPING , (Nº8)
- Arozarena, A.,<<Cartografía>>, Gran Enciclopedia Del Mundo, Durvan ,
- Clarke, K. C., Analytical and Computer Cartography, Prentice-Hall,
- Curran, J.P., Compendium of Cartographic Techniques, ACI-Elsevier,
- International Cartographic Association. (ACI), Basic Cartography Vol(1/3), ACI,
- Monmonier, M., Computer Assisted Cartography, Prentice-Hall,
- Morrison, J., Elements of Spatial Data Quality, Pergamon/ACI,
- Rabenhorst, T.D., Mc Dermott, P.D., Applied Cartography, Merrill// P.C.,
- Ratajaski, L., “A model of cartography”, *Geografica Polonica*, 14
- Robinson, A., Sale, R., Morrison, J., Elements of Cartography, J. Wiley and Sons,
- Taylor, F., Education And Training In Contemporary Cartography, J.Wiley and Sons,
- Taylor, F., Graphic Communication And Design, J. Wiley and Sons,

# **Tema 64. La representación del territorio: sistema de producción cartográfica. Sistema cartográfico de representación: diseño, redacción: semiología gráfica, color en cartografía, técnicas cartográficas, reproducción y explotación**

## INDICE

### 1 La Representación del Territorio: Sistema de Producción Cartográfica

- 1.1 Los Requerimientos del Usuario
  - 1.1.1 Fines y Objetivos del Usuario
  - 1.1.2. Concepto de Calidad Total
- 1.2 El Sistema Geodésico de Referencia
  - 1.2.1. Astronomía y Geodesia
    - 1.2.1.1 Datos de Referencia
- 1.3 El Sistema Cartográfico de Representación
  - 1.3.1 Cartografía Matemática
    - 1.3.1.1 Proyección Cartográfica
  - 1.3.2 Diseño Cartográfico
    - 1.3.2.1 Contenidos
    - 1.3.2.2 Tipos de Datos: Códigos, Estructuras y Formatos
    - 1.3.2.3 Compilación de Datos
    - 1.3.2.4 Niveles de Información
    - 1.3.2.5 Transferencia de la Información
  - 1.3.3 Redacción Cartográfica
    - 1.3.3.1 Semiología gráfica
    - 1.3.3.2 Percepción gráfica
    - 1.3.3.3 Variables visuales
    - 1.3.3.4 Color en cartografía
    - 1.3.3.5. Tipos de definición del color
    - 1.3.3.6. Cambio de color en cartografía (modulación de tonos)
  - 1.3.4 Captura de la Información
  - 1.3.5 Técnicas Cartográficas
  - 1.3.6 Reproducción de la Información
  - 1.3.7 Explotación de la Información

### 2 Condicionantes futuros de la Información Territorial

### 3.- Bibliografía.

## **1. La Representación del Territorio: Sistema de Producción Cartográfica**

Los Sistemas de Producción Cartográfica son todos los procesos encadenados y relacionados entre sí que llevarán al especialista, según los requerimientos del usuario, de acuerdo con un esquema de *transmisión de la información* dado y según una determinada tecnología empleada,<sup>1</sup> a la obtención de un producto cartográfico concreto: mapas, ortofotos<sup>2</sup> y ortoimágenes<sup>3</sup> digitales, bases de datos, modelos digitales, etcétera.

Las fases a seguir en el *Sistema Cartográfico* serían: los requerimientos del usuario, el Sistema Geodésico de Referencia y el Sistema Cartográfico de Representación.

### **1.1 Los Requerimientos del Usuario**

Los requerimientos de información territorial por parte del usuario significan, el origen del proyecto.

Por ello, se hace necesario e imprescindible la identificación, clara y precisa, de dicho usuario final. Dicho usuario nos definirá directa o indirectamente, por un lado, los datos necesarios para la realización del proceso de diseño de la información y, por otro, el costo y el plazo de ejecución del proyecto.

Finalmente y dentro de un concepto de calidad (total), verificaremos el grado de acercamiento a esos requerimientos.

#### **1.1.1 Fines y Objetivos del Usuario**

El usuario demanda Información sobre el Territorio que será traducida por el especialista en tres tipos fundamentales de requerimientos:

##### 1. Tipo de Información:

- Objetivos (Fin del proyecto).
- Exactitud (Errores máximos admisibles, tolerables a la escala gráfica correspondiente).
- Costo (Presupuesto/Financiación).
- Número de copias/ número de consultas (Grado de utilización).

---

<sup>1</sup> Manual–automática y/o analógica-digital

<sup>2</sup> Datos digitales procedentes de satélite.

<sup>3</sup> Vuelo fotogramétrico.

- Plazo de ejecución (Técnicas de ejecución/Tipos de Datos).
- Plazo de actualización (Técnicas de ejecución/Tipos de Datos).

2. Tipo de Explotación:

- Manual.
- Bases de Datos.
- SIG.
- Sistemas Expertos (Basados en inteligencia artificial),

3. Tipos de Datos.<sup>4</sup> En función del uso/periodo de actualización/costo, se representará la información tanto en forma analógica/digital, como:

- Información Vectorial (Ideográfica).
- Información Raster ( Imagen).
- Información Mixta

### 1.1.2. Concepto de Calidad Total

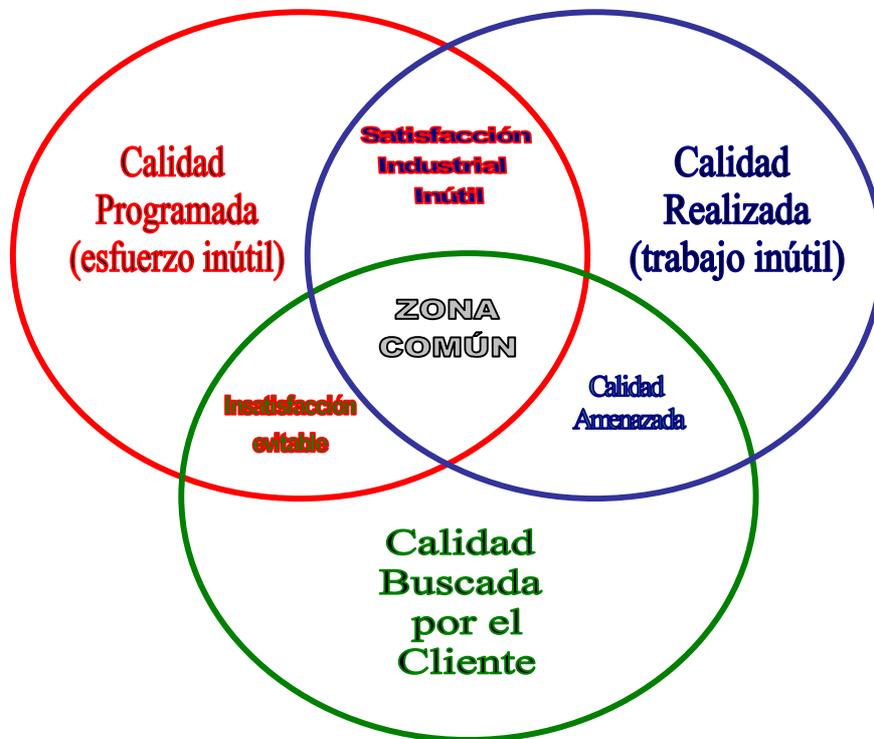
Se entiende por Calidad Total<sup>5</sup> al conjunto de procedimientos cuyo objetivo es *satisfacer los requerimientos de los usuarios*. Ésta se obtiene cuando han confluído en un mismo espacio los requerimientos del cliente, lo que el técnico proyecta<sup>6</sup> y el trabajo realizado (Principio de las Tres Calidades).

---

<sup>4</sup> Imagen/Vector. Esta información será ampliada y analizada de manera más específica en el subapartado 2.4.3.2.2.

<sup>5</sup> Calidad Necesaria. Véase figura 6.

<sup>6</sup> Según los requerimientos del usuario, de acuerdo con un sistema de transmisión de la información dado y según una determinada tecnología empleada.



No Calidad  Superficies No Comunes

**ZONA COMÚN** Objetivo de la Calidad Total

Figura 6. Diagrama de las Tres Calidades.

## 1.2. El Sistema Geodésico de Referencia

### 1.2.1. Astronomía y Geodesia

La Información Geográfica debe de tener un soporte estructural básico, formado por puntos físicamente estables, cuyas coordenadas se obtendrán a través de procedimientos astronómicos y geodésicos de precisión (hoy día mediante GPS).

Las redes geodésicas están formadas por un canevas<sup>7</sup> de puntos distribuidos de forma regular por toda la geografía. Estos puntos están enlazados y relacionados

por observaciones obtenidas en el terreno. Todos estos datos han de ser corregidos y reducidos al nivel del mar antes de proceder al cálculo, ya que dichos datos no van a corresponder a la superficie del globo, sino a la superficie que se ha tomado de referencia matemática, es decir, al elipsoide adaptado.

La finalidad de una Red Geodésica<sup>8</sup> es el establecimiento físico de una infraestructura estable que permita la realización de cualquier tipo de trabajo cartográfico, manteniendo siempre un mismo origen en las coordenadas x, y, z.

De esta forma, la Red Geodésica forma parte de manera básica en la Información Geográfica.

#### 1.2.1.1 Datos de Referencia

*Geoide.* El estudio de la Tierra desde un aspecto matemático, implica la necesidad de determinar una superficie ideal, como plano de comparación, independiente de la figura real obtenida por los mares y los continentes.

Se llega, pues, a la necesidad de introducir previamente una superficie de referencia definida con un criterio físico. Dicha superficie definida por los mares en reposo prolongada por debajo de los continentes, se encuentra sujeta tan solo a la acción de la gravedad. Esta forma así reseñada, es lo que se define como Geoide.<sup>9</sup>

*Elipsoide.* La forma matemática más semejante a ese hipotético Geoide, es el elipsoide de revolución, se adoptará como figura de la Tierra un Elipsoide de revolución, girando alrededor del eje de la elipse meridiana.

*Datum.* Se llama Datum de una Red Geodésica, al vértice (o área de definición rigurosa) en el que se hacen observaciones de alta precisión, obteniéndose coordenadas  $\lambda$ ,  $\varphi$  y H (longitud, latitud y altitud), así como, el acimut de uno de los lados de la Red, concurrentes en él.

En este punto, las coordenadas astronómicas y geodésicas son las mismas.

---

<sup>7</sup> <<Red de polígonos regulares que cubre una serie de mapas; generalmente estos polígonos son cuadrados formados por líneas paralelas y perpendiculares a un eje central.>> (Dicc. de Cartografía, op. cit. pág. 23.

<sup>8</sup> Geodesia: determinación rigurosa de ciertos puntos sobre la Tierra.

<sup>9</sup> Geoide: superficie cuya gravedad es normal en todos sus puntos.

Hasta 1950, los datos de referencia de la Red Geodésica Española fueron los siguientes:

ELIPSOIDE —————▶ STRUVE  
ORIGEN DE LONG (MERIDIANO 0) —————▶ MADRID  
DATUM —————▶ MADRID

A partir de esta fecha, y con objeto de proceder a una compensación conjunta de las redes europeas, se adoptaron como nuevos datos de referencia los siguientes:

ELIPSOIDE —————▶ HAYFORD  
ORIGEN DE LONG (MERIDIANO 0) —————▶ GREENWICH  
DATUM —————▶ POTSDAM

### 1.3 El Sistema Cartográfico de Representación

La Cartografía conforma todos aquellos procesos que incluyen desde la recogida de la información hasta la utilización de la misma. Podemos englobar de manera genérica estos procesos en seis grandes apartados que son: la Cartografía Matemática, el Diseño Cartográfico, la Redacción Cartográfica, la Captura de la Información, las Técnicas Cartográficas y la Explotación de la Información.

Este Sistema estará condicionado por la *Escala* (exactitud) que habrá sido definida directa o indirectamente por el usuario a través de sus requerimientos.

La escala relaciona el tamaño del área del territorio que está siendo estudiada y determina el nivel de exactitud y generalización aplicado en el estudio. Es la medida de fenómenos del espacio geográfico mediante reglas matemáticas.

La utilidad de un mapa, como representación de una determinada zona de la superficie de la Tierra sobre un plano, viene condicionada por la escala, que es la relación de distancia entre dos puntos, en un mapa y su correspondiente en las figuras del terreno.

Su representación puede ser gráfica o numérica. Si atendemos a la división de los mapas en básicos<sup>10</sup> y derivados,<sup>11</sup> definiremos las escalas de trabajo utilizadas en cada caso, dependiendo del uso posterior del mismo.

Así, las escalas para una Cartografía base serán:

- 1: 500 y 1:1 000 Utilizadas para zonas urbanas.
- 1: 2 000 y 1: 5 000 Utilizadas en catastro, urbanismo, ingeniería civil, etcétera.
- 1: 25 000 Adecuadas para estudios de recursos naturales, medio ambiente, planificación, etcétera.

Las escalas de la Cartografía derivada, podrían ser:

- 1: 50 000 Obtenida por generalización<sup>12</sup> del 1: 25 000.
- 1: 100 000 Obtenida por generalización del 1: 50 000.

### **1.3.1 Cartografía Matemática**

La Asociación Cartográfica Internacional en 1973, definió la Cartografía Matemática como la << Rama de la Cartografía relativa a la base matemática de la ejecución del mapa>>.

En esta fase se estudiará y definirá *La Proyección Cartográfica* necesaria y su relación con la Escala.<sup>13</sup>

#### **1.3.1.1 Proyección Cartográfica**

---

<sup>10</sup> Mapas básicos: son el punto de partida para la realización de todos los demás. Obtenidos a partir de medidas directas.

<sup>11</sup> Mapas derivados: obtenidos a partir de la cartografía básica, toman de ella las referencias geodésicas, el fondo planimétrico y el orohidrográfico.

<sup>12</sup> Generalización: selección y simplificación de detalles de un mapa para preparar otro de distintas características o escala.

<sup>13</sup> Escala: concreción de fenómenos del espacio geográfico en la superficie del proyecto. Relación matemática de distancias.

Podemos definir la Proyección Cartográfica como el sistema de representación de la superficie terrestre en una superficie plana.

De manera más concreta, el Comité Español de Asuntos Cartográficos la define como << Proyección es una correspondencia biunívoca matemática entre los puntos de la superficie de una esfera o elipsoide de revolución y los de un mapa>>. Ésta correspondencia se expresa en función de la latitud  $\varphi$  y de la longitud  $\lambda$ , traduciéndose en el plano por coordenadas rectangulares.

La característica principal de una proyección son sus deformaciones, como consecuencia de la imposibilidad de proyectar una superficie no desarrollable <sup>14</sup> sobre un plano.<sup>15</sup> Estas deformaciones son de tres tipos: lineales, superficiales y angulares.

Según las características de estas deformaciones, una proyección puede ser:

- Automecoica: conserva las distancias en determinado sentido o dirección.
- Equivalente: conserva la relación de superficie.
- Conforme: conserva los ángulos.

De manera muy esquemática, las transformaciones a seguir en el paso de la superficie terrestre a una superficie plana serían:

*Superficie Terrestre* → *Geoide*<sup>16</sup> → *Elipsoide*<sup>17</sup> → *Proyección Cartográfica*

En todo sistema de proyección elegido por sus características angulares, distancias y superficies, habría que definir, tanto el reticulado de los meridianos y de los paralelos. Para posteriormente la delimitación de las líneas borde de hojas, según un proyecto de distribución de las mismas.

### 1.3.2. Diseño Cartográfico

Es el conjunto de procesos metodológicos que van desde la escala, previamente establecida, hasta la definición de contenidos y formatos. Su función es traducir los requerimientos de los usuarios a conceptos técnicos.

---

<sup>14</sup> Elipsoide.

<sup>15</sup> Mapa.

<sup>16</sup> Nivel medio de los océanos prolongados por debajo de las montañas.

<sup>17</sup> Superficie matemática de revolución objeto de la *Geodesia*.

El Diseño Cartográfico se compone de un *Diseño Conceptual* y de un *Diseño Técnico*.

- *Diseño Conceptual*. Comprende, tanto una definición *semántica*,<sup>18</sup> encargada de interpretar y expresar el lenguaje del cliente en un lenguaje técnico, como una definición *metodológica*,<sup>19</sup> cuyo cometido es la elección del método a seguir: raster, vector o mixto.
- *Diseño Técnico*. Se ocupa de los Contenidos, los Tipos de Datos, la Compilación de Datos, de los Niveles de Información del documento cartográfico y del Grado de Actualización.

Dentro del Diseño técnico podemos hablar de:

- *Diseño Externo*. Se encarga de la información marginal que acompaña al documento cartográfico y su finalidad es ayudar a la comprensión del mismo.<sup>20</sup>
- *Diseño Interno*. Es la parte fundamental del documento cartográfico, es decir, es objeto de Proyecto Cartográfico.

### 1.3.2.1 Contenidos

Los Contenidos del documento se tratarán de diferente forma según sean internos o externos.

Se ocupan de: Modelo de Datos, generación de la *nomenclatura* adecuada a los requerimientos del proyecto y de las fuentes de información a utilizar, especificando, de manera rigurosa y exhaustiva, el origen, características y finalidades de los datos.<sup>21</sup>

#### - Nomenclatura y Leyenda

La descripción de aspectos seleccionados del mundo real a partir de un campo de interés determinado es tarea de la Nomenclatura (incluida en un Modelo de Datos definido previamente). De este modo, los objetos serán identificados, descritos y clasificados. Las nomenclaturas son listados de categorías, es decir, de imágenes y descripciones. Por lo tanto, su tratamiento deberá ser tenido en cuenta en todas las fases que conforman el Sistema Cartográfico de Representación.

---

<sup>18</sup> Diseño Conceptual Semántico: objetivo del conocimiento.

<sup>19</sup> Diseño Conceptual Metodológico: ideográfico y de imagen.

<sup>20</sup> Véase subapartado 2.3.1.4.

<sup>21</sup> Metadatos, v. págs. 35 y 56.

El Diccionario SELPER,<sup>22</sup> define Leyenda (Leyend), como la <<Descripción, explicación, cuadro de símbolos y otra información impresa en un mapa o carta para ayudar a su mejor entendimiento y/o interpretación>>.

Por lo tanto, la información contenida en un mapa, según una nomenclatura establecida, deberá estar codificada y ser de fácil comprensión para el usuario, para ello el mapa incluirá una Leyenda con el fin de descodificar y hacer comprensible su contenido, interno y externo. Su representación (selección y simbolización) será objeto de la Redacción Cartográfica.

#### - **Fuentes**

Su utilización dependerá de la escala de trabajo, del fin del mapa, del tratamiento de la información. Las Fuentes de Información, podrán ser:

- Estadísticas: datos numéricos y alfanuméricos.
- Descripciones: datos alfanuméricos.
- Cartográficas: analógica y/o digitales. Raster/Vector.
- Fotogrametría: datos vectoriales.
- Teledetección: datos raster.
- Bases de Datos existentes y SIG: raster/vector.

#### *OBJETIVOS DE ESTA FASE:*

*Una vez establecidos los Contenidos, se realizará una tabla de doble entrada,<sup>23</sup> donde se especifican todos los temas que han sido tratados en el Diseño del documento cartográfico, tanto topográficos como temáticos, altimétricos y planimétricos. Así mismo, se establecerá la Nomenclatura final de la información dentro del Modelo de Datos correspondiente.*

---

<sup>22</sup> Diccionario SELPER de Percepción Remota, ed. SELPER, 1989, pp.219.

<sup>23</sup> Véase figura 7.

**TIPO DE INFORMACIÓN**

TOPOGRÁFICA					TEMÁTICA				
Contenido					Contenido				
Temas	Fuente				Temas	Fuente			

Planimetría	P	Gasolinera	Campesía								
	L	Carr. 1º orden	MTN IGN								
	S										
							Bosque	Map. Forestal DGCO NA			
Altimetría	P										
	L										
	S										

Figura 7. Tabla Diseño Cartográfico

### 1.3.2.2 Tipos de Datos: Códigos, Estructuras y Formatos

Los elementos de la superficie terrestre que conforman el mundo real, tales como: ríos, edificaciones, bosques, etc., se denominan *Objetos* o *Entidades*. Son estos elementos los que se van a almacenar y manipular junto con sus *Atributos*.<sup>24</sup>

Los objetos ocupan una posición absoluta sobre la superficie de la tierra, definida por sus coordenadas, así como, una posición relativa, definida por la relación que tienen con el resto de los objetos. Tienen una forma geométrica y pueden ser representados por un punto (casa), una línea (río), o por un polígono (un bosque).

Los datos estadísticos alfanuméricos presentan problemas de georeferenciación, sin embargo, los datos que se extraen de las dos principales fuentes de información geográfica<sup>25</sup> son objetos espaciales y se pueden extraer y almacenar en el ordenador por medio de dos modos distintos: vectorial o raster.

- *Modo Vectorial*. Proporciona información precisa sobre la forma, tamaño localización y relaciones espaciales de un Objeto. En esta estructura, un objeto tipo punto, por ejemplo, una casa, se almacena como un punto definido por sus coordenadas. Un objeto tipo línea, por ejemplo, un río, se almacena usando la geometría vectorial en la cual las líneas se definen por una magnitud, una dirección y un sentido. Un objeto tipo polígono, como un bosque, es almacenado como una cadena de segmentos o arcos unidos.

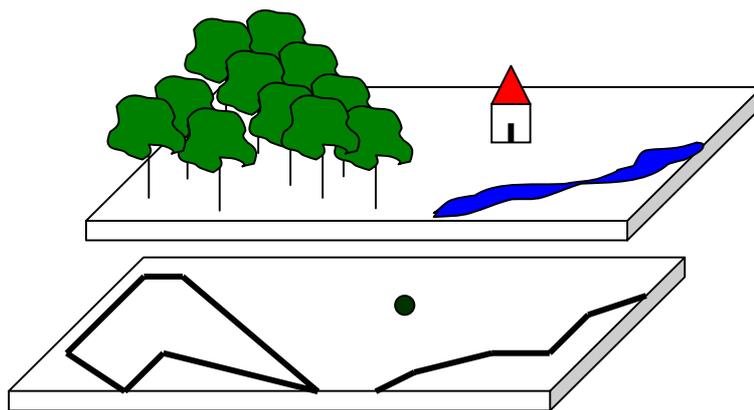


Figura 8. Modo Vectorial

<sup>24</sup> *Atributos*: características propias que describen a los objetos (nombre, tamaño, orientación, colores, etcétera).

<sup>25</sup> Los mapas y las imágenes de satélite.

- *Modo Raster*. Los Objetos de la superficie terrestre se describen con una o varias celdas encadenadas que no se superponen ni presentan espacios vacíos entre ellas. La geometría de un Objeto sólo se puede describir por medio de las celdas vecinas que tengan el mismo atributo. Así, el aspecto temático del terreno está directamente unido a la posición del Objeto, pero la representación geométrica convencional cambia. Todas las celdas que estén cruzadas por una línea tendrán almacenada información que indica la pertenencia a dicho Objeto.

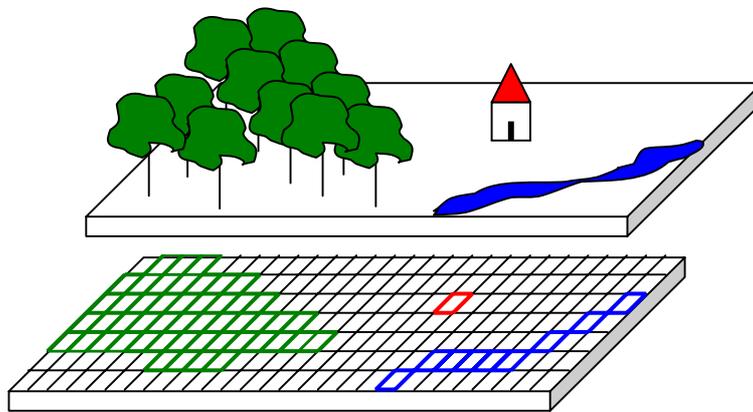


Figura 9. Modo Raster.

Actualmente es posible la conversión de estructuras en ambos sentidos: de raster a vector y de vector a raster.

Hoy día estas estructuras básicas de definición del territorio (raster y vector) se estudian dentro de los Modelos de Datos en forma normalizada, definiéndose sus parámetros y atributos.

### - **Códigos**

En las memorias de un ordenador se pueden almacenar solamente números en forma de secuencias de bits (unos y ceros), que se agrupan en bytes (8 bits).

Estas cadenas de ceros y unos pueden interpretarse de distinta forma, es decir: como números binarios, por ejemplo, 0000 1000; como números decimales, por ejemplo, 8; y como números hexadecimales por ejemplo, 0A.

Para almacenar otros tipos de información, por ejemplo, caracteres, necesitamos un código que permita convertir cada carácter en un único número.

Uno de los códigos más usados es el ASCII <sup>26</sup> (American Standard Code for Information Interchange), es un código de 8 bits, que incluye: letras mayúsculas y minúsculas, dígitos, el carácter blanco, signos de puntuación y símbolos matemáticos.

De esta forma, la codificación binaria o bitmap se empleará básicamente para datos raster en formato TIFF (Tag Image File Format) y la codificación simbólica o ASCII se utilizará para datos vectoriales en formato POSTSCRIPT (aunque no de forma excluyente).

#### - **Estructuras**

Una vez que los datos geométricos han sido capturados, se almacenan de acuerdo a una estructura que condicionará su manipulación posterior. Las estructuras básicas para almacenar datos pueden ser de tipo secuencial o de tipo jerárquico (estructura en árbol, gráfica,...).

La representación interna de los datos será en número entero, coma flotante, etc., utilizándose estructuras:

- LSB (Least Significant Byte) o bit/byte de menos peso o valor de un número o palabra digital en PCs, y DEC.
- MSB(Most Significant Byte) o bit u octeto de mayor peso o significado en una palabra de contenido numérico, en UNIX, SUN, HP, APPLE y MOTOROLA.

Los datos distribuidos secuencialmente por número de bits o pixel en formato raster tendrán, así mismo, una disposición según hayan sido grabados (BIT, BIP, BSQ) o almacenados.

#### - **Formatos Finales**

Nos facilitarán la integración y explotación de la información.

Hay que tener en cuenta ciertos criterios de selección a la hora de elegir un formato, estos son:

- *Calidad*. Dependiendo de que tengamos datos raster o vector, las necesidades de calidad estarán referidas a: una gran resolución, una gran profundidad del pixel (definición del color), a la capacidad de calibración y a la capacidad de corrección.

---

<sup>26</sup> El código ASCII no extendido consta de 128 caracteres, de los cuales 95 son imprimibles y 33 son de control.

- *Flexibilidad.* Adaptación de la imagen al cambio de los formatos. Flexibilidad de en el cambio de plataforma, tamaños, resolución, corrección de color, etcétera.
- *Eficiencia.* Se refiere a cómo se consumen los recursos de la máquina. Tanto de cálculo como de almacenamiento y de transmisión. El consumo de CPU será diferente si los ficheros son raster (bitmap) o vectoriales. Los ficheros raster son más complejos y por lo tanto emplean más operaciones, sin embargo para visualizar la imagen necesitan poco consumo de CPU, esto es diferente a lo que sucede con una imagen vectorial menos compleja, pero cuya visualización demandará más consumo de CPU. Por otra parte, una imagen raster supondrá más capacidad de transmisión.

Una característica decisiva a la hora de elegir un formato va a ser el soporte para su aplicación. Algunos de los formatos más utilizados según su aplicación son:

- Artes Gráficas: POSTSCRIPT, TIFF, PIC.
- Hojas de Cálculo: PIC.
- CAD (Computer Assisted Desing): DXF, DGN.
- WORD (Procesador de Texto): PIC, PCX.
- Edición de Dibujos: POSTSCRIPT, TIFF, PCX, HPGL.
- TDID (Tratamiento Digital de Imágenes Digitales): POSTSCRIPT, TIFF, IMG.

Los formatos más utilizados según plataforma, son:

- PCs: PCX, TIFF, IMG, DXF, GIF, HPGL, PCL, PIC, POSTSCRIPT.
- MAC (Macintosh): MAC PAINT, TIFF, CGM, RLE, POSTSCRIPT.
- WStation: BMP, SUN RASTER, XWD, XBM, DXF, JPEG, MPEG, TIFF, POSTSCRIPT.

*(Hoy día, no obstante, la separación de los formatos tanto por aplicaciones como por plataformas ha dejado de tener gran relevancia)*

Tanto los Códigos, como las Estructuras y los Formatos de la información numérica deberán ser definidos previamente, pues condicionarán no sólo a la fase de captura y tratamiento, sino también a la explotación final del Sistema.

### **1.3.2.3 Compilación de Datos**

Su función es la fusión geométrica, topológica y semántica de las diversas fuentes de igual consistencia, necesarias para la obtención de los contenidos establecidos en la fase de Diseño.

La *Compilación* significa una nueva composición utilizando datos de otros documentos. En el caso de la compilación en cartografía temática, se utilizarán las fuentes cartográficas existentes, fundamentalmente los mapas y las imágenes digitales.

La Compilación en Cartografía Temática puede necesitar en los casos de fusión de información a diversas escalas compatibles la *Generalización Cartográfica*,<sup>27</sup> cuyo significado genérico es la simplificación. La simplificación supone eliminar los detalles y reducir el innecesario número de formas presentes en la fuente original que pasarían al nuevo producto cartográfico.

Estas modificaciones están sujetas a unos condicionantes, que son:

- El Sistema Geodésico de Referencia.
- La Proyección Cartográfica.
- La Escala, relacionada con el área de estudio y que determinará el nivel de precisión y generalización aplicado al documento.
- La actualidad del documento.
- La homogeneidad de estructuras y formatos.

La Generalización afectará tanto a la representación métrica, como a la representación topológica y gráfica.

El proceso de Generalización incluye un gran número de operaciones que deben ser agrupadas con el fin de la manipulación correcta y eficiente de los datos.

Estas operaciones son:

- *Simplificación*. Determina las características más relevantes de los datos y elimina los detalles no deseados.
- *Clasificación*. Ordena o escala los datos y/o grupos de datos.
- *Simbolización*. Codifica gráficamente mediante símbolos los datos seleccionados resultado de la Clasificación y de las características esenciales, significados comparativos y posiciones relativas que han resultado de la Simplificación.
- *Inducción*. Aplicación en Cartografía de los procesos lógicos de inferencia.

---

<sup>27</sup> Generalización Cartográfica de mayor a menor escala.

Estas operaciones se deberían ajustar a los condicionantes de la definición de nomenclaturas.

#### 1.3.2.4 Niveles de Información

Los Niveles de Información determinarán, por un lado, la adecuación en las consultas finales y, por otro lado, influirán y afectarán tanto a la Redacción cartográfica, como a los Sistemas de consulta.

Serán establecidos en forma analógica, mediante la definición del número de tintas y en forma digital, a través de pisos de información independientes.

#### 1.3.2.5. Transferencia de la Información

La transferencia y el intercambio de datos, con el fin de preservar el significado de la información original, así como la pérdida de información y la utilización indebida, requieren definiciones generales que suponen acuerdos en cuanto a la definición de estándares de calidad que cubren los siguientes apartados:

- *Historia de los datos.* El conocimiento de la historia de los datos es importante para su adecuada selección y utilización en una aplicación específica.<sup>28</sup>
- *Exactitud de la posición de los datos.* Indica el grado de variación de las posiciones de los datos espaciales con respecto a las verdaderas posiciones en el terreno.
- *Validez de los atributos.* Definida como el valor de los atributos de los Objetos con respecto a su valor verdadero.
- *Consistencia lógica.* Se refiere a la fidelidad de las relaciones codificadas con respecto a la estructura de datos definida.
- *Exhaustividad.* Describe la relación entre los Objetos presentes y el universo global de los Objetos.

La evolución histórica de herramientas técnicas o estándares para la transferencia internacionales de datos se puede enumerar de la forma siguiente (se trata de dos estándares genéricos de transferencia definidos por la Organización Internacional de Estándares (ISO): la Norma ISO 8211 y la Norma ISO 9735).

- *Norma ISO 8211.* Fue desarrollada en 1985 por el American National Standard Institute (ANSI). Su objetivo es entregar datos de un usuario a otro, de manera que el receptor pueda convertirlos dentro de la estructura de su base de datos, sin cambiar el contenido y manteniendo las relaciones originales.

---

<sup>28</sup> Se incluirán en los metadatos de la información.

ISO 8211 permite:

- Definir una estructura general de datos sobre objetos raster o vectoriales, y su jerarquía.
- Transferir diferentes tipos de datos (ASCII, EBCDIC, 7 bits, binario, etc.) y diferentes tipos de estructuras de datos (secuencial, jerárquica, secuencial o indexada). Los datos raster estructurados requieren pre y postprocesamiento.
- Medios de reconocimiento del tipo y organización de la información transferida.
- Tres niveles de complejidad acerca de la naturaleza y funciones de los datos por transferir:
  - Nivel 1: campos con datos de cadenas estructuradas.
  - Nivel 2: el nivel 1 más campos que contengan diferentes tipos de datos.
  - Nivel 3: el nivel 2 incluyendo estructuras de datos jerárquicas.

Con ISO 8211, uno o más registros descriptivos son transferidos. Cada registro contiene respectivamente la definición lógica del registro, la descripción de los datos en sí mismos y los datos mismos.

- *Norma ISO 9735*. Fue desarrollada originalmente por la Comisión Económica del la Comunidad Europea (CEE/EC), con el propósito de suministrar:
  - Procedimientos de comercio internacional.
  - Reducción de costos y retrasos en la transferencia de datos comerciales y administrativos libre de errores.
  - Transferencia de datos comerciales y administrativos libre de errores.
  - Transferencia interactiva independiente del sistema.

Una transferencia ISO 9735 es considerada como una secuencia de registros simples o múltiples en niveles jerárquicos.<sup>29</sup> Su estructura es una concatenación de caracteres que indica una o más transferencias de datos.

Los estándares de transferencia de información espacial más conocidos son los siguientes:

- Spatial Data Transfer Standard (SDTS) para los Estados Unidos.

---

<sup>29</sup> Niveles de transferencia, niveles funcionales y mensajes.

- National Data Transfer (NTF) para el Reino Unido.
- Digital Geographic Information Exchange Standard (DIGEST) para los países del DGIWG (Bélgica, Canadá, Dinamarca, Francia, Alemania, Noruega, Países Bajos, Reino Unido y Estados Unidos).
- Einheitliche Daten-Bank Schnittstelle (EDBS) para Alemania.
- Estándares para transferencia de datos geográficos (VHS) para Finlandia.
- Standard Uitwisselings Format (SUF-2) para los Países Bajos.

**Actualmente** se puede resumir los procesos de normalización de la información de los diversos niveles de actuación:

- **NIVEL NACIONAL “AENOR”:**
  - **CTN 148 . INFORMACION GEOGRAFICA DIGITAL**
  - **MIGRA**
- **NIVEL EUROPEO “CEN”:**
  - **CEN 287 . GEOGRAPHIC INFORMATION (INSPIRE)**
- **NIVEL INTERNACIONAL “ISO” :**
  - **TC 211 . GEOMATIC/ GEOGRAPHIC INFORMATION**
  - **ISO 19xxx**

### **1.3.3 Redacción Cartográfica**

La Redacción Cartográfica es sinónimo de la Sintaxis de la información. Se encarga de la asignación de variables visuales a la interpretación de los datos. Esta fase del Sistema Productivo no altera la geometría del documento cartográfico, como en cambio puede suceder en la fase de Diseño.

El proceso de Redacción comienza a partir de la tabla final resultante en el proceso de Diseño, donde se han quedado establecidos todos los datos.

La Redacción Cartográfica parte de las siguientes premisas:

- Mantenimiento de la geometría.
- Obtención de instrucciones de trazado.
- Definición de objetos dentro de un marco base de referencia.
- Jerarquización de la lectura dentro de un contenido global.
- Carácter evocador dentro de la realidad.

- Mantenimiento entre la diferenciación y el equilibrio visual; la claridad y la legibilidad; el simbolismo y el rigor científico.

La Redacción Cartográfica se basa, tanto en los *tipos de representación* donde se predominan el estudio del color, la simbolización, el texto y la toponimia; como en la *normativa existente*. La semiología gráfica conjuntamente con el estudio de color, son tecnologías y conocimiento fundamental en esta fase de la producción cartográfica

Una adecuada Redacción Cartográfica facilitará la lectura e interpretación de la información, así como la eficacia en las consultas digitales.

### TIPO DE INFORMACIÓN

TOPOGRÁFICA					TEMÁTICA				
Contenido		Color	Símbolo	Texto	Contenido		Color	Símbolo	Texto
Temas	Fuente	AMCN	N C P E	Tipo Cuerpo	Temas	Fuente	AMCN	N C P E	C E

Planimetría	P	Gasolinera	Campana	M						
	L	Carr. 1º orden	MTN IGN		28,7, 63,9					
	S									
						Bosque	Map. Forestal DGC ONA	70 A, 50 C		16, 20
Altimetría	P									
	L									

	S										

**Símbolo:** N= Nivel, C= Color, P= Peso, E= Estilo.

**Texto:** C= Cuerpo, E= Estilo

Figura 10. Tabla Diseño y Redacción Cartográfica

El resultado final de la fase de Redacción es el establecimiento de un fichero vectorial codificado (FVC), concordante con la antigua minuta original<sup>30</sup> en Cartografía analógica, y ampliado con los datos de la fase de Redacción (color, símbolo y texto).

### 1.3.3.1. Semiología gráfica

La semiología gráfica se encarga del estudio de los signos. Un gráfico diseña una representación mediante signos, como es el caso de los diagramas, redes (grafos), o mapas. Por lo tanto en cartografía utilizaremos los principios básicos de la semiología gráfica para representar espacialmente los diversos objetos que son susceptibles de ser representados sobre el territorio. Es el nivel monosémico del mundo de las imágenes (emisor y receptor se confunden en el mismo objetivo en cuanto a sus relaciones con la codificación)

Los diagramas representan una relación entre dos conjuntos, una componente geográfica (mapa base) y una transcripción de “n” caracteres.

La gráfica utiliza las propiedades del plano para hacer aparecer las relaciones de  **semejanza, orden o de proporcionalidad** entre los diversos conjuntos dados. Su significado se transcribe mediante las  **variables visuales**, que posteriormente analizaremos.

Entendiendo un mapa como una copia de la disposición de los elementos en la superficie de la tierra, podemos adelantar que para una adecuada interpretación de dichos elementos (objetos) sus propiedades mas importantes serían:

- La  **información interna** se estructura por su posición geográfica
- Introducimos la  **información externa** necesaria para su interpretación y posterior toma de decisión

Asimismo podemos decir como regla básica en cartografía que los objetos  **ordenados** se pueden  **redactar por el valor y el tamaño** (construiremos escalas de niveles visualmente equidistantes). Los objetos de carácter  **cuantitativo** se pueden  **redactar por el tamaño** (respetar la proporcionalidad entre las distancias visuales y cuantitativas).

<sup>30</sup> En Artes Gráficas se denomina  *arte final*, en Cartografía se denomina  *minuta final*.

Cuando queremos **superponer diversos caracteres** en el mismo mapa, conviene recordar los siguientes criterios de selección visual:

- La información original será el objeto fundamental de representación
- Conviene resaltar en el mapa las diferencias de dichos caracteres
- En redacción puntual, conviene remplazar la variable de forma por la de orientación.
- Utilizar la diferencia de grano en contraposición a la representación mediante puntos, líneas y superficies.

### 1.3.3.2. Percepción gráfica

La percepción gráfica se realiza en dos tiempos:

1. Identificación externa: En ella obtenemos información del fenómeno, objeto u actividad de lo que se trata. Debe ser inmediatamente legible y comprensible, por ello es la parte de la percepción mas imprescindible.
2. Identificación interna: Nos tiene que indicar que relación hay entre las cosas, por ello se encargará de descubrirnos las **relaciones** existentes.

Estas **relaciones** se redactan mediante las **variables visuales**.

Cuando se utilizan los **dos tiempos de percepción** para comprender el significado, estamos hablando de **gráficos**.

Cuando es necesario solamente el **primer tiempo de percepción**, estamos hablando de **grafismos**.

Es por ello que gráficos y grafismos son lenguajes diferentes por los objetivos que persiguen.

La gráfica utiliza las tres dimensiones de la imagen, es un sistema de signos, espacial, independiente del tiempo. Utilizar la instantaneidad de la imagen para transcribir un conjunto de relaciones, es el problema fundamental de la gráfica.

### 1.3.3.3 Las variables visuales

Ya hemos dicho que para transcribir las relaciones de semejanza, orden y proporcionalidad, la gráfica utiliza las variables visuales que son las ocho variaciones que el ojo humano puede percibir en las diversas manchas (representaciones cartográficas)

Dichas representaciones se pueden agrupar asimismo como:

VARIABLES DE LA IMAGEN

- (X,Y) 2 Dimensiones sobre el mapa
- Tamaño
- Valor

#### VARIABLES DE SEPARACIÓN

- Grano
- Color
- Orientación
- Forma

Dichas variables son susceptibles de ser aplicables a los tres tipos de implantación sobre el mapa, objetos puntuales, lineales o superficiales.

La tercera dimensión de las variables representada por el tamaño y el valor, es la reducción de la cantidad de blanco en cada elemento del mapa representado.

El tamaño expresa la cantidad. Una diferencia de tamaño puede expresar una proporción entre dos valores. El valor no expresa cantidad.

Tamaño y valor expresan valores ordenados y de disociación.

Las variables de separación dan a cada objeto la misma visibilidad, por lo que se pueden considerar asociativas. Se pueden combinar con el tamaño y o el valor sin modificar sus propiedades.

El grano se puede definir como la reducción fotográfica de una textura dada. El grano es selectivo, ordenado y asociativo.

El color es la variable visual mas selectiva de todas, si bien por si sola no puede asegurar una selección completa entre los diversos objetos.

La variación de orientación se emplea sobre todo para:

- Implantación puntual (nos ofrece una capacidad de selección comparable al color)
- En implantación zonal, nos ofrece una diferenciación sin ambigüedad.

La diferenciación mediante la forma esta estrictamente ligada a las condiciones restrictivas de su utilización. Por ello la utilización de forma es muy difícil de utilizar correctamente.

Podemos resumir que en redacción cartográfica la utilización de las variables visuales deberían, asimismo seguir los criterios de la Ley de la visibilidad:

“Todo elemento no discriminante es inútil y reduce la visibilidad y legibilidad del documento”, por lo que:

- Suprimir todo aquello que es común a todos los elementos de la misma información (lo que es común no separa nada)

- Utilizar todas las posibilidades de las variables visuales
- Suprimir todo aquello que contribuye a crear ruido en la interpretación del documento (papeles tintados, confusiones gráficas, etc)

### 1.3.3.4 Color en cartografía

El color es una de las variables visuales más potentes usadas en la redacción cartográfica, cuyos objetivos fundamentales son los siguientes:

- Mejorar aspecto estético
- Diferenciar elementos
- Clasificar
- Resaltar contrastes
- Comunicar sensaciones

Podemos decir que el color de forma física se encuentra comprendido dentro del espectro electromagnético entre 0,38 y 0,78mm.

Para la observación se reduce el intervalo dentro del espectro, entre 0,42 y 0,70mm, lo cual significa una pequeña parte dentro del óptico.

Los **Modelos Cromáticos** existentes en la observación del color, son los siguientes:

- Naturaleza: millones de colores
- Monitor: (+) RGB 16 millones de colores
- Impresión: (-) CMY < 16 millones de colores

Los **Modelos Cromáticos**, para su estudio, se estructuran en **Espacios Cromáticos**, donde a su vez procederemos a medir el color mediante los diversos **Sistemas de Medida del Color**

### 1.3.3.5. Tipos de definición del color

Las diversas formas empleadas en la definición del color (tipos) las podemos clasificar en:

- Física: energía radiante :
  - radiancia
  - distribución de la radiancia
  - radiancia pura
- Psicofísica: energía luminosa
  - energía luminosa : luminancia/gg (L)
  - longitud de onda dominante (H)
  - pureza: intensidad/saturación (S)
- Psicológica : sensación de color :
  - medida de color : (H,V,C);(H,L,S);( $\lambda$ ,L,P)

Este último tipo es el empleado normalmente en el mundo de la cartografía con vistas a transmitir sensaciones de forma más eficiente a los usuarios de mapas.

### 1.3.3.6. Sistemas de Medida del Color

Los sistemas mas empleados son los siguientes:

- CONO DE OSTWALD:
  - HLS (Tono, Luminosidad y Saturación)
  - Se divide en 24 Tonos (H)
  - Ej:
  - 16 p a ---> H L S
- SÓLIDO DE MUNSELL:
  - HVC (Tono, Valor y Cromo)
  - Se divide en 10 Sectores \* 10 (H)
  - Ej:
  - 5G 8/6 ----> H V C
- CUBO DE A. HICKETHIER:
  - Empleado en artes gráficas. YMC (Amarillo, Magenta y Cyan)
  - 1000 subdivisiones por planos paralelos a las aristas del cubo formado por los vectores (YMC-RGB)
  - Ej:
  - 50 , 30 , 70 -----> Y M C
- TRIANGULO CIE:
  - posición según situación en el espectro electromagnético
  - xylL → HLS
  - H= 24 tonos ; L= 10 alturas ; S =16 curvas de saturación
  - Siendo asimismo: x,y=cromaticidad

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \qquad y = \frac{Y}{X + Y + Z}$$

Siendo :  $X+Y+Z= 1$

$$(X,Y) = f(I, r, d\lambda) \quad \begin{array}{l} I= \text{Irradiancia} \\ r= \text{Reflectancia del objeto} \\ d\lambda= \text{intervalo de longitud de onda} \end{array}$$

$$(Z) = f(\text{Luminancia})$$

### 1.3.3.6. Cambio de color en cartografía (modulación de tonos)

El cambio de color (modulación de tonos) se puede realizar de dos formas según las escalas de color empleadas:

- Escala cromática : cambio de tonos (H)
- Escala acromática : cambio de luminosidad (L/S)

La variación cromática, evidentemente, es el cambio directo de color. No obstante también se puede realizar mediante una variación acromática, variando:

- Saturación (S) → Tamaño del pixel
- Luminosidad (L) → NG (Nivel de gris)
- combinación (S+L)

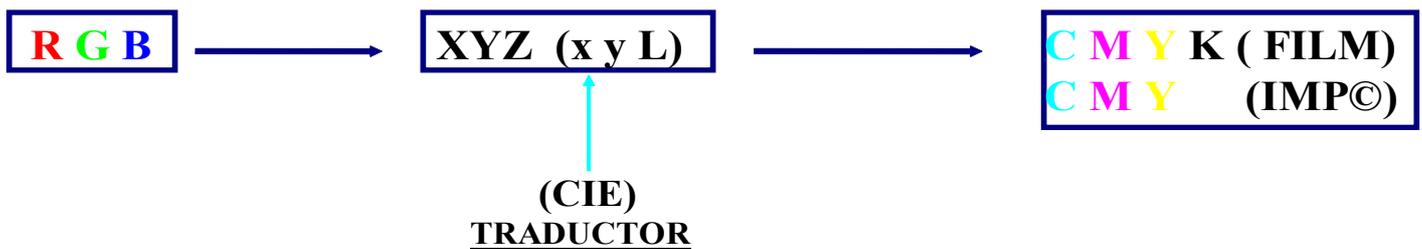
Como ya he dicho la variación directa (cromática), se realiza variando directamente el Tono (H). Se suele utilizar en el proceso de **separación de colores**

Dicha separación de colores se puede realizar mediante transparencia o reflexión, por los sistemas siguientes:

- contacto
- proyección
- imagen proyectada

La observación del color en cartografía se realiza por reflexión de la luz (RGB) sobre el mapa y posteriormente su captura en la retina de nuestro ojo. Por ello la transformación a gama de colores visibles por reflexión (CMY) se realiza mediante las fases siguientes:

- Descripciones de color mediante la gama CIE/LAB
- Métodos de ajuste de color



### 1.3.4 Captura de la Información

En este subcapítulo analizaremos brevemente, aquellas ciencias y técnicas de las cuales la Cartografía se sirve para obtener información que más tarde se plasmará en un mapa o en una base de datos numérica. Así, podemos citar como las más empleadas:

- La *Topografía*. Estudio de instrumentos y métodos para representar la superficie de la Tierra.

- La *Fotogrametría*. Captura de la información detallada de toda la superficie terrestre mediante la restitución (analítica o digital) de fotografías obtenidas a partir de un vuelo fotogramétrico.
- La *Teledetección*. Obtención de información digital del territorio, topográfica y temática, mediante un sensor a distancia del objeto, empleando técnicas de TDI (Tratamiento Digital de Imágenes). En esta definición quedaría incluida la Fotogrametría Digital, si bien se ha empleado más dicho término para la obtenida a partir de satélites artificiales, tanto activos (Radar), como pasivos (barredores multiespectrales).
- Los *Levantamientos de campo* y las *encuestas*.
- La *Bibliografía* y los *fondos cartográficos existentes*.
- Las *Estadísticas y censos, etcétera*.

### 1.3.5 Técnicas Cartográficas

Son todos los procesos que se necesitan realizar para transformar una minuta cartográfica en unos materiales o soportes<sup>31</sup> que faciliten su posterior reproducción, bien en forma analógica o en forma digital.

- *Procesos analógicos (hoy día completamente abandonados)* Se trataba de la aplicación de una serie de operaciones físico-químicas con las que se obtenían unos positivos finales.

Las técnicas empleadas eran el insolado y esgrafiado para la obtención de líneas; insolado de material despelucable, empleo de medios fotomecánicos, obtención de positivos de tramado y de líneas para la obtención de superficies; y pegado de rotulación y simbología por fotocomposición para obtener zonas puntuales. Así como, la obtención de positivos finales independientes, fase última del proceso. Esta cartografía está actualmente en desuso.

- *Procesos digitales (actualmente)*. Mediante programas y equipos informáticos (RIP).<sup>32</sup> El fichero vectorial codificado (FVC) en la fase de Redacción se transformará en un fichero raster de trazado (FRT) que conectado a una filmadora o impresora se obtendrán los positivos o el original final.

### 1.3.6 Reproducción de la Información

En este subcapítulo nos referiremos (en los casos que se requiera) brevemente a aquellos procedimientos encargados de la obtención de un número variable de copias del documento producido, en forma analógica.

---

<sup>31</sup> Positivos.

<sup>32</sup> RIP: Raster Image Processing.

Podemos agrupar los sistemas empleados en:

- *Litografía (Sistemas Offset)*. Han sido los sistemas empleados hasta la década de los años setenta. El mapa se obtenía mediante la impresión litográfica (Offset), a partir de unos positivos separados por colores. Actualmente este sistema se sigue utilizando tanto en cartografía analógica como en cartografía digital, cuando el número de copias a reproducir es elevado.
- *Impresoras*.<sup>33</sup> Se emplean cuando el número de copias no es muy elevado.

### 1.3.7 Explotación de la Información

- *SIG*. Se definen como el conjunto de métodos, herramientas y actividades que actúan coordinada y sistemáticamente para recopilar, almacenar, validar, actualizar, manipular, integrar, analizar, extraer y desplegar información, tanto gráfica como descriptiva de los elementos considerados, con el fin de satisfacer múltiples propósitos.
- *Sistemas Expertos basados en Inteligencia Artificial*. Son sistemas computarizados cuyos procesos y resultados son comparables a los desarrollados por el ser humano. Representan grandes ventajas en el procesamiento y análisis de la información, se basan en reglas que simulan la experiencia humana y que permiten producir nuevos conocimientos, están diseñados para cumplir un fin preciso, resolver problemas concretos de una disciplina específica.

Estos sistemas actualmente presentan limitaciones, pero se vislumbran como una herramienta que potenciará el uso de los SIG y aumentará sus posibilidades de aplicación.

## 2. Condicionantes futuros de la Información Territorial

Hay que tener presente que uno de los principales condicionantes en el desarrollo de la Información Territorial ha sido la dificultad de adquisición de datos espaciales a bajo costo, gran resolución y plazos razonables. Todo ello, hoy es posible de obtener a partir de los datos digitales de imágenes proporcionados por la última generación de satélites artificiales que nos facilitan Información Digital (ID), con las siguientes características:

- Gran resolución espacial < 1m y recubrimiento estereoscópico
- Gran resolución radiométrica más de 10bits/px
- Gran resolución espectral >256 bandas (ID Hiperespectrales)

---

<sup>33</sup> Láser, de chorro de tinta, magnetotérmicas, térmicas o magnéticas.



**Tema 65. Contenidos de la información: generación de nomenclaturas. Clasificación y leyenda. Procesos de normalización y armonización de nomenclaturas.**

INDICE

1. CONTENIDOS DE LA INFORMACIÓN: GENERACIÓN DE NOMENCLATURAS
  - 1.1. Introducción
  - 1.2. Definición y Objetivo de la Nomenclatura
    - 1.2.1. Funciones de la Nomenclatura
    - 1.2.2. Nomenclatura y Realidad
  - 1.3. Definición y Objetivo de la Clasificación
    - 1.3.1. Tipos de Clasificación
    - 1.3.2. Sistemas de Clasificación existentes
  - 1.4. Definición y Objetivo de la Leyenda
  - 1.5. Estructura del Proceso de Obtención de una Nomenclatura
    - 1.5.1. Introducción
    - 1.5.2. Principios Básicos:
  - 1.6. Nomenclaturas de Usos del Suelo y Cobertura del Suelo
    - 1.6.1. El Domino
    - 1.6.2. Interrelaciones entre Cobertura del Suelo y Usos del Suelo
    - 1.6.3. Unidades de Observación, Objetos, Escala
    - 1.6.4. Nomenclaturas con Coberturas/Usos del Suelo múltiples
    - 1.6.5. Requerimientos específicos:
2. NORMALIZACIÓN/ARMONICACIÓN DE NOMENCLATURAS
  - 2.1. Principios Básicos para la Creación de un Sistema Generativo de Nomenclaturas
    - 2.1.1. Introducción
    - 2.1.2. Aproximación Teórica: Objetos, Conceptos e Imágenes
    - 2.1.3. Propiedades de los Objetos y Clasificadores:
    - 2.1.4. Clasificadores Básicos de Cobertura y Usos del Suelo:
  - 2.2. Armonización entre Nomenclaturas
  - 2.3. Normalización entre Nomenclaturas
3. BIBLIOGRAFÍA

# 1. GENERACIÓN DE NOMENCLATURAS

## 1.1. Introducción

La explotación, la gestión y la protección del suelo son llevadas a cabo por una diversidad de Organismos,<sup>1</sup> con una amplia gama de intereses y en ámbitos<sup>2</sup> determinados. Como consecuencia de esta disparidad, la información territorial será obtenida, interpretada, tratada y explotada desde diferentes enfoques.

Uno de los problemas principales que existen actualmente en el campo de la información sobre cobertura/usos del suelo viene dado por su carácter interdisciplinar y por la confusión terminológica de ambos conceptos, como analizamos en el capítulo anterior.

Planificadores regionales, expertos en medio ambiente, estadísticos, etc., emplean distintos conceptos y diferente terminología a la utilizada, tanto por los productores de la información sobre observación de la Tierra, como a la utilizada por los productores de información derivada.

De esta forma, los términos: nomenclatura, clasificación y leyenda, se usan con significados dispares. La mayoría de los expertos en teledetección los aplican indistintamente, mientras que los estadísticos tienen una definición más clara de nomenclatura y sistemas de clasificación. Por su parte, los expertos en planificación regional y/o medio ambiente utilizan la información relacionada con el paisaje (estructuras de cobertura/usos del suelo) y se acercan a la información territorial a través de las leyendas de los mapas.

A pesar de existir algunos principios básicos sobre cómo construir nomenclaturas, desafortunadamente no son aplicados en la mayoría de los casos, por ejemplo:

- a) Una nomenclatura sólo debería cubrir una única cuestión y no una mezcla.<sup>3</sup>
- b) Atender a los principios de exhaustividad, ausencia de solapamiento, ausencia de clases mixtas y ausencia de clases de transición, que permitan detectar los cambios de clases.

En este capítulo vamos a estudiar, en primer lugar, cada uno de los términos anteriormente referidos,<sup>4</sup> sus definiciones y objetivos para, en segundo lugar, centrarnos de modo específico en la nomenclatura, objeto básico de este trabajo de investigación.

## 1.2. Definición y Objetivo de la Nomenclatura

El Diccionario de la Real Academia<sup>5</sup> define nomenclatura como << Lista de nombres de personas o cosas... Conjunto de principios y reglas que se aplican para la denominación inequívoca, única y distinta de los taxones animales y vegetales>>.

---

<sup>1</sup> Organismos: públicos, privados,...

<sup>2</sup> Ámbitos: internacional, nacional, regional, local,...

<sup>3</sup> Cobertura, usos y paisaje.

<sup>4</sup> Nomenclatura, clasificación y leyenda.

<sup>5</sup> Op. cit. pág. 75.

La definición anterior nos aclara, de manera genérica, ciertos aspectos fundamentales del término. De este modo, podemos definir las nomenclaturas como los listados de categorías<sup>6</sup> empleadas para estructurar la información, con el fin de facilitar tanto la comunicación, como el intercambio de la misma entre los usuarios de una materia o disciplina.

Por lo tanto, una nomenclatura cubrirá un campo de interés determinado. Dentro de este campo, los objetos serán, por un lado, clasificados de acuerdo a ciertos objetivos y, por otro lado, asignados a grupos dentro de un sistema de categorías a partir de alguna de sus características.

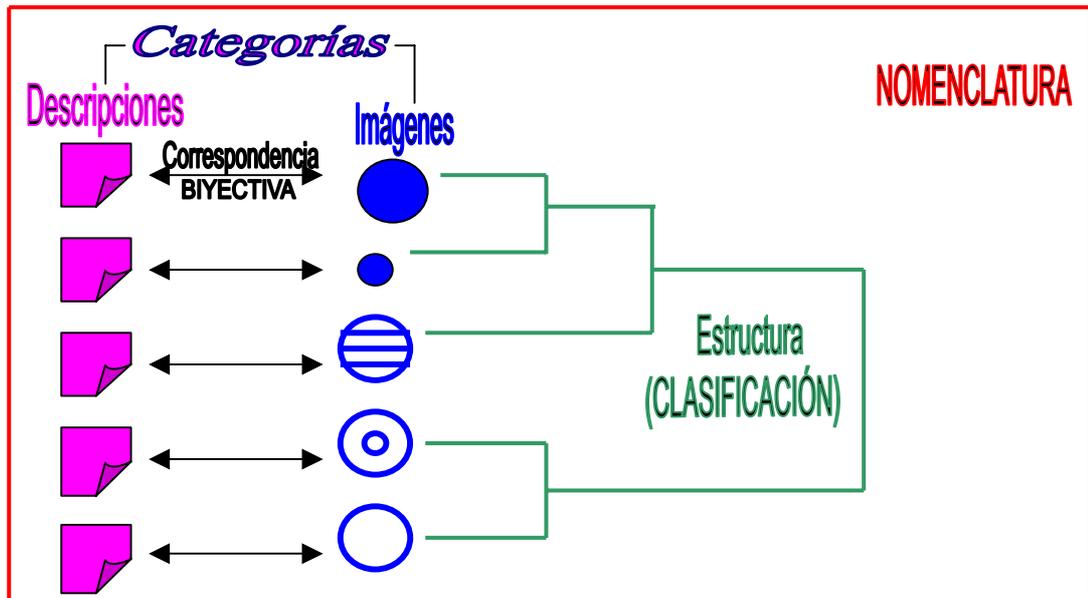


Figura 1. Nomenclatura

### 1.2.1. Funciones de la Nomenclatura

Las nomenclaturas desempeñan tres funciones, que son: identificar, describir y clasificar.

*Identificar.* Reemplazan el dominio del lenguaje natural por el lenguaje de códigos y símbolos. De esta forma, en una nomenclatura cada objeto está representado por una imagen y un código o denominación. Así, cartografiamos el objeto y su imagen evitando los problemas de ambigüedad que surgirían si utilizamos texto independiente.

*Describir.* Con el fin de hacer posible la comparación de objetos (los códigos o denominaciones a menudo son insuficientes), se necesita información más detallada para aclarar conceptos sutiles o significados implícitos en los nombres de muchos objetos.

*Clasificar.* Con el propósito de poder trabajar sobre un grupo de objetos, la descripción de varios objetos a través de un código único resulta más fácil de manipular que la descripción de todos los objetos.

<sup>6</sup> Nos referimos con el término Categorías a imágenes (véase n.15) y descripciones.

### 1.2.2. Nomenclatura y Realidad

Las nomenclaturas son herramientas cuyo objetivo es describir aspectos seleccionados del mundo real. Esto no significa que las categorías elegidas representen una división unidimensional de la realidad, sino todo lo contrario, representan una división multidimensional de la misma. En otras palabras, diremos que la partición del mundo real a través de una nomenclatura refleja sólo ciertos aspectos de la realidad, puesto que la misma realidad podría ser descrita por distintas nomenclaturas.

La mayoría de las nomenclaturas son estructuras jerárquicas, otras representan categorías en forma de listado,<sup>7</sup> pero lo más frecuente es que proporcionen indicaciones para niveles inferiores.

De manera habitual, pensamos que las nomenclaturas son construidas en forma de árbol, este es el caso de las nomenclaturas hieráticas,<sup>8</sup> donde cada una de las sucesivas divisiones significa que las características objetivo<sup>9</sup> tienen que ser tenidas en consideración, lo que supone una elección concienzuda, pero crean serios problemas, pues los diferentes usuarios pueden desear la partición o división del campo de interés en un nivel dado, de acuerdo a criterios distintos. Esto demuestra que, cuando comparamos diferentes fuentes de información, una clase creada por un sistema como única puede adoptar dos o más categorías en una nomenclatura desarrollada con objetivos diferentes.

Por ejemplo, es imposible relacionar exactamente una clasificación de árboles donde las especies estén subdivididas en: especies de hojas amplias y especies de hoja en aguja, con una clasificación donde se identifiquen sólo categorías como caducifolias y perennifolias (Wyatt, 1997)<sup>10</sup>.

La nomenclatura CORINE Land Cover<sup>11</sup> está estructurada en niveles y clases. Se compone de un primer nivel de 5 clases, un segundo nivel de 15 clases y un tercer nivel de 44 clases. La nomenclatura es hierática en estos tres niveles. La subdivisión en tres niveles permite introducir subcategorías o niveles adicionales de los paisajes o regiones de estudio, debido a las diferentes y específicas características geográficas de éstos; pudiéndose llegar hasta un nivel 4 o 5. La delimitación de estas nuevas áreas no tienen por qué estar basadas en la metodología CORINE Land Cover.

La validación de la representación del mundo real a través de las categorías de los objetos es bastante cuestionable. La intención por la cual una nomenclatura es diseñada determinará su propósito y contenido. Es por lo que cada usuario, en general, construye una nomenclatura individual adaptada a sus necesidades específicas. De ahí que el desarrollo de nomenclaturas conduzca, por consiguiente, a la imposibilidad de éstas puedan ser comparadas.

---

<sup>7</sup> V. pág. 119.

<sup>8</sup> Sistema hierático: colocación de objetos en una serie de grupos a los cuales son asignados a través de una sucesión de categorías de clasificación o reglas de distinta ambigüedad.

<sup>9</sup> Objetivo: el término o fin para un usuario podría no serlo para otro.

<sup>10</sup> Wyatt, op. cit. pág. 44.

<sup>11</sup> Véase Anexo Documental 9.2. Nomenclatura CORINE Land Cover. UE.

### 1.3. Definición y Objetivo de la Clasificación

Es frecuente encontrar distintos modos de entender el término clasificación, debido al carácter interdisciplinar del mismo, por ello consideramos conveniente exponer algunas de las acepciones más usuales.

El Diccionario de la Real Academia<sup>12</sup> define clasificación como <<acción y efecto de clasificar>> y clasificar como <<ordenar o disponer por clases>>.

El Diccionario de Cartografía<sup>13</sup> delimita, por una parte, clasificación (classification) como <<1.-Ordenamiento o categorización de objetivos por medio de criterios establecidos tales como tamaño, función o color. 2.-Proceso de asignar píxeles individuales a diferentes categorías en una imagen multispectral, generalmente con base en sus características de reflectancia espectral>>. Por otra parte, define clasificación de campo (field classification) como << Etapa del proceso cartográfico que consiste en identificar y dar nombre in situ a todos los elementos naturales y artificiales que aparezcan en una fotografía. Esta información se utiliza posteriormente en la compilación final del mapa>>.

Para Eurostat<sup>14</sup> << Classificatios are lists of categories that are used to structure information in a given field. They allow objets to be classified according to certain objectives and certain of their characteristics.>> ( Las clasificaciones son listados de categorías que son usados para estructurar la información en un campo o materia dada. Ellas permiten que los objetos sean clasificados de acuerdo a ciertos objetivos y de acuerdo a sus características).

Según la FAO<sup>15</sup> <<Classification is an abstract representation of the situation in the field using well-defined underlying principles>> (La clasificación es la representación abstracta de la situación en el terreno, usando principios fundamentales bien definidos).

Nos ha parecido oportuno apoyar nuestra investigación en la definición de (Duprat, 1970) quien define de manera conjunta tanto el término nomenclatura como el término clasificación aportando, de esta forma, las diferencias entre ambas: <<Una nomenclatura está formada por dos componentes imágenes<sup>16</sup> y descripciones. Estos componentes están enlazados uno a uno en un mapa de correspondencia y en una estructura (clasificación)>>.

---

<sup>12</sup> RAE, *Diccionario de la Lengua Española*, 21ª edición, Ed.Espasa-Calpe, Madrid,1992, pp. 2133.

<sup>13</sup> Otero, I. et al., *Diccionario de Cartografía. Topografía, Fotogrametría, Teledetección, GPS,GIS,MDT*, Ediciones Ciencias Sociales, Madrid, 1995, pp. 266.

<sup>14</sup> Eurostat, *Land cover and land use information systems for European Union policy needs*. European Commision, 1998.

<sup>15</sup> FAO, véase bibliografía.

<sup>16</sup> Imagen: utilizada como expresión genérica que incluye elementos de la realidad lingüística (unidad de información, títulos, códigos) y de la realidad extra- lingüística (por ejemplo: símbolos). No debe confundirse con imagen de satélite.

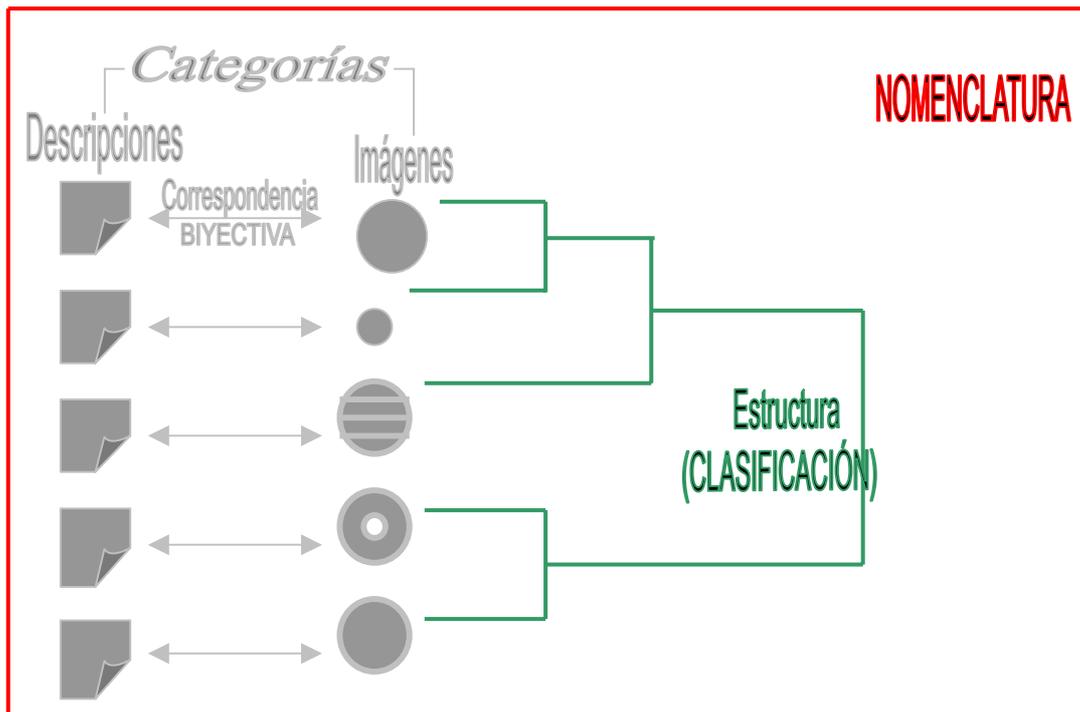


Figura 3. Clasificación

### 1.3.1. Tipos de Clasificación

Los usuarios tienden a elaborar sus propias clasificaciones de acuerdo a las necesidades de información y toma de decisiones. Usualmente, las clasificaciones son construidas en forma de árbol.<sup>17</sup> Cada una de las sucesivas divisiones en una clasificación corresponde a ciertas características que se han tenido en cuenta e implica una deliberada elección.

Las clasificaciones pueden ser:

*Clasificaciones a Priori.* Antes de estructurar la información en una situación o ámbito concreto, donde una clase dada de cobertura del suelo está clara y sistemáticamente definida, pues los clasificadores<sup>18</sup> considerados abren todas las posibles combinaciones. Proporcionaría ciertas ventajas como son la jerarquización y la armonización.

*Clasificaciones a Posteriori.* Una vez analizada la situación concreta del terreno. Esta posibilidad tiene como ventaja el alto grado de flexibilidad de la clasificación.

### 1.3.2. Sistemas de Clasificación existentes

Los sistemas de clasificación existentes en la actualidad, presentan las siguientes características:

<sup>17</sup> Un ejemplo de clasificación en forma de árbol es una clasificación hierática.

<sup>18</sup> Clasificadores : conjunto de atributos que diagnostican independientemente a cada clase. V. cap. 5.

- Parte de las clasificaciones son en realidad Leyendas<sup>19</sup> (porque describen características concretas o específicas de cobertura para una zona o área dada).
- Algunas de esas clasificaciones son heterogéneas con respecto a su cualidad, escala y nomenclatura.
- Limitadas en la capacidad de describir y acomodar el rango íntegro de clases.
- Escasez de claridad y ambigüedad en la descripción de clases y en la claridad de la definición de bondad de clase.

Los métodos clásicos usados en clasificaciones de cobertura del suelo presentan problemas debido al enorme número de situaciones de cobertura del suelo que existen. Si observamos la figura 5, comprobamos la relación directa entre el número (mayor o menor) de clases y el nivel de estandarización y flexibilidad de la clasificación.

Por lo tanto, creemos que en una óptima clasificación,<sup>20</sup> las clases tendrían que ajustarse, por una parte, a una lista comprensible de nombres de clase y, por otra, a un adecuado número de clases detalladas.

Esto supone describir clases a través del desarrollo de clasificadores.<sup>21</sup> Los clasificadores son un conjunto de atributos que diagnostican independientemente a cada clase.

#### 1.4. Definición y Objetivo de la Leyenda

Determinados los conceptos de nomenclatura y clasificación, nos ocuparemos en este subcapítulo de la definición de leyenda y de su objetivo.

De las diferentes aproximaciones analizadas en la literatura especializada nos ha parecido conveniente resaltar las siguientes acepciones:

Un primer acercamiento genérico al concepto de leyenda la proporciona el Diccionario de la Real Academia,<sup>22</sup> como <<Texto que acompaña a un plano,...>>.

De manera más específica, el Diccionario SELPER,<sup>23</sup> define Leyenda (Leyend), como la <<Descripción, explicación, cuadro de símbolos y otra información impresa en un mapa o carta para ayudar a su mejor entendimiento y/o interpretación>>.

Tanto el Diccionario Glosario de Términos SIG,<sup>24</sup> como el Diccionario de Cartografía<sup>25</sup> la determinan <<Parte de un plano o mapa donde se especifica el significado de los símbolos, sombreado y colores utilizados en la clasificación de los elementos geográficos representados>>.

<sup>19</sup> Leyenda véase pág. 78.

<sup>20</sup> Óptima clasificación: clasificación con un alto nivel de estandarización y alta flexibilidad.

<sup>21</sup> Clasificadores, v. cap. 5.

<sup>22</sup> Véase RAE, op. cit. pág. 5.

<sup>23</sup> *Diccionario SELPER de Percepción Remota*, ed. SELPER, 1989, pp.219.

<sup>24</sup> AESYGTT, *Diccionario Glosario de Términos SIG*, E. Estudio Gráfico, Madrid, pp.94.

<sup>25</sup> Otero, I., et al. (1995), op. cit. pág. 75.

Según F. Joly<sup>26</sup> <<La leyenda es indispensable para la comprensión del documento [mapa] y de su simbolismo>>, así mismo, <<tiene por objeto facilitar la lectura del mapa,...>>.

Salitchev, K.A.<sup>27</sup> define la leyenda como <<elemento esencial en el contenido de los mapas geográficos>>, teniendo en cuenta que <<las leyendas están orgánicamente relacionadas con el contenido básico del mapa, con sus objetivos concretos>> y que <<la selección de las leyendas es determinada por la especialización, la asignación y la escala del mapa y depende también del carácter de la localidad que se cartografía>>.

Para la FAO<sup>28</sup> <<Legend is the applications of a clasifiration in a particular area using a defined mapping scale and a particular data set>> (La leyenda es la aplicación de una clasificación en un área o zona específica usando una escala cartográfica definida y un conjunto concreto de datos).

A partir de las definiciones anteriores, entendemos por Leyenda la aplicación de una clasificación en un área concreta, usando una escala cartográfica definida y un conjunto de datos particulares. Cuyo objetivo es posibililar la comprensión y el conocimiento del contenido del mapa.

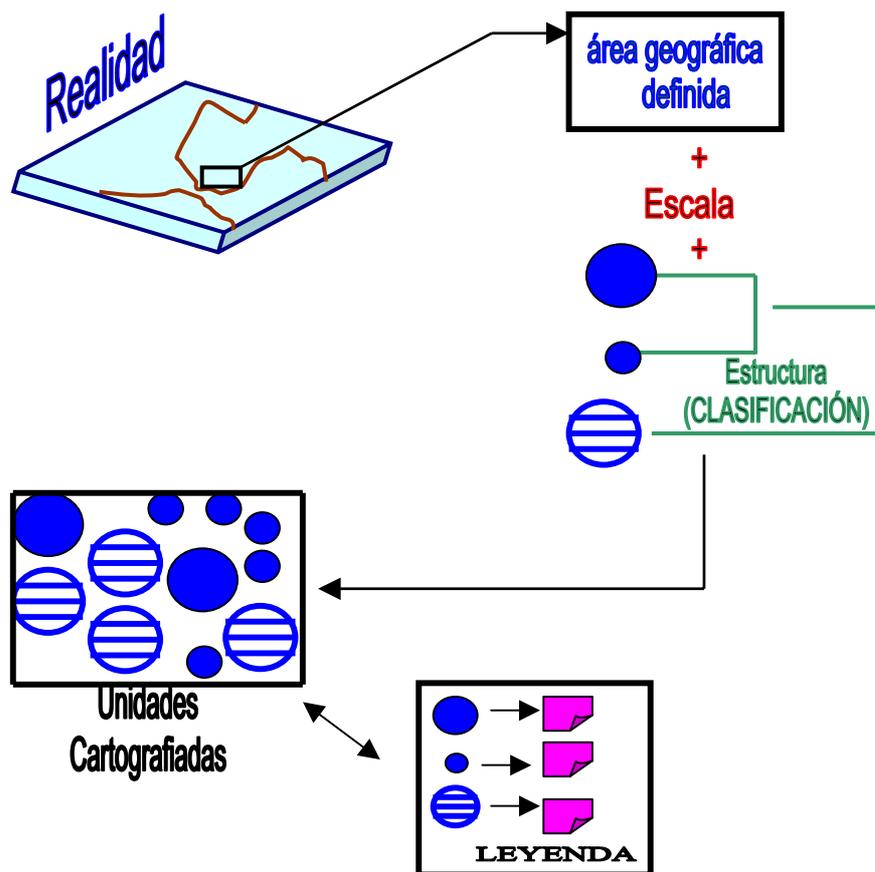


Figura 4. Leyenda

<sup>26</sup> F.Joly (1979), op. cit. pág. 13.

<sup>27</sup> Salitchev, K. A., *Cartografía*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1979, pp. 215.

<sup>28</sup> FAO, v. bibliografía.

## 1.5. Estructura del Proceso de Obtención de una Nomenclatura

### 1.5.1. Introducción

Una nomenclatura puede describir varios campos de interés. Sin embargo, la mayoría de las nomenclaturas que incluyen elementos de cobertura del suelo y de usos, presentan a menudo inconsistencias lógicas – pues la observación de unidades del territorio difiere en ambos campos<sup>29</sup>- lo que influirá en la manera o modo de construirlas. Es por eso por lo que consideramos necesario que la metodología empleada en la elaboración de una nomenclatura, sea descrita.<sup>30</sup>

Las nomenclaturas deben ser el resultado de un dialogo continuado entre:

- *Un acercamiento sistemático*, imponiendo una estructura a la información basada en principios lógicos como son: integridad, ausencia de solapamiento, definición de clases no ambiguas, reglas para determinar la representación de objetos en la clasificación.
- *Un acercamiento pragmático*, teniendo en cuenta tanto las necesidades de los usuarios, como la información existente.
- *Un acercamiento contextual*, imponiendo precisiones específicas relacionadas con el campo de la investigación.

Hemos considerado conveniente analizar en este apartado los principios básicos que deben caracterizar a las nomenclaturas, los problemas prácticos más habituales que están presentando y el análisis de las principales metodologías usadas en varios campos de interés.

Esto nos permitirá aproximarnos a la generación de nomenclaturas de cobertura y uso del suelo, fundamento de este capítulo.

### 1.5.2. Principios Básicos

#### Premisas

El diseño de nomenclaturas parte de dos premisas esenciales:

- *La Integridad*. Todas las nomenclaturas están referidas a determinados segmentos o porciones de la realidad. Estos segmentos deberán ser descritos exhaustivamente.<sup>31</sup> Así, para que una clase sea clasificada, ésta deberá corresponder a un objeto. A su vez, el conjunto de clases originado en un primer agrupamiento tiene que ser idéntico a la colección original. (Bunge,1966)<sup>32</sup>

---

<sup>29</sup> Véase cap. 3, pág. 45.

<sup>30</sup> Otros problemas que hacen necesaria la descripción de la metodología: una nomenclatura abierta, donde el número de categorías no tenga límite, puede llegar a un número imprevisto de las mismas. Mientras que, las nomenclaturas con un soporte estadístico y un sumario o resumen, generalmente tienen fijadas las categorías, por lo tanto, limitan su número.

<sup>31</sup> Todos los tipos de cobertura del suelo en una nomenclatura de cobertura del suelo. Todos los tipos de paisaje en una nomenclatura de paisaje...

<sup>32</sup> Bunge, *Theoretical Geography*, London, 1966.

- *La Ausencia de Solapamiento.*<sup>33</sup> Las clases deben ser recíprocamente exhaustivas, es decir, sin solapamiento. Siguiendo la idea (Bunge, 1966), podemos definirla como:
  - a) Cualquier objeto puede ser clasificado en sólo una clase.
  - b) Todas las clases de un mismo rango deben ser grupos de información desagregados.
  - c) Un objeto no puede pertenecer a más de una clase del mismo rango.

### **Reglas de Clasificación**

En teoría, los objetivos de integridad y ausencia de solapamiento se conseguirán cuando la parte textual de la nomenclatura esté estructurada. Para ello, será dado un sistema de reglas de clasificación que tienen como objeto identificar y clasificar los objetos observados.

Estas reglas deben estar determinadas por principios generales de interpretación y, de manera concreta, tienen que ser dadas para la clasificación de objetos en unas clases apropiadas y de acuerdo a un criterio que deberá estar claramente definido. Cuando se produzca solapamiento, tanto en las decisiones sobre las partes y los accesorios,<sup>34</sup> como en las decisiones sobre mezclas de clase, éste tendrá que quedar resuelto mediante reglas.

### **Cabeceras, Definiciones y Notas explicativas**

*El texto de las Cabeceras* deberá ser:

- Elaborado mediante definiciones dadas por intensidad (comprensión), estableciendo restricciones que irán discriminando unas nociones de otras, dentro de un mismo nivel horizontal. Este sistema se opone a las definiciones por extensión (genéricas), que consisten en enumerar todos los objetos o especies.
- General,<sup>35</sup> conciso, claro, no circular y abreviado, de otra forma el usuario siempre tenderá a abreviarlo. A su vez, tendrá que responder tanto al conocimiento, como a las necesidades del usuario.
- Elaboradas a partir del contenido, es decir, teniendo en cuenta las particularidades de los conceptos y sus relaciones, y no a la inversa.

*Las definiciones:*

- Una categoría debe ser definida por intensidad (comprensión), como expusimos anteriormente, y no a partir de sus diferencias con otras categorías.

*Notas explicativas:*

- Cuando un objeto sea excluido de una categoría, deberá indicarse el lugar al que pertenece.

---

<sup>33</sup> Véase fig.5, pág. 86.

<sup>34</sup> Importante distinguir claramente *las partes* de *los accesorios*. *Las partes* son relativas al todo, por lo tanto, necesarias (ruedas para el coche). *Los accesorios*, extienden el uso de un producto o de un objeto (air bag).

<sup>35</sup> Entendido como una aproximación, no puede describir todas las cosas.

- Una vez identificados los núcleos, habrá que comprobar la bondad entre las categorías, para ello se realizará un listado, para cada categoría, con la inclusión o exclusión de ésta. En el caso de exclusión, deberá haber referencias cruzadas con la categoría apropiada.
- El objetivo de las notas explicativas consiste en suministrar descripciones más detalladas de los objetos dentro de una categoría. A veces, resulta la forma más fácil de clasificar a partir de las decisiones tomadas a cerca de las inclusiones o exclusiones indicadas y de las definiciones.

Un ejemplo que muestra las dificultades al aplicar una nomenclatura, cuando los principios básicos no están mencionados de una manera precisa, aparece en el CORINE Land-Cover (Guía Técnica, 1986),<sup>36</sup> concretamente en el apartado dedicado a Tierras de Labor (2.1.).<sup>37</sup>

Si atendemos al párrafo anterior, éste aparece definido siguiendo los estándares usualmente utilizados, *Tierra de Labor (2.1.)* << Tierras cultivadas, labradas, sin diferenciación de cultivos: cereales, cultivos forrajeros, etc. No comprende las praderas. Comprende los cultivos de flores, leguminosas, hortalizas, viveros de árboles, cultivos bajo plástico, etc.>>.

Si observamos un nivel inferior, la subcategoría *Tierra de Labor en Secano (2.1.1.)* << Cultivos anuales indiferenciados que no reciben de forma permanente aportes artificiales de agua. Se incluyen barbechos y rastrojeras>>, se excluyen los pastos artificiales y temporales (artificial and temporary pastures). Esto significa que, desde los contenidos de la subcategoría, la categoría general *Tierras de Labor*, no incluye este tipo de pastos, lo cual es contrario a ese nivel general de estandarización. Además, estos pastos artificiales y temporales aparecerán en la categoría *Pradera (Grassland)*.

El ejemplo contrario sería el aportado por las Estadísticas de Usos del Suelo en Suiza.

La información que acompaña a cada categoría está compuesta de una definición por extensión (breve), algunos criterios orientativos o indicaciones para la/s persona/s encargadas de clasificar el punto de observación, información detallada sobre inclusiones o exclusiones,<sup>38</sup> algunos ejemplos,<sup>39</sup> comentarios concretos a cerca de los casos de dificultad y el área correspondiente a la categoría a escala nacional.<sup>40</sup>

También son dadas algunas agregaciones, definiciones generales, descripciones de las subdivisiones, reglas básicas para la clasificación de objetos, inclusiones y exclusiones, así como algunas estadísticas sobre la representación de categorías.

---

<sup>36</sup> Véase bibliografía.

<sup>37</sup> Véase Anexo documental, Anexo 9.2.

<sup>38</sup> Con indicaciones sistemáticas del lugar donde clasificar esos objetos específicos.

<sup>39</sup> Incluyendo ilustraciones.

<sup>40</sup> En hectáreas y porcentaje del área total.

## Principios básicos de codificación

Existen una serie de principios fundamentales empleados para la codificación, estos son:

- Los códigos están referidos a imágenes.
- En general, los códigos están estructurados si la nomenclatura es jerárquica.
- El código de un nivel inferior tiene que repetir el código de un nivel más alto. Esto será posible si utilizamos símbolos<sup>41</sup> para clasificar.
- Un objeto importante para ser incluido tiene el significado 0 (cero).
- El 0 (cero) deberá ser usado cuando, en un nivel dado, no se hace una subdivisión.

Ejemplo del significado del 0 (cero) en la clasificación CLUSTER.<sup>42</sup>

El 0 (cero) en esta clasificación CLUSTER significa que un cierto nivel de la categoría no se ha ocupado. Por ejemplo, la cabecera o título A5 del segundo nivel (*A5: Terrenos desarrollados con propósitos de ocio*), no se ha subdividido en un tercer nivel, por lo que este nivel será indicado con el dígito 0. Si se produce una subdivisión a un cuarto nivel dentro de zonas culturales, espacios deportivos, zonas verdes o de ocio, aparecerá con los códigos: A501, A502, A503.

## Indicadores de medida

Resulta imprescindible aportar algunos indicadores que evalúen la fiabilidad de una nomenclatura, por ello se han propuesto los siguientes:

- *Comparación*. Con versiones previas de la nomenclatura.<sup>43</sup>
- *Correspondencia*. Con otras nomenclaturas, es decir, comparación entre nomenclaturas y sus objetivos, estudio<sup>44</sup> sobre la correspondencia de clases.
- *Medida del Peso de las clases*. Donde los pesos deben ser aproximadamente equivalentes en nivel.
- *Medida de la Homogeneidad de las clases*. Donde, por ejemplo, una primera discriminación dicotómica entre suelo y agua en un nivel alto de una nomenclatura de cobertura del suelo debería ser desequilibrado.

## Problemas prácticos

En este apartado no vamos a evaluar los inevitables esfuerzos necesarios para asegurar que una nomenclatura esté completa, en cambio, nos referiremos a problemas prácticos muy habituales que surgen, tanto en el proceso de elaboración de nomenclaturas, como en sus posteriores actualizaciones. Hemos considerado como problemas básicos los siguientes:

- *Inclusión de Nuevos Objetos*. La inclusión de nuevos objetos en una nomenclatura resulta inevitable en un estadio posterior a la clasificación. De

---

<sup>41</sup> Números, caracteres, otros signos.

<sup>42</sup> Véase CLUSTER pág. 109.

<sup>43</sup> Mediante tablas de correspondencia.

<sup>44</sup> Aclarar que tales estudios deben estar basados en el análisis de conceptos, no en las imágenes.

esta forma y con el fin de facilitar la inclusión, las reglas<sup>45</sup> de clasificación agregadas a la nomenclatura deberán, por un lado, ser adaptadas a las nuevas variaciones y, por otro lado, será necesaria la revisión de las reglas ya aplicadas a todos los objetos afectados por el cambio, incluyendo en este grupo aquellos objetos previamente clasificados.

- *Relevancia*. No todos los objetos en la categoría tienen similares características o propiedades, dependerá de los usuarios.
- *Homogeneidad de clases*. Una categoría de una nomenclatura puede ser homogénea de acuerdo a un carácter, a dos, o a ... ninguno.
- *Procesos de Agregación*. Resulta una tarea difícil disponer de la parte textual, es decir, de la denominación de una categoría, correspondiente a sus contenidos, pues parte de la información habrá desaparecido a través de los procesos de agrupación. Para ello es necesario llegar a un cierto nivel de detalle.<sup>46</sup>

Consideramos que un buen ejemplo de concepto vago es el concepto de *Bosque*, pues puede incluir: claras, áreas con un 10% de la zona cubierta con árboles, plantaciones jóvenes, pistas forestales, etc.

Por otra parte, la acepción *Bosque* es genéricamente comprensible para todos, es decir, tiene como centro de gravedad la idea de colección de árboles.<sup>47</sup> Sin embargo, los *objetos*, como parte de esta agregación, pueden ser entendidos de manera totalmente distinta de un país a otro, tanto por los especialistas, como por los no especialistas.

Por lo tanto, la categoría *Bosque*, es una agregación vaga y, por consiguiente, enmascara un contenido que puede ser solamente entendido después de leer detenidamente su descripción.

## Aproximación a la Construcción de Nomenclaturas

En este subcapítulo nos proponemos analizar, de manera global, algunas de las metodologías más significativas para la construcción de nomenclaturas.

Partimos de la premisa de que las nomenclaturas son construcciones artificiales, generalmente de aspecto jerárquico, a partir del enlace o unión de los objetos reales a través de una compleja red de relaciones, uniones, afinidades o vecindades.

Con el fin de transformar la red en una jerarquía (árbol),<sup>48</sup> algunas de las uniones o enlaces, considerados como relevantes o significativos, serán elegidos de acuerdo a un particular punto de vista.

---

<sup>45</sup> Este tipo de reglas se aplican frecuentemente en Zoología (inclusión de nuevas especies).

<sup>46</sup> Si el proceso de agregación de niveles es muy grande, las categorías pierden sus significados descriptivos quedando como simples hitos documentales.

<sup>47</sup> Árbol (tree), como componente básico de los bosques, pero pueden no ser necesariamente de la misma forma o apariencia y, por lo tanto, no serán clasificados idénticamente por un noruego, un español o un neozelandés.

<sup>48</sup> Véase fig. 5.

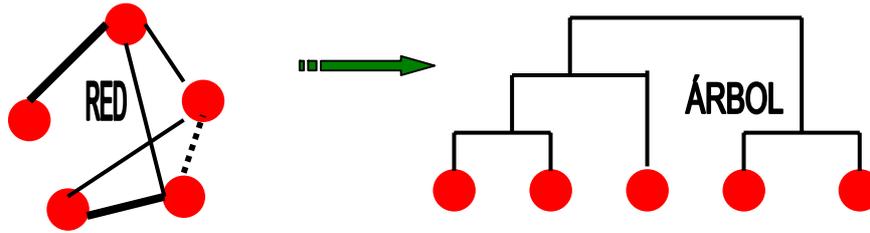


Figura 5. Construcción de nomenclaturas. Estructura

- *Método de los núcleos elementales*<sup>49</sup>. Supone un acercamiento empírico a los distintos sistemas de nomenclaturas existentes, de los cuales se extraerán los núcleos que puedan ser utilizados como categorías principales. Esto implica la recopilación de pre-nomenclaturas, de acuerdo a los dominios que sean considerados, su confrontación y análisis, con el fin de responder a los requerimientos de los usuarios.
- *Análisis de datos*. Su objetivo es la construcción de categorías a través del agrupamiento de objetos similares. Para ello, será necesario la comparación de un gran número de características de un objeto con las mismas características de otros objetos. Los objetos con un número considerable de características comunes se agruparan juntos. Por lo tanto, la nomenclatura será derivada a partir del agrupamiento obtenido.  
Para realizar el agrupamiento existen diferentes métodos,<sup>50</sup> que serán utilizados siempre que exista suficiente información disponible sobre las unidades de observación,<sup>51</sup> pero este no es el caso normalmente en la cobertura/uso del suelo.
- *Árbol descendente*.<sup>52</sup> Muchas nomenclaturas son construidas siguiendo un desarrollo a-priori, es decir, el campo de estudio se divide en categorías y subcategorías de acuerdo a ciertos objetivos y propósitos. Pero este método presenta serios inconvenientes pues la estructura en árbol es una estructura rígida, lo que implica que surjan problemas cuando se intentan hacer modificaciones sin alterar la estructura interior de la información. La única posibilidad de modificación supone crear niveles más detallados sobre la base de las categorías ya existentes.<sup>53</sup> Otros inconvenientes son: el desarrollo desigual de los sectores, la exagerada importancia de los conceptos agregados a partir de la primera decisión.<sup>54</sup>
- *Árbol ascendente*. Este método es parecido al método de Análisis de datos. Supone, por un lado, la existencia de nomenclaturas muy detalladas para cada dominio y, por otro, la existencia de problemas no muy importantes entre los márgenes de los diferentes dominios. Sin embargo, este no es el caso que presentan la cobertura y el uso del suelo.

<sup>49</sup> En relación a este método véase: EUROSTAT, *Classification for Land Use Statistics*, Eurostat Remote Sensing Programme.

<sup>50</sup> Análisis factorial, clasificaciones hieráticas ascendentes, agrupamiento dinámico.

<sup>51</sup> Este método se suele utilizar en la taxonomía de Lenguas.

<sup>52</sup> En relación a este método, véase: UN-EC, *Nomenclatura sobre Uso del Suelo*, United Nations.

<sup>53</sup> En ese caso, cuando el árbol existente ya no esté adaptado a las necesidades de los usuarios, los niveles adicionales no resolverán el problema.

<sup>54</sup> Véase subcapítulo 4.5., pág. 80.

- *Intersección sistemática de criterios y nomenclaturas de referencia.*<sup>55</sup> El objetivo es compilar varias nomenclaturas que cubran el dominio de interés, con el fin de agrupar los distintos puntos de vista de los usuarios. La intersección sistemática de nomenclaturas es una tarea complicada, pues implica la creación de numerosas categorías- de las cuales algunas no serán relevantes- y debe partir sistemáticamente de todos los dominios, incluso cuando sea innecesario.<sup>56</sup>
- *Niveles independientes.* Este método alternativo es considerado como una solución mejor que los sistemas descendente y ascendente. El objetivo es trabajar de acuerdo a las necesidades de los usuarios, a través de una confrontación, tanto de los objetos propuestos, como de las ventajas y desventajas de las opciones.  
La cuestión más difícil es enlazar en una fase posterior los distintos niveles, sobre todo, cuando los niveles están desarrollados teniendo como base las diferentes unidades de observación.<sup>57</sup>

## 1.6. Nomenclaturas de Usos del Suelo y Cobertura del Suelo

### 1.6.1. El Dominio

Cualquier porción de la superficie terrestre puede ser observada y descrita de diferentes formas, que varían de acuerdo a:

- La distancia de separación entre la superficie observada y el observador (escala).
- Los instrumentos empleados para realizar la observación (explicaciones, observaciones, fotografía aérea, sensores remotos).
- La posible transcripción semántica de la observación (listados, nomenclaturas, atributos).
- El uso de la información proporcionada por la observación (estadísticas, inventarios, cartográfica).
- Las unidades de observación.
- Los períodos de observación.

Para un objetivo dado todos los componentes anteriores se interrelacionan.

---

<sup>55</sup> En relación con este método, véase: Radermacher, W., *Gedanken zu einer Basis Klassifikation der Bodennutzungen*, Federal Statistical Office of Germany, 1988.

<sup>56</sup> Será innecesario cuando una agregación *natural* sea bien aceptada por muchos usuarios.

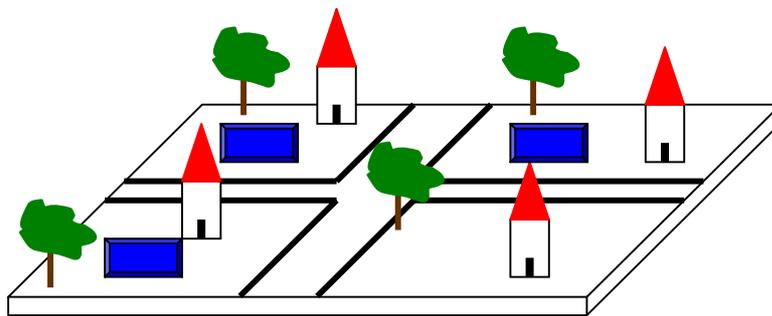
<sup>57</sup> Problema frecuente para la información de cobertura/usos del suelo y para sus diferentes niveles.

### 1.6.2. Interrelaciones entre Cobertura del Suelo y Usos del Suelo

Los requerimientos de información relacionados con la superficie terrestre corresponden a diferentes tipos de descripciones, nosotros limitaremos el análisis a la cobertura y al uso del suelo.

Como ya definimos en el Capítulo 3, *la Cobertura del suelo* corresponde a una descripción biofísica del espacio. La Cobertura del suelo delimita zonas biofísicas homogéneas que tienen una respuesta espectral semejante.<sup>58</sup>

Por su parte, los *Usos del suelo*, se pueden definir como zonas homogéneas con un criterio socioeconómico.<sup>59</sup>



**Cobertura del suelo:**      
**Usos del suelo:** *Residencial*

Figura 6. Ocupación del Suelo: Cobertura/Usos

Como ya vimos en el Capítulo 3, una parcela de cobertura del suelo, por ejemplo, un campo de trigo puede ser razonablemente asociada con un uso agrícola; de manera similar, algunas veces es posible inferir, al menos hasta cierto punto, aspectos biofísicos a partir de aspectos funcionales, de esta forma, un área industrial puede ser perfectamente asociada a una clase biofísica de tipo <<construcciones>>.

Por otra parte, una misma categoría biofísica puede corresponder a un gran número de categorías funcionales, Así, áreas con vegetación herbácea podrían corresponder a césped en un medio urbano, a una pista de aterrizaje, a un prado cultivado, a un campo de golf o incluso al tejado de una iglesia en Islandia. A la inversa, una misma clase funcional puede cubrir varias categorías biofísicas, por ejemplo, un área residencial está formada por césped, edificios, carreteras asfaltadas, árboles, superficies con agua y suelo desnudo.

<sup>58</sup> Agua, rocas, edificios, etc.

<sup>59</sup> Residencial, forestal, industrial, etc.

### 1.6.3. Unidades de Observación, Objetos, Escala

En este subapartado no vamos a estudiar específicamente problemas como son: los objetos, la escala, etc., unidos a la aplicación de las nomenclaturas, pero sí analizaremos brevemente la influencia de estos factores en el campo concreto de la cobertura y de los usos del suelo, donde la dimensión espacial de la información es una limitación.

#### - **Problemas específicos de los Objetos en la Cobertura y en los Usos del Suelo**

El significado de un objeto,<sup>60</sup> en el contexto de la cobertura del suelo y del uso del suelo es un problema complejo: la descripción o clasificación categórica de una parte de la superficie de la tierra presupone que el área está claramente identificada en el espacio.

Los objetos son fácilmente identificables si los espacios son porciones de terreno de labor o zonas en construcción y si además tienen límites físicos, como: cercados, cercados con setos, vallas, clara división entre cultivos, etc. Sin embargo, estos límites se vuelven borrosos en los medios seminaturales, donde los problemas de delimitación están agravados en las zonas de transición. Este es el caso que presentan los ecosistemas mediterráneos, donde hay transiciones imperceptibles en el continuo biofísico de bosque, matorral y pastos secos (ejemplo: áreas de matorral).

Los problemas de delimitación además surgen cuando el uso del suelo está formado a partir de categorías basadas en la cobertura del suelo o se han empleado porcentajes.

#### - **Problemas específicos de la Escala y Agregación**

-

La dimensión geográfica es particularmente problemática cuando proviene de las escalas de observación. Un objeto identificado a gran escala, por ejemplo a escala 1:10 000, no es necesariamente discernible a una escala pequeña, por ejemplo a escala 1:500 000. Se puede pensar que está unido con un objeto más grande, pero del mismo tipo, produciéndose una agregación homogénea.

Pero frecuentemente este objeto está incluido en una vaga colección de objetos no relacionados, formando una agregación heterogénea que debe ser identificada y nombrada.

---

<sup>60</sup> De acuerdo con el lingüista Saussure, la cuestión de unidades es evidente para la mayoría de los dominios cubiertos (el utilizará el ejemplo de la Zoología, donde la unidad es el animal). Para la cobertura/usos del suelo esto no es un caso tan claro.

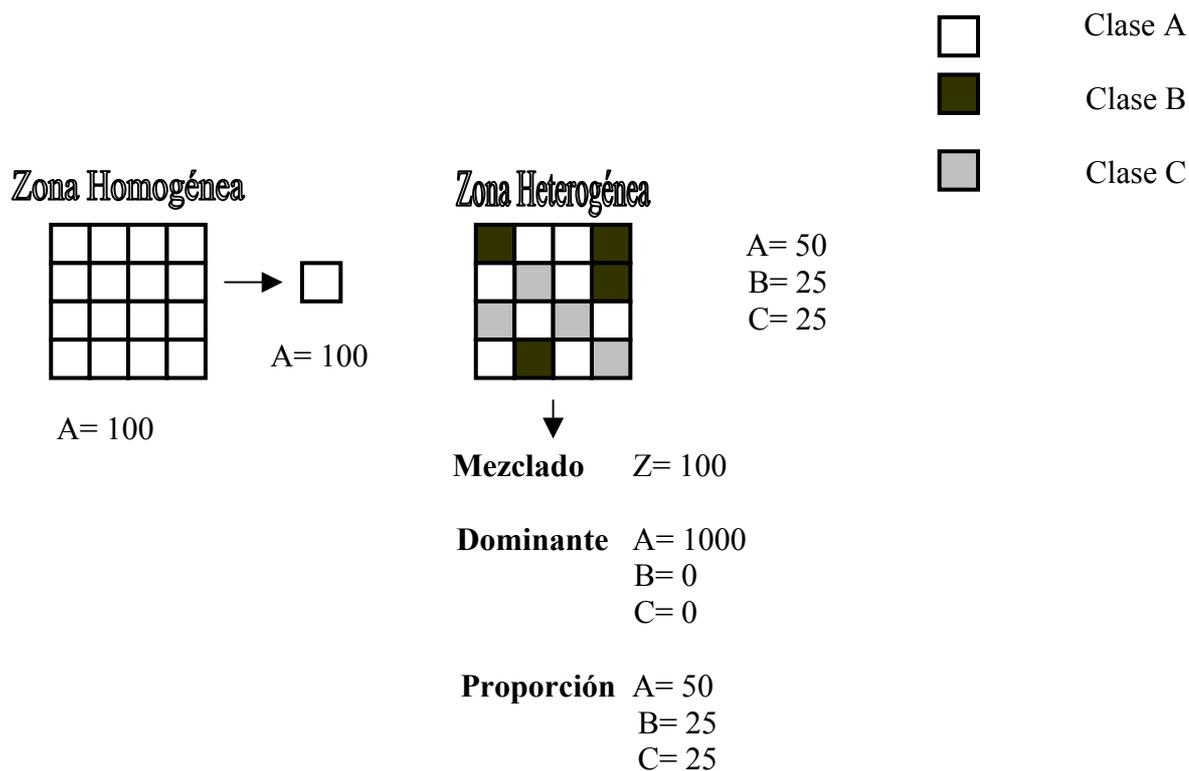


Figura 7. Análisis de una Agregación Heterogénea

#### 1.6.4. Nomenclaturas con Coberturas/ Usos del Suelo múltiples

Es importante tener en cuenta el concepto de *usos múltiples* y de *cobertura múltiples* en la ocupación del suelo. Existen tres tipos de coberturas o usos múltiples, que a su vez pueden ser combinadas, estos son:

- *Por Yuxtaposición.* Una mezcla de coberturas o usos, *por yuxtaposición*, depende en gran medida de la escala y de las unidades de observación. Las estadísticas agrícolas aplican la regla de pro rata en el caso de cultivos asociados. Muchas <<nomenclaturas>> tienden a resolver el problema cuando las clases mixtas,<sup>61</sup> tales nomenclaturas entonces toman las características de leyenda de mapa.
- *Por Superposición.* Las mezclas espaciales en la tercera dimensión son creadas por *superposición* de diferentes capas de cobertura; este fenómeno es independiente de la escala. Las estadísticas agrícolas aplican aquí también la regla de pro rata.<sup>62</sup> Algunas veces emplean reglas específicas como la de *dominancia*.<sup>63</sup>
- *Las Mezclas Temporales* de coberturas o usos son altamente dependientes del período de observación. Así, las estadísticas agrícolas emplean la *regla general*

<sup>61</sup> Las cuales son contrarias al principio de ausencia de solapamiento.

<sup>62</sup> Caso de cultivos asociados con áreas de bosque.

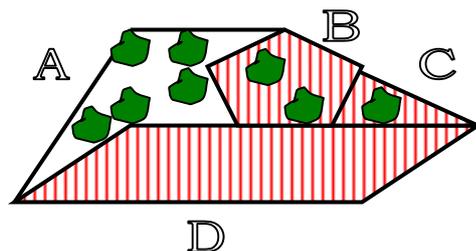
<sup>63</sup> Un ejemplo de usos dominantes para áreas urbanas se encuentra en la nomenclatura CLUSTERS.

*de cultivo*, esto significa que el cultivo será principal si tiene el principal valor comercial, y no será aplicable cuando permanezca largo tiempo en la parcela.

Las decisiones sobre la aplicación de reglas pueden tener un impacto considerable sobre las posibilidades de explotación<sup>64</sup> de esa información.

La regla de pro rata sí se aplica a un área extensa de cobertura o uso tiene considerables ventajas: *desde el punto de vista estadístico* porque, por ejemplo, resulta importante la posibilidad de cuantificar todas las áreas cubiertas por un trigo incluyendo aquellas donde el trigo crezca junto a un bosque; *desde un punto de vista cartográfico*, por la limitación del número de clases al número de clases de la nomenclatura; y *desde un punto de vista temático*, porque es posible delinear, por ejemplo, áreas agroforestales mediante la selección de áreas donde se registra un doble uso o cobertura, como es el caso de <<agricultura y bosque>>.

De manera recíproca, la inclusión de clases mixtas tiene algunas desventajas: *desde el punto de vista estadístico*, por ejemplo, el trigo es encontrado en diferentes categorías sin ninguna posibilidad de discriminación, resultando en detrimento de la información; *desde un punto de vista cartográfico*, hay una gran cantidad de temas mixtos para ser cartografiados, por lo que debe tomarse una decisión sobre las condiciones de umbral que discriminen a las categorías.



**Acercamiento Estadístico  
(pro rata)**

**Acercamiento Cartográfico  
(Clases mixtas)**

Parcela	Cobertura X	Cobertura Y	TOTAL		Parcela	Cobertura X	Cobertura Y	Cobertura Z (Mixta X+Y)	TOTAL
A	50	0	50		A	50	0	0	50
B	25	10	35		B	0	0	35	35
C	5	15	20		C	0	0	20	20
D	0	60	60		D	0	60	0	60
TOTAL	80	85	165		TOTAL	50	60	55	165



<sup>64</sup> Para una colección de datos, la regla pro rata no es fácil de aplicar y tiene algunas consecuencias en términos de coste.

	Explotación		Explotación
+	Estadística: los totales para Las coberturas X e Y son Fiables.	-	Estadística: los totales X e Y están desestimados.
+	Cartográfica: la leyenda es equivalente a la nomenclatura.	-	Cartográfica: un mínimo de 3 clases son necesarias, más si se aplican umbrales.
+	Uso temático: las coberturas Mixtas deben ser extraídas (parcelas X e Y).	+	Uso temático: las coberturas mixtas son parcelas con Z.

Figura 8. Coberturas/Usos múltiples

### 1.6.5. Requerimientos específicos para la construcción de Nomenclaturas de Cobertura/Usos del Suelo

#### Consistencia Espacial

El principio de consistencia espacial requiere que las nomenclaturas se diseñen de forma que los resultados sean compatibles entre diferentes áreas, regiones o países en el campo geográfico tenido en cuenta.

#### Consistencia Semántica

La nomenclatura debe también cumplir con el principio de consistencia semántica. Para ello será exhaustiva, es decir, tiene que cubrir todos los tipos de cobertura y/o usos del suelo, y permitir la discriminación entre todos los diferentes tipos de suelo.<sup>65</sup>

La nomenclatura deberá separar los diferentes tipos usos y de coberturas del suelo en vez de dividir el territorio.

Un ejemplo interesante lo aporta el CORINE Land-Cover: una nomenclatura es un listado de categorías donde los objetos están clasificados de acuerdo a ciertos objetivos que son asignados a grupos, dependiendo de unas características elegidas. Una nomenclatura de Cobertura del Suelo está diseñada con el propósito de separar tipos de cobertura. Sin embargo, muchas <<nomenclaturas>> son de hecho <<leyendas>> que dividen el territorio, es decir, las categorías están principalmente descritas en términos de paisaje. Una categoría CORINE Land-Cover como es <<área heterogénea>> no es el resultado de una separación de tipos de cobertura del suelo, sino que es el resultado de la división del territorio en tipos de paisaje.

<sup>65</sup> Principio de ausencia de solapamiento.

Una clase de una nomenclatura debe corresponder a un tipo de uso del suelo, y solo a uno. Un tipo de uso del suelo debe estar designado a una clase, y solo a una. Por lo tanto, las clases mixtas tendrán que ser sistemáticamente excluidas.

### **Consistencia Temporal**

Los tipos de usos o de cobertura del suelo deberán ser registrados en el tiempo de observación (por el observador, por el sensor del satélite,...). La nomenclatura no debe, por consiguiente, tener en cuenta las situaciones anteriores o futuras,<sup>66</sup> y los resultados tendrán que ser considerados como inventarios. Esto constituye el principio de consistencia temporal. Sin embargo, hay que poner especial atención en las áreas donde los cambios se producen en cortos períodos de tiempo.

Los siguientes ejemplos ayudarán a una mejor comprensión de lo expuesto:

- Ejemplo de <<Suelo arable>>. El caso del suelo arable se caracteriza por patrones cíclicos de cobertura como son: suelos desnudos y suelos cultivados; aquí sería necesario modificar el estricto principio de consistencia temporal y considerar las características de la cobertura del suelo sobre períodos de tiempo, es decir mediante el establecimiento de reglas, por ejemplo: sin sobrepasar, en principio, un año o una estación de cultivo.
- Ejemplo << ECE- nomenclatura de usos del suelo>>. La nomenclatura de la UNE-ECE (United Nations- Economic Commission for Europe) consta de una categoría 3.9.4. <<Suelo previsto para futuras construcciones>>, definida como: áreas de suelo designadas como suelos públicos planificados para la construcción, pero donde los trabajos de construcción aún no han comenzado. Habría que preguntarse qué pasará si no se construye después de 2 años y qué significado tiene la información aportada.

### **Compatibilidad con Nomenclaturas existentes**

Una nomenclatura de usos del suelo o de cobertura del suelo posee un valor inestimable para una compilación sobre información territorial a escala internacional o para los sistemas globales de información estadística sobre cobertura/usos del suelo.

Sin embargo, la creación de una nomenclatura para un uso general puede estar solamente justificada si permite ser comparada, en un alto grado, con los sistemas de información existentes.

El propósito de la nomenclatura debería de esta manera ser << suficientemente>> compatible con las nomenclaturas existentes con el fin de poder extraer conclusiones significativas que sean utilizadas como información de referencia en diferentes fuentes relevantes.

Hay que señalar que, la capacidad de comparación entre dos sistemas de información no se limita sólo a la cuestión de la nomenclatura, también incorpora aspectos

---

<sup>66</sup> Un ejemplo: la planificación en áreas de edificación, es un uso previsto usual.

como son estadísticas de población, unidades de observación, métodos de observación, principios de clasificación, dimensión temporal, etcétera.

### **Independencia a partir de la Recogida de Datos y Herramientas de Procesamiento**

La experiencia práctica ha demostrado que es difícil construir una nomenclatura que no esté directamente influenciada por los métodos de observación utilizados.

Muchas nomenclaturas están siendo adaptadas a las herramientas de observación como son las fotografías aéreas o los datos procedentes de observación de satélites. Cuando las fuentes y/o herramientas de observación son cambiadas, la nomenclatura no es capaz de adaptarse y surgen los problemas de continuidad de las series de información. Frecuentemente, la solución está en encontrar la disponibilidad entre las herramientas y las necesidades de los usuarios.

## **2. NORMALIZACIÓN / ARMONIZACIÓN DE NOMENCLATURAS**

### **2.1. Principios básicos para la creación de un Sistema Generativo de Nomenclaturas**

#### **2.1.1. Introducción**

Actualmente, existe la necesidad de desarrollar mecanismos que faciliten el enlace entre nomenclaturas, en lugar de crear una nomenclatura universal sobre la cobertura y los usos de suelo; mecanismos que deberán ser independientes de las diferentes restricciones que conllevan la construcción de este tipo de nomenclaturas de ocupación del suelo.

Estos mecanismos consisten en el establecimiento de un sistema combinatorio aplicado sobre una base común. Esta base deberá ser el conjunto de características imprescindibles para la descripción de los objetos. Y estas características, una vez identificadas y definidas uniformemente, permitirán a través de combinaciones, la definición de los objetos y el agrupamiento de objetos para todas las posibles nomenclaturas.

Dichas características son denominadas: atributos, clasificadores, características distintivas, descriptores, predictores, variables independientes.

#### **2.1.2. Una Aproximación Teórica: Objetos, Conceptos e Imágenes**

Las propiedades de los *Objetos* en el mundo real están representados mediante *Conceptos*. Con el fin de evitar confusiones o malentendidos, vamos a explicar las relaciones que se establecen entre imágenes, conceptos y objetos del mundo real.

Tradicionalmente las relaciones entre imágenes, conceptos y objetos son representadas mediante el denominado *Triángulo Significativo*.<sup>67</sup> Este triángulo, conocido también con el nombre de *Triángulo Semiótico*, está compuesto por tres puntos, cada uno

---

<sup>67</sup> Adaptación del triángulo de Aristóteles.

de los cuales indica un componente separado y que pueden estar relacionados en el pensamiento o en la comunicación.

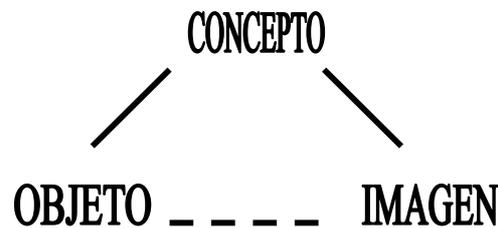


Figura 1. Triángulo Significativo

- *Los Conceptos* son la representación mental de los objetos. El Concepto es la idea o pensamiento que se tiene del Objeto retenida en la mente de una persona, referido a un contexto de relación o bien asociado a conceptos que emanan del uso, de la tradición cultural o de teorías científicas.
- *EL Objeto* es una entidad del mundo real o del mundo imaginario que es retenida como una idea. Ese Objeto o Referente<sup>68</sup> es un elemento de la realidad extralingüística. Puede ser un Objeto o varios los considerados constitutivos de una unidad. Está claro que la visión o la observación de un Objeto particular produce un específico reconocimiento característico del Objeto, el cual no es reconocido por la mente en términos de unidades conceptuales o imágenes, pero sí en términos de estructuras más generales y abstractas (mediante un *esquema*).
- *La Imagen*. Los Referentes (Objetos) y los Conceptos son codificados mediante unidades lingüísticas o simbólicas: las Imágenes.<sup>69</sup> Las Imágenes son utilizadas para identificar los Conceptos. De acuerdo con la Escuela Lingüística de Viena, una Imagen debería designar un Concepto y solo a uno, y cada Concepto debería estar designado por una sola Imagen, es decir, se establecería una correspondencia biyectiva.

Cada uno de los componentes anteriores puede estar presente sin los otros. Un Objeto no depende de las ideas formadas sobre él, un Concepto puede formarse sobre un Objeto que no exista (un duende) y una Imagen o un término puede ser retenido sin conocer que Objeto lo representa (una palabra en una lengua extranjera)

Podemos hacer una lectura del Triángulo Significativo, de la siguiente manera:

1 Cualquier Concepto es conocido a través de un Objeto. Cualquier Objeto es conceptualizado mediante un Concepto. Por ejemplo: la referencia del Concepto <<humedales>>, es la clase de todos los objetos que pertenecen a la clase <<humedales>>.

<sup>68</sup> Referente, se emplea en terminología lingüística.

<sup>69</sup> Imágenes también denominadas: términos, símbolos, signos, significados en la terminología lingüística.

El sentido del Concepto <<humedales>> viene dado por un contexto de relación o por conceptos asociados.

2 Cualquier Concepto puede ser designado por una Imagen: Cualquier Imagen significa un Concepto. Por ejemplo: la Imagen o término <<humedales>> es un término, una denominación, la cual designa el Concepto <<humedales>>. Esta designación es convencional y está basada en reglas, que pueden ser enormemente variadas dependiendo de los usuarios, de los científicos, etcétera.

3 La relación ente Imagen y Objeto no es directa, pero está atribuida como la combinación de la relación entre Imagen y Concepto, y la relación entre Concepto y Objeto. No existe una relación directa e invariable entre la percepción de un Objeto y la Imagen encontrada para referir ese Objeto.

Existe además, una relación entre una Imagen (un término) y la referencia de clase del correspondiente Concepto. El término <<humedales>> denota la referencia de clase del Concepto <<humedales>>. Existe además, una relación directa entre el término y el significado del Concepto: esto se denomina *connotación*. Adicionalmente, existe una relación de poder entre un símbolo (un término) y la propiedad representada por el Concepto correspondiente.

### **2.1. 3. Propiedades de los Objetos y Clasificadores Identificación de Objetos**

Describir un Objeto es explicar sus propiedades. Las propiedades de los objetos son hechos<sup>70</sup> o fenómenos.<sup>71</sup> Las propiedades de los fenómenos pueden ser más o menos objetivas.

#### **Abstracción de Objetos a través de Clasificadores**

Después de identificar un Objeto, se crea una abstracción para describirlo, como un conjunto de clasificadores (y operaciones). Un *clasificador* es una representación conceptual de una propiedad de un Objeto. Es una regla de decisión que es específica para cada observación (Objeto) con la clase que hay que asignar. Los clasificadores en una nomenclatura, representan las propiedades<sup>72</sup> características y relevantes de los objetivos o propósitos de la nomenclatura.

Como ejemplo de lo anteriormente expuesto vamos a describir qué propiedades son las características de los <<pastos naturales con uso agrícola>> (rough grazing): nos referimos a aquellas áreas que se utilizan regularmente para pastos con una bajas producción anual. Las características principales que pueden emplearse para discriminar esta categoría a partir de otras son: uso agrícola, pasto, producción anual > 1 500 unidades de pienso por ha. Las características de cobertura del suelo no podrán ser empleadas apropiadamente como <<pastos naturales con uso agrícola>> si nos referimos a áreas boscosas, zonas arbustivas y pastizales.

---

<sup>70</sup> Existentes independientemente del observador: por ejemplo, una cobertura como el agua.

<sup>71</sup> Dependientes de una interpretación: por ejemplo, un bosque, los sabores, los colores.

<sup>72</sup> Propiedades: no obstante, hay que tener presente el hecho de que un atributo de un Objeto puede ser distinto en otro contexto.

Los clasificadores soportan valores de datos relacionados con un Objeto. Un clasificador debe describir un aspecto del Objeto y debe ser atómico.<sup>73</sup> Los clasificadores deberán ser definidos independientemente de otros y sus valores no dependerán del valor de otro clasificador.

Los clasificadores podrán ser *Booleanos*,<sup>74</sup> *Cartesianos*<sup>75</sup> o *Terminológicos*.<sup>76</sup>

Veamos como ejemplo de lo anteriormente expuesto los clasificadores utilizados por la FAO, estos son de tres tipos:

- Booleanos: vegetación primaria /vegetación no primaria.
- Cartesianos: cobertura >70%, cobertura 20-70%, cobertura <20%.
- Terminológicos: hoja ancha, hoja acicular, sin hojas.

### **Agrupamiento Directo o Combinatoria**

Los Objetos que pertenecen a una clase tienen características comunes.

Existen dos principios fundamentales para el agrupamiento de Objetos: el Agrupamiento Directo y la Combinatoria.

- En un *Agrupamiento Directo*, las clases están identificadas a través de una combinación de propiedades que atienden a los propósitos de la nomenclatura. Por ejemplo, un agrupamiento directo de las partes de un edificio son las paredes, el suelo, los cimientos, el techo, las ventanas, etcétera.
- En una *Combinatoria*, agrupamos uno o varios conjuntos de clasificadores que pueden ser libremente combinados. Esto se denomina *Facetado*. Una *Faceta* es un conjunto exhaustivo de propiedades de similar clase, por ejemplo: las funciones que posibilitan jerarquizar a todos los miembros de una colección. Una nomenclatura facetada permite combinar libremente un conjunto de propiedades que caracterizan un Objeto. La misma colección de objetos podría ser clasificada en diferentes sistemas de nomenclaturas para distintos propósitos.

Un ejemplo de clasificación facetada es el siguiente: clasificar y estructurar áreas de agua en una nomenclatura es una tarea compleja. Existen nomenclaturas con divisiones de áreas de agua según diferentes propósitos. Un ejemplo es la Clasificación de Línea Base del Reino Unido,<sup>77</sup> esta clasificación contiene un apartado <<Humedales y Agua>> donde se han discriminado en primer lugar el agua estancada de las corrientes de agua y humedales. Está claro que las aguas costeras forman parte de otra categoría específica. Dentro del agua estancada, se ha establecido una discriminación entre lagos, reservas y estanques. Para distinguir las corrientes de agua se establece una diferenciación entre ríos y canales. A un nivel inferior, se hace una distinción entre aguas

---

<sup>73</sup> Por ejemplo, *Nombre* es un mal clasificador porque podrá ser dividido en *Nombre* y *Apellidos*.

<sup>74</sup> División: A, no A.

<sup>75</sup> División: más A, menos A.

<sup>76</sup> A, B, C,...

<sup>77</sup> ITE, *Baseline Classification of Land Use, Land Cover and Vegetation Type*, UK, 1990.

estancadas y aguas emergentes macrofitas, esta dicotomía sólo puede ser introducida a partir del establecimiento de una estructura por repetición que lleva hasta diez categorías.

Cuando introducimos facetas adicionales necesarias para otros propósitos, las categorías se vuelven inmanejables, esto sucede, por ejemplo, si introducimos información adicional como pueden ser los usos del agua.

Una combinatoria de propiedades básicas permite un mejor manejo de la información. De esta forma, clasificadores básicos como: [inmóvil o no móvil = corriente de agua], [costero o no costero = tierra adentro], [agua abiertas o no abiertas = macrofitas emergentes], [acuicultura o no acuicultura], resultarían interesantes en diferentes aplicaciones. Por ejemplo, si nos referimos a una nomenclatura con propósitos medioambientales, se podrían emplear en sus niveles superiores clasificadores como: [inmóvil o móvil = corriente de agua] y [aguas abiertas o no abiertas = macrofitas emergentes]. Por el contrario, si nos estamos refiriendo a una nomenclatura dedicada a propósitos socioeconómicos enlazaríamos los clasificadores con usos del suelo como: [acuicultura o no acuicultura].

### **Algunos Principios para Diseñar un Sistema de Clasificadores**

Algunos de los principios más importantes para el diseño de un sistema de clasificadores incluyen:

- La separación de la organización contextual de la información (semántica), de la manera o forma como esa información es codificada (sintaxis).
- Muchas formas de clasificar la información son independientes unas de otras, pero pueden ser aplicadas de manera combinada. Por ejemplo, todos los ciudadanos pueden ser descritos de acuerdo a la fecha de su nacimiento, sexo, lugar de nacimiento; esos atributos son independientes unos de otros. En los sistemas tradicionales de nomenclaturas, este principio ha sido denominado nomenclatura facetada. Para la cobertura y el uso del suelo, los atributos deberían ser completamente independientes unos de otros.
- Rehusar las nomenclaturas nacionales e internacionales siempre que no sean apropiadas. El motivo de esta decisión es una consideración puramente pragmática. Para la aplicación del uso estricto del principio de ortogonalidad, debería ser posible contar con esas incompatibilidades tanto como sea posible, acotarlas dentro de unos límites bien definidos y solucionarlas mediante la conversión a tablas para campos individuales.
- Principio de economía en el número de clasificadores. Su objetivo es eliminar todas las redundancias posibles y limitar el número de clasificadores. La solución ideal es un sistema dicotómico puro como el existente en Fonología, basado en un sistema binario de presencia o ausencia de atributos.
- Principio de maximizar el uso de claves dicotómicas. Las claves dicotómicas (clasificadores booleanos: A, o no A) pueden ser empleadas a través de una serie de preguntas contestadas directamente con: Si o NO. Esto facilita la toma de decisiones, pero no presta atención a la tendencia en el incremento del número de clasificadores.

- La cuestión del hieratismo de los clasificadores. Una nomenclatura puede ser creada científicamente. Sin embargo, el establecimiento de un orden en un conjunto de objetos precisa una operación conceptual. Hasta cierto punto, las cosas no tienen límites claros, las propiedades van en grados, no en distintos apartados. Una nomenclatura basada en las propiedades intrínsecas de una cosa se denomina *nomenclatura natural*, mientras que una nomenclatura basada en las propiedades de los fenómenos, como la apariencia, se denomina *nomenclatura artificial*. En una nomenclatura, los objetos son clasificados en diferentes clases donde cada clase es un conjunto compuesto por esos miembros y determinado por propiedades relevantes de la nomenclatura. Las propiedades que determinan las clases en una colección pueden estar ordenadas por su pureza, desde lo general a lo específico. Las propiedades de un rango superior son generales y las propiedades de un rango inferior son específicas de los miembros de la colección.

Como ejemplo de lo anteriormente expuesto, vamos a analizar un Objeto, *un elefante*. Los atributos que discriminan a los elefantes de otras cosas son: [+ animal], [+ tamaño grande], [+ piel gris], [+ trompa]. El primer atributo, animal, elimina a los objetos inanimados, seres humanos y plantas. El segundo atributo, tamaño grande, incluso si grande es un atributo subjetivo, eliminará a animales como un ratón. El tercer atributo, piel gris, elimina al mismo tiempo a animales sin piel y a animales con piel distinta de la gris. Y el cuarto atributo, trompa, discrimina a los elefantes de las ballenas.

Aplicando los atributos en un orden diferente del anterior, llegaríamos a discriminar a los elefantes, pero de manera distinta: [+ trompa] eliminaríamos todas las cosas sin trompa, es decir, básicamente cosas inanimadas, plantas, seres humanos y muchos animales. Los restantes Objetos podrían ser elefantes y osos hormigueros. [+ piel gris], pero no separaría los elefantes de los osos hormigueros, considerando [+ tamaño grande] sí podría. De esta manera, si en la segunda forma aplicamos atributos el resultado será más eficiente (gracias al poder discriminatorio de trompa), y nos encontramos ante un tipo de orden natural que puede ser fácilmente sobreentendido por la mayoría de nosotros.

En niveles superiores de una jerarquía en Zoología, por ejemplo, parece natural la oposición entre vertebrados e invertebrados. Una primera distinción basada en el color rosa de la piel sería inapropiada e incluso lo sería en las categorías del final. Esto nos lleva a la conclusión de que los atributos necesitan ser organizados para describir *naturalmente* los diferentes niveles de agregación en una división.

El empleo de atributos puede ser utilizado en las reglas de decisión para la clasificación de objetos en una nomenclatura dada. La siguiente tabla muestra la cadena de decisión de acuerdo al Triángulo Significativo.<sup>78</sup>

---

<sup>78</sup> Véase figura 1 pág. 99, cap. 5.

	animal	Tamaño grande	Piel gris	Con trompa	Nombre (imagen)	Código Nomenclatura
	+	+	+	+	Elefante	AH B2 00
	+	+	+	-	Balena	AV Z3 00
	+	-	+	+	Osorio Hormiguero	AB K5 41

**OBJETO**
**CONCEPTO**
**Término Código**  
**IMAGEN**

Figura 3. Ejemplo de aplicación de reglas de decisión según el Triángulo Significativo

### Diferentes campos de aplicación de los Clasificadores

El anterior ejemplo puede ser utilizado en numerosos campos de aplicación. Algunas de esas aplicaciones son famosas, es el caso de las realizadas por Linneo, Mendeleev o Jakobson, todos ellos han contribuido decisivamente al establecimiento de una metodología sistemática para la clasificación o estructuración de sus respectivos dominios o campos científicos. El objetivo de este subapartado es recordar las aplicaciones más significativas de empleo de clasificadores en: Botánica, Lingüística, Química.

#### - Botánica

*Sistema Natural de Linneo.* Linneo idea en 1735 un detallado sistema de nomenclatura para todos los animales, plantas y minerales (Sistema naturae). Su posterior obra <<Species Plantarum>>, publicada en 1753, fue el primer informe de todas las plantas entonces conocidas, las identificó de acuerdo a un sistema simple, por el cual podían ser fácilmente reconocidas y les dio a cada una de ellas un nombre de solo dos palabras: un nombre de género y un epíteto específico. Linneo dividió el reino vegetal en 24 clases basadas en el número y disposición de los estambres y en 67 órdenes basados en el número y disposición de los pistilos. Este sistema binomial fue el punto de arranque de las modernas nomenclaturas botánicas y este sistema es ahora utilizado en Botánica como en Zoología. En el s XVIII, el sistema fue considerado controvertido por los botánicos de la época. La contribución de Linneo en nomenclatura ha sido muy importante.

#### - Lingüística

*Estructuralismo y Gramática Generativa.* Después de innumerables investigaciones históricas y comparativas en lingüística, las investigaciones descriptivas tendieron a describir el lenguaje desde una perspectiva sincrónica.

Uno de los méritos del Estructuralismo, a través de Saussure y, sobre todo, de la Escuela de Praga, fue colocar a la Lingüística como ciencia del lenguaje. Por ejemplo, se demostró que los significados están formados por conjuntos o por ilimitados componentes semánticos, unidades sémicas, denominadas semas. Así, un morfema como un <<sillón>> puede ser descrito con los siguientes semas [con brazos], [con espalda], [para sentarse]; se trata pues, de un conjunto de semas espacio-visuales y semas funcionales. En Fonología, un morfema podría estar caracterizado como segmentos de una cuerda que pueden ser representados como un conjunto binario, articulado, acústico o porcentual de las características distintivas de los sonidos. Por ejemplo, el segmento / a / se describiría como [- consonante], [+ vocal], [- difusa], [+ compacta], [+ grave], [- llana], [+ sonora], [+ continua], [- estridente], [- nasal]. Este segmento puede incluso ser clasificado entre otros segmentos como: sonora abierta vocal posterior.

### - Química

*Tabla Periódica de Mendeleev.* Mendeleev observó en 1869 una repetición periódica de las propiedades en elementos, cuando esos elementos eran ordenados de acuerdo a su número atómico. Entonces, los agrupó conforme a una tabla con columnas verticales, que denominó grupos, correspondiéndoles un número de valencia de electrón (este número determina las propiedades químicas de los elementos) y donde las líneas, llamadas períodos, correspondían con la carga de energía ocupada. Esta tabla contenía 63 elementos conocidos en esa época y tenía celdas en blanco puesto que Mendeleev estaba convencido que esos elementos serían descubiertos posteriormente (estaba en lo cierto). Los elementos químicos son, por lo tanto, descritos con dos atributos básicos: el número de valencia y el número de carga de energía ocupada.

#### 2.1.4. Clasificadores básicos de Cobertura y Usos del Suelo

La introducción y el empleo de clasificadores en un trabajo de nomenclatura contribuyen a:

- Una mejor comprensión (validación) de los sistemas de información existentes.
- Facilita la construcción de nomenclaturas de aplicación.
- Proporciona una herramienta para la Armonización entre los sistemas de información.
- Proporciona un lenguaje común sobre un restringido grupo de conceptos.
- Mejora la integración de los distintos tipos de datos.
- Racionaliza el conjunto de los datos y los procesos de interpretación.

#### Clasificadores de Cobertura del Suelo

Son varias las nomenclaturas que emplean actualmente clasificadores de Cobertura del suelo. Por ello, hemos considerado conveniente seleccionar, algunos ejemplos significativos de estas nomenclaturas y sus correspondientes sistemas de clasificadores, así como, una propuesta sobre clasificadores que consideramos imprescindibles para la Cobertura del suelo.

- **FAO.**<sup>79</sup> Utiliza tres grandes clasificadores en una primera fase de su nomenclatura o fase dicotómica y un conjunto variado de clasificadores en una

---

<sup>79</sup> Food and Agriculture Organization. ONU. Proyecto AFRICOVER.

fase posterior o fase modular, que describen las coberturas del suelo en 8 tipos distintos.

- Fase Dicotómica (3 clasificadores binarios):
  - Presencia de vegetación: vegetación primaria/ vegetación no primaria.
  - Condición edáfica: terrestre/ acuática.
  - Adaptación de la cobertura: artificial-gestionada/ seminatural.
  
- Fase Modular:
  - Fisonomía: leñosos/ herbáceos, entonces árbol/arbusto; leguminosas/ gramíneas, desnudo/ no desnudo, cobertura artificial/ cobertura no artificial, agua/ no agua, entonces permanente/ no permanente.
  - Tipo de hoja: hojas anchas, hojas estrechas, sin hojas, entonces fenología: caducifolias/ perennes.
  - Macroformas: estacionalidad del agua, niveles, prácticas culturales y carga de sedimentos son características también propuestas por la FAO, pero dependientes de la escala y/o enlazadas con el Uso del suelo (prácticas culturales).

- **CLUSTERS.**<sup>80</sup> Define 5 descriptores básicos de Cobertura: Árbol, Arbusto, Herbáceo, Desnudo, Agua. Y propone descriptores de Cobertura adicionales: combinación de tipo de hoja (ancha, estrecha) y textura (esclerófila), aspectos temporales (duración permanente, no permanente) para áreas agrícolas y forestales, taxonomía (especies).
- **Basisklassifikation des Bodennutzungen.**<sup>81</sup> Esta nomenclatura tiene definidas 9 clases de cobertura:
  - Forestal, arbustos y forrajes.
  - Tierra de labor, pastos y praderas, espacios verdes de ocio.
  - Brezales y otras áreas similares.
  - Edificios.
  - Vertederos.
  - Espacios en construcción.
  - Espacios abiertos con o sin vegetación.
  - Humedales.
  - Agua.
- **TER- UTI.**<sup>82</sup> Posee 8 agregaciones básicas que han sido definidas para la nomenclatura de Cobertura:
  - Agua permanente y humedales.
  - Suelos desnudos.
  - Áreas boscosas.
  - Suelos agrícolas.
  - Otros suelos.
  - Áreas artificiales no edificadas.

---

<sup>80</sup> Classification for Land Use Statistics. EUROSTAT. UE.

<sup>81</sup> Federal Ministry for Food, Agriculture and Forestry. Germany.

<sup>82</sup> Enquête d'Utilisation du Territoire . Service Central des Etudes et Enquêtes Statistiques (SCEES). Ministerio de Agricultura francés.

- Áreas en construcción.
- Zonas prohibidas.
- 

Si pretendemos elegir clasificadores básicos sobre Cobertura del suelo, un conjunto de atributos esenciales, para una primera aproximación podrían ser los siguientes:

- Leñoso.
- Herbáceo.
- Suelo desnudo.
- Infraestructuras.
- Agua.

### **Clasificadores de Usos del Suelo**

Con respecto a los clasificadores sobre Usos del suelo, hemos seleccionado los siguientes nomenclaturas:

- **ITE.**<sup>83</sup> Los clasificadores de Usos del suelo utilizados son de 4 tipos:
  - Clases/ Servicios (conservación, transporte, comunicación, etc.).
  - Infraestructuras (edificios, transporte-comunicaciones, plantas industriales, etc.).
  - Secuencias Operacionales (producción de cultivos, conservación, ocio y turismo, etc.).
  - Productos/ Beneficios (recursos medioambientales, beneficios socioeconómicos, etc.).
- **Basisklassifikation des Bodennutzungen.** Define 14 clases de usos:
  - Agricultura.
  - Industria, forestal y pesquerías.
  - Energía.
  - Minería y cantería.
  - Escombreras.
  - Construcción.
  - Comercio, crédito, seguros, servicios.
  - Transporte.
  - Administración pública, salud.
  - Residencial.
  - Deporte, ocio.
  - Arte, cultura.
  - Mixto.
  - No Uso.
- **TER- UTI.** Se definieron 3 clasificadores básicos para la parte funcional (Usos) de la nomenclatura:
  - Producción primaria (subdividida en minería, agricultura, agricultura ocasional, forestal, pesquerías).

---

<sup>83</sup> Institute of Terrestrial Ecology. United Kingdom.

- Producción secundaria (industria, energía).
- Servicios y diversos (subdividida en 18 categorías).

Consideramos que algunos de los clasificadores básicos de Usos del suelo podrían ser los siguientes:

- Agricultura.
- Forestal.
- Minería.
- Vertederos.
- Industrial.
- Construcción.
- Transportes.
- Servicios.
- Residencial.
- Ocio.
- Sin Uso.

## **2.2. Armonización entre Nomenclaturas**

Si pretendemos armonizar nomenclaturas, resulta evidente que la posibilidad de armonización requiere un conjunto común de clasificadores. Por lo tanto, una armonización completa entre nomenclaturas vendrá establecida mediante la descripción exhaustiva de todas las categorías, que a su vez ayudarán a la implantación de clasificadores. De esta forma, problemas habituales como son los relacionados con la presencia de clases mixtas, pueden incluso ser resueltos mediante la condición de utilizar clasificadores similares.

El trabajo de armonización conlleva dificultades obvias, una de las más habituales es la correspondencia entre las diferentes clases. Pero creemos que el trabajo de armonización sería relativamente sencillo si trabajáramos con un conjunto restringido de conceptos,<sup>84</sup> mediante los clasificadores básicos, en vez de emplear la totalidad de las categorías.

Por otra parte, resulta necesario hacer referencia a la importancia que adquiere el desarrollo exhaustivo y la construcción sistemática de la parte textual de la nomenclatura.

Si nos referimos a los Usos del suelo, de manera específica, será de gran ayuda la adopción de clasificadores armonizados y estandarizados de Usos del suelo procedentes de clasificaciones socioeconómicas internacionales, como por ejemplo, la clasificación NACE<sup>85</sup> de la Unión Europea, en nuestro caso.

## **2.3. Normalización /Armonización**

Es inevitable que un conjunto de datos, su procesamiento, validación, así como su manejo y difusión sean empleados de maneras diferentes dependiendo de las distintas necesidades de los usuarios. Esto sucede porque algunas nomenclaturas están más

---

<sup>84</sup> Conceptos = Atributos.

<sup>85</sup> NACE: Statistical Classification of Economic Activities in de EC.

adaptadas a las necesidades de los usuarios y porque hay un frecuente y comprensible flujo de sistemas de producción independientes.

Las nomenclaturas sujetas a dichos sistemas se han adaptado a las herramientas disponibles, es decir, centradas en temas sin ningún propósito o intención de ser interrelacionados con otros temas: por lo tanto, son los sistemas de información los inherentemente incompatibles.

La Normalización de las nomenclaturas de Cobertura y Usos del suelo, con el fin de adoptar un sistema común, sería lo deseable, pero resulta muy difícil de conseguir, porque supone, por un lado, una fuerte inversión en los sistemas existentes y, por otro lado, hay que tener presente las necesidades particulares de los usuarios.

La Armonización de los sistemas existentes, es una cuestión que actualmente se está planteando en el contexto europeo y mundial, fundamentalmente en temas de aplicación general de dichas nomenclaturas de Cobertura/Usos del suelo, como son por ejemplo, los estudios referidos al Cambio Global, lo que significa un importante paso. La Armonización permitiría a los usuarios seguir trabajando con los sistemas y las nomenclaturas actuales, a la vez que conduciría al desarrollo de herramientas que posibiliten la comparación entre los diferentes paquetes de datos existentes, con el mínimo esfuerzo y sin pérdidas de información.

### 3. BIBLIOGRAFÍA:

- Anderson, J.R.; Roach, J.T.; Witmer, R.E., *A Land Use and land Cover Classification System for Use with Remote Sensor Data*, Ed. U.S. Geological Survey, Washintong DC, 1976, pp.28.
- Barisano, E.; Braunstein, S., *Proposal for a landcover leyend for Africa (AFRICOVER)*, FAO, 1996.
- Comité IGBP (International Geosphere-Biosphere Programme), “ Global Change and the Medierranean Region”, *Report of the ENRICH/START International Workshop* , Informe nº 2, Madrid, 1997, pp. 78.
- FAO, *Classification and mapping of vegetation types in tropical Asia*, FAO, Rome, 1989.
- ITE/UNEP/FAO, *Glossary of Land Cover Attributes – Draft version*, 29 June 1995.
- Wyatt, D. et al., *Comparisons of land cover definitions* , Final report- ITE Projet to2017b1, 1994.

**Tema 66. Técnicas cartográficas actuales: producción electrónica de cartografía y documentos. Edición electrónica. Transformación analógica/ digital y digital/analógica. Salidas de la información. Transformación de datos: correcciones, conversiones y fusión.**

INDICE

1. Técnicas cartográficas actuales: Proceso electrónico
2. Edición electrónica
3. Adquisición de información. Transformación analógica /digital (ADC)
4. Procesamiento de la información
5. Salidas de la información
  - 5.1 Conversión y explotación de información digital en analógica (convertidor digital/analógico – DAC – )
  - 5.2 Explotación directa de la información digital
6. Transformación de datos: correcciones geométricas, conversiones, fusión de datos
  - 6.1 Transformación conforme en dos dimensiones
  - 6.2 Transformación afin de dos dimensiones
  - 6.3 Transformación proyectiva en dos dimensiones
  - 6.4 Transformaciones complejas
  - 6.5 Fusión de datos
    - 6.5.1 Métodos geométricos
    - 6.5.2 Métodos topológicos
    - 6.5.3 Métodos basados en atributos
7. Bibliografía

## 1. Técnicas cartográficas actuales: Proceso electrónico

Las técnicas cartográficas actuales se basan básicamente en el “proceso electrónico de documentos”, el cual se refiere fundamentalmente a los sistemas digitales existentes en el tratamiento de la información, tanto en sus fases de captura y procesamiento, como de salida o explotación de la misma.

Dicha información estará compuesta de diferentes fuentes y estructuras con imágenes, gráficos, texto, etc., pero siempre en forma digital.

Por ello y una vez estudiado el tratamiento de imágenes como caso particular del tratamiento de señales, tienen especial importancia en el proceso electrónico de documentos, el análisis de los sistemas de conversión de formato analógico a digital (captura) –ADC– y de digital a analógico (salidas) –DAC– de las citadas fuentes.

## 2. Edición electrónica

Como ya se ha indicado anteriormente, la edición electrónica se realizará siempre sobre un formato digital de la información. Dicho formato digital podrá ser en origen en forma digital (creado por los programas correspondientes) en todas sus fuentes (texto, imagen, gráficos, etc.) dando lugar a los **documentos digitales**, o bien proceder de la conversión analógica/digital (escaneado) de documentos analógicos, llamándose entonces **documentos digitalizados**.

Conviene recordar que se conoce como **documentos multimedia**, aquellos documentos compuestos de diferentes fuentes y estructuras que incorporan no sólo documentos digitales o digitalizados, sino también a los procedentes de otros tipos de señales, como son audio y vídeo; por ello, todo documento multimedia es digital en sí mismo.

La **edición electrónica** necesita el conocimiento de las siguientes técnicas y herramientas:

- Estudio de formatos y métodos de compresión según fuentes y tipo de explotación.
- Definición de flujos de información y de trabajo.
- Gestión documental, donde a su vez se incluyen los siguientes procesos:

- Sistemas de tratamiento:
    - Preparación de documentos.
    - Reconocimiento de formas.
    - Mejoras y Ajustes, etc.
    - Composición de páginas y maquetación.
  - Sistemas de catalogación, clasificación y consulta.
  - Sistemas de entrada/salida.
- Sistemas de almacenamiento de la información en función de los sistemas de gestión documental necesarios y del tipo de explotación (*on line*, *off line* y servidores correspondientes).
  - Sistemas de control de calidad.

Los sistemas **multimedia**, que tienen su impulso a partir de 1989, incorporan cada vez con mayor eficacia audio y vídeo, imágenes, animación, etc. Se utilizan, tanto en proyectos puramente informáticos, como en sistemas de correo y emisión/transmisión de información.

Su éxito está condicionado por la existencia de:

- Sistemas de procesamiento en paralelo y de gran rapidez de cálculo.
- Sistemas distribuidos con arquitecturas complejas.
- Sincronización espacial y temporal de la información.
- Utilización de lenguajes de encriptación con el empleo de hipermedia e hipertexto (vínculos con documentos y fuentes).
- Dispositivos con gran capacidad de almacenamiento.  
Hay que recordar que, por ejemplo, 500 páginas de texto ocupan 1 MB, 100 imágenes a color comprimidas a 15:1 son aproximadamente unos 500 MB y 1 hora de vídeo digital comprimido 200:1 ocupa 1 GB aproximadamente.
- Algoritmos de compresión. Para imágenes se encuentran hoy en día entre 10 y 50:1 y para vídeo entre 200 y 2 000:1.
- Sistemas gráficos potentes.
- Buena interconexión hombre/máquina.
- Sistemas operativos en tiempo real.

- Programación orientada a objetos.
- Sistemas eficaces de recuperación y almacenamiento de la información.
- Redes de área local de alta velocidad. Hemos pasado de los 10 Mb/s de las redes de área local Ethernet o Token-ring de los años 1990, a los más de 100 o 500 Mb/s de los Fast Ethernet , FDDI o ATM (modo de transferencia asíncrona) del momento actual.

### 3. Adquisición de información. Transformación analógica/digital (ADC)

Este epígrafe corresponde a la obtención de documentos digitalizados a partir de información analógica existente (fotos, mapas, texto impreso, gráficos, etc.). Su ejecución estará condicionada, tanto por la forma de explotación última (digital o analógica), como por la calidad del documento origen.

El método más empleado es el escaneado, siendo la correcta definición de sus parámetros de trascendental importancia para la consecución de la calidad necesaria en el procesamiento y posterior explotación de dichos datos.

Los parámetros más significativos a definir en dicha transformación serán los siguientes:

- **Resolución de la imagen escaneada (R)**

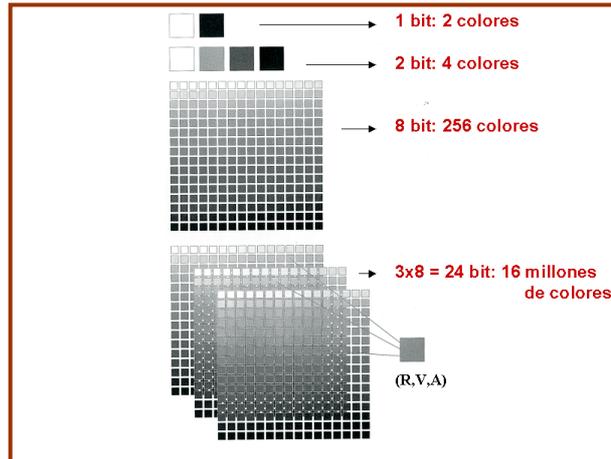
Obtenida por la discretización de la “Imagen continua” en píxeles. Se expresa en píxeles por pulgada (muestras por pulgada – **spi** –).

Esta captura se realiza directamente por medios ópticos o por interpolación mediante programas.

- **Profundidad del pixel (PP)**

Se cuantifica en bits por pixel, dándonos el número máximo de niveles de gris por pixel (ND).

Se conoce como **rango dinámico** el número de ND que serían susceptibles de ser definidos entre el blanco y el negro.



Imágenes escaneadas. Profundidad del pixel.

#### - **Tamaño de la imagen (T)**

El tamaño de la imagen a escanear en sus dos dimensiones (ancho y alto) se puede expresar en  $\text{mm}^2$ ,  $\text{cm}^2$  o  $\text{pulgadas}^2(\text{i}^2)$ .

Si se conoce su tamaño y resolución, conoceremos el **volumen de información (VI)**.

$$VI \approx (R^2 \times T \times PP)/8000 \quad \text{Kbytes}$$

Se conoce como **escalado**, el cambio de resolución de la imagen al ampliar o reducir. Si se cambia la resolución, cambiará el volumen de información o el tamaño.

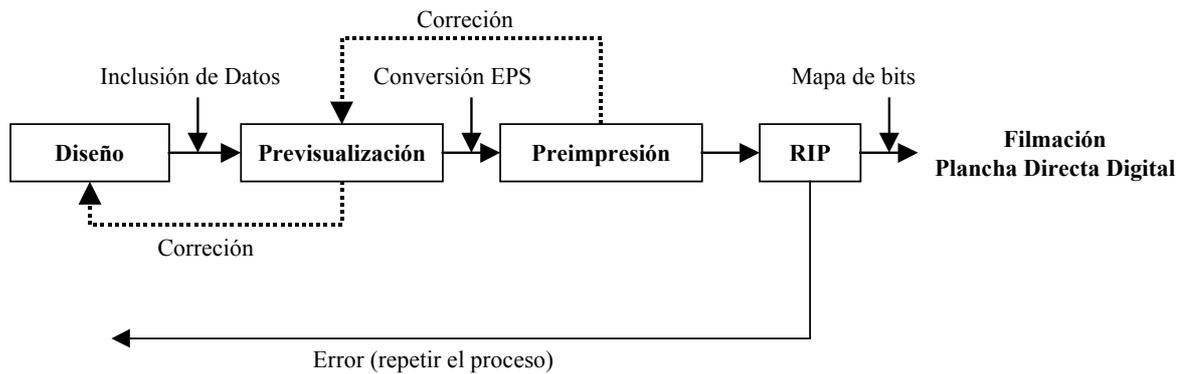
Para terminar, conviene recordar que no es necesario ni apropiado escanear una imagen a más del doble de la frecuencia de la trama con la que se reproducirán los medios tonos en el proceso de impresión final, dado que ocasionaría un volumen de almacenamiento y de tratamiento inaceptable e inútil para el sistema de explotación final.

#### **4. Procesamiento de la información**

Se emplean, fundamentalmente, las técnicas de tratamiento digital de imágenes, explicadas en el epígrafe 05.06.03.01. No obstante convendría resaltar los flujos de trabajo que se originan en todo proceso de producción electrónica:

#### - **Flujo convencional basado en lenguaje/formato Postscript**

Este sistema es el que, hasta la fecha, se ha empleado en forma más corriente. Consta del siguiente esquema:



En este esquema conviene recordar los siguientes conceptos:

- **Preimpresión.** Fase donde se realizan las operaciones de:
  - Imposición de páginas (colocación de páginas/plancha).
  - Trapping (reventado de archivos para corrección).
  - Envío a pruebas de color (si fuera necesario).
- **RIP (Raster Image Processing).** Son los traductores del formato **EPS** (Postscript) a mapa de bits de la filmadora. Su eficacia depende de cada fabricante que incorpore o no las versiones más avanzadas de Postscript (I, II o 3).

En este flujo, cualquier error en la fase final obliga a repetir todo el proceso anterior.

#### - Flujo basado en el formato PDF (Portable Document Format)

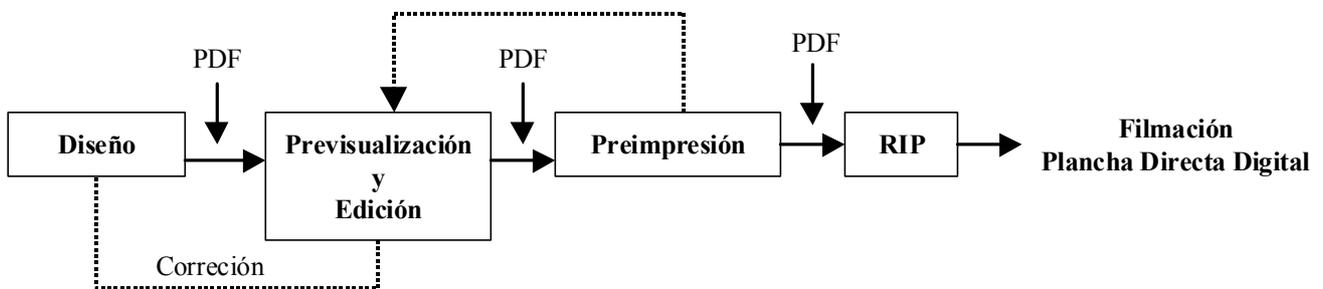
Conviene resaltar previamente las ventajas de este formato para posteriormente describir un flujo basado en el mismo.

Sus características más relevantes son:

- No es un lenguaje de programación (como Postscript), es un formato de archivo permitiendo incorporar sonido, hipertexto, etcétera.
- Independencia de la plataforma. No necesita ni las aplicaciones con las que fue creado ni los elementos que lo componen.
- Independencia de cada página del total, lo que facilitará los procesos de imposición de página (preimpresión).

- Admite modificaciones parciales (editabilidad).
- Posibilita la reutilización en otras ediciones (CD-ROM, WEB, mayor calidad, etc.).
- Se puede trabajar con servidores OPI (diseño con imágenes de baja resolución, pero el procesamiento se realiza en el servidor con imágenes de alta resolución).
- Nos introduce en el concepto de **Película Digital**, esto es, la posibilidad de incluir páginas en formato **.pdf** en otros sistemas de edición (Pagemaker, Xpress, In-Desing).

El flujo de trabajo podría ser el siguiente:



En este caso, se han eliminado en fases anteriores los errores y, por tanto, se han modificado los archivos correspondientes.

Hay que destacar que en la fase **preimpresión**, el proceso de **trapping** se puede realizar **antes** o **dentro** del RIP, lo que facilita los cambios de última hora, siendo ello un gran ahorro y rapidez en todo el proceso electrónico de documentos.

## 5. Salidas de la información

Son todos los procesos necesarios que convierten la información digital procesada, en información disponible por el usuario. Dicha **conversión**, se realizará en función del sistema de explotación utilizado posteriormente (analógico o digital).

Dichos procesos se pueden dividir en los siguientes sistemas de explotación o conversión:

### 5.1. Conversión y explotación digital en analógica (convertidor digital/analógico – DAC – )

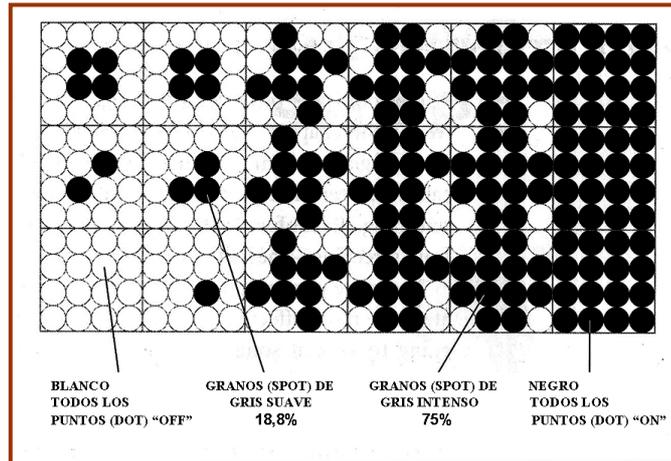
La utilización de documentos impresos, bien obtenidos por una **impresora** directamente (número de copias reducido), o bien a través de sistemas masivos de reproducción, como puede ser la **litografía (offset)**, sigue siendo, de momento, el sistema más importante de transmisión de información y conocimiento. En ambos casos, la transformación de la información digital a analógica se realiza mediante los **RIP** (transformación a mapa de bits de la **impresora/filmadora**).

En el caso de la **litografía**, el sistema necesita de un proceso intermedio que sería la conversión del fichero digital en película fotográfica (transformación de la imagen digital en **medios tonos digitales**) y posteriormente, pasado a plancha de impresión e impresión sobre máquina de reproducción litográfica. Todos estos últimos procesos se hacen de forma analógica.

En el proceso de **filmación**, la definición, a priori, de los parámetros necesarios requeridos en la **plancha de reproducción** y, por lo tanto, en su equivalente **positivo de reproducción** serán de trascendental importancia con vistas a obtener la calidad de copias finales solicitadas.

Previamente conviene recordar los siguientes conceptos:

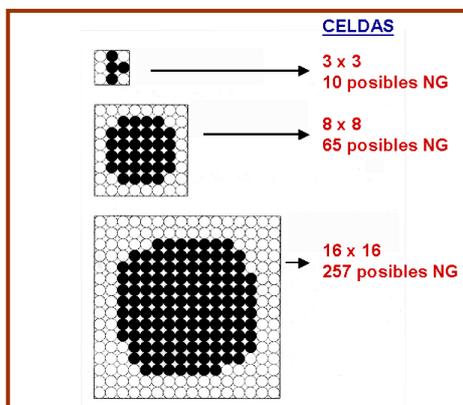
- La imagen digital se compone de píxeles/muestras y se dimensiona en píxeles por pulgada – **spi** –.
- Dicha imagen visualizada en pantalla se expresa en píxeles por pulgada – **ppi** –.
- La transformación de la imagen digital en **medios tonos digitales**, para su reproducción en offset, se dimensiona en líneas (celdas) por pulgada – **lpi** –. En estas celdas, se alojarán los **puntos** que formarán – una línea –. La forma y constitución de dicha línea será de gran importancia a la hora de evitar ciertos problemas (efecto moiré) o resaltar ciertos detalles (contrastes, transiciones, etc.).
- La resolución de salida de la filmadora se expresa en puntos por pulgada – **dpi** –, que constituyen y forman cada celda o línea.



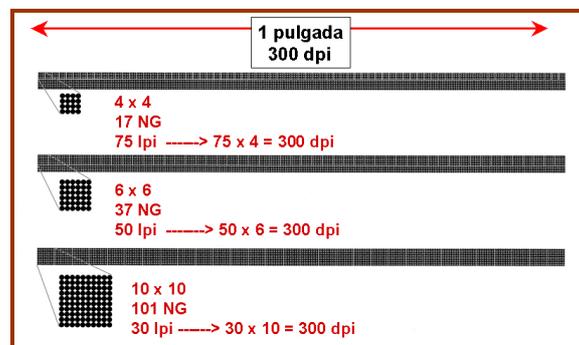
Representación de: puntos (DOT); granos (SPOT); celdas (LÍNEAS).

Los parámetros de formación de **positivos de reproducción** se pueden resumir, por tanto, en los siguientes:

- Resolución de salida (RS) de la filmadora – **dpi** –.
- Frecuencia de tramas (FT) – **lpi** –. Suele mantener la siguiente relación con la Imagen Original: **s<sub>pi</sub> ≥ l<sub>pi</sub>**
- Niveles de grises/plancha, requeridos (ND). Serán función del número de punto por celda. Así, con celdas cuadradas de 4x4 (16 puntos) podríamos obtener un máximo de 17 ND.
- Ángulo de trama. Cada plancha (color) tendrá una angulatura determinada (30° de diferencia entre ellos), con vistas a eliminar efectos visuales desagradables, como es el moiré.



Puntos por celda y niveles de gris (NG).



Medios tonos a una misma resolución de salida (RS) 300 dpi.

Todas estas variables se relacionan y condicionan entre sí. La expresión más utilizada es la que a continuación se expone:

$$ND = (RS/FT)^2 + 1$$

## **5.2. Explotación directa de la información digital**

Esta forma de transmisión y comunicación de información digital es y será el sistema de información masivo entre todo tipo de usuarios.

El primer paso para la explotación directa, dado que la información ya es digital, será la grabación y distribución de la misma sobre soportes digitales CD-ROM o DVD, en todas sus variantes y capacidades existentes.

En un futuro inmediato (prácticamente presente), dicha transmisión se realizará a través de redes de Área Local (Fast Ethernet, FDDI, FDI, ATM, ...) y muy especialmente a través de Internet.

En estos sistemas, cobra especial importancia los procesos de compresión de imágenes (audio, vídeo, etc.), velocidad de comunicación y, así mismo, la capacidad de utilización de dicha información en forma eficaz por un amplio sector de usuarios, sin necesidad de estar condicionada por programas o equipos.

Con este último concepto de independencia de programas y equipos, habría que destacar, como ideas innovadoras las ofrecidas por:

### **Formato de Documento Portátil (PDF) de Adobe.**

Este formato, casi considerado como un dialecto Postscript, de intercambio de información digital, se caracteriza por los siguientes conceptos:

- Es un formato de imagen, sonido, hipertexto, etcétera.
- Sus páginas se pueden considerar a la hora de leer y modificar como independientes de la plataforma de la que fueron creadas (no es necesario tener, por tanto, ni la aplicación ni los elementos que lo componen).
- Se puede considerar que cada página es independiente del total, lo que facilita los procesos de preimpresión e imposición de páginas.

- Admite modificaciones parciales hasta en el último momento (editabilidad).
- Posibilita la utilización múltiple (reutilización) de la misma información (CD-ROM, Web, ...).
- Admite la posibilidad de trabajar sobre servidores OPI.
- Se puede considerar estos archivos como “**Película Digital**”, es decir, la posibilidad de integrar páginas **.pdf** en otras aplicaciones de edición (PageMaker, Xpress, In- Design, ...).
- Introduce nuevos flujos de trabajo en la producción electrónica, más flexibles y económicos.

### **Lenguaje de Información Autodescriptiva (XML).**

Este lenguaje proporciona un estándar abierto y flexible de almacenaje, publicación e intercambio de información electrónica.

Sus características más importantes son:

- Ha sido desarrollado con vistas a transformarse en un estándar por la World Wide Web Consortium (W3C).
- Puede llegar a ser un estándar que nos proporcione la independencia del formato de datos y fuentes de donde proceden.
- Lenguaje de fácil aprendizaje e implementación en las diversas plataformas.
- Permitirá intercambiar información entre diversas plataformas y usuarios de cualquier lugar (base de los “negocios electrónicos”).
- De gran trascendencia en el futuro de las Bases de Datos en cuanto a su gestión, ya que maneja documentos y no solo datos.

## 6. Transformación de datos: correcciones geométricas, conversiones, fusión de datos

Algo común en cartografía, especialmente a la hora de compilar información a escalas medias o pequeñas, disponer de distintas fuentes de datos con diferentes orígenes e incluso proyecciones cartográficas y, en ocasiones no conocer la proyección o el Sistema Geodésico de Referencia de alguno de los documentos. Es en estos casos cuando se hace necesaria una transformación que “lleve” un conjunto de datos a otro, en este apartado se muestran algunas de las técnicas que permiten “casar” distintos documentos cartográficos en uno, correcciones geométricas todas ellas.

### 6.1 Transformación conforme en dos dimensiones

Se conoce generalmente como transformación de similitud de cuatro parámetros o “Helmert-2D” y tiene la característica de mantener la forma de los elementos [3]-p335, es una transformación típica de tres pasos:

- escalado para igualar los dos ejes de ambos sistemas de coordenadas
- rotación que permite que ambos sistemas sean paralelos
- translación para tener un origen común entre ambos sistemas

Al ser bidimensional, la escala y rotación implican dos parámetros y la traslación los dos restantes. Al tratarse de una transformación plana, las coordenadas curvilíneas (latitud, longitud) deben pasarse a planas, (p. ej. UTM), en cada sistema, o, lo que es lo mismo, la latitud a “latitud isométrica” [1].

$$(1) \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i \quad i=\{1 \dots n\}$$

o bien, teniendo en cuenta que  $\kappa$  es muy pequeño, se simplifica así

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \end{bmatrix} + (1 + \mu) \begin{bmatrix} 1 & -\kappa \\ \kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \mu & -\kappa \\ \kappa & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i$$

aunque es más conocida la expresión 
$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}_i$$
 donde el

giro positivo es contrario a las agujas del reloj, mientras que en el caso anterior es al revés, resultando  $1 + \mu = (a^2 + b^2)^{1/2}$  y  $\text{sen } \kappa = \text{asc sen}(b/a) \cong \kappa$

Es aconsejable utilizar al menos cuatro puntos, aunque el sistema de ecuaciones es resoluble con dos. El grado de libertad del ajuste es  $(2n-2)$ . Así mismo, conviene hacer el cálculo de los parámetros reduciendo las coordenadas a sus baricentros respectivos, que, a su vez, se pueden considerar coincidentes proporcionando directamente los parámetros de translación.

$$(2) \begin{bmatrix} x_2 + \bar{X}_2 \\ y_2 + \bar{Y}_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \end{bmatrix} + (1 + \mu) \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \bar{X}_1 \\ y_1 + \bar{Y}_1 \end{bmatrix}_i \quad i=\{1 \dots n\}$$

y, puesto que en los baricentros  $x_2 = y_2 = x_1 = y_1 = 0$ , se consideran dos pasos:

a) se calculan  $(\mu, \kappa)$  con 
$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = (1 + \mu) \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix},$$

b) los parámetros obtenidos se aplican a

$$\begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \end{bmatrix} = (1 + \mu) \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix}$$

Es aconsejable cambiar la notación para no confundir las coordenadas planas (X,Y) con las cartesianas geocéntricas, sustituyéndolas por (E,N) respectivamente.

La transformación inversa es sencilla pues, dado que se trata de cantidades relativamente infinitesimales, basta con cambiar su signo, resultando:

$$(3) \begin{bmatrix} E_1 \\ N_1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} E_2 \\ N_2 \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} \Delta E_0 \\ \Delta N_0 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa \\ -\sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ N_2 \end{bmatrix}_i \quad i=\{1 \dots n\}$$

Una aplicación clásica de esta transformación es la comparación de distintas cartografías con la misma proyección y diferente Sistema Geodésico de Referencia (por ejemplo ED50 y ETRS89), de hecho un ejemplo muy común consiste en transformar una hoja de MTN25 en el que las coordenadas de las esquinas son los cuatro puntos a introducir en las expresiones anteriores, evidentemente, las cuatro esquinas corresponden a una misma “realidad terreno”. Es posible aplicar esta

transformación en el caso de que uno de los documentos cartográficos o bien no sea totalmente analítico (por ejemplo la proyección poliédrica del datum RA o Struve) y ED50 o ETRS89, o bien se desconozca el Sistema Geodésico de Referencia.

## 6.2 Transformación afín de dos dimensiones

Es conocida también como transformación de seis parámetros y es una modificación de la anterior, existen dos factores de escala distintos, uno en cada dirección. Esta transformación es típicamente usada en fotogrametría para transformar coordenadas “placa” en un sistema arbitrario de medida hacia el sistema fiducial de la cámara en el que se tienen en cuenta distintas extensiones/contracciones en dos ejes distintos. Como en el caso de la transformación de similitud anterior se tienen dos parámetros de traslación, dos escalas, una rotación y un factor de no ortogonalidad entre ejes, la expresión para la transformación afín es:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ (4) \quad y' &= dx + ey + f \end{aligned}$$

Es muy útil este tipo de transformación cuando se comparan documentos cartográficos que tienen una variación en escala distinta en ambos ejes, por ejemplo entre una Lambert que tiene una gran variación de escala en el sentido de la  $y$  y una UTM cuya variación en escala es mayormente sobre el eje  $x$ .

En realidad, la transformación afín es aplicada ampliamente en cartografía, el método de eliminación de la distorsión en una red geodésica para la transformación entre un SGR (Sistema Geodésico de Referencia) clásico y uno geocéntrico, conocido también como “rubber-sheeting” u hoja de goma consiste en la materialización analítica de la técnica de calcar un documento sobre otro deformando una hoja de goma hasta su caso, basta para ello en dividir el documento cartográfico en triángulos, por ejemplo mediante una triangulación de Delaunay, y aplicar en cada triángulo una transformación afín [2]. Evidentemente, los tres puntos del triángulo formarán seis ecuaciones para los seis parámetros de la transformación y consecuentemente no existirá residuo alguno.

### 6.3 Transformación proyectiva en dos dimensiones

Conocida también como transformación de ocho parámetros, es apropiada cuando se proyecta un sistema de coordenadas sobre otro que no es paralelo, es habitualmente utilizada en fotogrametría, su expresión es la siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + 1} \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + 1} \end{aligned} \quad (5)$$

Nótese que esta expresión es similar a la afín, de hecho si  $a_3$  y  $b_3$  son cero, las expresiones anteriores se transforman en una afín, se tienen ocho incógnitas por lo que es necesario un mínimo de cuatro puntos, en este caso no es posible resolver un sistema superabundante de datos sin linealizar la expresión anterior. Esta transformación es muy adecuada cuando se compara un documento cartográfico con otro procedente de una proyección cónica, por ejemplo una fotografía aérea.

### 6.4 Transformaciones complejas

Es posible realizar, dependiendo del número de puntos disponibles, transformaciones más complejas, aunque por lo general es preferible una transformación simple con un comportamiento lo más lineal posible. Dentro de estas transformaciones es posible realizar transformaciones polinómicas mediante un modelo de regresión múltiple en variable real  $y_i = \beta_0 + \beta_1x_i + \dots + \beta_kx_k + R_i$ , o utilizar un modelo de regresión en

variable compleja  $x'+iy' = \sum_{j=0}^n (K_j + iK_j')(x+iy)^j$  que por ser analítico mantiene la

conformidad en la transformación. En general un polinomio requiere de un método de selección de coeficientes (paso a paso, eliminación progresiva....) y de un suficiente conjunto de pruebas estadísticas que validen la fiabilidad y la varianza que es capaz de explicar el modelo de regresión escogido, su utilización es habitual cuando la extensión o la variabilidad de las fuentes es grande y, por lo general, son preferibles bajos órdenes dado que el comportamiento de un polinomio fuera de la zona de datos puede ser impredecible.

Dentro de los métodos complejos de transformación se encuentran cualquiera de los métodos de interpolación: colocación mínimo cuadrática, “thin plate” o superficies de mínima curvatura, “krigging”...., su aplicación dependerá de la variabilidad espacial de los distintos documentos que se estén comparando y recurrir a ellos se recomienda cuando los métodos más simples no consiguen el resultado esperado, por ejemplo a la hora de comparar una imagen de satélite con un documento cartográfico de proyección y SGR desconocido.

## **6.5 Fusión de datos**

En el caso de aplicar alguna de las transformaciones anteriores en documentos cartográficos digitales, es habitual (de hecho lo sorprendente sería lo contrario) que dos representaciones geométricas del mismo fenómeno geográfico coincidan, un caso típico es el de dos elementos lineales. La armonización de ambos fenómenos se conoce como fusión de datos (en inglés “conflation”) y existen técnicas que permiten generar un único fenómeno lineal a partir de dos existentes permitiendo pesar al alza el de mayor calidad y al contrario.

La fusión de datos implica el case de fenómenos geográficos comunes procedentes de diferentes conjuntos de datos, eliminación de datos y combinación de diferentes fuentes. Originalmente los problemas de fusión de datos se emplearon para eliminar inconsistencias espaciales y mejorar la calidad en los mapas, actualmente, una vez que existe una base de datos espacial su actualización se convierte en la principal tarea, adicción de nuevas entidades, modificaciones o incluso datos de mayor calidad, en este caso la fusión de datos implica la superposición de dos conjuntos de datos comparando fenómenos comunes (generalmente la versión antigua y moderna de los datos) reconociendo las similitudes y las diferencias entre los conjuntos antiguos y modernos de datos y eliminando la discrepancia entre los mismos.

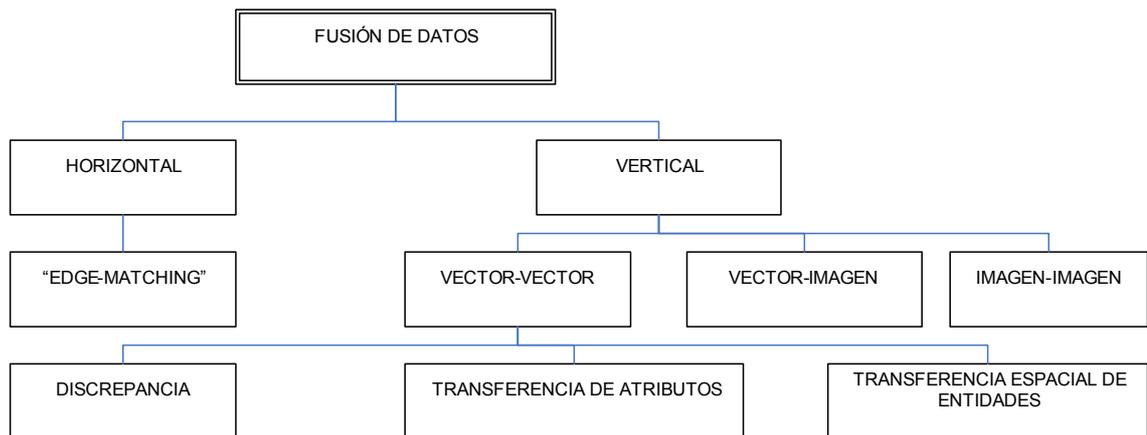


Figura 1. Clasificación general del problema de fusión de datos

La fusión de datos horizontal generalmente se denomina “edge-matching” y tiene por objetivo la eliminación de discrepancias en atributos y posición dentro de un área común en dos mapas. La fusión entre datos vectoriales e imágenes implica técnicas de extracción de entidades, remuestreo y reconocimiento de entidades. La fusión entre imágenes implica la referenciación entre las mismas, generalmente aplicable en tratamiento de imágenes. Ejemplos de fusión de datos incluyen [4]:

- Eliminación de discrepancias espaciales: un ajuste global de las coordenadas de distintos fenómenos espaciales en uno o ambos conjuntos de datos para eliminar discrepancias en la posición como polígonos espurios (“sliver polygons”), desplazamientos de entidades etc. Es la típica aplicación “edge-matching”
- Transferencia de tipo de entidad: mediante el reconocimiento de entidades comunes en diferentes mapas marcando aquellas que no son iguales, se pueden añadir nuevas entidades al mapa antiguo o las coordenadas antiguas pueden ser actualizadas.
- Transferencia de atributos: a la hora de actualizar un mapa antiguo con uno nuevo, los atributos en los antiguos registros son transferidos a los nuevos.

Así mismo, los algoritmos de fusión de datos pueden clasificarse en tres formas:

### 6.5.1 Métodos geométricos

Generalmente los más utilizados, se realizan mediante el rastreo de las entidades geográficas en ambos conjuntos de datos y comparándolos mediante algún criterio geométrico, dependiendo de la primitiva geométrica (punto, línea o área) el criterio geométrico puede variar, por ejemplo, para el caso entre puntos la distancia euclídea puede ser apropiada pero para el caso entre líneas es más apropiada la distancia de Hausdorff. Algunos de los criterios geométricos son los siguientes:

- a) distancia: un objeto en el mundo real debería tener la misma posición en diferentes mapas, salvo error naturalmente. Comparar la distancia entre dos entidades de dos mapas distintos se convierte en un problema típico de “candidatos” donde en un determinado entorno una entidad tiene más probabilidad de ser el mismo objeto cuanto más pequeño sea éste. Distancia euclídea, la usual  $D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ , distancia de Hausdorff: es utilizada para calcular la distancia entre dos entidades lineales para localizar líneas similares, como se muestra en la figura siguientes: L1 y L2 son dos líneas a comparar, d1 es la distancia mínima más grande de L1 a L2 y d2 la distancia mínima más grande de L2 a L1. d1 y d2 son obtenidos moviendo un círculo dinámico a lo largo de una línea de manera que siempre toque la otra y por tanto el radio más grande es d1 o d2, la distancia de Hausdorff se define como  $D_H = \max(d1, d2)$

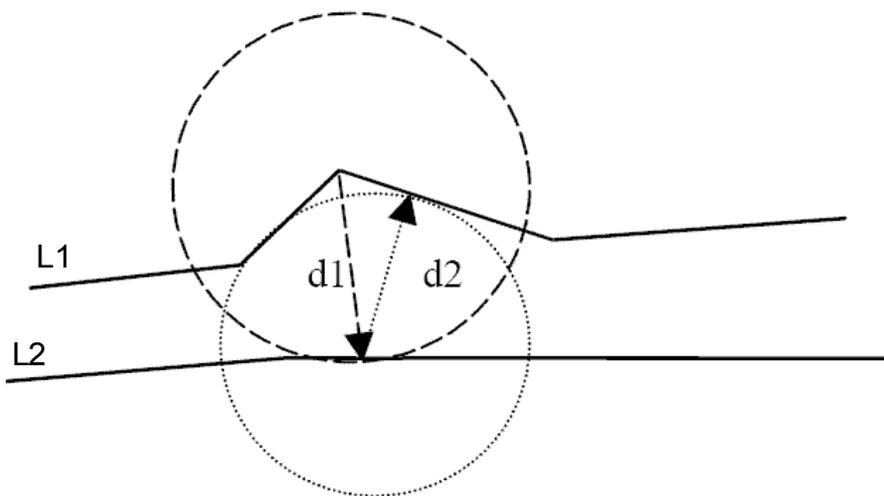


Figura 2. Distancia de Hausdorff

- b) Información angular de objetos lineales: ángulo entre líneas, dirección de una línea. Si se encuentran varios candidatos mediante el criterio de distancia es posible utilizar un criterio angular para determinar el candidato correcto.
- c) Relación de posición: las típicas relaciones de posición son si un punto está dentro o fuera de un polígono, punto sobre línea etc. Algunas veces éste puede ser el criterio principal para encontrar casos entre puntos y polígonos
- d) Caracterización de la forma de un objeto: las líneas o polígonos pueden caracterizarse: una línea tiene una longitud, concavidad, un polígono tiene un perímetro, área, densidad una descripción de forma de Fourier etc. La caracterización de un polígono puede ser utilizada para escoger polígonos o como método de comprobación de un candidato.

Los métodos geométricos se utilizan en la mayoría de los casos y requieren que dos conjuntos de datos sean similares en su posición geométrica, por tanto se debe realizar un alineamiento previo de los documentos el método de “rubber-sheeting”.

### **6.5.2 Métodos topológicos**

Consisten en otro tipo de criterio, la información topológica para correlar objetos. Estos métodos pueden ser utilizados cuando existe información de este tipo, en caso contrario es necesario construir una topología. La información topológica incluye relaciones como conectividad entre líneas, adyacencia entre polígonos y relaciones de composición como los arcos o los nodos que forman un polígono. La correlación topológica se utiliza generalmente para reducir el ámbito de búsqueda o comprobar los resultados de una correlación.

### **6.5.3 Método basado en atributos**

El método basado en atributos se denomina generalmente semántico. Este método se puede utilizar para correlar entidades de forma muy efectiva si ambos conjuntos de datos tienen atributos compatibles y la semántica de ambos es conocida, el caso más simple es dos entidades que tengan el mismo campo de atributo y la misma definición del campo, en este caso la correspondencia es clara.

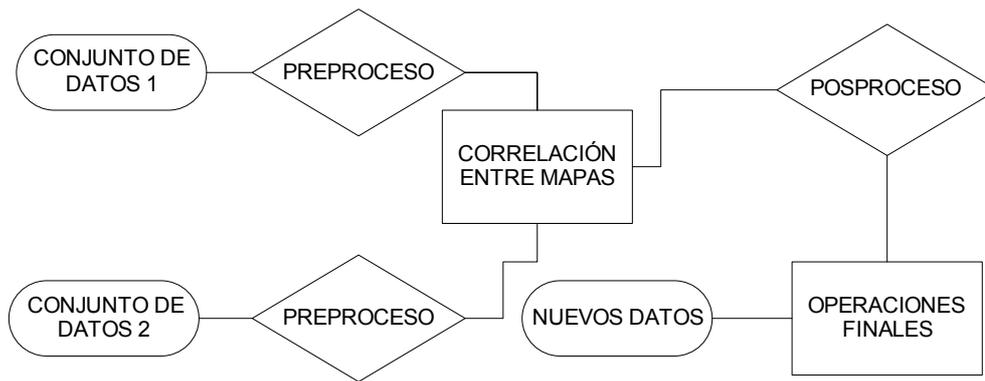


Figura 3. Diagrama general de la fusión de datos

El proceso general de la fusión de datos se muestra en la figura anterior.

### **Preproceso de datos**

Se encarga de estandarizar los dos conjuntos de entrada asegurando que ambos conjuntos de datos tienen el mismo formato, la misma proyección y el mismo sistema de coordenadas así como fenómenos geográficos que se superponen. Asegura que los datos tienen la mayor similitud posible, evidentemente, este proceso no existe en el caso de que ambos conjuntos de datos tengan las mismas características

### **Alineamiento de mapa**

En este paso, las entidades de los diferentes conjuntos de datos son comparadas de forma que los datos que describen un mismo objeto coincidan, este proceso puede hacerse de forma iterativa mediante puntos de control o utilizando algún método de case de entidades, como la comparación nodo a nodo, la distancia de Hausdorff o “rubber-sheeting”.

### **Correlación de entidades**

En este paso se reconoce la correspondencia entre entidades espaciales mediante criterios de mínima distancia, similitud topológica y de sus atributos asociados, obviamente, la tolerancia que define el case entre objetos debe escogerse con sumo cuidado. Este paso es el más crítico dentro del proceso de fusión de datos.

### **Posprocesado**

Debido a la complejidad y la inconsistencia de la representación de las entidades espaciales se requiere una intervención por parte del operador que solvete los elementos que no han sido correlados o que estén falsamente correlados.

### **Operaciones finales**

Corresponde a esta parte realizar algunas operaciones con los datos de acuerdo a unas especificaciones concretas. Generalmente se utiliza para actualizar las coordenadas del conjunto de datos final o transferir atributos de un conjunto de datos a otro.

### **7. Bibliografía:**

- C.E. SHANNON.- “ A Mathematical Theory of Communication”, *The Bell Sys. Tech. J.*, vol. XXVII, num. 3, 1948, pp.379-423.
- ROBERT A. SCHOWENGERDT.- *Techniques for Image Processing and Classification in Remote Sensing*, ed. Academic Press, New York, 1983.
- ANDRÉ MARION.- *An Introduction to Image Processing*, ed. Chapman and Hall, London, 1991.
- DAVID BLATNER, STEVE ROTH.- *Real World Scanning and Halftones*, ed. Peachpit Press, Berkeley, 1993.
- J.D. GIBSON et al.- *Digital Compression for Multimedia, Principles & Standards*, ed. Morgan Kaufmann, 1998.
- DALDA, A Y GONZÁLEZ.-MATESANZ, J *Parámetros de transformación entre sistemas de referencia, Jornadas Técnicas sobre Topografía, Cartografía, Fotogrametría, Geodesia y Teledetección*, 2001, pp. 189-229.
- GONZÁLEZ.-MATESANZ, J *Aportaciones al estudio de los modelos de distorsión para el cambio de datum entre ED50 y ETRS89*, Departamento de matemáticas, Universidad de Alcalá, España, 2007.
- WOLF , P Y GHILANI, C *Adjustment computations. Statistics and least squares in surveying and GIS*, Wiley Interscience, 1997.
- YUAN,S Y TAO, C *Development of Conflation Components*, [http://www.umich.edu/~iinet/chinadata/geoim99/Proceedings/yuan\\_shuxin.pdf](http://www.umich.edu/~iinet/chinadata/geoim99/Proceedings/yuan_shuxin.pdf), 1999.

## **Tema 67. Plan de calidad en Cartografía. Definición. Calidad de producto y procesos. Modelos de calidad (definición de calidad). Control de calidad (comprobación de la calidad). Mejora de la calidad (gestión de calidad).**

### **67.1. Definición**

Según familia de normas sobre Sistemas de Gestión de la calidad ISO9000:2000, el Plan de Calidad se define como: Documento que especifica qué procedimientos y recursos asociados deben aplicarse, quién debe aplicarlos y cuándo deben aplicarse a un proyecto, proceso, producto o contrato específico.

Cuando la organización tiene diferencias significativas en la forma de gestionar la calidad de sus proyectos, procesos, productos o contratos, puede optar por crear la figura de los planes de calidad.

Los planes de calidad son habituales en automoción, en el sector farmacéutico, en aeronáutica, etc. Y su utilidad es la de recoger en un dossier toda la información relevante sobre la gestión de la calidad de un proyecto, proceso, producto o contrato principalmente para entregar dicho dossier al cliente o a otras partes interesadas para su examen.

Si decidimos no estructurar la gestión de la calidad de los proyectos, procesos, productos o contratos en planes de calidad, nuestro plan de calidad es todo el sistema de calidad en su conjunto. En su documentación ya se indica qué procedimientos y recursos específicos se aplican en cada caso.

El plan de calidad para un proyecto, proceso, producto o contrato es el conjunto de procedimientos, instrucciones, formatos, máquinas, controles realizados, herramientas utilizadas, formación del personal requerida,... Es la especificación de cómo se hace aquello y cómo se controla su calidad.

### **67.2. Calidad de producto y procesos**

Existen dos aspectos de la calidad que surgen de dos puntos de vista completamente diferentes a la hora de abordar el problema:

1) La calidad del producto final, que se ocupa de determinar de manera estadística y objetiva las cualidades del producto ya acabado, sin ocuparse del proceso que lo produce, auténtica caja negra de la que sólo interesa la salida.

2) La calidad del proceso, que se ocupa de la mayor o menor adecuación del proceso de producción y suministro de un bien o de un servicio y, en un sentido más general, de la calidad de la organización productora. Es una aproximación más amplia, que incluye a la anterior, ya que si el proceso de producción es correcto y adecuado, lógicamente el resultado también lo será. Por añadidura, incluye una serie de aspectos de gran relevancia que rodean el bien producido: plazo de entrega, garantía, servicio post-venta, actualización del producto, precio, instrucciones de uso, empaquetado, etcétera.

Como resultado de la primera aproximación, ya en el campo que nos ocupa, el de la información geográfica, la calidad del producto incluye la determinación de una serie de parámetros y la descripción de algunos aspectos complementarios del conjunto de datos:

- Los parámetros se determinan por comparación de una muestra representativa del conjunto de datos en cuestión, con otro conjunto de datos de mayor fiabilidad, típicamente datos a una mayor escala o datos de campo, bajo la hipótesis de que tales datos constituyen la realidad. Se consideran como parámetros: la exactitud geométrica, que describe los errores en la posición espacial de los objetos; la exactitud semántica, que da cuenta de los errores de toda aquella información que dota de significado a la geometría (nombres, códigos y atributos); compleción, que nos dice en qué medida el conjunto de datos es completo, tanto por exceso como por defecto; la coherencia o consistencia interna de los datos, basada en el cumplimiento de las reglas de lógica interna que se consideran relevantes (no hay puntos repetidos, las superficies están cerradas, los ríos desembocan en el mar); y la actualidad, que describe la validez temporal de los datos.

- Los aspectos complementarios que se describen incluyen: la genealogía, o historia de los datos que especifica fuentes de información, método de captura, procesos aplicados, algoritmos utilizados, programas empleados, etcétera; el uso, que describe qué aplicaciones y con qué objetivos han utilizado los datos descritos con éxito y que sirve como orientación y guía práctica para nuevos usuarios; y la homogeneidad, que no es más que una descripción cualitativa y textual acerca de la mayor o menor homogeneidad en la fiabilidad de los datos, que se desprende de la experiencia del productor de datos (por ejemplo los datos son mejores en la costa o la capa de carreteras es la más fiable).

La calidad del producto final permite al usuario potencial evaluar un producto antes de su adquisición, juzgar si los errores descritos le van a permitir o no obtener los resultados que persigue y realizar rápidamente comparaciones entre diferentes conjuntos de datos. Es por lo tanto el resultado de considerar la calidad desde el punto de vista del usuario del bien o servicio en cuestión.

El considerar la calidad de procesos implica el establecimiento una organización paralela a la simplemente productiva para controlar eficazmente todo el proceso de producción. Es por lo tanto el resultado de considerar la calidad desde el punto de vista del productor del bien o servicio en cuestión.

Según ésta segunda aproximación, la calidad de un bien o servicio deja de ser una característica intrínseca o un atributo del bien en sí mismo, para convertirse en algo que depende directamente de la percepción de satisfacción del cliente después de haber utilizado el producto de que se trate. El cambio de punto de vista introduce cierta dosis innegable de subjetividad, pero afronta la cuestión del modo más práctico posible, aborda la raíz de la cuestión. Dicho de otra manera, se trata de pensar qué es preferible: producir algo de una gran calidad en casi todos los aspectos, por ejemplo errores de posición, de códigos y de nombres prácticamente inexistentes y una actualización excelente, pero que deja insatisfecho al cliente por no haberse considerado precisamente aquello que más le interesa, que puede ser por ejemplo la compleción, el que el conjunto de datos no tenga omisiones ni objetos espurios; o bien conseguir que el cliente se sienta completamente satisfecho con un conjunto de datos que contiene exactamente los niveles de calidad que él necesita en cada uno de los parámetros de calidad, aunque globalmente el producto tenga de hecho un mayor número de errores.

Por último, es evidente que para buscar la máxima eficiencia del proceso de producción, es necesario incluir todas las circunstancias y factores que en él influyen, lo que finalmente apunta a considerar la calidad de toda la organización.

En este tema consideraremos la calidad de producto y todas las técnicas y metodologías implicadas como algo meramente instrumental, que se aplica para realizar una instantánea, una fotografía, de la calidad de un producto en un momento determinado de su proceso de producción, ya sea en su estado final o en un paso intermedio. Nos centraremos en la calidad de procesos que constituye el objeto de los Sistemas de Gestión de la Calidad y que obviamente, al ocuparse de la calidad de todo el proceso de producción, ofrece un control de la situación mucho mayor y permite, en consecuencia, producir el nivel de calidad final que se desee en cada momento.

### 67.3. Modelos de calidad (definición de calidad)

El Diccionario de la Real Academia define calidad como el conjunto de propiedades inherentes a una cosa, que permiten apreciarla como igual, mejor o peor que las restantes de su especie. Es decir, la finalidad de la calidad es el que se pueda valorar la mayor o menor bondad de algo.

Si consideramos que siempre que estamos trabajando con un conjunto de datos geográficos lo que estamos haciendo es manejar un modelo de la realidad, la calidad se entiende como una descripción de los errores que tienen o pueden tener nuestros datos y nos permite saber hasta qué punto es correcta nuestra representación del mundo.

Efectivamente, la calidad ancla los datos a la realidad, describe y da idea de la brecha que existe entre nuestro modelo del mundo real y el mundo mismo, aspecto esencial de nuestra actividad en un sector en el que las nuevas tecnologías, muy especialmente la informática, permiten realizar rápida y fácilmente análisis espectaculares sobre unos datos geográficos cuya fiabilidad no siempre se cuestiona de manera objetiva.

Hay que tener en cuenta que el nivel de conocimiento que proporciona un dato aislado, por ejemplo el que una persona mida 1,80 m, no nos permite saber nada a ciencia cierta sobre el valor real de la magnitud descrita. En nuestro ejemplo, esa persona puede medir 1,75 m, 1,90 m o cualquier otra altura. Pero si decimos que un individuo mide 1,80 metros + 0,01 m, estamos diciendo que hemos comprobado positivamente que su altura real está comprendida entre 1,79 y 1,81 m, estableciendo así una relación que antes no existía entre nuestros datos y la realidad. Este aspecto cobra especial relevancia cuando estamos extrayendo conclusiones a partir de unos datos geográficos, para luego tomar decisiones y actuar en consecuencia sobre el mundo real.

Para decirlo de otra manera, la información relativa a calidad convierte a un conjunto de datos geográficos en un conjunto de medidas de una parte o un aspecto del mundo que nos rodea.

DATOS + CALIDAD = MEDIDAS
---------------------------

Pero ¿qué errores deben ser tenidos en cuenta al valorar un conjunto de datos? ¿todos los posibles? ¿todos son igualmente importantes para todas las aplicaciones?

El sentido común nos dice que para valorar la calidad de unos datos es necesario conocer la información sobre errores que permita al usuario final juzgar si dichos datos son útiles o no para sus objetivos. Por lo tanto, además del aspecto objetivo que incorpora la calidad al relacionar unos datos con la realidad, existe un innegable aspecto subjetivo o particular, ya que la descripción más adecuada de la calidad en cada caso depende del fin perseguido. Por ejemplo,

la posición en el espacio no es tan relevante en un SIG dedicado a inventariar la riqueza forestal, dónde es suficiente el tener dimensionadas y ubicadas las distintas superficies de ocupación del suelo, como en un SIG de ayuda a la navegación de un barco, en el que un pequeño error en la situación de un rompiente puede significar un naufragio.

En cuanto al criterio final que permite juzgar de manera objetiva si unos datos son válidos para un fin determinado, habría que pensar en el tanto por ciento de decisiones o acciones finales correctas, sean del tipo que sean, tomadas como consecuencia de la explotación de los datos en cuestión. En la práctica se manejan valores, como por ejemplo la exigencia de que al menos el 90% ó el 95% de las decisiones tomadas sean acertadas, pero tales valores se suelen fijar arbitrariamente y en muy pocas ocasiones se está en condiciones de definir exactamente qué margen de errores es aceptable, salvo en casos extremos. En un sistema que indica a una unidad de emergencia, como un camión de bomberos, el camino mínimo para llegar al lugar dónde se ha producido un siniestro, un único error en la dirección de circulación de una calle puede resultar fatal.

En cualquier caso, lo que sí es cierto es que el margen admisible de error en los resultados finales depende del objetivo que se pretenda alcanzar y es responsabilidad del usuario el fijar ambas cosas.

Como consecuencia de la incorporación del punto de vista del usuario, el concepto de calidad ha evolucionado desde una mera descripción de errores hasta algo más cercano a la utilidad de los datos. La norma ISO 8402 define la calidad de un producto o servicio como la totalidad de características que le confieren su aptitud para satisfacer las necesidades explícitas y las implícitas. Las necesidades explícitas de los usuarios son las que están descritas en las especificaciones del producto o servicio, mientras que las implícitas son las necesidades del usuario no descritas expresamente porque son tan obvias que se deducen por sentido común, por ejemplo un libro debe ser legible, un aparato de televisión debe verse y oírse y un motor cualquiera debe funcionar cuando se enciende.

Más adelante volveremos a la idea de calidad en función del usuario, o más bien cliente en la terminología moderna sobre calidad, pero antes volveremos a la calidad como descripción de errores y haremos un poco de historia de los Sistemas de Gestión de la Calidad.

#### **67.4. Control de calidad (comprobación de la calidad)**

Se define Control de calidad como el conjunto de ensayos o pruebas que es necesario ejecutar para contrastar lo que realmente se ha realizado en un punto determinado de un proceso o cadena de producción, con lo que se había planificado obtener previamente.

Ya W. Edwards Deming indica que con los Controles de calidad no se persigue alcanzar la perfección, sino conseguir una eficiente producción con la calidad que espera obtener el mercado.

El Control de calidad es un concepto íntimamente ligado a los Sistemas de Gestión de la Calidad, de los que hablaremos más adelante.

La idea fundamental es que para controlar la calidad de un proceso de producción complejo de un bien o servicio cualquiera, lo más práctico es subdividirlo en subprocesos homogéneos y unitarios, lógicamente cerrados en sí mismo. Por ejemplo, en el proceso de elaboración de un mapa, una posibilidad sería definir los siguientes subprocesos: establecimiento de la geodesia, fotogrametría, formación, edición e impresión. La escala del modelo de calidad, el que sea más o menos detallado, depende del número de subprocesos que se definan.

A continuación se define un triple papel para cada subproceso: cliente, en cuanto que recibe cierto producto de entrada; procesador, en cuanto se efectúan una serie de operaciones sobre la entrada para modificar sus características; y suministrador, en cuanto que proporciona cierto producto de salida para el subproceso siguiente en la cadena de producción.

Y se establecen controles de calidad (QC) antes y después de cada subproceso, con lo que se verifica la entrada y salida en cada caso, definiendo en cada control los Indicadores de Calidad que se consideren pertinentes y para cada indicador, los umbrales de calidad que se consideran admisibles.

De tal manera que, siguiendo con el ejemplo anterior, en la cadena de producción de un mapa, se puede definir un subproceso fotogrametría, en el que se especifique con todo detalle qué control de calidad debe superar una hoja restituida para ser aceptada, con una descripción que incluya los indicadores de la calidad a medir, el método de medida y los niveles de calidad aceptables.

El disponer de un sistema así estructurado, con un conjunto de controles de la calidad bien definidos, que sirvan adecuadamente para controlar el nivel de calidad de todas y cada una de las fases del proceso, permite tener una continua monitorización de la calidad y, ante un problema detectado en el nivel de calidad del producto final, ajustar los umbrales de calidad aceptables en uno o más de los procesos intermedios para así solucionar la situación.

### **67.5. Mejora de la calidad (gestión de calidad)**

Un Sistema de Gestión de la Calidad, *Quality Management System* en la bibliografía anglosajona (QMS), puede definirse como un sistema complejo que consiste en todas las partes

y componentes de una organización que se ocupan de la calidad de los procesos de producción y de los productos en sí, ya sean bienes o servicios. Por lo tanto, un QMS incluye la estructura organizativa, el personal, la asignación de responsabilidades, los procedimientos, los procesos y en general, los recursos de todo tipo dedicados a la implementación de los principios y acciones concretas necesarios para alcanzar los objetivos de calidad de una organización.

De lo dicho se desprende que un Sistema de Gestión de la Calidad es en realidad un caso particular de Sistema de Información, es más es un caso de particular de Sistema de Información corporativo, ya que para cumplir sus objetivos es imprescindible que esté incardinado en la organización hasta el punto de modificarla en aspectos esenciales y convertirla en una organización completamente diferente, con todo lo que ello implica.

No es posible decir con precisión cuándo aparecieron por primera vez los conceptos que hay detrás de un QMS. Los principios de inspección del trabajo han estado presentes desde que los egipcios construyeron las pirámides, pero el control de calidad como tal, surgió como una función de la industria a mediados del siglo XX. En este aspecto, el sector militar, que comenzó con la inspección de armamento durante la II Guerra Mundial, ha estado en la vanguardia de la gestión de la calidad desde sus inicios.

Después de este conflicto armado, en la época del desarrollismo, se generó una gran demanda que satisfacer de bienes de consumo y armamento, con lo que parecía que la cantidad era más importante que la calidad. Así fue hasta que Japón mostró a Occidente que la sociedad prefería la calidad cuando era accesible. Una de las claves del milagro japonés es el concepto de *kaizen*, la implacable persecución de mejoras en la calidad obteniendo el máximo partido de los recursos existentes. En Occidente existe la idea generalizada de que progresar es invertir más dinero para reemplazar equipos, tecnología, instalaciones,... Mientras que en Occidente se aplica dinero a los problemas para cambiarlo todo, en Japón se mejora de manera continua mediante pequeños cambios y sólo cuando no se pueden obtener más mejoras, es el momento de hacer grandes inversiones. Reforzadas por el éxito económico japonés, dos ideas fundamentales, la mejora continua (*kaizen*) y un fuerte sentido de integración de los trabajadores en la organización, fueron exportados desde Japón, primero a Estados Unidos y luego al resto de países occidentales.

En los años 50 aparecieron las primeras normas nacionales sobre calidad, generadas por el Departamento de Defensa Americano, seguidas en pocos años por normas de la OTAN y normas británicas, que si bien fueron concebidas con fines militares, pronto comenzaron a aplicarse en la industria civil y aparecieron versiones para la producción de bienes manufacturados de todo tipo.

El concepto de Calidad Total, heredero occidental del *kaizen* japonés, apareció en los años 80, como la implementación en toda una organización de una política que pretende la movilización permanente de todo el personal para mejorar la calidad de sus productos y servicios, la

efectividad de su funcionamiento y la adecuación a sus objetivos, teniendo en cuenta en todo momento la evolución del entorno. Introduce dos aspectos muy interesantes. Por un lado un cambio radical en el modo en que los trabajadores entienden su responsabilidad individual: cada persona en la organización no es sólo responsable de una serie de tareas y cometidos, sino que además es responsable de mantener un esfuerzo constante para realizar su trabajo del mejor modo posible y participar activamente en su optimización. Esto supone un cambio cualitativo de mentalidad y una revolución conceptual, con todas las características que ello supone. Por otro lado, introduce una mayor integración de todo el personal en la organización, ya que al encomendarse a cada individuo la mejora de todas las actividades se le hace partícipe en cierta medida de la organización del trabajo y se refuerza el sentimiento de pertenencia a un equipo colectivo, lo que redundará en un aumento de la motivación.

En consecuencia, dentro del paradigma definido por la Calidad Total, juega un papel clave el concepto de mejora continua, estableciéndose como uno de los objetivos del Sistema de Gestión de la Calidad el hacer posible que exista la mejora continua real del funcionamiento y resultados de la organización.

#### **67.5.1. Las normas ISO 9000**

El siguiente cambio de mentalidad significativo en el campo de la calidad vino marcado por la aparición de la familia de normas ISO 9000, que aparecieron en 1987 y fueron revisadas notablemente revisadas y simplificadas en el año 2000. Su objetivo fundamental es proporcionar un marco conceptual y una metodología para definir un QMS de modo consistente, dedicando especial atención a la satisfacción de los usuarios, que se consagra como el concepto clave para una buena gestión de la calidad.

Esta normativa se basa en los siguientes puntos fundamentales para implantar un Sistema de Gestión de la Calidad:

- Implicación de la Dirección, que debe tomar la decisión de implantar un QMS y comprometerse en su implementación, control y seguimiento.
  
- Definición de toda una organización de calidad: estructura, asignación de responsabilidades, asignación de recursos y formación del personal.
  
- División de cada proceso en subprocesos. Por ejemplo, en el proceso de elaboración de un mapa, una posibilidad sería definir los siguientes subprocesos: establecimiento de la geodesia, fotogrametría, formación, edición e impresión. La escala del modelo de calidad, el que sea más o menos detallado, depende del número de subprocesos que se definan.

- Consideración de un triple papel para cada subproceso: cliente, en cuanto que recibe cierto producto de entrada; procesador, en cuanto se efectúan una serie de operaciones sobre la entrada para modificar sus características; y suministrador, en cuanto que proporciona cierto producto de salida para el subproceso siguiente en la cadena de producción.

- Establecimiento de controles de calidad (QC) antes y después de cada subproceso, con lo que se verifica la entrada y salida en cada caso, definiendo en cada control los Indicadores de Calidad que se consideren pertinentes y para cada indicador, los umbrales de calidad que se consideran admisibles, y procedimientos correctivos en caso de no conformidad con alguno de los controles de calidad.

- Descripción de todo el QMS en una serie de documentos normalizados: Manual de Calidad, descripción de procesos, instrucciones de trabajo,...

En la versión de la normativa ISO 9000 v2000, se ha simplificado el número de normas de manera considerable, de 25 a 4, de las cuales las principales son:

ISO 9000: 2000 “Sistemas de gestión de la calidad. Conceptos y vocabulario”

- Establece los fundamentos de los sistemas de gestión y la terminología a usar para evitar ambigüedades.

ISO 9001: 2000 “Sistemas de gestión de la calidad. Requisitos”

- Especifica los requisitos para los sistemas de gestión de la calidad. Esta propuesta es genérica, supone un marco conceptual aplicable a cualquier caso. Es la propuesta normativa de ISO para aquellas organizaciones con fines contractuales o de certificación, aunque también puede ser utilizada a nivel interno. Los requisitos de los productos quedan fuera del alcance de esta normativa.

ISO 9004: 2000 “Sistemas de gestión de la calidad. Directrices”

- Forma un par consistente con la ISO 9001:2000. Esta versión, sin ser una guía de la aplicación de la ISO 9001:2000, incluye recomendaciones sobre un rango más amplio de objetivos para un SGC, orientadas a mejorar las prestaciones globales de una organización en el camino de la “excelencia en los negocios” (mejora del desempeño de la organización, de la satisfacción al cliente y de las demás partes implicadas). No posee carácter contractual y se recomienda su uso conjunto ISO 9001:2000 dado que va más allá de los requisitos mínimos establecidos por esta última.

Esta nueva versión de ISO 9000 presenta una serie de novedades importantes:

- Es más fácilmente aplicable al sector público y a la pequeña empresa.
- Está más centrada en el cliente y tiene también en cuenta al resto de partes interesadas en el éxito de la organización (personal, sociedad, propietario de la empresa, suministradores, sindicatos,...).
- Supone manejar menos documentación, los documentos obligatorios han pasado de 17 a 6.
- Se aplica a productos en general (todo aquello que tiene un valor): bienes, servicios, software, etcétera.
- Comprende calidad de producto, de procesos y de sistemas.
- Se ha integrado con otros sistemas de gestión (medioambientales y de seguridad e higiene).
- Incorpora 8 principios básicos de calidad:

- 1) El cliente como centro
- 2) Liderazgo
- 3) Involucración del personal
- 4) Aplicación a nivel de procesos
- 5) Concepción de la organización como un sistema
- 6) Mejora continua
- 7) Toma de decisiones basada en hechos
- 8) Relaciones de beneficio mutuo con los suministradores.

- Es más sencilla, más fácil de aplicar, más concreta, su implementación supone un compromiso más directo de la dirección y del personal. Por otro lado, al incorporar la calidad de sistemas y concebir la organización como un sistema más, extiende sus principios a toda la organización de la empresa y convierte al QMS en un verdadero Sistema de Gestión Total (TMS).

Existe la posibilidad de obtener una certificación, que asegura que efectivamente la práctica real coincide con su descripción documental, otorgada por una organización externa de certificación, y auditoria de calidad, cuya periodicidad depende de cada país, en el caso español es de 2 años.

En cualquier caso, ISO 9000 constituye una filosofía, una forma de trabajo, no la mera aplicación de una serie de reglas que sirven únicamente para obtener la certificación y que acaban por convertirse en una burocracia más (ver cuadro 1). El auténtico beneficio no es la certificación, sino el control total sobre las características esenciales de los procesos que se obtiene.

	CON ORGANIZACIÓN	SIN ORGANIZACIÓN
CON SENTIDO COMÚN	CALIDAD	CAOS CREATIVO
SIN SENTIDO COMÚN	BUROCRACIA	CAOS

**Cuadro 1.** La aplicación de ISO9000 necesita ser llevada a cabo con sentido común y de manera muy organizada.

La idea básica podría resumirse en el lema “decir lo que se hace y hacer lo que se dice”, que pretende disponer de una auditoria continua de calidad que permita controlar el proceso de producción y generar productos con los valores de calidad que se desee en cada momento. ISO 9000 no garantiza necesariamente la obtención de productos de alta calidad, en realidad se puede producir algo de calidad ínfima bajo ISO 9000, lo único que ocurre es que las características del producto se hacen evidentes para todos, productor y clientes al estar descritas con arreglo a unas reglas establecidas.

Es innegable que la introducción de un QMS, esté basado o no en ISO 9000, supone afrontar un coste inicial, pero esto no nos debe llevar a la fácil conclusión de que la calidad es siempre algo caro. El binomio coste/calidad se comporta de manera insólita: si una organización se preocupa única y exclusivamente de los costes, indefectiblemente la calidad de sus productos, y por extensión la calidad de sus procesos, disminuirá; sin embargo, si centra su atención en la calidad de lo que produce e implanta un QMS, a largo plazo, sus costes disminuirán.

### **67.5.2. Implantación en la cartografía oficial europea**

CERCO (Comité Europeo de Responsables de la Cartografía Oficial) decidió en 1997 formar un Grupo de Trabajo sobre Calidad con la finalidad de estudiar los problemas planteados e intercambiar experiencias sobre aspectos de calidad en el ámbito de los productores oficiales de cartografía información geográfica a nivel europeo. Este Grupo de Trabajo mantiene dos líneas de actividad fundamentales, una relacionada con Sistemas de Gestión de la Calidad e ISO 9000, que se correspondería con lo que hemos llamado calidad de procesos, y otra relacionada con Calidad de Datos, que podemos denominar calidad de producto.

En relación con la primera, realizó en el año 1999 una encuesta europea para explorar hasta qué punto los QMS en general y, en particular ISO 9000, se han implementado entre los miembros de CERCO.

De los veintitrés organismos europeos productores oficiales de cartografía que respondieron a la encuesta, doce contestaron tener un QMS implementado, de los que diez, es decir casi todos ellos, se han basado en la familia de normas ISO 9000, y los once organismos restantes declararon tener prevista en sus planes de trabajo la implantación de un QMS en un momento u otro.

Es decir que se reparten en casi dos grupos iguales las NMAs con y sin un QMS, pero si se mira la fecha de implantación, se ve que de doce QMS, nueve se han implementado en los años 90, lo que marca una fuerte tendencia de crecimiento y además indica que se ha producido muy recientemente un cambio cualitativo importante en la cartografía oficial europea.

En cuanto a intención de certificación, de las doce NMAs con un QMS implementado, una clara mayoría, nueve, declararon tener ya la certificación, o tener previsto en sus planes el obtenerla, mientras que las tres NMAs restantes hicieron constar su decisión de no solicitar la certificación externa de su QMS.

Las instituciones que ya poseen la certificación son cuatro, los responsables de la cartografía oficial de: Reino Unido, que la obtuvo hace ya siete años; Suiza; Turquía, que es un organismo militar, lo que le dota de una disciplina y organización que hace más fácil la implantación de un nuevo sistema corporativo; y Hungría, que la obtuvo en 1999, más concretamente en el proceso de producción del Catastro.

Los organismos que han decidido no solicitar por ahora la certificación lo hacen por varias razones. La primera de ellas es el alto coste que implica el mero concurso de una entidad oficial externa de certificación. La segunda es que el principal beneficio que se obtiene de la implantación de un QMS es el cambio de mentalidad en todo el personal de la organización, una mejor gestión de la calidad y la incorporación del punto de vista del usuario, beneficios cuya consecución depende más de la correcta implementación del QMS que de la obtención de la certificación oficial. Por último, la mejora de imagen corporativa y el aval externo que supone la

certificación, no son tan relevantes para un Instituto Cartográfico Nacional, con un prestigio ya bien asentado y una imagen corporativa de fiabilidad y profesionalidad bien establecida.

Los beneficios citados por las NMAs como consecuencia de la implantación de un QMS se pueden resumir en los siguientes puntos:

1) En los resultados

- Mejora de los productos y servicios existentes
- Estabilidad en los niveles de calidad del producto final
- Mejora de los niveles de calidad finales

2) En los procesos

- Análisis y a veces mejora de los procesos técnicos y comerciales
- Incorporación del punto de vista del cliente mejor y más consistente
- Mejora de la confianza del cliente al tener en cuenta sus opiniones
- Mejora de los tiempos de producción
- Disminución de los costes de producción
- Supresión de tareas duplicadas
- Mejor respuesta ante errores e incidentes
- Mejor situación para reaccionar ante situaciones imprevistas
- Los errores no se repiten
- Calibración de los equipos normalizada y periódica
- Localización de fallos, errores y puntos débiles en los procesos
- Mejoras en el diseño de los procesos existentes

3) En la organización

- Reducción del coste de formación del nuevo personal
- Aumento de beneficios
- Protección del know-how ante cambios de personal
- Disponer de un lenguaje común sobre calidad
- Mejor comprensión de la organización por todos los trabajadores
- Mejor organización: las responsabilidades se definen con mayor precisión y las relaciones entre departamentos están descritas
- Más fácil subcontratación de tareas concretas
- Mejor control de las tareas subcontratadas
- Mayor satisfacción personal de los trabajadores

- Mejor comunicación con los clientes
- Mejor coordinación entre distintos departamentos
- Mejor imagen corporativa de la organización

Los principales inconvenientes y riesgos identificados por productores europeos de cartografía oficial a partir de su experiencia, ordenados por su relevancia, son:

- Aumento de los costes de producción, ya que se añaden una serie de tareas que antes no existían (como formación del personal, controles de calidad, auditorías de calidad, creación y mantenimiento de la documentación,...).
- Menor satisfacción del personal. No resulta fácil conseguir que los profesionales de gran experiencia asuman que es necesario cambiar la forma de trabajo que durante años ha sido considerada correcta.
- Aparición de otra burocracia inútil. Es necesario minimizar la documentación mínima en cada caso. Desde luego, el sentido común impone la utilización de documentos electrónicos y existe un buen número de herramientas de gestión de documentos que vale la pena utilizar para agilizar este aspecto.
- Disminución de la producción

Subcontratación más difícil, al imponer controles y condicionantes más estrictos. El riesgo aquí es establecer condiciones tan exigentes que restrinjan en exceso la posibilidad de que haya empresas que estén interesadas en contratar el trabajo.

No conseguir fácilmente el convencimiento de los altos directivos de la organización, que buscan beneficios a corto plazo, cuando un QMS requiere un considerable esfuerzo a largo plazo

Calidad del producto final inmutable. Algunas organizaciones se sienten frustradas porque tras un esfuerzo considerable siguen haciendo aparentemente lo mismo que antes. Lo cierto es que en tal caso los beneficios son: control total de los procesos de producción, mejora de la imagen corporativa, la incorporación del punto de vista del usuario y otras ventajas ya mencionadas.

Las principales desventajas que conlleva la implementación de un QMS, nacen de los riesgos que siempre acompañan a toda revolución que implica un cambio de paradigma y, por lo tanto, de mentalidad, que se basa en unos nuevos principios de partida que subvierten de algún modo el orden establecido anteriormente.

Por otro lado y como cualquier otra revolución tecnológica, el advenimiento de los QMS constituye una tendencia inevitable. Supone la entrada en una nueva era o período y sólo las organizaciones que sean capaces de aplicarlos con éxito, sobrevivirán a largo plazo por

encontrarse en condiciones de competir en un espacio en el que las reglas del juego habrán cambiado y disfrutar de las ventajas que la gestión de la calidad ofrece se convertirá en algo habitual.

### **67.5.3. Dos casos de uso: el IGN y el ICC**

En cuanto a la NMA española, en el Instituto Geográfico Nacional, el Laboratorio de Calidad del Papel, perteneciente a la Subdirección General de Producción Cartográfica, ha conseguido la certificación ISO 9000.

Este laboratorio, incluido en la Red Española de Laboratorios de Ensayo (RELE), fue creado en un principio para verificar la calidad del papel cartográfico; en la actualidad efectúa 57 ensayos diferentes sobre 57 características distintas del papel (gramaje, resistencia a la tracción, blancura, porosidad,...) tanto para clientes internos como externos al IGN.

Después de un largo proceso de implementación, documentación exhaustiva de todos los procedimientos, calibración de instrumentos de medida, etcétera, que ha durado en total 7 años, se ha obtenido la certificación en el 2004.

Si bien el Laboratorio de Calidad del Papel es una unidad pequeña dentro del IGN y quizás poco representativa, ya que no está directamente en la cadena de producción de cartografía o información geográfica, constituye un proyecto piloto, un caso ejemplo, que nos servirá para extraer conclusiones y estudiar su posible implementación con un bagaje y una experiencia nada desdeñables.

El Instituto Cartográfico de Cataluña ha obtenido la certificación ISO 9000 en el año 2006, en un proyecto iniciado en 1995 que cubre los procesos de producción de la base topográfica de Cataluña 1:5000, del mapa topográfico de Cataluña a la misma escala 1:5.000 y del modelo digital del terreno que lo complementa. Estas certificaciones abarcan sólo los procesos de formación, por lo que dejan fuera los vuelos, aerotriangulaciones, etc. Se trata pues de otra implementación de carácter piloto en la que la obtención de la certificación o sello es más bien una buena excusa para poner en práctica todo lo que significa un QMS, lo que significa que en un futuro podrían no estar interesados en mantenerlo. Esta institución también está iniciando el proceso de certificación de las condiciones medioambientales de acuerdo con la norma ISO 14001.

### **67.5.4. QMS y la Información Geográfica**

La aplicación de un QMS, o más concretamente de la filosofía ISO 9000, a la producción de cartografía e información geográfica tiene una parte en común con su aplicación en otros sectores y otra parte esencialmente específica, originada por lo peculiar de la información geográfica y por las características de los métodos de trabajo.

En primer lugar, la información geográfica posee una serie de cualidades que la distinguen de otros tipos de información: es muy voluminosa, ya que cualquier transacción u operación elemental (como generar una nueva carretera, modificarla o borrarla) afecta a un gran número de registros y coordenadas; es fractal, porque propiedades geométricas elementales como la longitud de las líneas varía con la escala; borrosa, debido a que lo que se modela es el mundo real (compuesto de ríos, montañas, etc.) y no una abstracción definida por el hombre (como es una cuenta corriente en un SI bancario, por ejemplo), lo que hace que los objetos representados no estén normalizados en ningún sentido y además no tengan una definición nítida (¿dónde comienza y acaba exactamente un bosque? ¿y una cordillera? ¿un cabo es un punto, una línea o una superficie?); y muy dinámica, debido al fuerte ritmo de crecimiento y variación de todo aquello que es obra humana, como carreteras, puentes, túneles, presas, poblaciones, edificaciones,...

Todo ello hace que en los datos geográficos existan siempre tasas residuales de errores que no es posible eliminar totalmente, lo que unido a el enorme volumen de datos implicado, hace que el número de ítems defectuosos sea considerable. Por ejemplo, una descripción general de España a escala 1:200.000 incluye del orden de 5.000.000 de coordenadas y 200.000 objetos geográficos con nombre; una tasa de error de tan sólo el 1% supone que hay 50.000 coordenadas con errores mayores de lo admisible y 2.000 nombres erróneos. Y en este campo no existen errores menores, todas las deficiencias son de gran importancia, ya que una simple errata en una entidad de población puede hacer fracasar un sistema de búsqueda de caminos mínimos en un caso de emergencia. Por lo tanto, a veces es difícil de compaginar la satisfacción del usuario, que no desea ser perjudicado por lo que él considera “errores groseros”, con las dificultades de la producción, donde siempre hay errores y todos los errores son “groseros”.

El enorme volumen de datos implicados también implica largos ciclos de producción y actualización. Cuatro, cinco o seis años es un periodo de tiempo normal para completar una versión de un producto a escala media (1:25.000) que cubra toda España o una serie a gran escala (1:5.000) que recubra una zona menor, lo que dificulta enormemente el mantenimiento de una calidad homogénea en todo el producto debido al tiempo transcurrido y hace muy difícil tanto la reingeniería de procesos cuando se identifican problemas prácticos, como la adaptación a los requerimientos de los usuarios, siempre en rápida evolución.

En segundo lugar, los procesos implicados también presentan ciertas peculiaridades. La familia de normas ISO 9000 fue diseñada en un principio para su utilización en la producción de productos manufacturados y luego se extendió conceptualmente a la prestación de servicios. Su aplicación a la producción de cartografía e información geográfica, un proceso descrito frecuentemente como basado en una mezcla de tecnología, arte y artesanía, presenta algunos

problemas en la formalización nítida de un conocimiento ciertamente borroso y subjetivo. Efectivamente, la cartografía conserva un toque artístico innegable en su elaboración, ya que su objetivo final es presentar y representar la información de modo que el ojo humano la perciba de la manera más rápida y eficaz. Por algo los mapas se han colgado desde tiempo inmemorial en la pared como elemento ornamental y decorativo.

A pesar de la formalización que ha supuesto tanto la Cartografía Asistida por Ordenador como los Sistemas de Información Geográfica, existen áreas enteras de las técnicas utilizadas, como por ejemplo la generalización, todavía sin reglar por sus mismas características. La generalización, el proceso necesario para transformar una cartografía a una determinada escala a otra escala menor, con menos resolución, conlleva una selección de qué cosas son más significativas, una esquematización de la geometría, una simplificación del contenido semántico y una armonización final que trata de que la impresión general de la escena resultante no haya sido alterada durante el proceso. Para obtener rápidamente una idea de lo complejo y subjetivo de la generalización, basta echar un vistazo a unos cuantos mapas de Finlandia, el país de los mil lagos, a diferentes escalas.

Estas tareas son esencialmente subjetivas y hasta ahora su correcta realización se basa en la mayoría de los casos en el buen hacer y la experiencia de un conjunto de profesionales que se verían en un gran apuro si se vieran obligados a expresar por escrito todas las reglas que aplican en su trabajo cotidiano.

Una muestra de lo convencional y subjetivo de algunos de los mecanismos aplicados es el hecho de que la generalización constituye un problema de solución no única, lo que da lugar a la existencia de estilos de generalización y escuelas de generalización, originadas por la necesidad de cada organismo productor de cartografía de mantener la máxima homogeneidad en la concepción de sus productos.

Una vez que se dispone de toda la información adecuada para la escala de trabajo, aparece otro proceso, fundamental en la producción de cartografía, que también se resiste a ser formalizado de modo objetivo, aunque no tanto como la generalización: la edición necesaria para el correcto trazado del mapa. Para editar un documento cartográfico es necesario resolver los conflictos visuales que se plantean cuando dos o más elementos gráficos se superponen o bien aparecen demasiado próximos para que el ojo humano los distinga y perciba con claridad. Para resolver tales situaciones hay que desplazar artificialmente unos elementos y dejar otros fijos. La situación se complica cuando en dichas interacciones visuales intervienen símbolos puntuales y lineales, como las líneas paralelas que describen una carretera con un ancho superior al real a la escala del mapa, o rótulos, que deben atacar al elemento nombrado de modo que el ojo humano no se llame a engaño, o textos que no corresponden a ninguna geometría concreta, como el nombre de un paraje, y que deben estar centrados en la zona nombrada y dar idea de su extensión. Aunque existen reglas concretas y explícitas para resolver todas estas situaciones, lo

cierto es que juzgar la calidad final del resultado es a menudo subjetivo y discutible, y la formalización de todo el conocimiento implicado no está totalmente resuelta.

En consecuencia, tenemos por un lado un objeto de trabajo, la información geográfica, que implica largos y pesados procesos de producción y contiene siempre tasas residuales de errores significativas, debido a su enorme volumen; por otro, las técnicas y métodos aplicados tienen a menudo un componente artesanal e incluso artístico nada fácil de formalizar.

#### **67.5.5. Relación entre las normas ISO 9000 y las ISO 19100**

Tenemos por un lado las normas ISO 9000 diseñadas para la definición e implantación de Sistemas de Gestión de la Calidad (QMS), y por otro lado tenemos la familia de normas ISO 19100 cuyo campo de aplicación es la Información Geográfica, y más concretamente hay varias normas específicas dedicadas a la Calidad de la IG:

ISO 19113 Principios de Calidad

ISO 19114 Métodos de evaluación de la calidad

ISO 19138 Medidas de la calidad de datos

¿Cuál es la relación entre ellas?

En primer lugar cubren aspectos complementarios, ya que las normas ISO 9000 abordan la calidad de procesos de producción de bienes y servicios, mientras que las normas ISO 19100 consideran la calidad de la IG desde el punto de vista de la calidad del producto final, hasta ahora considerando que el producto final es un conjunto de datos geográficos, esperemos que en el futuro se tenga en cuenta también la calidad de servicios.

En segundo lugar, es evidente que dentro de la implantación de un QMS es necesario definir y realizar Controles de Calidad, que al fin y al cabo no son más que casos de determinación de la calidad de un producto intermedio, y es aquí dónde las normas ISO 19100 relativas a la calidad son aplicables y entran en juego.

#### **67.5.6. La satisfacción del cliente**

La medida de la satisfacción del cliente constituye el método más eficaz y práctico de evaluación de la calidad del producto o servicio suministrado, hasta tal punto que en su

significado más profundo y después de todo lo dicho, se hace cada vez más evidente que calidad y satisfacción del cliente son sinónimos.

Satisfacción del cliente = Calidad
------------------------------------

Por lo tanto, este concepto debe tener un status reconocido en toda cultura corporativa y su evaluación debe ser utilizada para la mejora real de procesos.

Sin embargo, su determinación es compleja ya que satisfacción es el sentimiento de una persona de placer o decepción resultante de la confrontación de su percepción de los resultados obtenidos con sus expectativas, la satisfacción es una función subjetiva que depende de los resultados y de las expectativas.

Satisfacción = función subjetiva (expectativas, resultados)
---

La influencia de las expectativas en el comportamiento del cliente es frecuentemente infravalorada y se puede sintetizar en el cuadro adjunto (ver cuadro 2).

Si el nivel de expectativas es bajo, es relativamente fácil satisfacer al cliente, pero a no ser que obtenga resultados realmente excelentes, puede cambiar a otro suministrador fácilmente. En caso de no resultar satisfecho el cambio de suministrador es inevitable.

Expect/Satisf.	BAJA	MEDIA	ALTA
BAJA	Cambio de suministrador inevitable	Fidelidad moderada	Sorpresa
MEDIA	Cambio de	Quejas poco útiles	Fidelidad moderada

	suministrador sin aviso		
ALTA	Insatisfacción con quejas útiles	La insatisfacción puede ser tolerada	Fidelidad profunda

**Cuadro 2.** Representación del comportamiento del cliente en función de su grado de expectativas (en vertical) y su grado de satisfacción (en horizontal).

Los clientes con unas expectativas medias pueden dirigirse a la competencia sin previo aviso si no están satisfechos y, en cualquier caso, no están en situación de formular reclamaciones que sean realmente útiles para mejorar la calidad del producto.

Si un cliente tiene buenas expectativas acerca de una organización o producto, muestra el mejor comportamiento de los posibles: puede ocasionalmente tolerar los problemas que se presentan sin cambiar de suministrador si se le trata adecuadamente; en todo caso, debido a la motivación derivada de sus altas expectativas, la información que aporta cuando formula reclamaciones es muy útil para mejorar aquellas características del producto que son más valoradas por los clientes, cosa que a veces es menos evidente de lo que parece; y si está satisfecho con las propiedades del producto (conjunto de datos suministrado) aparece lo que se denomina lealtad del cliente, que cada vez estará más convencido de que no le conviene cambiar de suministrador.

Conocer qué características o aspectos de un producto o servicio son consideradas más importantes es algo sumamente importante. RENFE inició hace algunos años la implantación de un QMS y descubrió que frente a otras características (servicio y precios en las cafeterías, limpieza de los servicios, espacio para equipajes, precio del billete,...) lo más valorado por lo viajeros era la puntualidad. Concentrando esfuerzos en este aspecto, la puntualidad de los trenes españoles está empezando a ser proverbial y se ha mejorado la satisfacción de los viajeros notablemente.

La conclusión es clara: la estrategia mas obvia que consiste en mejorar las características del producto, por ejemplo reduciendo los errores en las coordenadas, códigos y nombres, puede ser complementada aumentando las expectativas del cliente, dentro de los límites de la ética, con lo que siempre mostrará un comportamiento más interesante para la organización productora.

En ese sentido, y volviendo a insistir en el factor subjetivo de la satisfacción, se puede decir que nunca es un bien concreto, simplemente un fichero de datos geográficos, lo que se le suministra

al cliente. Aunque no seamos conscientes de ello, además del producto en sí, siempre se le da un servicio, que incluye el tiempo y modo de suministro, la facilidad para disponer de diferentes formatos y soportes, la documentación adjunta, las explicaciones, el servicio post-venta, las condiciones de corrección de errores en caso de que aparezcan, las posibilidades de actualización de los datos, incluso a veces consultoría acerca de cómo utilizar la información, y un largo etcétera.



Y todo ello va acompañado de una imagen determinada, compuesta de una imagen corporativa y de una imagen del producto en cuestión. Aumentar la calidad del servicio y la imagen del producto, aún cuando se esté ofreciendo realmente el mismo bien concreto, sirve para establecer una mejor relación con el cliente y aún en el caso de que quede insatisfecho, conseguir que éste presione de manera efectiva y útil al suministrador para que mejore las características de lo que produce.

También la imagen que el cliente tenga de cada aspecto de la calidad (exactitud posicional, exactitud semántica, completión,...) influye decisivamente en su grado de satisfacción, influencia que se puede describir con bastante fidelidad por medio de la curva de Kano.

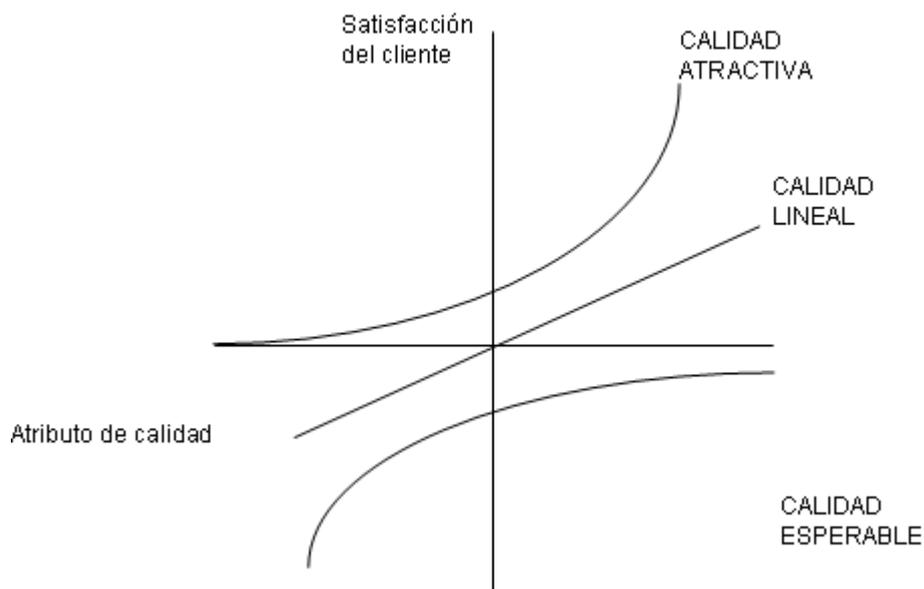
Si un atributo o aspecto de la calidad determinado (como la corrección ortográfica de los nombres), es considerada como parte de la calidad esperable de un conjunto de datos, su ausencia causa una clara insatisfacción y suele ser motivo de reclamación; pero si existe al cien por cien, la reacción del cliente es neutra.

Cuando un atributo de calidad (como la exactitud posicional dentro de unos márgenes razonables) es visto como lo que se puede llamar parte de la calidad lineal del producto, su aumento origina un incremento constante, proporcional y predecible en el grado de satisfacción del cliente. Por ejemplo, a mayor exactitud posicional la respuesta positiva es mayor.

Los aspectos de la calidad que aparecen como un añadido inesperado, lo que podemos llamar calidad atractiva (como por ejemplo la posibilidad de obtener cada día una versión actualizada de los datos a través de la red, si así se desea), originan una respuesta altamente positiva cuando aparecen, pero su ausencia no conlleva insatisfacción alguna porque no es algo esperable. Los atributos que entran dentro de la calidad atractiva son reproducidos antes o después por la competencia si son realmente útiles, y con el tiempo acaban por convertirse en parte de la calidad esperable. También puede aparecer un efecto paradójico cuando al cliente se le da tal cantidad de ventajas y aspectos de la calidad que no espera, que se estimula su sentido crítico y comienza a ser más y más exigente.

Por lo tanto, la producción de calidad atractiva en la medida de lo posible, es otro método para aumentar la opinión positiva formada sobre el producto y la organización, lo que siempre redundará, como ya se ha dicho, en una más estrecha y fructífera relación productor- cliente. Uno de los objetivos a conseguir es la máxima implicación de éste último para obtener de él información útil que sea realmente eficaz para la mejora de la actividad de la organización suministradora.

La evaluación de la satisfacción del cliente, este concepto central en gestión de la calidad, pasa por hacer encuestas y entrevistas a una muestra representativa de clientes, revisar cuidadosamente los motivos de todas las reclamaciones, seguir en ocasiones a los clientes perdidos para averiguar sus motivaciones, explorar el comportamiento de la



**Figura 1.** Curva de Kano que describe la influencia de la imagen de cada atributo de calidad en la satisfacción del cliente.

La evaluación de la satisfacción del cliente, este concepto central en gestión de la calidad, pasa por hacer encuestas y entrevistas a una muestra representativa de clientes, revisar cuidadosamente los motivos de todas las reclamaciones, seguir en ocasiones a los clientes perdidos para averiguar sus motivaciones, explorar el comportamiento de la competencia en este área, prever la evolución de las expectativas, etc. Todo ello en un proceso que debe ser diseñado cuidadosamente, como cualquier otro proceso de producción dentro de la empresa, y actualizado periódicamente.

Durante el ciclo de vida del producto, el valor de la satisfacción del cliente puede variar considerablemente en función de cada fase comercial: adquisición, utilización, reclamación si existe, actualización, rechazo/sustitución por otro producto similar. Normalmente se asume que el valor más representativo es el alcanzado durante la utilización y después de transcurrido cierto tiempo, pero a veces es en el momento en el que se reemplaza un conjunto de datos por la siguiente versión, cuando la opinión del cliente es más objetiva.

Por último hay que recalcar que la satisfacción del cliente es el objetivo por antonomasia, pero también es una herramienta de marketing en cuanto indicador de éxito, ya que el hacer pública esa información constituye uno de los medios más efectivos de aumentar la confianza de los clientes existentes y de atraer otros nuevos.

En la producción de cartografía e información geográfica, tradicionalmente regulada por leyes o normativas, y definida en sus detalles desde arriba hacia abajo, sin tener en cuenta el punto de vista del usuario, sino lo que el productor juzga que es el punto de vista del usuario, hay que prestar especial atención a este parámetro. Su incorporación permite cambiar la sensación de sujeto pasivo que el cliente tiene hasta ahora, hasta hacerle sentir que realmente sus ideas, opiniones y preferencias son valiosas y son tenidas en cuenta en la definición del producto.

El que, como ya se ha dicho, los procesos de producción de información geográfica sean tan largos, dificulta la incorporación del punto de vista del usuario, cosa que fácilmente puede romper la homogeneidad de la producción. La reingeniería de procesos geográficos resulta compleja y costosa, pero es necesario en cualquier caso abordar el problema antes que perder contacto con el cliente.

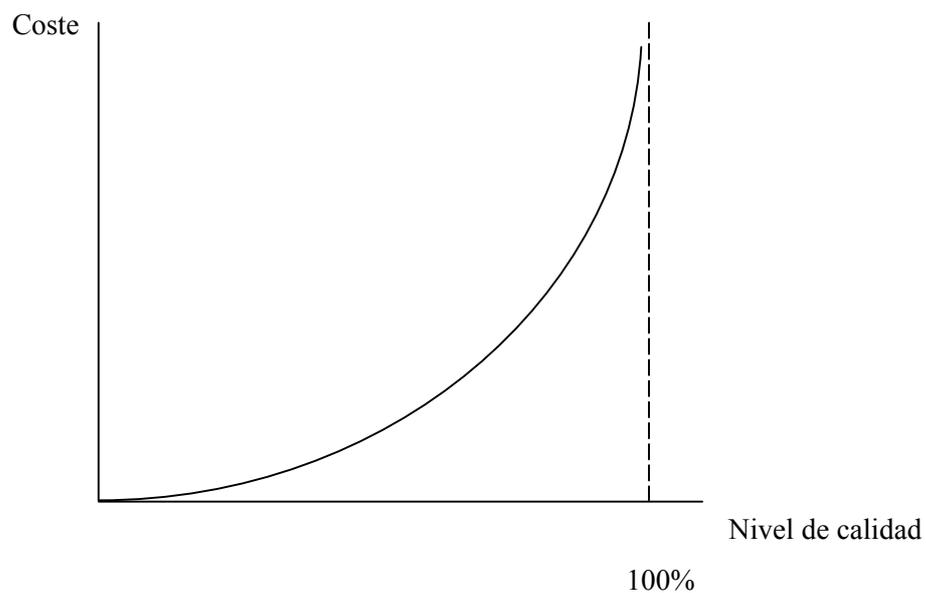
De lo dicho se deduce la necesidad de definir productos más en función de las demandas futuras, digamos a cinco años vista, que en función de las demandas presentes, por lo que identificar las tendencias del mercado cuanto antes es casi más importante que conocer con gran detalle los requerimientos actuales.

La ya descrita persistencia de errores residuales significativos, debida al enorme volumen de datos que desplaza la información geográfica, hace que el ofertar datos geográficos de muy alta calidad sea a menudo algo muy costoso y poco práctico.

No podemos olvidar que el coste de la calidad aumenta de modo exponencial frente a los umbrales de calidad exigidos. Efectivamente, si bien la inversión correspondiente a niveles de calidad bajos o intermedios es moderada, aumenta muy rápidamente conforme el objetivo se acerca al conjunto de datos perfectos, y resulta que pasar de un 96% de datos sin un tipo determinado de errores un 97%, puede suponer duplicar el coste de la corrección de errores en tiempo y esfuerzo.

Por otro lado, como ya hemos dicho, a veces resulta muy difícil establecer criterios objetivos para fijar los umbrales de calidad más adecuados en cada caso. En la exactitud posicional existen criterios, heredados de la tradición cartográfica, que se aplican de manera ciertamente

razonable, como el criterio de que el error de posición en el 90% de los puntos fácilmente identificables esté por debajo de 0,2 mm a la escala correspondiente. Pero en el resto de parámetros de calidad, por ejemplo en el caso de errores en los nombres, códigos, errores topológicos, de compleción o de otro tipo, a menudo se habla de umbrales de error del 90% o del 95%, pero esos niveles se fijan con cierta arbitrariedad. El usuario de los datos tampoco ayuda mucho a la hora de definir qué nivel de calidad necesita realmente, y con frecuencia demanda simplemente la mejor calidad posible.



**Figura 2.** Coste de calidad en función del nivel de calidad

Por ello, producir niveles exageradamente altos de calidad es algo que resulta muy costoso, poco adecuado y que implica una difícil elección umbrales de calidad desde el punto de vista del usuario final. Lo que sí demanda el cliente es un tiempo de respuesta adecuado para que se subsanen errores y defectos cuando aparecen en el conjunto de datos y son relevantes para su actividad.

#### **67.5.7. Calidad en la gestión (modelos de excelencia)**

Para el diccionario de la RAE excelencia es “superior calidad o bondad que hace digna de singular aprecio y estimación una cosa”. Dentro de un ámbito de la gestión empresarial, las organizaciones excelentes son aquellas que poseen capacidad para alcanzar y mantener en el tiempo resultados sobresalientes para sus grupos de interés. El enfoque que ha de tener la

gestión para conducir a una excelencia sostenida básicamente coincide con los presentados anteriormente (enfoque al cliente, liderazgo, etc.).

La excelencia supone que la organización haya alcanzado una fase de madurez en la que las perspectivas son más sistémicas, abiertas, integradoras y sinérgicas. Existen numerosos modelos de excelencia, como por ejemplo el modelo Deming en Japón, o el Malcolm Baldrige en USA. En nuestro caso, el de mayor interés por nuestro entorno, es el denominado EFQM. Este modelo ha sido desarrollado por la *European Foundation for Quality Management*, a la que debe su nombre, y tiene el patrocinio y los parabienes de la Unión Europea. Este modelo se está difundiendo y aplicando bastante dentro de organismos públicos de la administración española.

La base del modelo es la siguiente: Los resultados excelentes con respecto al rendimiento de la Organización, a los Clientes, las Personas y la Sociedad se logran mediante un Liderazgo que dirija e impulse la Política y Estrategia, las Personas de la Organización, las Alianzas y Recursos, y los Procesos.

Un aspecto importante es que el modelo se denomina de “excelencia”. Para el modelo significa que permite utilizar criterios para evaluar organizaciones en términos de enfoque, despliegue y resultados que además se orientan a la mejora continua. De esta manera, la empresa o institución presentará unos resultados con tendencias positivas, los enfoques de la misma serán adecuados e integradores, el despliegue de los enfoques será apropiado, la evaluación se hará mediante medidas de percepciones e indicadores, y se desarrollarán actividades de aprendizaje que junto con la innovación permitirán poner en práctica las mejoras que aseguren unos resultados de valor para los actores, y la pervivencia de la empresa y la mejora de su posición en el mercado. Íntimamente relacionado con este adjetivo de excelencia, la EFQM se caracteriza por dar anualmente un premio de reconocido prestigio a la mejor aplicación del modelo.

El modelo EFQM es un modelo flexible y no un sistema normativo, adecuado para pequeñas y grandes organizaciones, tanto públicas como privadas. La base del mismo es la autoevaluación como camino para conocerse mejor, comprender y analizar la realidad y el establecimiento de planes de mejora. La autoevaluación es una estrategia para mejorar el rendimiento que se fundamenta en un examen global, sistemático y periódico de las actividades y resultados de una organización y su comparación con el EFQM. La autoevaluación permite detectar los puntos fuertes de la organización y las áreas de mejora.

El modelo EFQM no está contrapuesto a las normativas específicas de cada sector, ni a los sistemas ISO 9000 ya comentados, más bien es un modelo de integración de los anteriores en un

esquema más amplio y completo de gestión. Esta idea es la que pretende destacarse en la Figura 5.5 en la que se ve como ISO 9000 se convierte en la base del edificio de EFQM, el punto de arranque en el camino a la excelencia o mejora del desempeño. Al igual que las normas ISO 9000, el modelo EFQM es un marco general en el que toda organización puede evaluarse, pero necesita de formación del personal y también conviene cierta madurez en sistemas de calidad antes de adoptarlo.

Anualmente se concede un premio o galardón europeo a la calidad en el que se utiliza el modelo EFQM para la valoración de las empresas. La participación requiere rellenar unos formularios, la aportación de la información necesaria y el pago de unas tasas. La valoración de los candidatos se realiza mediante el análisis de sus documentos de autoevaluación, la aplicación de pesos a cada uno de los criterios considerados en el modelo y el juicio de unos expertos que visitan la organización. Por tanto, el reconocimiento no es una certificación que todo el mundo que cumpla unas condiciones pueda alcanzar, el reconocimiento proviene de ser el mejor entre los mejores, de ser excelentes.

## **Conclusiones**

Como resumen de los conceptos esbozados en estas líneas, podemos resaltar dos desplazamientos de significado. En primer lugar, la calidad, tal y como se define y considera en los modernos QMS, se ha convertido en un sinónimo del concepto de satisfacción del cliente, con lo que ésta se convierte en el centro de gravedad de todo lo que es gestión de la calidad. La satisfacción del cliente aparece como la clave de la calidad, no sólo porque calidad y satisfacción se pueden considerar sinónimos, sino también porque su incremento genera una buena comunicación productor-cliente, una sinergia, que permite el flujo de información realmente útil para la mejora del producto y la sintonización de los procesos.

En segundo lugar, y de la mano de ISO 9000 versión 2000, los Sistemas de Gestión de la Calidad (QMS) están perdiendo la Q, ya que al incluir la calidad de la organización considerada como un sistema, tienden a ser Sistemas de Gestión (MS) o Sistemas de Gestión Total (TMS), dedicados a la gestión global o corporativa de una organización. En ese sentido es significativa la aparición de varios proyectos de implantación de un QMS bajo el título, simple y directo, de “Our Way of Working”, “Nuestra manera de trabajar”.

Por otro lado, creemos que está fuera de toda duda que el campo de la información geográfica no puede quedar al margen del cambio que se está produciendo en otros sectores de actividad gracias a los QMS, auténtica mancha de aceite que se extiende de modo imparable a todas las organizaciones. Ha llegado el momento en el que todos los actores del sector (productores, distribuidores, clientes, consultorías, investigadores,...) deben asumir un papel que tenga en cuenta la gestión de la calidad.

Necesitamos ser conscientes de que la aplicación de un QMS en nuestro campo, no es una cuestión trivial y que, en cualquier caso, existen una serie de riesgos aparejados, como son la introducción de una nueva burocracia, la insatisfacción del personal, al aumento excesivo de los costes de producción, etcétera. En resumen, estamos ante una revolución, que como toda revolución conceptual que se precie, es esencialmente inevitable y arriesgada.

Por último, tal y como hemos visto, existe un número significativo de QMS implementados tanto en productores oficiales de cartografía como en productores de hardware, software y servicios, lo que constituye un caudal de experiencia considerable e importante, muy a tener en cuenta, que espera ser aprovechado por todas aquellas entidades que se estén planteando cómo aplicar un QMS en el ámbito de la información geográfica.

## **Bibliografía**

- [1] ISO 9000: 2000 Sistemas de Gestión de la Calidad. Fundamentos y Vocabulario.
- [2] ISO 9001: 2000 Sistemas de Gestión de la Calidad. Requisitos.
- [3] ISO 9004: 2000 Sistemas de Gestión de la Calidad. Recomendaciones para la Mejora del Desempeño.
- [4] Ariza López, F. J. (2002) Calidad en la Producción Cartográfica, Editorial Ra-Ma.

**Tema 68. Cartografía Temática. Definición, clasificación. Naturaleza de los fenómenos geográficos y selección de símbolos temáticos. Simbolización en los mapas temáticos cualitativos. Técnicas de simbolización en los mapas temáticos cuantitativos. Fundamentos de diseño y composición de mapas temáticos. Diseño y producción de atlas temáticos. Atlas nacionales.**

**68.1. Cartografía Temática. Definición, clasificación**

La cartografía es el conjunto de estudios teóricos y de operaciones científicas, técnicas y artísticas para la elaboración de cartas, planos y otros modos de expresión obtenidos a partir de los resultados de observaciones directas o de la exploración y análisis de documentos.

La cartografía general o topográfica es la parte que trata de la elaboración, formación y reproducción de mapas topográficos. En los mapas topográficos se representan los accidentes de la geografía física (hidrografía, orografía), los elementos de la geografía humana (vías de comunicación, poblaciones), las divisiones administrativas y la toponimia.

Es importante diferenciar la cartografía general de la cartografía temática. A los mapas que contienen información propia y distinta de la topográfica se les denomina mapas temáticos.

Como ejemplo, dos definiciones:

Según la ley 7/1986, de ordenación de la cartografía, “la cartografía temática es la que, utilizando como soporte cartografía básica o derivada, singulariza o desarrolla algún aspecto concreto de la información topográfica contenida en aquellas, o incorpora información adicional específica”.

Según la Asociación Cartográfica Internacional: "Un mapa temático es aquél que está diseñado para mostrar características o conceptos particulares. En el uso convencional de los mapas, este término excluye los mapas topográficos."

Los mapas temáticos se dividen en dos grandes grupos de muy distintas características: el primero se refiere a fenómenos cuantitativos si se trata de representar fenómenos mensurables, y

el segundo a los fenómenos cualitativos en el caso de aspectos no mensurables pero diferenciadores.

Los mapas temáticos cuantitativos muestran aspectos espaciales de datos en escalas de medida ordinales o de intervalo; es decir, establecen relaciones de cantidad. Los mapas de densidad de población son un ejemplo de mapas temáticos cuantitativos.

Los mapas temáticos cualitativos representan condiciones, cualidades o características del terreno no mensurables. Su objetivo es mostrar la distribución espacial de una serie de datos de tipo nominal. Los mapas geológicos son un ejemplo de mapas temáticos cualitativos

## **68.2. Naturaleza de los fenómenos geográficos y selección de símbolos temáticos**

### **68.2.1. Naturaleza de los fenómenos geográficos**

El cartógrafo debe tener un perfecto conocimiento de las características que definen el fenómeno geográfico que quiere representar para elegir las más representativas o aquellas que mejor lo delimiten.

En la confección de un mapa temático es necesario tener en cuenta aspectos como: la extensión, la escala de medida y la distribución del fenómeno a representar.

- Extensión

En función de la extensión del fenómeno se distinguen fenómenos puntuales (que sólo afectan a un punto), fenómenos lineales (que se producen a lo largo de una línea) y superficiales (que afectan a una superficie).

- Escala de medida

Los elementos de la naturaleza se miden con el fin de clasificarlos y compararlos; lo que no siempre implica una magnitud numérica. En orden creciente de precisión las escalas de medida de los datos son:

- Escala de medida nominal: se asigna una característica no numérica a un fenómeno, por lo que solo se pueden hacer comparaciones de tipo cualitativo (igualdad o desigualdad entre grupos de elementos). Por ejemplo, en un mapa en el que se representen las cuencas hidrográficas de la península Ibérica.
- Escala de medida ordinal: se establece una cierta jerarquía no mensurable o cuantificable entre los diferentes elementos. Por ejemplo, un mapa en el que se

representen las vías de comunicación según su categoría: autovía, autopista, carretera nacional o carretera secundaria.

- Escala de medida cuantitativa o de intervalo: se asigna una característica numérica a un fenómeno. Por ejemplo, los datos de natalidad en un mapa de población.

- **Distribución del fenómeno**

La distribución de un fenómeno puede ser continua o discreta. Así, se distinguen los fenómenos continuos y fenómenos discretos.

- Fenómeno continuo: El que tiene presencia en todos los puntos del territorio objeto de representación, aunque solo se tengan medidas del fenómeno en algunos puntos. La temperatura y la altitud son ejemplos de este tipo de fenómeno.

- Fenómeno discreto: El que tiene presencia en algunos puntos del territorio objeto de representación. Un ejemplo es la población, dado que se localiza en determinadas áreas y no en todos los puntos del territorio. Algunos fenómenos discretos pueden transformarse en continuos mediante la aplicación de una relación, de esta forma la población pasa a ser un fenómeno continuo cuando se habla de densidad de población (número de habitantes/km<sup>2</sup>).

### **68.2.2. Selección de símbolos temáticos**

Un símbolo es la representación convencional de una realidad. De una gran variedad de símbolos, el cartógrafo elige aquel que mejor representa el fenómeno geográfico por lo que la selección es una de las tareas más importantes a la hora de diseñar un mapa temático. La variedad de símbolos es tan amplia que no hay reglas firmes que prevalezcan para hacer una selección. Sin embargo, hay que tener presente el tipo de fenómeno geográfico cartografiado y las variables visuales (posición, forma, tamaño, orientación, color, valor, y textura) susceptibles de uso.

Hay tres tipos de símbolos cartográficos: puntual, lineal y superficial, y existe una lógica correspondencia entre la naturaleza de los fenómenos geográficos y el empleo de cada uno de los tipos de símbolos.

### **68.3. Simbolización en los mapas temáticos cualitativos**

En los mapas temáticos cualitativos se emplea una simbolización diferente según que la representación afecte a datos puntuales, lineales y superficiales.

### 68.3.1. Simbolización en los mapas temáticos cualitativos puntuales

Los mapas temáticos cualitativos puntuales identifican la característica no numérica y la sitúan según sus coordenadas espaciales. La característica implicada tiene una situación específica (sus coordenadas) y un atributo representado en el mapa mediante símbolos no jerárquicos. Las variables visuales empleadas son el color y la forma.

Los símbolos pueden ser geométricos (abstractos) o pictóricos (aluden al concepto que representan y por tanto son más fáciles de reconocer).

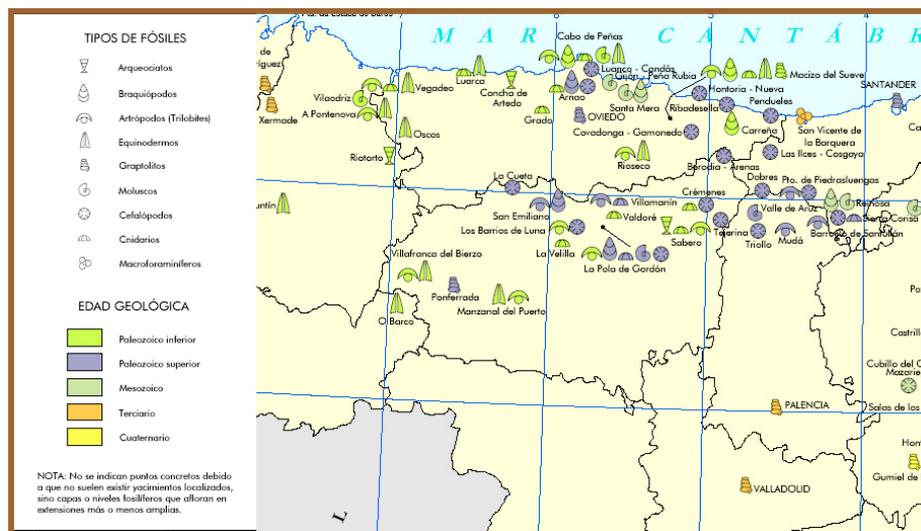


Figura 1. Principales yacimientos de invertebrados; fragmento. Atlas Nacional de España. IGN. 2003



Figura 2. Principales yacimientos de vertebrados; fragmento. Atlas Nacional de España. IGN. 2003

### 68.3.2. Simbolización en los mapas temáticos cualitativos lineales

Los mapas temáticos cualitativos lineales representan fenómenos lineales, como carreteras, ríos y límites administrativos, mediante símbolos lineales.

Las variables visuales más empleadas en este tipo de mapas son el color y la forma.

### 68.3.3. Simbolización en los mapas temáticos cualitativos superficiales

Los mapas temáticos cualitativos superficiales representan fenómenos geográficos que ocupan una determinada superficie. Los mapas geológicos son ejemplos de mapas cualitativos superficiales.

En el diseño de este tipo de mapas, se trata de distinguir las unidades superficiales afectadas por el fenómeno, según la categoría cualitativa a la que pertenecen, aplicando una simbología superficial a cada unidad. Para distinguir las categorías se emplean colores en los varía únicamente el tono y no el valor; por ejemplo, amarillo, verde o violeta y no amarillo claro, medio y oscuro. También se pueden aplicar texturas.

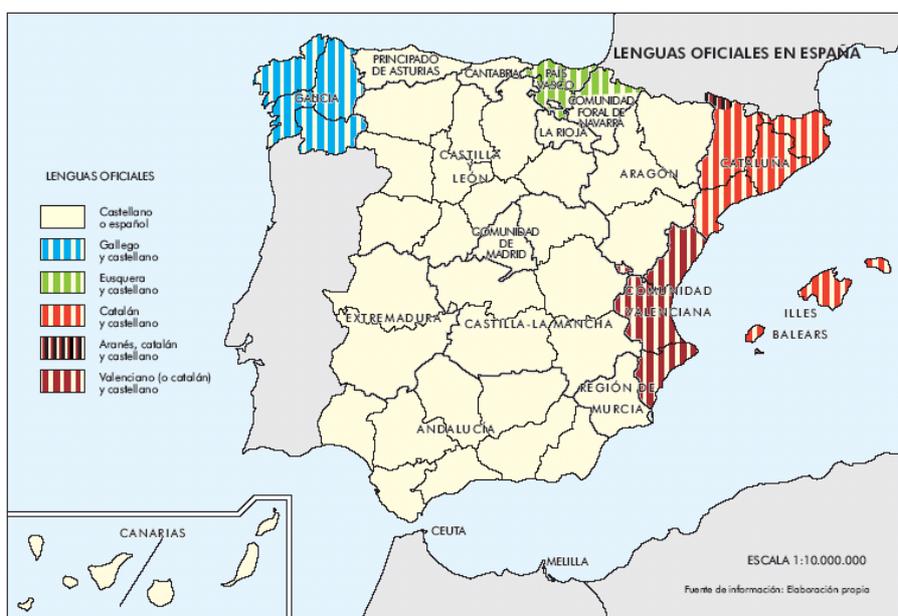


Figura 3. Mapa de *Lenguas Oficiales en España*. Atlas Nacional de España. IGN. 2006

### 68.4. Técnicas de simbolización de mapas temáticos cuantitativos

Existen diferentes técnicas de simbolización de mapas temáticos cuantitativos: puntos, símbolos proporcionales, coropletas, isolíneas, flujos y cartogramas.

En cada una de las técnicas es siempre necesario realizar un análisis previo de los datos para homogeneizarlos, compararlos y en algunos casos generalizarlos.

A continuación se describe con detalle cada una de las técnicas.

### **68.4.1. Mapas de puntos**

Los mapas de puntos son mapas cuantitativos en los que la información se representa mediante el empleo de una forma fija (normalmente puntos) que no varía en tamaño. Es una técnica fácil de elaborar: cada punto representa un valor unitario, de forma que se acumulan y repiten hasta alcanzar el valor total.

Se emplean para representar datos discretos y absolutos.

En su diseño han de tenerse en cuenta una serie de consideraciones:

- Localización del punto: El punto representa la distribución del dato en un área y no en un punto, por lo que se situará en el punto en el centro del área.
- Tamaño y valor del punto: Se deben utilizar de forma combinada, ya que el tamaño depende del valor que vaya a representar el punto en un mapa dado. Se ha de conseguir una buena impresión visual de la distribución y densidad relativa de la característica. El tamaño y el valor podrán ser seleccionados, por tanto, de forma que los puntos se fundan entre sí en las áreas más densas.
- Distribución de los puntos: La disposición de los puntos puede ser de forma regular sobre el área, con lo cual sólo se proporciona información numérica, o mediante una imagen más realista de la distribución basada en factores geográficos relacionados con la variable a representar.

### **68.4.2. Mapas de símbolos proporcionales**

El uso de símbolos proporcionales es una de las técnicas de representación más utilizadas en cartografía temática cuantitativa, por su facilidad de elaboración e interpretación; las cantidades se representan empleando una forma fija - lineal, superficial o volumétrica- cuyo tamaño varía en proporción al dato representado.

Generalmente, se aplica en la representación de cualquier tipo de datos (absolutos, relativos) asociado a superficies, excepto en densidades de población para los que es más adecuada la técnica de coropletas.

Hay diversos datos que se pueden cartografiar con esta técnica: población total, porcentaje de población, número de empleados, hipotecas, tamaño de empresas, etc.

En función de la dimensión del símbolo empleado se pueden distinguir tres tipos de mapas de símbolos proporcionales:

1. Mapas de simbología lineal. Por ejemplo mapas de barras donde la altura de la barra es proporcional al dato representado. Como su utilización requiere mucho espacio vertical, las barras se emplean cuando las diferencias entre datos son pequeñas.
2. Mapas de simbología superficial: Por ejemplo mapas de círculos, el círculo es la forma más utilizada por su tamaño compacto y facilidad de construcción, cuadrados, triángulos, etc. donde el área del símbolo es proporcional al dato representado (en el caso del círculo la proporcionalidad se hace en función de la raíz cuadrada del valor representado). Estos mapas se adaptan a rangos de diferente valor.

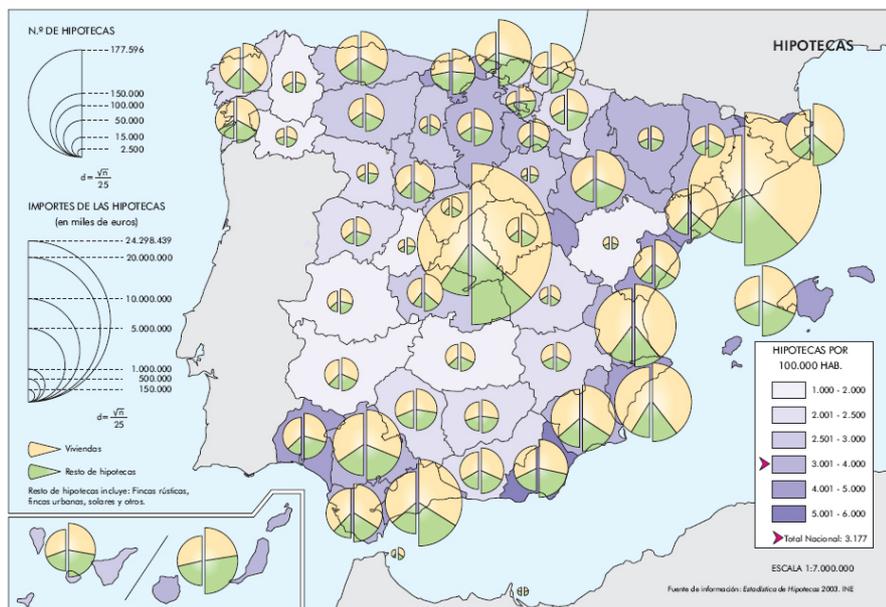


Figura 4. Mapa de Hipotecas. Atlas Nacional de España. IGN. 2004

3. Mapas de simbología volumétrica. Por ejemplo mapas de esferas o cubos donde el volumen del símbolo es proporcional al dato representado. Permiten representar rangos de datos muy amplios, pero presentan grandes dificultades de lectura. Pueden emplearse para intervalos definidos y combinarse con otras simbologías.

En el caso de los símbolos superficiales, en primer lugar, diversos estudios de semiología aplicados a la percepción del tamaño de los símbolos indican que en los superficiales se produce una subestimación en la percepción del tamaño, que aumenta según aumenta el tamaño de los círculos. De este modo, un círculo no se percibe como el doble de otro cuando geométricamente lo es, sino algo más pequeño. Por este motivo, es necesario aplicar algún método de

compensación que atienda a factores de percepción, como el propuesto por Flannery. (Método de escalado aparente o de Flannery).

En la percepción de los símbolos volumétricos, también se produce una subestimación dado que se tiende a comparar los datos con la superficie que ocupa la esfera en el mapa y no con el volumen encerrado.

En segundo lugar, hay que tener en cuenta que en la percepción de un elemento influyen los elementos que lo rodean. Así, un círculo rodeado de otros círculos iguales se percibe como mayor o menor, pero no igual; un círculo rodeado de otros más pequeños se percibe aproximadamente como un 13% mayor que cuando lo vemos entre círculos más grandes; y los círculos adyacentes modifican la percepción de los círculos cuyos tamaños se desea estimar. Este último efecto puede reducirse mediante el uso de límites (provinciales, municipales, etc.).

### **68.4.3. Mapas de coropletas**

La técnica de coropletas es la técnica utilizada para representar datos cuantitativos de naturaleza discreta asociados a unidades de enumeración, generalmente áreas administrativas (provincias, comunidades autónomas, países, etc.), mediante el empleo de tramas o colores de relleno diferentes que se eligen siguiendo el criterio de “cuanta más cantidad, más oscuro”.

Un mapa de coropletas puede considerarse como la representación planimétrica simplificada de un modelo de datos tridimensional, en la que se consideran superficies y no puntos.

La realización de un mapa de este tipo sólo requiere la captura de datos por unidad administrativa y su posterior clasificación en intervalos de clase. La simbología superficial se asocia a cada clase (una clase, un color) y se aplica a cada área según la que le corresponda.

Con esta técnica solo se pueden representar datos cuantitativos relativos como densidad de población, porcentaje de población de cada provincia sobre el total nacional, tasa de desempleo, etc. y no datos absolutos como población o número de desempleados, etc.

En su diseño han de tenerse en cuenta una serie de consideraciones:

#### **1. Clasificación de los datos**

La elección del número de intervalos, el tamaño del intervalo y los límites de clase son cruciales para conseguir que el mapa represente con fidelidad los datos. Por ello, es fundamental realizar y analizar diversas clasificaciones, y elegir aquella que mejor se adapte a

la realidad. Está claro que cuantas más clases se elijan más se adaptará el mapa a la realidad; ahora bien, el número de clases debe ser limitado pues el exceso complica la lectura del mapa. Como norma general se recomienda emplear un número no superior a nueve intervalos.

Elegido el número de clases hay que determinar sus límites, lo que determina qué diferencias entre los datos son las que se muestran y cuáles se ignoran en el mapa final.

Existen diversos métodos de clasificación:

- Intervalos iguales: los datos se clasifican en intervalos de igual amplitud. Se emplea cuando el histograma del grupo de datos tiene una forma rectangular (difícil en el caso de los fenómenos geográficos) y cuando las unidades de enumeración son prácticamente del mismo tamaño.
- Cuantiles: todos los intervalos contienen el mismo número de datos (por ejemplo cuartiles, quintiles, septiles y deciles, con cuatro, cinco, siete y diez datos respectivamente). Este método de clasificación sirve tanto para datos cuantitativos como para datos ordenados y tiene la ventaja de no dejar clases vacías, aunque da lugar a malas interpretaciones cuando las unidades de enumeración varían mucho en cuanto a tamaño.
- Intervalos naturales o método de Jenks: los intervalos se crean según los puntos de ruptura naturales existentes en la serie de datos. Es un método gráfico que, basándose en la prueba de la bondad del ajuste (GVF), persigue la doble condición de agrupar los datos en clases de gran homogeneidad interna y de maximizar las diferencias entre clases para un número de intervalos especificado.
- Intervalos basados en la media y la desviación típica: Sólo deben usarse cuando los datos se asemejan a una distribución normal y cuando interesa mostrar la desviación o distancia de los datos respecto a la media. Consiste, por tanto, en emplear la media como límite de clase y fijar como intervalos distancias a la misma relacionadas con la desviación estándar de la serie de datos. Con esta clasificación es conveniente emplear gamas divergentes.
- Progresión aritmética: los intervalos crecen progresivamente según un incremento o suma. Este método se emplea cuando los datos se asemejan a una distribución aritmética.
- Progresión geométrica: los intervalos crecen rápidamente según una razón o multiplicación. Se emplea cuando los datos crecen muy lentamente en los valores bajos y de forma brusca en los altos.

## 2. Simbolización de las áreas:

La simbología superficial que se utiliza consiste en la variación en términos de claro-oscuro de un color (variable visual valor). Hay que prestar atención en el caso de emplear diferentes valores de gris, dado que su percepción no es lineal sino logarítmica (curva de Munsell), por lo que diferencias discriminables en los colores claros y medios son imperceptibles en los oscuros.

Es también importante tener en cuenta que en la percepción de un color influyen los colores que le rodean, por lo que los colores deben distinguirse perfectamente a simple vista.

En cuanto al número de unidades de enumeración (también denominadas corogramas) y sus tamaños en el mapa dependerán del propósito del mapa, de la escala y de los datos disponibles. Para una misma escala, el tamaño y el número de las unidades estarán relacionados, obviamente, entre sí puesto que a mayor número de unidades necesariamente menor será su tamaño.

En cualquier caso, cuanto menor sea el tamaño de la unidad más información se estará aportando, ya que existirá la posibilidad de representar la variación del dato de forma más detallada que para corogramas de gran superficie. Se representará mejor la variación espacial del dato. Por el contrario, cuanto mayor sea el tamaño de las unidades, la variación espacial del dato representado se verá fuertemente reducida.

## 3. Diseño de la leyenda:

En las leyendas hay que evitar solapes entre los intervalos, cerrándolos incluso cuando no exista necesidad por los datos originales que hay que representar. También se pueden incluir otros elementos que ayuden a interpretar la representación, como por ejemplo un histograma de frecuencias, media de los datos, etc.

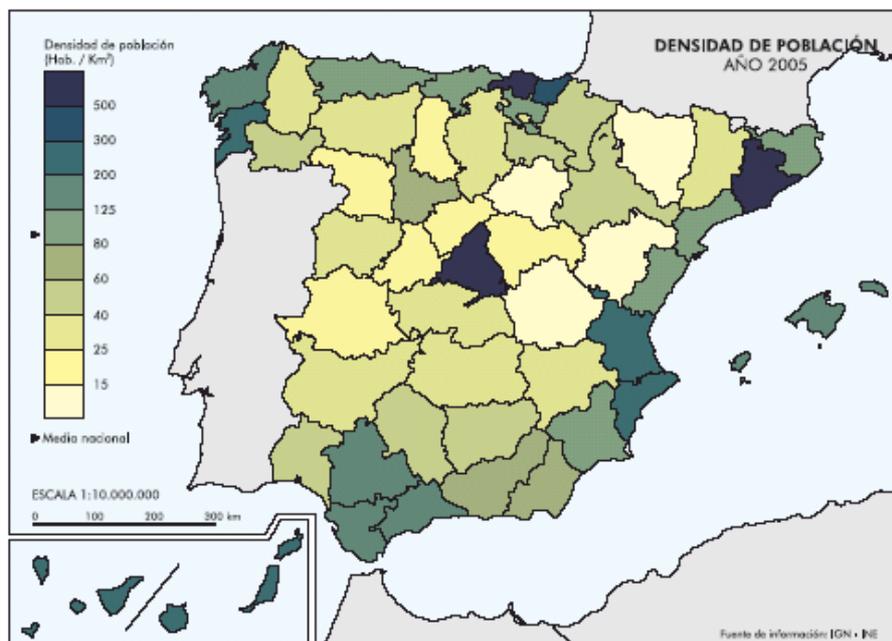


Figura 5. Mapa de *Densidad de población*. Atlas Nacional de España. IGN. 2005

#### 68.4.4. Mapas de isolíneas

Un mapa de isolíneas es la representación bidimensional de un volumen suavizado, o de una superficie estadística suavizada, mediante el uso de elementos lineales que unen puntos en los que la variable toma un valor constante tal y como ocurre en las curvas de nivel.

El dato existe en todos los puntos del espacio de forma continua pero solo se mide en unos pocos, llamados puntos de control; la construcción de las isolíneas implica por tanto la realización de una interpolación. De toda la población estadística, constituida en estos casos por un número infinito de puntos, se elige una muestra representativa que permita construir dicho volumen, infiriendo datos para la superficie total.

Los mapas de isolíneas representan siempre datos cuantitativos, normalmente en forma absoluta (precipitaciones, temperaturas, etc.). Pueden presentar dos formas distintas: mapa isométrico y mapa isoplético. La construcción en ambos casos se hace de forma similar, aunque la naturaleza de los datos es distinta; el primero se genera a partir de datos que ocurren o se considera que ocurren en puntos. Y el segundo a partir de datos que ocurren sobre áreas geográficas. Ejemplos de mapas isométricos son los de precipitaciones, elevaciones, etc. Y son ejemplos de mapas de isopletas los mapas de densidad de población.

El amplio uso de la técnica de isólinas ha llevado a dar nombre propio a gran cantidad de líneas dependiendo de lo que representen. Por ejemplo, para la representación de fenómenos meteorológicos tenemos las isotermas, isobaras, isoyetas e isohelias, entre otras.



Figura 6. Mapa de *Humedad relativa media*. Atlas Nacional de España. IGN. 2004

En este tipo de técnica de cartografiado, las principales consideraciones que el cartógrafo debe realizar son:

1. Método de interpolación: el proceso de interpolación consiste en inferir valores para todos los puntos de la región partiendo del valor que toma la variable en una serie de puntos representativos o puntos de control. Se definen diferentes sistemas de interpolación atendiendo:

- al radio de operación: locales y globales.
- a la exactitud: exactos (splines, inverso a la distancia y kriging) e inexactos.
- a la necesidad de realización de un análisis previo : directos (polígonos de Voronoi o Thiessen, e inverso a la distancia) y analíticos.

2. Clasificación de los datos.

3. Leyenda.

#### 68.4.5. Mapas de flujo

Los mapas de flujo representan movimientos lineales de tipo cualitativo (tipo de movimiento) y cuantitativo (cantidad de movimiento) mediante el empleo de líneas. En los primeros, las líneas son del mismo ancho, no escaladas y en forma de flecha para indicar el sentido del movimiento. Un ejemplo son los mapas de corrientes marinas, rutas de navegación, redes de transporte, etc.

En los segundos, la conexión entre dos puntos del mapa se realiza mediante líneas de ancho proporcional a la cantidad representada. Un ejemplo son los mapas de volumen de exportación e importación de mercancías.

Los mapas de flujo se pueden dividir en tres grupos:

- Radiales:

Se distinguen por su aspecto radial y por los nodos. Por ejemplo, los mapas de volumen de tráfico.

- En red:

Se utilizan para representar la conexión entre los distintos puntos. Por ejemplo, mapas de transporte o mapas de rutas aéreas.

- De distribución:

Muestran distribuciones cuantitativas y cualitativas. Por ejemplo, mapas de migraciones.

En el diseño de los mapas de flujos se deben tener en cuenta una serie de consideraciones:

1.- Relativas al diseño.

- Las líneas de flujo serán las de mayor importancia visual/gráfica en el mapa.

- Las líneas más finas irán encima de las más gruesas, y nunca al revés.

- Si es necesario indicar el sentido del flujo, se introducirán cabezas de flecha que no sean demasiado pequeñas.

- En el caso de que el mapa contenga tierra y mar debe acentuarse el contraste entre ambos.

- Toda la información contenida en el mapa debe ser simple, incluso el escalado de los gruesos de las líneas de flujo, para no dificultar su lectura.

- La leyenda debe ser clara, sin ambigüedades. En ella se incluirán las unidades, cuando sea necesario.

- La elección de la proyección del mapa base debe adaptarse bien al dibujo final de las líneas de flujo.

## 2.- Relativas a la simbolización.

Al ser el escalado de los símbolos lineal, la elección de los anchos de línea no supone ningún problema en la percepción. Para el cálculo de los símbolos lineales, primero hay que fijar el ancho máximo de línea admisible en el mapa, teniendo en cuenta que a partir de un determinado ancho el símbolo lineal adquiere las características del símbolo superficial. Después hay que calcular el ancho del resto de las líneas a partir del valor anterior, teniendo en cuenta que la línea más estrecha también debe ser visible en el mapa.



Figura 7. Mapa de Principales flujos diarios interprovinciales de vehículos pesados por carretera.

Atlas Nacional de España. IGN. 2006

### 68.4.6. Cartogramas

Los cartogramas son mapas cuantitativos en los que las unidades de enumeración o unidades administrativas son proporcionales al dato representado. Carecen de mapa base, ya que es la propia base geográfica la que se convierte con su distorsión en contenido temático.

Los cartogramas se pueden utilizar para representar tanto datos absolutos como relativos en escalas de intervalo, siempre que los datos no sean proporcionales a la superficie geográfica.

Se distinguen dos tipos de cartogramas:

- Cartogramas contiguos. Las unidades de enumeración son adyacentes, lo que hace que el mapa se parezca a uno convencional.
- Cartogramas no contiguos. No se preservan las relaciones de contigüidad entre las unidades de enumeración, por lo que aparecen huecos entre ellas. El lector debe deducir la representación continua que las unidades de enumeración no poseen.

Los cartogramas son fáciles de construir pero difíciles de interpretar, pues requieren que el lector este familiarizado con la zona geográfica representada. Sólo son adecuados para mostrar distribuciones geográficas en el caso de que lo representado siga siendo reconocible a pesar de las distorsiones mencionadas.

#### **68.4.7. Gráficos y diagramas**

La técnica de gráficos y diagramas también denominada cartodiagrama, consiste en trazar los gráficos según los datos y situarlos en su localización.

Se distinguen los siguientes tipos de gráficos:

- de línea: pueden ser simples (la relación entre una variable y otra), múltiples (la relación entre una variable independiente y varias dependientes; hasta un máximo de cinco para que el mapa sea legible) y compuestos (uso de simples y múltiples).
- de barras: son parecidos a los gráficos de línea pero utilizando columnas o barras (verticales u horizontales). Un ejemplo son las pirámides de población.
- triangulares: se utilizan para mostrar características dependientes de tres variables.
- circulares: también llamados polares o de reloj, representan características periódicas normalmente en períodos anuales.
- de sectores o de tarta: representan información cuantitativa de un grupo de valores relacionados con un total. Muestran las diferentes cantidades parciales en sectores del círculo.
- símbolos adyacentes: se utilizan para comparar datos diferentes asociados a una misma localización. En cada caso, el tamaño del símbolo es proporcional al valor del dato representado.
- rectángulos divididos: muestran diferentes cantidades parciales en divisiones del rectángulo.

En la siguiente tabla se muestran todas las técnicas de representación, una vez analizadas:

NIVEL DE MEDIDA DEL DATO	TIPO DE DATO	TIPO DE SIMBOLO	TÉCNICA CARTOGRAFICA	PRINCIPALES VARIABLES VISUALES UTILIZADAS
Nominal	puntual	puntual		color, forma, orientación
	lineal	lineal	Flujo	color, forma
		puntual		color, forma, orientación
	superficial	superficial	Coropletas	color, forma, orientación, textura
Ordenado	puntual	puntual		tamaño, valor
	lineal	lineal	Flujo	tamaño, valor
Cuantitativo absoluto	puntual discreto	puntual	Simbolos Proporcionales	tamaño, valor
	puntual continuo	puntual	Simbolos Proporcionales	tamaño, valor
	lineal	lineal	Isolíneas	tamaño
		puntual	Flujo	tamaño, valor
	superficial	puntual	Simbolos Proporcionales	tamaño, valor
		superficial	cartograma	tamaño
Cuantitativo relativo	puntual discreto	puntual	Simbolos Proporcionales	tamaño, valor
	puntual continuo	lineal	Isolíneas	tamaño
	lineal	lineal	Flujo	tamaño, valor
		puntual	Simbolos Proporcionales	tamaño, valor
	superficial	superficial	Coropletas	valor
			Cartograma	tamaño
		puntual	Simbolos Proporcionales	tamaño, valor

Tabla 1. Tipos de representación

## 68.5. Fundamentos de diseño y composición de mapas temáticos

El proceso de diseño de un mapa temático conlleva una serie de etapas: identificación de las necesidades del mapa; identificación del propósito del mapa y del usuario final; primeras ideas y refinamiento del diseño; análisis de los datos; elección de la técnica cartográfica y, finalmente, la aplicación.

Según el geógrafo Borden Dent, el proceso de composición de un mapa conlleva los siguientes pasos:

### 1. Preparación.

El cartógrafo imagina una solución para su mapa mediante las imágenes de su memoria visual. La experiencia y el número de soluciones analizadas son muy importantes en este paso.

### 2. Incubación.

Durante algún tiempo, la idea se incubará, irá tomando cuerpo y se modificará sin que se sea consciente de este proceso creativo.

### 3. Iluminación.

La solución aparece de repente, y a menudo de forma espontánea.

### 4. Verificación o revisión.

En este punto es necesario analizar el diseño y someterlo a la opinión de personas ajenas al proceso de creación.

Un mapa temático es un instrumento de comunicación visual, a través de sus elementos se produce la transferencia de comunicación. El cartógrafo dispone de estos elementos que a su vez tienen una función dentro del mapa, para facilitar la comunicación. Por tanto, el diseño del mapa siempre debe hacerse sobre la base de cómo cada elemento contribuye a la comunicación.

Los mapas se componen, entre otros, de los siguientes elementos gráficos:

- Título y subtítulo.
- Zona de representación cartográfica.
- Marco y límite cartografiado.
- Símbolos y rotulación.
- Leyenda.
- Escalas (gráficas y numéricas).
- Fuentes de información y fechas (realización, edición).

El proceso de composición tiene, entre otros, los siguientes fines:

- Organizar los elementos de manera que formen un todo homogéneo y agradable.
- Reforzar el propósito del mapa.
- Dirigir la atención del lector.
- Coordinar la información temática con la base geográfica.

En este proceso de composición, el cartógrafo deberá estudiar el formato y la disposición de los elementos según las normas de percepción.

## **68.6. Diseño y producción de atlas temáticos. Atlas nacionales**

### **68.6.1. Diseño y producción de atlas temáticos**

Los atlas temáticos son los documentos más importantes de la cartografía temática que, en función de la escala de representación y el nivel temático de información, nos permiten mostrar de manera gráfica las características geográficas de un territorio. En el contenido de las páginas de los atlas se descubre el conocimiento que se tiene del territorio al que hacen referencia, el dominio de la técnica cartográfica y las innovaciones tecnológicas.

Según K. Salitchev, un atlas temático no es una colección de mapas unidos mecánicamente, sino que integra una serie de mapas relacionados orgánicamente entre sí y que se complementan en un sistema condicionado por la finalidad del atlas y las particularidades de uso.

El proceso de elaboración de un atlas temático requiere la puesta en marcha de una serie de fases:

- Definición de los objetivos del atlas: finalidad (para qué) y usuarios (para quién).
- Definición de la estructura temática.
- Diseño cartográfico: formato, bases cartográficas, escalas de representación, tipo de proyección, tipo de páginas (de textos, de mapas, de textos y mapas, etc.), disposición de las páginas, disposición de los textos, formato de texto, gamas de color, tipo de papel, encuadernación, etc.
- Redacción cartográfica.
- Edición.

Es importante que el atlas tenga una unidad interna que permita establecer correlaciones entre los datos que lo integran. Para ello es preciso que:

- las proyecciones elegidas no sean numerosas.
- el número de escalas sea limitado.
- los métodos de representación observen concordancia.
- la generalización sea única.
- el sistema de signos convencionales, tipos de letra y colores sea único.
- los datos se validen a un tiempo determinado común, para poder establecer relaciones.
- los mapas se distribuyan racionalmente dentro de la obra.

### **68.6.2. Atlas nacionales**

Los atlas nacionales son colecciones de mapas temáticos en los que se representan los diversos aspectos de un país, de forma que tanto la presentación como la proyección y la escala sean homogéneas. Los mapas que conforman un atlas se estructuran por afinidades temáticas: aspectos físicos del territorio, población, servicios sociales, organización administrativa, geografía económica, etc.

El tipo de proyección cartográfica y la escala de los atlas son muy variadas; cada país define estos requerimientos de acuerdo a sus características físicas: tamaño, forma y situación sobre el

globo terrestre. Los países muy pequeños pueden utilizar escalas más grandes que las que utilizan países muy extensos. Por ejemplo, los Países Bajos y Luxemburgo pueden emplear para la presentación de su atlas una escala 1:200.000, mientras Estados Unidos debe utilizar escalas menores a 1:8.000.000.

### **El Atlas Nacional de España**

El Consejo de Ministros, en su reunión del 13 de junio de 1986, acordó encomendar al Instituto Geográfico Nacional la dirección, coordinación y realización del Atlas Nacional de España.

El Atlas se organiza en trece secciones (designadas con números romanos) que comprenden numerosos grupos temáticos en los que se trata tanto cartografía geográfica como todos los aspectos de la geografía física y humana: edafología, climatología, paisaje, demografía, industria, comercio, etc.

La primera edición se concluyó en 1997 y estaba formado por cinco tomos más el correspondiente al Índice Toponímico.

### **Bibliografía**

- [1] Dent, Borden .D. (1996). Cartography. Thematic Map Design .Capitulos 4, 6, 7, 8, 9, 10 ,11 y 12
- [2] Slocum, Terry A. Thematic Cartography and visualization. Capitulos 1, 2, 7, y 10

**Tema 69. El Mapa Topográfico Nacional a escalas 1/50.000 y 1/25.000: Antecedentes. Descripción general de las series. Especificaciones de contenido de cada serie. Fases del proceso cartográfico en cada serie. Principales características técnicas de las diferentes actividades del proceso cartográfico de cada serie. Procesos de actualización.**

**69.1. Antecedentes. Descripción general de las series**

El proyecto actual en tomo al Mapa Topográfico Nacional a escala 1/25.000, tiene sus antecedentes en los primeros trabajos realizados en España a partir del año 1870, con la creación del Instituto Geográfico. Desde aquella fecha se planificó la formación del Mapa Topográfico a escala 1/25.000 y su publicación a escala 1/50.000. Fue esta una tarea de notable envergadura, a la que se le dedicaron los mejores esfuerzos de esta institución, a lo largo de los 93 años transcurridos entre la publicación de la primera hoja, 559 Madrid, en el año 1875 y la última, 1125 San Nicolás de Tolentino, en el año 1968.

La Ley 7/1986 de Ordenación de la Cartografía

- Establece la competencia del Estado a través del Instituto Geográfico Nacional en “...*la formación y conservación de las series cartográficas a escala 1/25.000 y 1/50.000 que constituyen el Mapa Topográfico Nacional.*” (Art. 6º).
- La cartografía básica “...*se realiza de acuerdo con una norma cartográfica establecida por la Administración del Estado, y se obtiene por procesos directos de observación y medición de la superficie terrestre*” (Art. 3º).

Antes de entrar en la descripción del proyecto actual del MTN y BCN25, es muy conveniente hacer una breve referencia a las características del antiguo MTN, ya que de esta forma podremos considerar distintos aspectos comunes que han condicionado decisiones actuales en la formación del nuevo mapa, y también conocer alguna de las características de la representación adoptada, indispensables para la comparación de ambas publicaciones, de especial valor en su aplicación en los estudios de determinación de la dinámica de evolución territorial.

Inicialmente se señaló como elipsoide de referencia el llamado de Struve, con origen en el Observatorio Astronómico de Madrid. Se definía el punto fundamental como aquel en el que geoide y elipsoide son superficies tangentes, coincidiendo la vertical, que es perpendicular al geoide, con la normal al elipsoide.

La proyección elegida para el levantamiento del Mapa Topográfico, fue la proyección poliédrica, en la que el fraccionamiento del territorio se realizó de tal modo que consideraba que en la extensión de una hoja las deformaciones eran muy pequeñas, asimilándose la superficie terrestre, en este caso sobre nuestro país, a un poliedro de un gran número de caras. De aquí se deriva el inconveniente de la imposibilidad de ensamblar un conjunto de varias hojas sobre un plano sin que queden entre ellas pequeñas "cuñas".

De esta forma se establecieron las siguientes consideraciones generales:

1. La publicación del mapa se realizaba a escala 1/50.000 y los trabajos de levantamiento topográfico a escala 1/25.000.
2. El mapa se dividirá en hojas de 20' de base, en el sentido de los paralelos, y de 10' de altura en el de los meridianos.
3. La parte de superficie terrestre que comprende cada hoja se consideraba como plana. El número de hojas resultante con estas premisas era de 1106, de las que correspondían a la Península 1036; 26 a las Islas Baleares; 42 a las Islas Canarias; una a la isla de Alboran y otra a las islas Columbretes.

Los 10' de arco de meridiano correspondientes a las hojas más septentrionales tienen una longitud de 18.518 metros, siendo en las más meridionales de 18.493 metros. Los 20' de longitud sobre la parte norte de España, paralelo de 43°50', representan un arco de 26.811 metros, mientras que en el paralelo de 36° esta longitud es de 30.056 metros. Se deduce por lo tanto que las variaciones de las alturas de las hojas no son muy considerables, pero por el contrario si se producen en lo que se refiere a las bases. Por ello la superficie representada en las más septentrionales es de 49.718 hectáreas, mientras que en las más meridionales es de 55.519 hectáreas.

La distribución de las hojas del MTN25 resulta de dividir las del MTN50 en cuatro cuartos, cada uno de los cuales cubre, obviamente, un ámbito de 5' en latitud por 10' en longitud (unas 12.500 hectáreas), manteniendo la misma numeración de aquel seguida de un número romano que indica el cuarto:

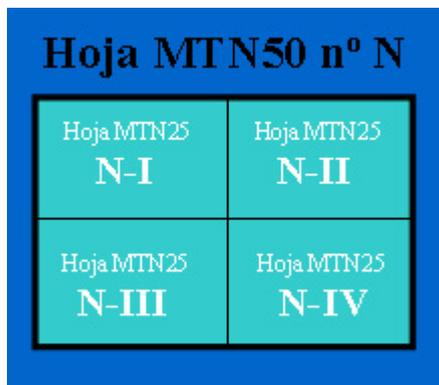


Figura 1.

Se estableció la Red Geodésica de Primer Orden Fundamental, compuesta por 285 vértices, a lo largo de diez cadenas que seguían las dimensiones de meridianos y paralelos, con triángulos cuyos lados medían entre 40 y 50 kilómetros y las complementarias de segundo y tercer orden, que definían lados entre 5 a 10 kilómetros, integrando en ella, también, una torre de iglesia en la capital de cada término municipal. La Base de partida de la Red Geodésica, medida directamente, fue la Base Central de Madridejos (Toledo) de 14.662,8964 metros de longitud. La orientación de la Red se dedujo del acimut del lado Observatorio Astronómico de Madrid al vértice Hierro, situado en la Sierra de Guadarrama.

Seguidamente se realizaron los trabajos topográficos, que habían de efectuarse por términos municipales, que comprendían las fases de triangulación topográfica, señalamiento de los mojones y líneas de término, representación planimétrica de los accidentes topográficos, planos de poblaciones y la representación del relieve del terreno.

La triangulación topográfica cubría la superficie de cada término municipal con lados entre dos y cinco kilómetros, apoyándose en los vértices de la red geodésica de tercer orden. El señalamiento de los mojones y de las líneas de término municipal, que ha tenido una gran importancia y valor documental atribuido en el reglamento de demarcación y delimitación territorial, fue objeto de levantamientos topográficos muy precisos y la redacción de actas de deslinde en las que se describían, de manera detallada, todos y cada uno de los vértices que definen dicha línea, para llevarlos a cabo se contó con la presencia de prácticos conocedores del terreno pertenecientes a los ayuntamientos afectados y de los representantes del Instituto Geográfico.

Cada uno de los ingenieros del IGN, realizaba el levantamiento topográfico de la línea límite definida por acuerdo entre las partes.

La representación planimétrica se efectuaba por itinerarios, con brújula y estadía, a lo largo de carreteras, ferrocarriles, caminos, ríos y arroyos, que constituían las líneas principales, apoyados en las redes topográfica y geodésica. Desde los itinerarios se lanzaban visuales a los puntos notables que se encontraban dentro del término municipal y debían figurar en el mapa.

Los planos de población, en el caso de capitales, se apoyaban en una triangulación especial, enlazada con la del término municipal, con poligonales a lo largo de las vías principales.

La nivelación topográfica de cada término municipal debía comprender el número necesario de perfiles para representar el terreno con curvas de nivel con equidistancia de 10 metros. Existían

puntos de nivelación topográfica, sobre los que se hacían líneas de doble nivelación; y los de nivelación sencilla que seguían los accidentes principales del terreno.

Para cada término municipal se dibujaban dos minutas, a escala 1/25.000, una planimétrica y otra altimétrica. En la planimétrica se dibujaban vértices, y todos los detalles topográficos y líneas límite en tinta negra; hidrografía en azul; con rotulación de todos los datos del levantamiento y de la toponimia. En la altimétrica se desarrollaban los perfiles y se trazaban las curvas de nivel en siena con los puntos acotados.

Por último se preparaban las minutas de las hojas del MTN, a escala 1/25.000, a partir de las dibujadas, por términos municipales, para cada planimetría y altimetría en el formato ya indicado para las distintas hojas del Mapa. Terminado el dibujo pasaba la hoja a talleres para preparar su publicación a escala 1/50.000.

## **69.2. Especificaciones Técnicas**

### **69.2.1. Proyecto Cartográfico**

#### **Península y Baleares**

- Sistema de Referencia.
  - Elipsoide Internacional (Hayford, 1924).
  - Datum Europeo.
  - Origen longitud Greenwich.
- Sistema Geodésico.
  - RESO (Red Europea Unificada).
- Sistema Representación.
  - Proyección UTM.

#### **Islas Canarias**

- Sistema de Referencia.
  - Elipsoide WGS 84.
  - Datum REGCAN 95.
  - Origen longitud Greenwich.
- Sistema Geodésico.
  - REGCAN 95.
- Sistema Representación.
  - Proyección UTM.

### **69.2.2. Contenidos**

Se corresponden con una densidad de información adecuada para su lectura fácil. Son los contenidos tradicionales de un mapa topográfico.

- Geografía física.
  - Relieve.
  - Hidrografía.
  - Usos del suelo.
- Geografía humana.
  - Núcleos y construcciones.
  - Recursos naturales e industria.
  - Comunicaciones.
  - Divisiones administrativas.
  - Apoyos geodésicos.
- Toponimia y rotulación

### **69.3. Fases del Proceso Cartográfico**

#### **69.3.1. Tratamiento previo de la información procedente de restitución numérica**

La denominada "Fase Previa" tiene como objetivo la obtención de un fichero con cierto "aspecto" de mapa, que sirva como soporte de trabajo y preparación de las fases siguientes. La experiencia ha demostrado que utilizar esta "preminuta" como base de recogida de datos de campo facilita en gran medida la tarea frente a la utilización de un simple trazado obtenido directamente de la restitución fotogramétrica.

La "Fase Previa" consiste, a grandes rasgos, en el paso de 3 a 2 dimensiones y recodificación de los elementos restituidos, la creación de recintos de usos del suelo a partir de los polígonos restituidos, la simbolización automática de ciertos elementos del mapa y la colocación de los exteriores o información marginal. Simultáneamente, se detectan posibles anomalías existentes en el fichero como elementos con codificación incorrecta o falta de continuidad geométrica, solapamiento de elementos disjuntos, etc.

#### **69.3.2. Formación**

Podemos definir la formación como el conjunto de tareas encaminadas a la selección e identificación precisa de la información que conformara el contenido del mapa para una escala determinada. En el caso del MTN25, la información geográfica se agrupa en los siguientes bloques.

- Altimetría.
- Planimetría.
- Construcciones y núcleos urbanos.
- Comunicaciones.
- Hidrografía.

- Usos del suelo.
- Toponimia.
- Divisiones administrativas.

La fase de formación es responsabilidad de un Ingeniero Técnico en Topografía y consta de tres partes claramente diferenciadas.

- Estudio y preparación previa de la preminuta.
- Investigación de campo.
- Redacción de la minuta definitiva.

En la primera parte, con el trazado obtenido tras la "Fase Previa" y una extensa documentación externa, se efectúa un estudio interrelacionado de la información, señalando las dudas e indeterminaciones que deben resolverse, al tiempo que se contemplan los elementos que es necesario añadir, suprimir o modificar y se revisan las líneas límite. A continuación, en base al estudio precedente se efectúan los trabajos de investigación de campo, destacando especialmente la investigación y compilación de la toponimia. Por último, los resultados de los trabajos de campo se incorporan a la preminuta para conformar la minuta digital definitiva.

### **69.3.3. Edición**

Por edición entendemos el proceso de la información contenida en la minuta digital para representarla según la simbolización y el nivel de generalización definidos en la normativa cartográfica de la serie.

El trabajo de edición se realiza, parte de manera automática y parte interactiva, a través de un menú informático de trabajo diseñado y desarrollado específicamente para el MTN2S. En realidad el menú es el mismo que integra las herramientas informáticas utilizadas en la "redacción" de la minuta definitiva de la fase de formación. Por ello la minuta digital ya contiene una parte de los trabajos de edición necesarios, que denominamos preedición.

En la fase de edición, que realizan Delineantes Cartográficos, se contemplan las siguientes operaciones:

- Tratamiento de altimetría: representación de desmontes y terraplenes, escarpados, roquedos, rotulación de curvas de nivel, etc.
- Tratamiento de vías de comunicación: simbolización de carreteras y ferrocarriles, resolución de intersecciones (enlaces / raquetas, nudos, pasos inferiores y superiores,... ), etc.
- Tratamiento de construcciones y núcleos urbanos: simbolización de edificaciones, adecuación de la estructura de los cascos de población de acuerdo al nivel de generalización, etc.
- Tratamiento definitivo de usos del suelo, a partir del primer tratamiento en la "Fase Previa".

#### **69.3.4. Control de calidad**

Todo el trabajo de las fases precedentes se plasma en un trazado con un aspecto muy aproximado al de la publicación impresa. Este trazado se somete a una validación global por una unidad que actúa exprofeso de forma independiente al resto del entorno de producción.

El objetivo de esta fase es doble. Por una parte, garantizar la homogeneidad del mapa en todo su ámbito geográfico. Esto resulta imprescindible en una publicación de escala nacional en cuya elaboración interviene un amplio equipo humano y técnico que, además, se encuentra diseminado territorialmente. Y, por otra parte, asegurar un determinado estándar de calidad para la serie tanto en lo que se refiere a sus contenidos como a su representación cartográfica.

#### **69.3.5. Filmación de positivos y publicación impresa**

La validación definitiva por parte de la unidad de control de calidad desencadena, a partir de la ya hoja del MTN25 digital, una serie de operaciones sucesivas que terminan con la disponibilidad del mapa impreso:

- Rasterización de los ficheros vectoriales de la hoja.
- Filmación de fotolitos en un fotoplotter láser.
- Prueba de color mediante el procedimiento CROMALIN.
- Pasado de planchas litográficas.
- Impresión offset.

#### **69.4. Procesos de actualización**

Nuestra actual Base Cartográfico Numérica (BCN) muestra un inconveniente para su integración en SIG, está realizada a partir de los ficheros del MTN25, con lo cual, no tiene la calidad geométrica necesaria.

Este problema ha llevado a la necesidad de crear una nueva Base Topográfica Nacional (BTN25) y para conseguirlo ha sido necesario cambiar la metodología de trabajo.

El nuevo proceso consiste básicamente en partir de ficheros de restitución existentes, de la BCN25 y mediante imágenes actuales conseguir una nueva BTN actualizada y con la calidad geométrica correcta para su integración en SIG.

##### **69.4.1. Actualización con imágenes**

Información de partida:

- Ficheros de restitución DGN 3D (dm)
- BCN25, DGN 2D (m)
- MTN25, DGN 2D (dm)

Para la actualización de los ficheros de restitución contamos con:

- Ortofotos

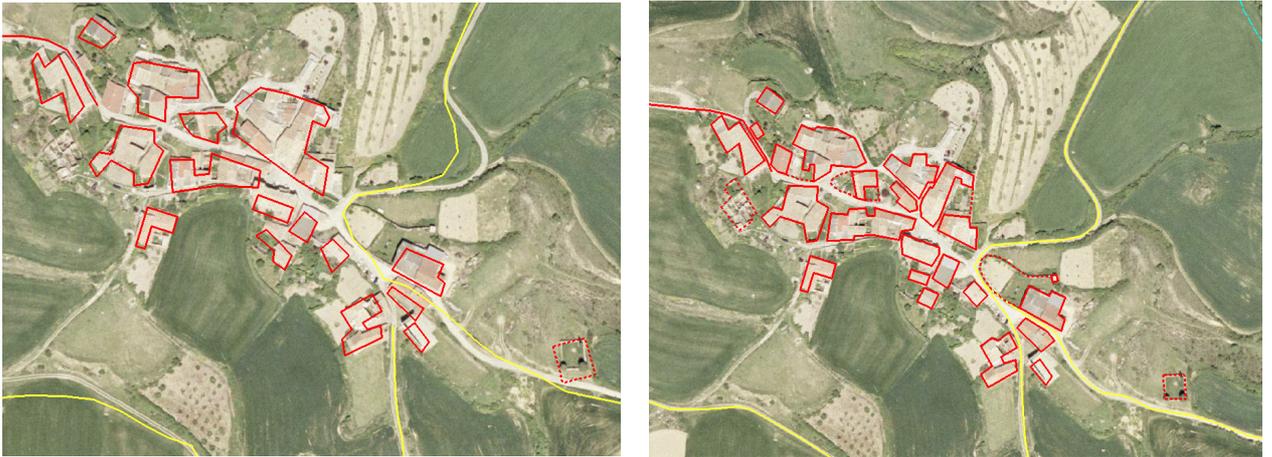
- SIGPAC
- PNOA
- Imágenes de satélite
  - Cobertura SPOT
- Vuelo fotogramétrico
  - PNOA
- Vuelo nacional
- BCN25/MTN25
- Otras fuentes de datos (BCN10...)



Figura 2. Ejemplo de elementos a actualizar

El proceso de actualización consiste en la captura de todos los elementos que están especificados en las normas de restitución fotogramétrica y que, apareciendo en la imagen, no están representados en los ficheros de restitución También entra dentro del concepto “captura” la eliminación de elementos que, apareciendo en el fichero de restitución, han desaparecido del territorio y por tanto no aparecen en imagen, así como las modificaciones que se deduzcan de la imagen.

Esta captura se puede realizar mediante la restitución de pares estereoscópicos o la digitalización de ortofotos; Los elementos capturados mediante digitalización se colocan en cota -999 para luego ser puestos en su cota real con la ayuda del Modelo Digital del Terreno (MDT).



**Figura 3.** Casco mal restituído/actualizado

En la fase de captura se chequeará la calidad de la restitución, corrigiéndose todos los errores que se detecten entre la restitución y la imagen, superiores a 5 metros. De igual manera, en esta fase, se recodificarán los elementos que estén mal codificados en la restitución con respecto de la imagen.

Además de lo ya expuesto para los elementos planimétricos, cuando se incorporen al fichero de restitución vigente elementos que afecten de forma clara a las curvas de nivel (construcción de una autovía, embalse, canal, alta velocidad o en zonas de relieve movido) es necesario generar las nuevas curvas usando el MDT del PNOA y un software apropiado, en el caso de digitalización.

Para la captura se cuenta con un menú de restitución que tiene 100 códigos aproximadamente.

#### **69.4.2. Recuperación de códigos de la versión anterior de BCN25**

El fichero de restitución tiene una codificación básica de captura (aproximadamente 125 códigos), frente a la variedad de códigos de BTN25 (aproximadamente 600 códigos). Mediante un proceso (RES25), a la geometría procedente de restitución, se le asigna el código de los elementos homólogos de BCN25, dentro de la TOLERANCIA admisible y pertenecientes al mismo GRUPO de códigos.

#### **69.4.3. Recuperación de los textos de MTN25**

El fichero hasta este momento, no debe tener textos ya que procede de restitución. La incorporación de los textos se realiza tomándolos del fichero de MTN25 vigente.

Los textos de MTN25 que están colocados a lo largo del elemento, facilitan la reconstrucción de la geometría que posteriormente simplificará la formación y asociación del texto.

El resultado de esta formación de gabinete, genera un fichero 3D-2D y en dm, con el que debe empezarse la fase de formación en campo.

#### **69.4.4. Formación cartográfica**

##### **Fase previa a la salida al campo**

Además de la resolución de dudas surgidas en la fase anterior de gabinete, y que se han señalado, es necesario como fase previa a la salida al campo hacer un análisis de la información contenida en la hoja del MTN25 de la publicación anterior, susceptible de ser modificada desde la última edición, recogiendo toda la documentación posible procedente de:

- Fondos cartográficos del propio Instituto Geográfico
  - Última edición de la Hoja 1/25000
  - Edición del 1/50.000
  - Provincial 1/200.000
  - Mapa de las comarcas
  - Nomenclátor de las entidades de Población
  - Guía de carreteras del Ministerio del Fomento
  - Clasificación de Ríos
- Información de otros organismos Oficiales
  - Cartografía de la Comunidad Autónoma
  - Fichero de Vías pecuarias levantadas en cada CC.AA.
  - La información sobre la geometría de estas vías pecuarias debe cotejarse con la información de vías incorporada en la fase anterior procedente de BCN25, y suprimir o dejar en cada caso la que corresponda.
  - Mapa de carreteras de la Comunidad Autónoma
  - Mapa de Líneas Eléctricas
  - Inventario de Presas españolas
  - Mapas de Parques Nacionales
  - Cartas Náuticas del Instituto Hidrográfico de la Marina
- Toda aquella información que ayuda a enriquecer la formación de los futuros BTN25 y MTN25.

##### **Toma de datos en campo**

Partiendo del trazado gráfico elaborado en la fase previa, se resuelven las dudas generadas en la fase de formación, actualizando e incorporando aquellos elementos nuevos del terreno que no aparecen en la imagen.

Se hace imprescindible cada vez más la incorporación del GPS para la toma de datos en campo.

## **Toponimia**

En las zonas en las que la densidad de toponimia sea escasa, se completa recabando información fundamentalmente en los Ayuntamientos, con la consultan de planos del Catastro o directamente preguntando a los guardas rurales, forestales, prácticos de la zona, etc. La recogida de nombres en la zona cada vez presenta más dificultad debido al despoblamiento de las zonas rurales y a dos inconvenientes principales: la mala pronunciación y su exacta situación.

Se procura que todos los accidentes importantes lleven su nombre correspondiente (no solamente sierras, ríos, picos collados etc. sino cualquier ocupación del terreno que difiera del entorno que la rodea, un altozano o una cárcava en un llano, un grupo de árboles en un descampado, etc.)

## **Geografía humana**

La visita a los Ayuntamientos se hace prácticamente obligatoria, aunque en algunas zonas de Ayuntamientos pequeños, estos permanecen cerrados durante varios días a la semana por lo que hay que programar las visitas. En estos debe recabarse información de obras realizadas tanto públicas como privadas (Infraestructuras, Urbanizaciones, Polígonos Industriales, depuradoras etc.) tratando de obtener documentación actual y fiable o en su defecto en las empresas constructoras encargadas de sus proyectos. Así como la denominación de estos elementos.

En muchos Ayuntamientos hay disponible información gráfica digital.

Se confirma la situación correcta de elementos comunes a los Ayuntamientos: Cementerio, castillos, Ermitas, Depósitos de agua, Monumentos etc.

Cada vez más proliferan antenas y repetidores de todo tipo que hay que se sitúan correctamente así como su explotación

También se recaba información sobre las vías pecuarias y su nombre, así como del estado de las fuentes de la zona y su nombre

## **Vías de comunicación**

Se recorren las carreteras de la zona, señalizando con la mayor precisión posible la situación de los elementos ligados a ella, gasolineras, puntos kilométricos: mínimo dos en cada carretera (en la BTN solo se incluyen los kilómetros recogidos directamente en campo, los intermedios se ponen en la fase de edición), raquetas, puentes etc. Teniendo cuidado en los pasos a distinto nivel. La señalización de los cruces de líneas eléctricas con las carreteras, puede facilitar una mejor posición de estas por la zona

Se recorren las pistas que no aparezcan en nuestro mapa situándose con la mayor precisión posible.

## **Usos del suelo**

Se visitan las zonas en las que se hayan presentado dudas en su identificación, comprobando de paso las demás zonas.

En las Diputaciones provinciales también se recaba información sobre aspectos medioambientales de la zona: Límite de parques nacionales o regionales, áreas recreativas, información sobre GR, parques eólicos (cada vez proliferan más), restos arqueológicos etc.

## **Hidrografía**

Se recaba información de nombre de ríos, arroyos (distinguiendo entre permanentes o intermitentes), fuentes, etc.

El resultado de esta formación, de gabinete y campo, y una vez efectuado el control de calidad de la hoja, genera un nuevo fichero que es el que se usa para generar el fichero BTN.

### **69.5. Generación de BTN**

A partir del fichero de restitución actualizado, de gabinete y campo, y con los códigos propios de BCN se procede, mediante procedimientos apropiados, a la generación del fichero BTN en el cual se ha conseguido una correcta geometría de los elementos manteniendo las propiedades intrínsecas de la serie y los casos semánticos y geométricos (fundamentales para la topología posterior).

### **69.6. Descripción y contenidos del MTN25**

Las condiciones generales del MTN25 y su forma de representación las forman un conjunto de especificaciones que determinan el contenido del mapa y se agrupan en dos apartados: Geografía Física y Geografía Humana.

#### **69.6.1. Geografía Física**

La representación gráfica de la realidad física (topografía), se realiza en tres grandes grupos de información: Relieve, Hidrografía y Usos del Suelo.

#### **Relieve**

Su representación se realiza por el sistema de curvas de nivel, eligiendo las curvas de cota múltiplo de 10 metros. Las que además tengan cota múltiplo de 50, curvas directoras, se dibujan con un trazo más grueso.

Las curvas directoras se acotan.

Para finalizar la parte correspondiente al relieve, se hace un estudio y selección de los puntos acotados

## Hidrografía

Conforma, juntamente con la cuadrícula del sistema de representación (proyección U.T.M.) y las portadas, el color azul de la hoja y contiene la información de todos los elementos hidrográficos naturales y artificiales, detalles puntuales relacionados con el agua y las curvas batimétricas que definen el fondo marino o el de grandes extensiones de aguas continentales.

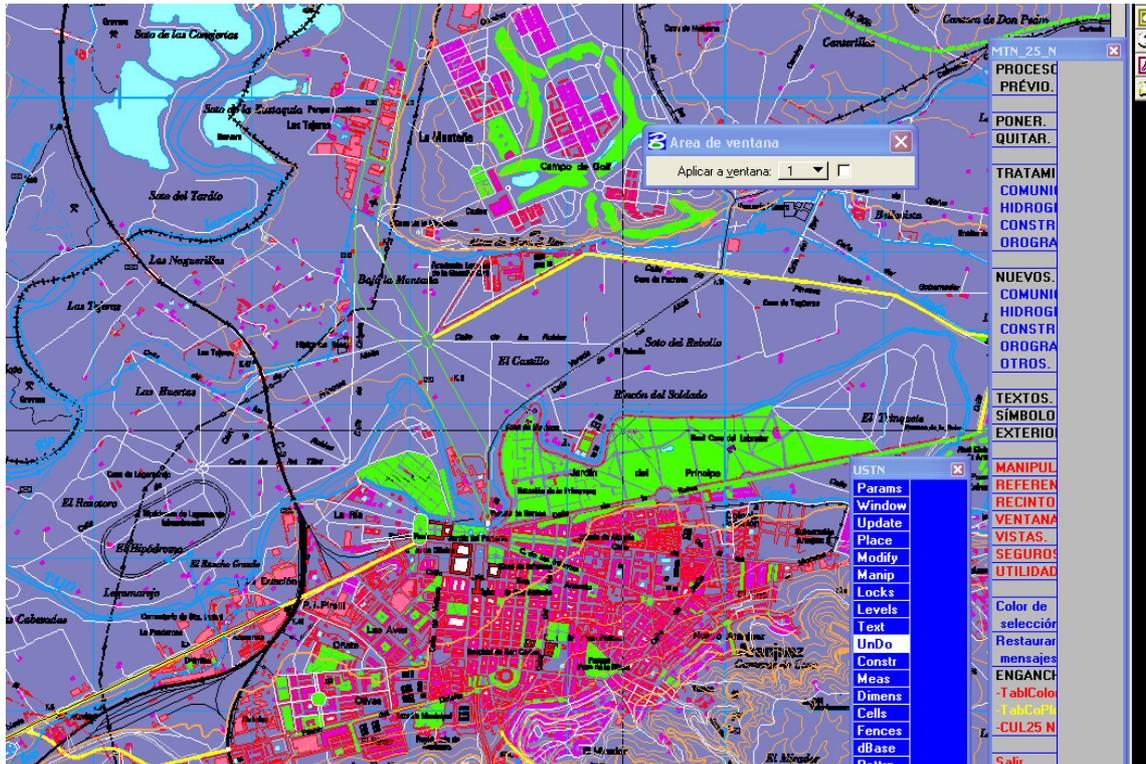


Figura 4. Vista parcial del fichero dgn de la Hoja 0605-4 Aranjuez

## Usos del suelo

Bajo este epígrafe se designan los cultivos y aprovechamientos del suelo, la vegetación natural y las distintas clases de terrenos improductivos agrupados de forma que la lectura del mapa no pierda la necesaria claridad.

Los usos del suelo están divididos en los grupos siguientes:

- Bosques
  - Las coníferas, (C)
  - Son frondosas, (F)
  - Los mixtos (M)
- Matorral (Mt)
- Cultivos arbóreos.
  - Olivar (P-O)

- Cítricos (P-N)
- Frutales (P-V)
- Almendros (P-A)
- Cultivos de regadío.
  - Regadío permanente (Re)
  - Regadío con frutales (Re-Pv)
  - Arrozales (A)
  - Caña de Azúcar (C-A)
  - Platanar (B)
- Viñas.
  - Viña (V)
  - Viña con Olivar (V-O)
  - Viña con Frutales (V-P)
- Cultivos mixtos.
  - Viña y terreno claro (V-X)
  - Olivar y terreno claro (O-X)
  - Viña, olivar y terreno claro (V-O-X)
- Terrenos claros.
  - Terrenos claros despejados (X)
  - Terrenos claros con árboles (X-A)
- Terrenos incultivables.
  - Playas
  - Dunas (D)
  - Marismas (Mm)
  - Roquedos (R)
  - Terrenos volcánicos (L)
- Parques y jardines (J)
- Árboles singulares
- Cortafuegos

### **69.6.2. Geografía humana**

Esta área de información comprende el poblamiento, vías de comunicación, divisiones administrativas, líneas de transporte de energía, etc., y, en general, toda obra que la acción del hombre aporta al terreno. Dividiéndose en los siguientes grupos:

### **Núcleos de población y construcciones diversas**

- Cementerio.
- Castillo.
- Edificio religioso aislado.
- Edificio singular.
- Palomar.
- Balnearios, paradores, albergues, refugios de montaña y hospitales.
- Cuevas habitadas.

### **Restos históricos**

- Murallas.
- Restos arqueológicos.
- Monumentos.
- Calzada romana.
- Campos de batalla.

### **Explotación de recursos naturales e industria**

- Fábrica
- Silo
- Chimenea
- Chimenea de refrigeración
- Molino
- Cuevas de uso industrial
- Minas y canteras
- Escombreras y acopio de materiales
- Cinta transportadora
- Pozos de petróleo, gas y depósitos de combustible
- Conducciones de combustible
- Estaciones de bombeo de combustible
- Central eléctrica
- Líneas eléctricas
- Estación o subestación transformadora.
- Transformador
- Antenas
- Repetidor
- Jamileros

- Estación espacial.

### Vías de comunicación

- Carreteras.
  - Autopistas, autovías, carreteras nacionales, autonómicas (tres órdenes) y pistas o carreteras particulares.
- Pistas.
- Caminos.
- Senderos de pequeño recorrido.
- Vías pecuarias.
  - Cañadas.
  - Cordeles.
  - Veredas.
- Ferrocarriles.

### Puertos y aeropuertos

### Divisiones administrativas

### Apoyos geodésicos

### Espacios naturales protegidos (Ley 4/1989)

### Parques

- Parques Nacionales.
- Parques Naturales y Regionales.
- Reservas.
- Monumentos naturales.

### Paisajes protegidos

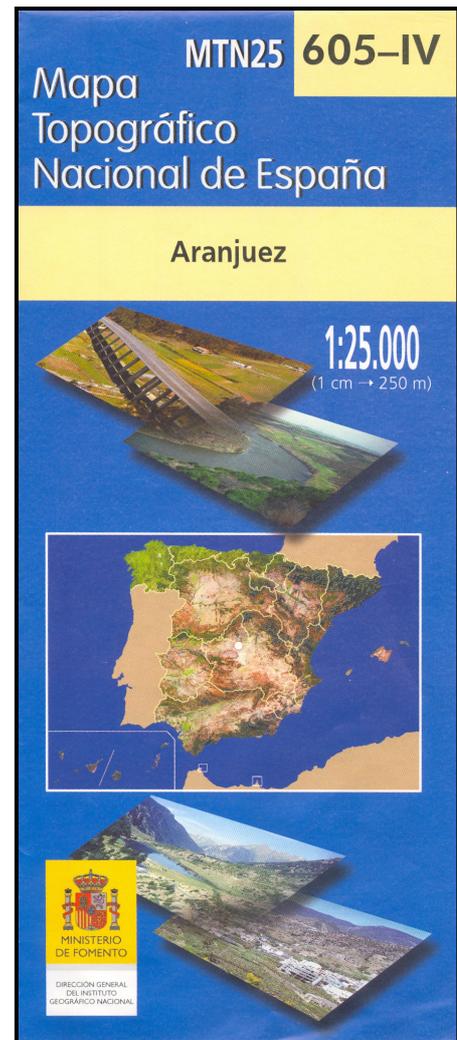


Figura 5. Portada de la Hoja 0605-IV

### 69.6.3. Toponimia

La toponimia se incorpora mediante la elección del tipo y cuerpo de letra conforme a especificación para el MTN25.

#### Los rótulos que van siempre paralelos a la base del marco son:

Núcleos de población, edificaciones, todos los detalles puntuales, tanto del color negro como del azul, comarcas, parajes (salvo grandes parajes en algún caso), lagos, lagunas, islas grandes, generalmente embalses, picos, collados, cotas de altitud, etc.

Se evita que ningún rótulo pise detalles planimétricos que tienen efecto de barrera en la realidad, detalles de su mismo color, las líneas horizontales de la cuadrícula UTM, las líneas de costa o de límite de embalse.

Los parajes se refieren a superficies que no tienen límites gráficamente identificables, por lo que su colocación está referida al centro del área al que da nombre.

#### **Rótulos que siguen longitudinalmente el detalle al que dan nombre:**

Fundamentalmente son los siguientes:

- Accidentes orográficos.
- Nomenclatura de carreteras.
- Caminos, sendas y vías pecuarias.
- Cursos de agua natural o artificial.

### **69.7. Generación del MTN50**

Una vez disponibles los cuatro cuartos del MTN25 en formato digital, nos encontramos en condiciones de obtener, a partir de ellos, un nuevo Mapa Topográfico Nacional a escala 1/50.000, MTN50, cuya primera versión de las 1.130 hojas que lo componen costó casi 100 años completar con procedimientos convencionales. Para ello se aprovecha por un lado la estructura de la información del MTN25, perfectamente codificada y con case de todos los elementos entre hojas contiguas y, por otro, las herramientas informáticas disponibles que nos permitan derivar la información de una escala a la otra, es decir, generalizarla.

Podemos considerar el proceso de generalización como aquél que nos permite obtener, a partir de una información geográfica original con un nivel de precisión y volumen de datos determinados (correspondientes a una escala determinada de impresión), la interpretación más adecuada de la misma que permita la mejor representación posible de los datos, ya sea con otro propósito diferente al del mapa fuente, o bajo unas necesidades menores de precisión (es decir, a una escala de representación menor).

La necesidad de utilizar la generalización para derivar información geográfica menos detallada no es algo compartido por todos los profesionales del sector, fundamentalmente desde la llegada de los procedimientos digitales. Es imprescindible su utilización si lo que se pretende es realizar importantes saltos de escala, pero esto no es tan evidente cuando el cambio de escala es pequeño, sobre todo con la tendencia actual a sobrecargar de información los mapas.

Incluso los cartógrafos más partidarios de la generalización reconocen que para su automatización total aun falta bastante, si es que algún día llega a ser posible, y no ven el apoyo suficiente como para que se produzca una rápida evolución. En el mundo de la Cartografía, dicho apoyo para el desarrollo de nuevas tecnologías puede proceder de los Organismos Cartográficos Nacionales, de las firmas comerciales o de las Universidades.

Antes de desarrollar las aplicaciones informáticas que permitan realizar las diferentes tareas de la forma más rápida y fiable posible, ya sea automática o interactivamente, se han definido las fases y su secuencia de ejecución.

La definición de las diferentes fases se realiza por capas, afectando al conjunto de elementos que están incluidos en ellas. Las capas utilizadas son las mismas del MTN25, es decir, relieve, hidrografía, usos del suelo, construcciones, comunicaciones; toponimia y signos convencionales.

En relación con los tipos de elementos, podemos mencionar que:

- Los elementos puntuales se tratan de forma que se conserven los elementos singulares y se eliminen los no necesarios. En el caso de los signos convencionales, se mantiene el criterio de que sean armónicos y evocadores, redefiniendo su tamaño para la escala 1/50.000.
- Los elementos lineales se filtran de forma que el número de puntos que define su trazado disminuya considerablemente, respetando la sinuosidad de su trazado. Se realizan los desplazamientos necesarios para evitar coincidencias, pero siempre respetando posiciones relativas y cruces.
- Los elementos zonales se vigilan al disminuir el umbral de separación con su representación simbólica, por lo que se fijan las condiciones para su permanencia.
- Los topónimos se seleccionan con un criterio que permite que la densidad de cada clase de rótulos sea equilibrada y proporcione un mapa legible y armónico

En lo que respecta a la secuencia de operación de los trabajos, además de fijar las operaciones que se realizan de forma previa a la propia fusión de los cuatro cuartos del MTN25 y las que se realizan posteriormente sobre el MTN50, se fija el orden en el que las capas son tratadas. El más coherente, aplicado en la generalización cartográfica convencional, es el siguiente:

- La hidrografía constituye, junto con los vértices geodésicos y los puntos acotados, el esqueleto sobre el que se vértebra el resto de la información geográfica. Por tanto, su generalización se reduce al mínimo, para evitar en lo posible los desplazamientos.

- En las comunicaciones, representadas fundamentalmente por elementos lineales, se respeta prácticamente la información existente en el MTN25, pues es una información fundamental para el usuario que desea acceder a las diferentes zonas del mapa. Tan sólo se efectúa una simplificación del número de puntos, pero manteniendo su trazado.
- En las edificaciones, el esqueleto básico y las diferencias de densidad zonal de los cascos urbanos permanece, de forma que se distinguen las partes integradas por construcciones de épocas distintas. Para los edificios aislados, se redefine el tamaño mínimo que sirve de umbral para la representación simbolizada.
- En los usos del suelo, es importante generalizar respetando el carácter general de la zona representada, con agrupaciones y supresiones adecuadas. En las zonas más altas se tiende a una menor supresión, pues la ausencia de otros elementos planimétricos convierte a las líneas de delimitación de cultivos en referentes importantes.
- En la orografía, se mantienen los vértices geodésicos, se realiza una adecuada selección de los puntos acotados y se analizan y seleccionan las curvas de nivel (fundamentalmente a través de la modificación de la equidistancia a 20 metros y la reducción del número de puntos, respetando su trazado). Contrasta la baja prioridad de las curvas para los desplazamientos con la fijación exacta de los elementos puntuales.

## **Bibliografía**

- [1] Cebrián J. y L. García-Asensio, La cartografía básica oficial de España: el Mapa Topográfico Nacional a escala 1:25.000, Mapping (1997).
- [2] Instituto Geográfico Nacional, Actualización de restitución numérica, generación de BTN25 y actualización de MTN25. Pliego de prescripciones técnicas, 2007.
- [3] Subdirección General de Producción Cartográfica. Instituto Geográfico Nacional, Descripción de entidades geográficas BTN25-3d. Normas de captura, 2007.

**Tema 70. Visualización de información geográfica. Cartografía interactiva, multimedia, hipermedia; cartografía animada; visualización 3D de información geográfica; visualización en realidad virtual; cartografía en Internet: fundamentos, metodologías y tecnologías.**

### **70.1. Cartografía interactiva, multimedia, hipermedia.**

En informática se define la visualización cartográfica como la “creación de imágenes gráficas a través del ordenador, que muestran información que puede ser interpretada por el hombre, particularmente información científica multidimensional” (Peterson, 1995).

Es en este proceso de interpretación donde cobra mayor importancia el desarrollo de una interfaz que sea interactiva y a su vez permita el proceso de animación de la información.



Figura 1.

La interacción entre el mapa y el usuario en los mapas sobre papel se produce por medio de las variables visuales (tamaño, forma, textura, color y orientación). Esto limita la representación a fenómenos estáticos, siendo necesarios una serie de mapas para expresar el paso del tiempo.

Esta limitación se puede hoy resolver gracias a las técnicas informáticas mediante el empleo de las variables visuales dinámicas:

- Momento: expresa en el mapa los cambios que presenta un fenómeno en un determinado instante.

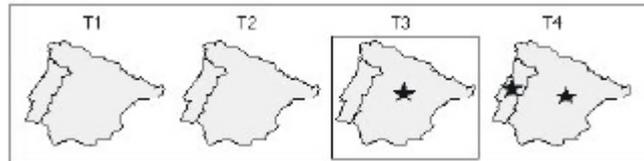


Figura 2.

- Duración: indica la duración en tiempo real de un fenómeno, es perceptible durante la animación.

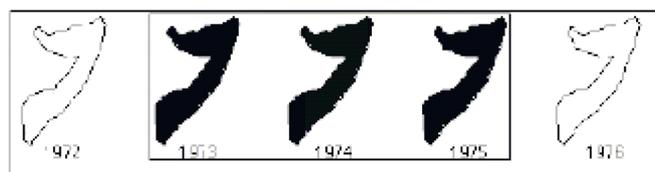


Figura 3.

- Frecuencia: expresa la tasa de ocurrencia del fenómeno.



Figura 4.

- Orden o secuencia: evolución cronológica de un fenómeno.

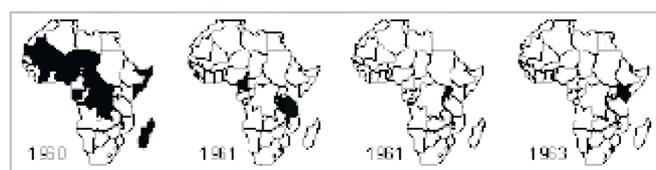


Figura 5.

- Tasa de cambio: describe como ha sido el cambio (en cuanto a la magnitud) de un fenómeno.

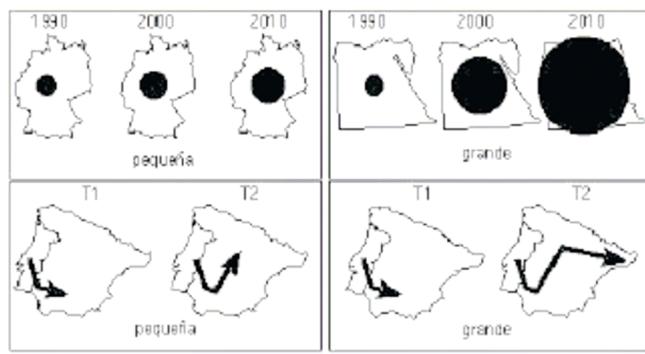


Figura 6.

- Sincronización: permite observar como ha sido el comportamiento de fenómenos relacionados entre sí en diferentes momentos.

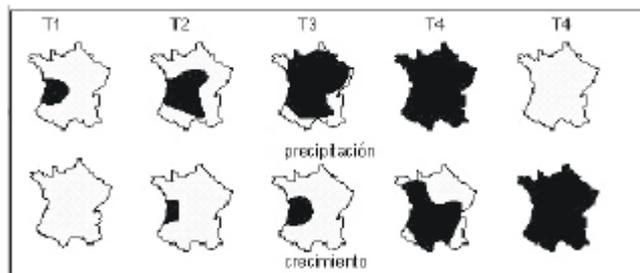


Figura 7.

Se define como multimedia la “combinación de informaciones de naturaleza diversa, coordinada por el ordenador y con la que el usuario puede interactuar” (Díaz et al, 1996)

Se define como hipermedia “el resultado de la combinación del hipertexto y la multimedia” (Díaz et al, 1996).

Si sobre un mapa, que da al usuario información georreferenciada, aplicamos técnicas de hipermedia, que integran el uso de información no georreferenciada, conseguimos ampliar la funcionalidad del mapa. El mapa no sólo será un elemento para comunicar información, sino que, además será el interfaz de la información hipermedia. Esto es lo que se conoce como hipermapa.

$\text{mapa} + \text{hipermedia} = \text{hipermapa}$
--

Se define hipermapa como una aproximación georreferenciada a la hipermedia, basados en los principios del hipertexto y los hiperdocumentos que permite combinar la búsqueda o navegación espacial y temática. (Kraak and van Driel, 1997).

La navegación por hipermapas supone el acceso a una base de datos georreferenciada compuesta por datos espaciales (bien con modelo entidad relación, o bien orientada o objetos) y atributos temáticos asociados a dichos datos espaciales.

Esta navegación consta de tres etapas: búsqueda de información, actualización del hipermapa y almacenamiento de información del hipermapa.

La búsqueda se puede realizar mediante la selección de un punto (evento click del ratón), mediante la selección de un objeto (símbolo o área de interés previamente definida) o mediante la obtención de la localización del objeto o del área. La búsqueda se puede realizar mediante atributos temáticos o temporales.

La actualización del hipermapa supone la creación o eliminación de vínculos, documentos, imágenes,...

Por último el almacenamiento de información del hipermapa supone que, para cada documento hipermedia basado en hipermapas, se almacenan en una base de datos los ítems resultado de la búsqueda.

Se ha comprobado que en la navegación a través de hipermapas, como sucede en cualquier documento hipermedia, el usuario se desorienta con facilidad. A menudo interfaces complejos y poco claros llevan al usuario por caminos de forma más o menos guiados y éste, en algún punto, pierde la visión global de la navegación que está realizando y se siente perdido.

Por ello en el diseño del hipermapa, el modelo que se considere ha de estar muy estudiado y ser lo más claro posible a fin de que la navegación a través de todos los contenidos existentes sea eficiente.

## **70.2. Cartografía animada**

Se define como cartografía dinámica animada aquel tipo de cartografía dinámica que nos permite visualizar, en forma de imagen en movimiento, la evolución de un fenómeno en el tiempo. El principio de acción en el que se basa es el de superponer diferentes representaciones estáticas en un mismo espacio físico, y en una sucesión continuada en el tiempo. Es decir, un principio cinematográfico, en el que la ilusión del movimiento se consigue mostrando a los ojos diferentes fotogramas (mapas estáticos) con la suficiente rapidez para engañar al cerebro, y que este interprete que lo que está visualizando es un movimiento continuo.

Los mapas convencionales, sobre soporte papel o similar, son estáticos, esto es, muestran la información que muestran, sujeta a un instante determinado del tiempo. Para ver la evolución de un fenómeno hay, a menudo, que consultar dos mapas de diferentes instantes. De forma muy primaria existen mapas que tratan de reflejar fenómenos dinámicos mediante líneas de flujo o mostrando dos representaciones de un mismo fenómeno en dos instantes dados. Vemos claramente que cuando los flujos que queremos representar son complejos, o los estados de ese

fenómeno que se quieren mostrar son más de dos o tres, la representación se complica y el mapa resultante no es de fácil interpretación. Es decir, los mapas sobre papel o soporte similar pueden representar de forma muy primaria fenómenos de carácter dinámico, si queremos reflejar dinamismos más complejos hemos de recurrir a otras técnicas.

Desde hace ya muchos años se han desarrollado mapas dinámicos con técnicas cinematográficas si bien, su alto coste y difícil acceso hacía difícil su producción y difusión. Actualmente con los sistemas informáticos y los programas desarrollados, está al alcance de cualquier usuario de un ordenador.

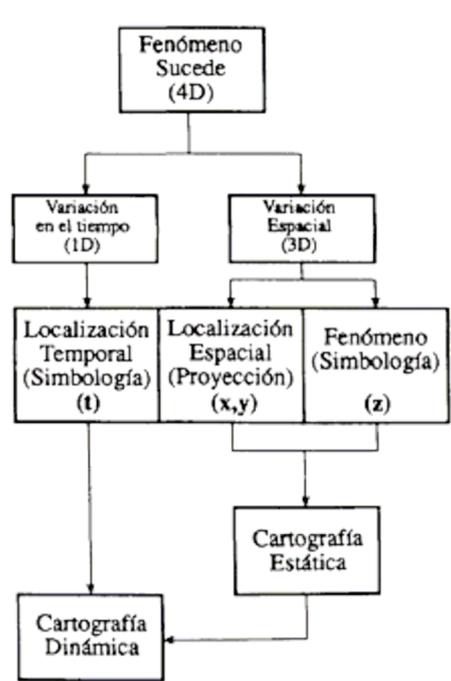


Figura 8.

Este carácter dinámico puede venir dado bien por la evolución, transformación o desarrollo de un fenómeno en el tiempo, o bien por el desplazamiento, movimiento o flujo de algún fenómeno entre dos posiciones en el tiempo.

Se puede hablar de dos tipos de cartografía animada en función de cómo se muestre la evolución o desarrollo del fenómeno. Si dicha variación es mostrada de forma instantánea, esto es, a través de un mapa inicial y uno final, se habla de cartografía semianimada. En cambio si se muestra la variación de forma progresiva mediante la inclusión de una serie de mapas se habla de cartografía animada pura. Para elaborar los mapas intermedios se pueden representar datos reales, en el caso de que se conozcan (caso ideal), o interpolar dichos datos entre los valores inicial y final.

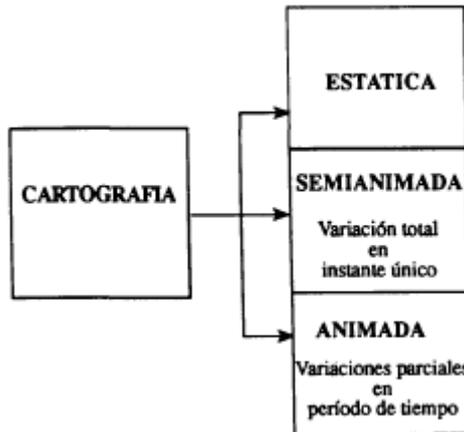


Figura 9.

Lógicamente todos los mapas que participen en la animación han de ser necesariamente generados con antelación. Para ello se ha de realizar un diseño previo en el que se han de considerar diversos factores, se destacan por su importancia dos, tipo de representación y número de fotogramas necesarios.

En cuanto a tipo de representación no será igual animar un mapa de flechas que un mapa de isolíneas o que un mapa de isocronas.

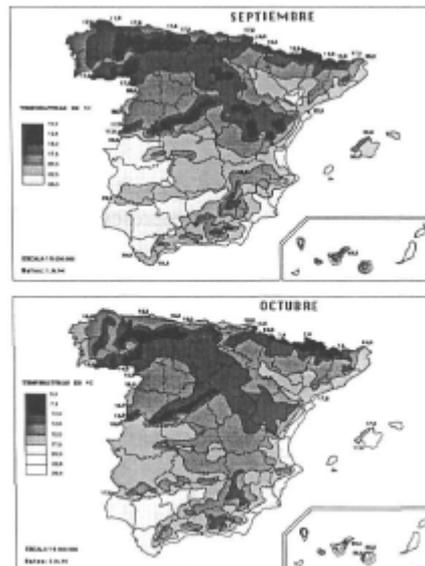


Figura 10.

En cuanto a número de imágenes necesarias en el caso de cartografía semianimada serán dos, el mapa que muestra la situación inicial y el mapa final. En el caso de la cartografía animada pura necesitaremos varios mapas para crear la ilusión de movimiento. El número de imágenes estará condicionado por la mayor o menor variación que el fenómeno haya experimentado, así como por la velocidad con que será mostrada la animación. A igual velocidad de paso de los

fotogramas, un fenómeno que experimente variaciones muy grandes necesitará más imágenes intermedias que uno cuyas variaciones sean muy pequeñas, en el que con pocos mapas se conseguirá que el cerebro lo interprete como un movimiento continuo. En el caso de que las variaciones sean muy grandes, el cerebro podría llegar a percibir los saltos entre un mapa y otro perdiéndose así la ilusión de movimiento. Por ello a mayor variación del fenómeno necesitaremos más imágenes intermedias.

Por otro lado, a mayor velocidad de animación se necesitarán menos fotogramas ya que, al pasarlos muy deprisa, el cerebro no percibirá los cambios de forma discreta sino continua. A medida que se quiera disminuir la velocidad de la animación se habrán de incluir más imágenes intermedias para mostrar la variación del fenómeno de forma suave.

De la experiencia se ha detectado que existe cierta dificultad en la interpretación de la cartografía dinámica animada, quizá por la falta de costumbre en el manejo de este tipo de mapas, o quizá porque es esta una técnica relativamente nueva y está falta de convencionalismos universales como los que sí existen en cartografía estática, en el que existe una simbología universal, por todos conocida, que nos ayuda enormemente a interpretar un mapa casi sin acudir a la leyenda. En cualquier caso se ha de prestar atención a los siguientes comentarios a la hora de elaborar cartografía animada. En primer lugar la velocidad de animación no debe ser excesiva, se ha de dejar que el usuario pueda ir interpretando y asimilando cómo el fenómeno que queremos representar va variando a lo largo del tiempo. Este punto tiene especial relevancia en el caso de que los datos con que hayamos hecho los mapas intermedios sean datos reales, y no simples interpolaciones de los valores inicial y final. En este caso no sólo es de interés la variación en sí, sino también cómo esta se ha producido a lo largo del tiempo.

Un objeto en movimiento capta poderosamente la atención del ojo y focaliza la atención del usuario, por ello se desaconseja desplazar por la pantalla más de tres o cuatro elementos gráficos relevantes, principalmente cuando sus movimientos no están relacionados entre sí, en cuyo caso se dificulta enormemente el seguimiento de todos estos fenómenos al mismo tiempo. Es lógico que, para ayudar a la interpretación de un mapa dinámico, cuanto más complejo sea la variación producida, o más fenómenos se quieran representar, la velocidad de la animación habrá de ser necesariamente menor.

Por último se ha de centrar la atención del lector en aquello que se quiere mostrar, en estos mapas el centro de interés es la variación del fenómeno. Por ello se ha de proceder a una generalización en dos aspectos. Por un lado se ha de reducir la cantidad de información

mostrada en el mapa. En este sentido es buena técnica mostrar los mapas inicial y final (que pueden ser mostrados también de forma estática aumentando así el tiempo de lectura) con más información que los mapas intermedios. Esa información es retenida por el observador en el mapa inicial y ayuda a interpretar los mapas intermedios más generalizados. También es necesaria una generalización en cuanto a los elementos gráficos mostrados, se ha de acudir a figuras muy sencillas y densidades pequeñas, evitando empastes de elementos y figuras complejas que requieren más atención por parte del lector.

En cuanto a técnicas de animación por ordenador existen tres tipos. Se puede hacer relacionando gráficos por medio de transiciones (slide show). El movimiento en esta técnica es conseguido por medio de diferentes efectos parecidos a los que dispone PowerPoint para realizar animaciones entre diapositivas (cortinilla, fundidos, pixelazos,...). Otra técnica es la ya comentada de superposición de diferentes imágenes que representan diferentes instantes de la variación de un fenómeno. La tercera técnica se consigue mezclando las dos anteriores.

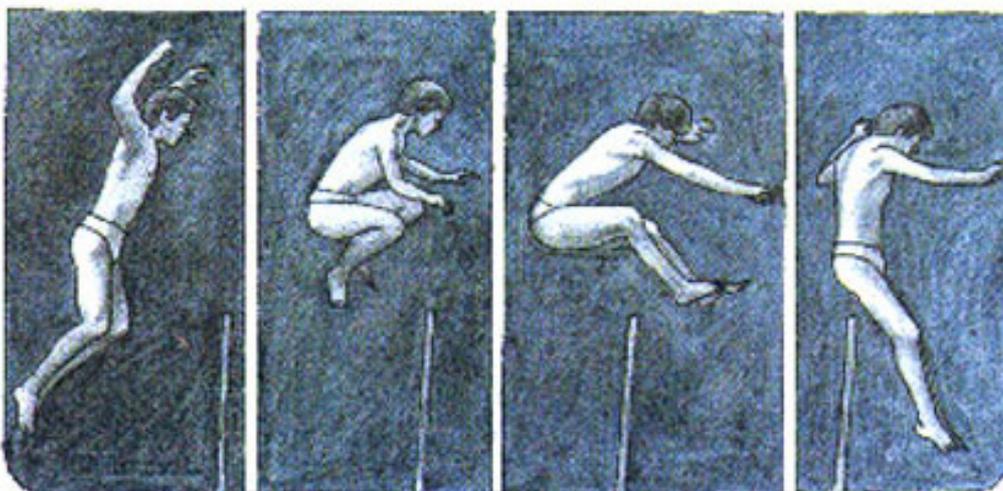


Figura 11.

El problema principal que presentan las técnicas de animación de cartografía es la limitada capacidad de velocidad de los ordenadores y, en el caso de cartografía online, la velocidad de conexión al servidor de mapas. Así puede aparecer el conocido como defecto de barrido horizontal. Este surge por la incapacidad del ordenador de redibujar con suficiente rapidez los mapas como para engañar a nuestro cerebro, y es especialmente acusado cuando se trabaja con ficheros de mapas de gran tamaño.

### 70.3. Visualización 3D de información geográfica

Un paso más allá de la cartografía plana en dos dimensiones supone el mostrar los diferentes productos generados (raster, vector o enlaces a elementos multimedia) sobre un modelo digital del terreno (MDT). Mediante programas informáticos y disponiendo de un MDT podremos obtener la tercera coordenada (Z) de los objetos (mapas, imágenes aéreas o de satélite,...) que queramos. Obviamente tanto el MDT como dichos objetos han de tener el mismo sistema geodésico de referencia e igual proyección cartográfica. Una vez hecho esto, con programas que simulan volar por encima del MDT podemos ver nuestros objetos en tres dimensiones, lo que aporta una nueva dimensión a la lectura de la información geográfica y permite mostrar el relieve con un realismo inédito hasta la era informática, y con un grado de detalle tan fino como pequeño sea el paso de malla empleado en la construcción del MDT.

Para la creación de visualizadores tridimensionales existe un estándar abierto para la Web creado por el Grupo de Trabajo X3D del Consorcio Web 3D y el reciente Grupo de Trabajo Browser. Su nombre es X3D (extensible 3D) y tiene una serie de características principales que son las siguientes:

Es perfectamente compatible con la tecnología más extendida en los últimos años para la elaboración de herramientas tridimensionales que es VRML (Virtual Reality Model Language). Tanto es así que se puede decir que X3D es VRML 97 en componentes, con la particularidad de que permite agregar nuevos componentes pudiendo así extender su funcionalidad más allá de VRML 97 de forma sencilla. Por tanto X3D contiene el perfil completo VRML por lo que puede soportar los contenidos existentes creados en VRML.

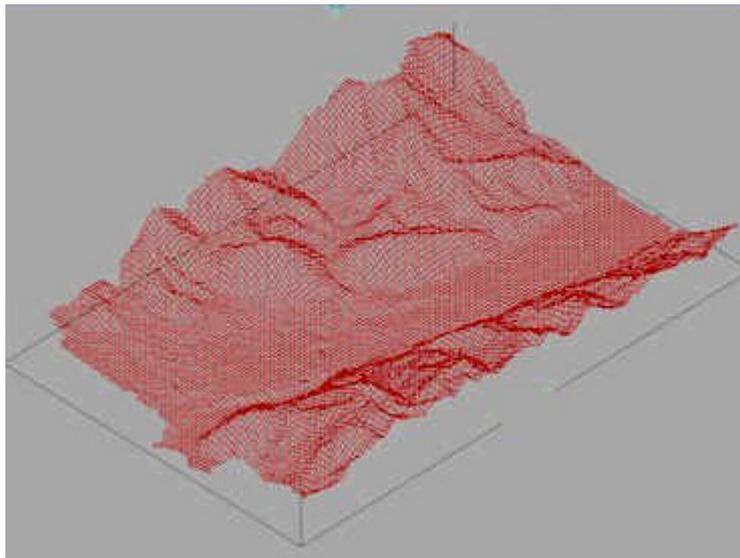
Como ya se ha dicho tiene un mecanismo de extensión que permite introducir nuevas características.

Un perfil del 'núcleo' pequeño y simple que hace que sea de interés para un gran número de usuarios. Muchas empresas pueden estar interesadas en unas funcionalidades de las ofrecidas por X3D pero no en todas. Basta con que adopten el perfil 'núcleo' y aquellas funcionalidades que cada uno desee, sin necesidad de, por adoptar X3D, tener que adoptar todo el soporte que este ofrece. Esta es una ventaja frente a VRML97, esta especificación había que adoptarla de forma completa, por lo que desanimaba a muchas empresas que no querían implementar una especificación grande y compleja. X3D permite, gracias a su estructura modular, que una empresa empiece por adoptar el perfil X3D-1 y vaya implementando perfiles posteriormente según los vaya necesitando.

Admite otras codificaciones como XML, por lo que facilita su integración con las tecnologías y herramientas Web. La representación de los nodos VRML97 en XML generó un DTD (Definición de Tipo de Documento).

X3D es la base del renderizado 3D del MPEG-4.

Por último aunque la característica más importante es que X3D tiene una arquitectura basada en componentes.



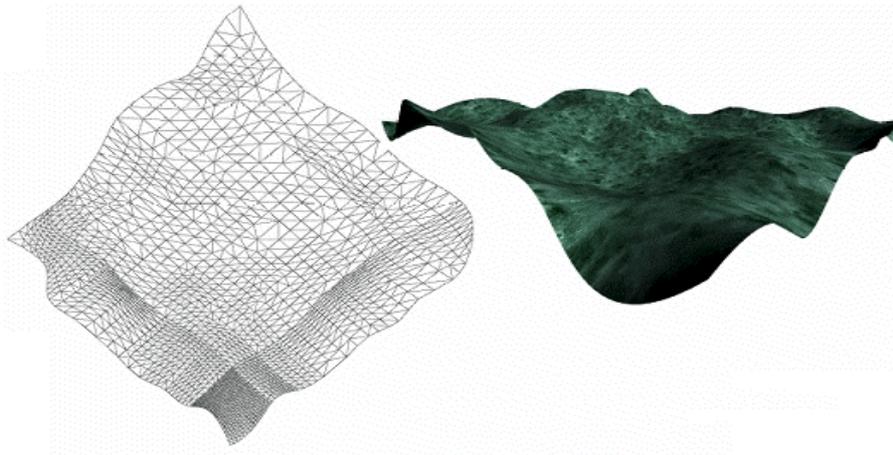
**Figura 12.**

Se define componente como una agrupación de rasgos relacionados tales como una colección de nodos, una extensión al modelo de evento y un nuevo soporte de script.

A una colección de componentes se le llama perfil, así un perfil de X3D sería el pequeño ‘núcleo’ para soportar una aplicación no interactiva, otro sería el perfil base VRML compatible para entornos totalmente interactivos. El perfil X3D-1 soporta geometría y animación en los entornos tridimensionales mientras que el perfil X3D-2 es conocido como perfil VRML97 y soporta los nodos VRML97 y PROTOs y SCRIPT.

Una de las ventajas de la arquitectura basada en componentes es que permite en X3D extender componentes individualmente o agregar nuevos componentes para introducir nuevas características como streaming.

De esta forma los contenidos que sean generados con X3D-1 podrán importar contenido que sea X3D-1 compatible y, a su vez, dichos contenidos podrán leerse en cualquier browser X3D-1, X3D-2 y VRML97.



**Figura 13.**

Para una mayor eficiencia y rapidez de manejo del modelo tridimensional, los programas informáticos aplican la técnica conocida como nivel de detalle (level of detail LOD) consistente en que, conforme el paisaje o la escena 3D se aleja del observador, la complejidad de la malla o de la representación 3D de los objetos es menor. La disminución del detalle no es perceptible por el observador debido a su mayor lejanía y, sin embargo, el trabajo de carga de la información es mucho menor, por lo que los programas de simulación de escenas 3D pueden cargar las imágenes con mucha mayor velocidad, y permitir así la simulación de volar sobre en modelo.

#### **70.4. Realidad virtual**

Se define como un medio compuesto por simulaciones de computadora interactivas que reaccionan a la posición y acciones del usuario y producen retroalimentación en uno o más sentidos, generando la sensación de estar inmerso o presente en una situación.

Se define ambiente virtual como una simulación por computadora que proporciona información a uno o varios de nuestros sentidos con el propósito de que el usuario se sienta inmerso en un mundo que reacciona ante sus acciones. Un ambiente virtual es necesariamente tridimensional, dinámico y cambiante según los movimientos y peticiones del usuario, por lo que requiere de periféricos más o menos complejos.



**Figura 14.**

La realidad virtual puede ser inmersiva y no inmersiva. La realidad virtual mostrada a través de un ordenador común se conoce como no inmersiva, emplea dispositivos hardware comunes (mouse, monitor,...), y su principal ventaja es la de ser de fácil acceso ya que no requiere de hardware especializado. Su gran inconveniente es que el usuario se distrae con facilidad ya que sus sentidos captan eventos ajenos a la simulación.

Para evitar precisamente esa dispersión de los sentidos están los métodos inmersivos, estos crean al participante la sensación de estar dentro de un ambiente. Para ello requieren de cascos, proyectores de alta resolución, ordenador para controlar todos los elementos involucrados en la simulación e interacción, entre el sistema y el participante, a una velocidad adecuada.

El despliegue visual es de crucial importancia, se puede actuar de tres formas diferentes, bien mediante la producción de vistas tridimensionales con visión estereoscópica, bien mediante cascos binoculares o la proyección en múltiples pantallas. Los cascos binoculares consisten en dos pequeñas pantallas que, situadas delante de los ojos transmiten a estos la perspectiva que ese ojo vería en una situación real. La proyección en múltiples pantallas (sistema CAVE) consigue envolver al participante en un espacio en forma de cuarto. A menudo combinado con lentes especiales consiguen generar en el cerebro la sensación de profundidad de la escena.

Los sistemas de localización y seguimiento miden las diferentes posiciones y orientaciones en que el usuario está ubicado y visualizan, conforme a esas medidas, el entorno, de forma que el participante perciba que se encuentra dentro de la escena. Para conseguir resultados reales es importante la velocidad con que el sistema muestrea la posición del participante, y el tiempo que tarda el sistema en generar la nueva, o nuevas, imágenes.

Como dispositivos de entrada de información al sistema se citan dos si bien existen múltiples y están en estudio técnicas nuevas. Por un lado el mouse tridimensional es una extensión del mouse común, con un conjunto de botones para las acciones. Permite mover los objetos en los ejes de rotación cartesianos. Por otro lado los guantes sensitivos que perciben la posición y orientación de la mano. Dispone de sensores de flexión para medir la curvatura de los dedos de forma que puede percibir cuando se abre o cierra la mano, información necesaria para conseguir coger y soltar objetos virtuales, así como rotarlos alrededor de los tres ejes. Al mover el guante en el espacio, el sistema reconocerá el movimiento y lo aplicará al entorno virtual. Existen también trajes especiales que proporcionan al sistema información de todo el cuerpo del participante, y se están investigando técnicas más naturales como cámaras de video que captan el movimiento del usuario sin necesidad de que este se tenga que colocar ningún dispositivo encima.

Una interfaz realista necesita de retroalimentación tanto táctil como de fuerza. Se llama retroalimentación táctil a aquella que permite al participante percibir un objeto virtual de la misma forma que su sentido del tacto sentiría ese objeto en la vida real. Es decir, percibir la temperatura, forma, firmeza, textura,... del objeto virtual. La retroalimentación de fuerza hace referencia a las fuerzas que existen en la vida real y que han de ser también simuladas en el ambiente virtual. Por ejemplo, una pared virtual ha de impedir ser atravesada por el participante, y una pelota que virtualmente chocara con el participante (su posición en el mundo virtual) debería rebotar.

No existe hoy en día un sistema que simule todas estas interacciones juntas. Sí existen sin embargo, interfaces que simulan una u otra retroalimentación.

La necesidad de cómputo para que todo el sistema de realidad virtual funcione de forma eficiente ha de ser de alto rendimiento. El sistema informático ha de ser capaz de sincronizar todas los dispositivos implicados en tiempo real, así como desplegar las imágenes tridimensionales a una velocidad de, por lo menos, 30 escenas por segundo. De igual forma debe muestrear los dispositivos de entrada con suficiente rapidez y exactitud para que el participante pueda reconocer sus movimientos y no se desvincule de la ilusión generada con la realidad virtual.

Los elementos implicados en un sistema de realidad virtual son la simulación, la interacción y la percepción. La simulación ha de ser lo más realista posible (casco binoculares, pantallas envolventes, sonidos,...). La interacción es necesaria para que el participante tenga el control sobre la exploración del ambiente virtual (de otra forma estaríamos ante simples películas o visitas guiadas). Existen para esto mouses especiales, trajes,... Por último la percepción supone cómo el participante percibe la realidad virtual y sus propios movimientos dentro del ambiente virtual.

Entre los sistemas de visualización destinados a mostrar imágenes tridimensionales existen tres categorías. Por un lado los sistemas holográficos se basan en la interferencia de dos rayos láser generados por la misma fuente usando película fotográfica de muy alta resolución. Los sistemas multiplanares dividen la imagen en cientos de miles de puntos y los reflejan mediante espejos. Por último, el sistema de pares estereoscópicos emplea dos imágenes bidimensionales y se basa en la visión binocular.

Ejemplos de lenguajes de programación 3D son:

- Superscape VRT
- Virtus Walkrough Pro
- Visual 5

Ejemplos de programas Graficadores son:

- 3D Studio Max
- Trae Space 2
- Extreme 3D

## **70.5. Cartografía en Internet**

A los efectos de mostrar cartografía en Internet se define un mapa como una representación de la información geográfica en forma de un archivo de imagen digital conveniente para la exhibición en una pantalla de un ordenador.

El Open Geospatial Consortium (OGC) define y propone un interfaz de servicio Web de mapas llamado Web Map Service (WMS). Este describe un servicio que produce mapas de información georeferenciada. En este servicio, el mapa no son los datos geográficos en sí, sino su representación visual. El estándar WMS produce mapas de datos espaciales referidos de forma dinámica a partir de información geográfica. La información cartográfica de partida podrán ser bien raster con formatos PNG, GIFo JPEG, o bien vectorial con formatos SVG o WebCGM.

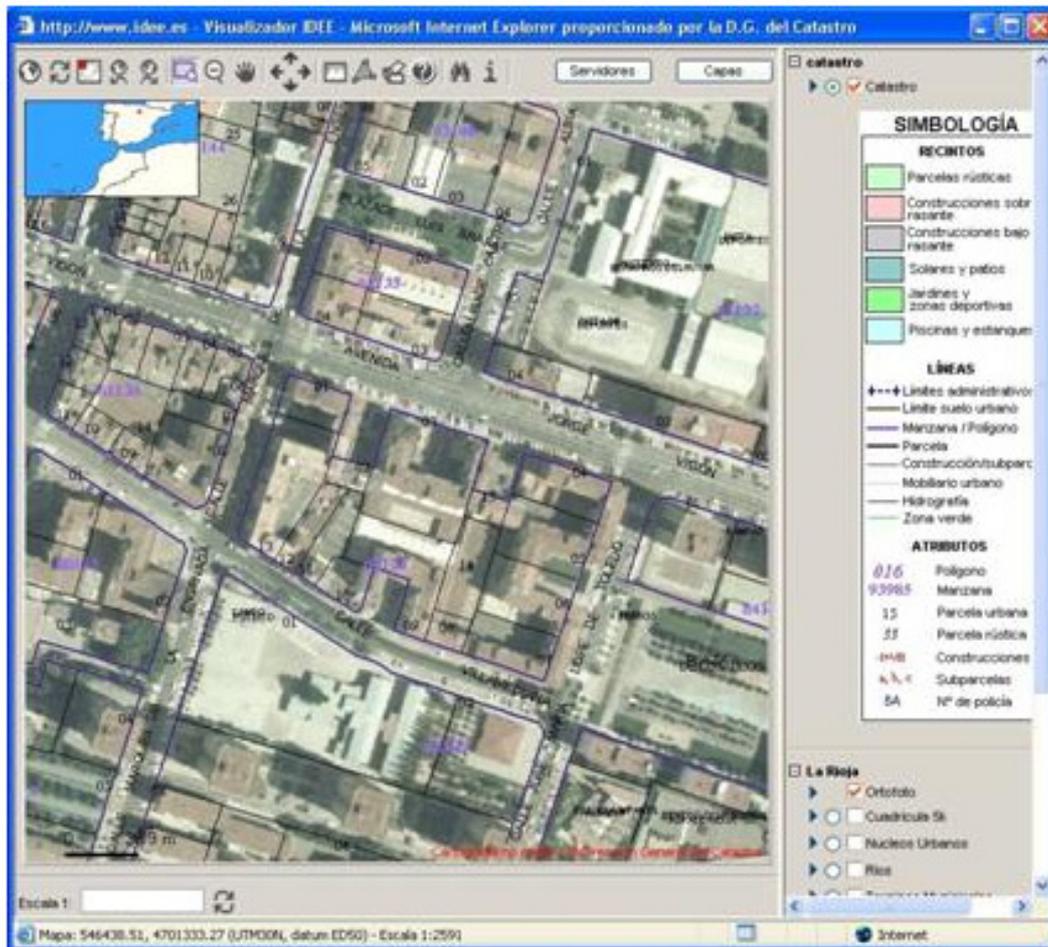


Figura 15.

En el estándar WMS se definen tres operaciones que son GetCapabilities, GetMap y GetFeatureInfo. Con GetCapabilities se describe la información del servicio y los parámetros aceptables para las peticiones. Devuelve metadatos del nivel de servicio. La operación GetMap devuelve un mapa cuyos parámetros geográficos y dimensionales han sido bien definidos. Con GetFeatureInfo se devuelve información de atributos acerca de las entidades geográficas mostradas en el mapa. Esta última operación es opcional.

Las operaciones WMS pueden ser invocadas usando un navegador estándar, realizando peticiones en la forma de URLs (Uniform Resource Locators). Al solicitar un mapa la URL indica qué información debe ser mostrada, qué porción de la Tierra debe dibujar, el sistema de coordenadas de referencia y la anchura y altura de la imagen de salida.

Cuando dos o más mapas se producen con los mismos parámetros geográficos y tamaño de salida, los resultados se pueden solapar para producir un mapa compuesto. El uso de formatos de imagen que permiten transparencias como por ejemplo GIF o PNG, permite que los mapas que están encima dejen ver el contenido de los que están debajo.

WMS permite solicitar mapas individuales de diferentes servidores, lo que permite crear una red de servidores distribuidos de mapas.

Las operaciones WMS pueden ser invocadas a través de clientes avanzados SIG, que a su vez realizan peticiones en la forma URL. Aplicaciones como svSIG permiten un acceso avanzado a la información remota, y aplicarla una gran variedad de herramientas SIG. También permite cruzar información remota con información local, y todo dentro de un entorno SIG con lo que las posibilidades de consulta se multiplican.

La forma de actuar de un WMS es la siguiente. Recibe una petición http de un cliente, recupera los objetos geográficos que componen el mapa, bien de una base de datos o bien de un servidor, y genera un mapa en alguno de los formatos existentes de acuerdo a unas características de estilo.

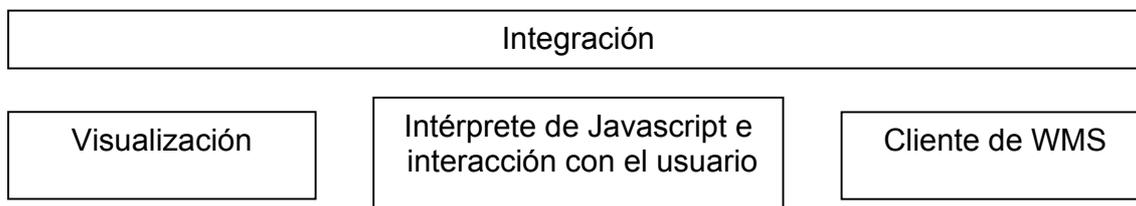
OGC recomienda el formato SVG (Scalable Vector Graphics) como formato vectorial para la representación de los mapas generados por los WMS. Un mapa representado en este lenguaje basado en XML podrá responder a eventos del usuario cambiando su aspecto visual de forma dinámica ya que SVG permite la inclusión de funciones de script que deben ejecutarse en respuesta a eventos del usuario. SVG es un lenguaje 2D y permite realizar gráficos animados y dinámicos mediante tres tipos de objetos geográficos. Estos tipos son formas geométricas vectoriales (puntos, líneas,...), imágenes y texto. SVG presenta una compatibilidad total con otras especificaciones W3C como por ejemplo HTML, XHTML, XML,... Gracias a esto permite la integración en una misma página Web de elementos SVG y HTML, permite crear documentos XML con secciones incrustadas en formato SVG, y cualquier otra integración al ser perfectamente compatibles los lenguajes.

Actualmente pocos navegadores soportan de forma nativa el formato SVG (según datos de 2006 no es soportado por Internet Explorer que es el navegador usado por el 83% de los usuarios), por lo que se ha de recurrir bien a plug-ins o bien al empleo de applets.

La ventaja de los plug-ins es el alto rendimiento al visualizar el formato para el que fueron contruidos. La desventaja es que necesitan instalación, con los problemas que eso puede generar en cuanto a seguridad, permisos de usuario,... Mediante el empleo de applets de Java se consigue mayor rapidez ya que es una aplicación compilada. El applet se ejecuta en la máquina virtual de Java asociada al navegador que está visualizando la página (en la que está incluido el applet). La máquina virtual de Java ofrece además un entorno seguro para la ejecución de applets.

La arquitectura de un servicio WMS está compuesta por los siguientes módulos. El módulo de visualización que analiza y pinta los ficheros. El módulo de intérprete Javascript e interacción con el usuario que captura los eventos generados por el usuario y hace que el mapa responda

según la interactividad definida en el mapa activo. El módulo cliente WMS que gestiona la comunicación entre el applet y el servidor de mapas, y guarda la configuración del mapa actual (bounding box, resolución,...) Por último el módulo de integración coordina el trabajo del resto de subsistemas.



Desde el grupo de trabajo de la Infraestructura de Datos Espaciales de España (IDEE) se hacen las siguientes recomendaciones para el servicio de mapas:

- Que las organizaciones productoras o distribuidoras de cartografía en España implanten un servicio de mapas que acceda total o parcialmente a su información geográfica.
- Que todo servicio de mapas sea conforme a la especificación OGC WMS, versión 1.1 o superior, implementando las dos operaciones obligatorias (GetCapabilities y GetMap). Además, es aconsejable, la implementación de la operación GetFeatureInfo.
- Que todo servicio de mapas sea fácilmente accesible a través de Internet, mediante una dirección Web pública (URL).
- Que el servicio de mapas soporte los sistemas de referencia espaciales ETRS89 (equivalente a WGS84) y ED50 en coordenadas geográficas y en UTM.
- Como criterio general, se recomienda que la implementación de un servicio WMS debe reproducir el comportamiento y las respuestas estandarizadas al ser invocado desde un cliente genérico, y no adaptarse a las particularidades de un cliente específico. Por ejemplo, cualquier respuesta del servicio al cliente debe dar o bien los resultados esperados o bien una excepción normativa.

Se sugiere el uso de la especificación del OGC “Styled Layer Descriptor Implementation Specification v1.0” como extensión del OGC WMS que permita una simbolización definida por el usuario.

Se recomienda, en la medida de lo posible, la implementación de la operación GetLegendGraphic y del atributo LegendURL para describir cada capa, con el fin de identificar las capas adecuadamente.

Se recomienda una utilización correcta y cuidadosa de los atributos de servicio y capa: “title” (para ser entendido por usuarios humanos) y “name” (acrónimo destinado a la comunicación máquina – máquina).

Actualmente en el campo de la visualización 3D de información geográfica, OGC está trabajando en la elaboración del estándar Web Terrain Server (WTS). WTS incorpora a los WMS el modelo de elevación del terreno y las perspectivas tridimensionales. Al añadir así la tercera dimensión, se aumentan las posibilidades de análisis, permitiendo medidas de superficies terreno, planeamiento de vuelos,...

Todo el potencial requerido por las escenas 3D necesita de extensiones significativas de WMS. Un servicio de visualización del terreno puede incluir operaciones específicas como etiquetas, perspectivas,.... Al mismo tiempo se necesitarán operaciones análogas de Get Feature Service (WFS) para geometría 3D (colocación de etiquetas por ejemplo). Esta complejidad, que está fuera del alcance de WMS es la que viene a completar WTS.

Surge una nueva operación en el WMS llamada GetView. GetView puede ser implementada como una extensión del interfaz WMS.

WTS requiere de tres operaciones:

- GetCapabilities: obtiene el nivel de servicio de metadatos, que es una descripción de la información WTS contenida y los parámetros de consulta aceptados.
- GetView: obtiene una escena 3D cuyos parámetros geoespaciales y dimensionales están indirectamente definidos.
- GetMap: obtiene un mapa cuyos parámetros geoespaciales y dimensionales están directamente definidos.

WTS extrae datos de Web Feature Service (WFS), los dibuja en el terreno y les da el estilo apropiado. La operación GetView de un WTS funciona generalmente después de que GetCapabilities haya determinado qué consultas están autorizadas y qué datos están disponibles. La operación GetView devuelve una imagen en un determinado formato cuya semántica y sintaxis son similares a las extensiones de la consulta GetMapa de WMS.

OGC ha codificado los parámetros más importantes de las vistas tridimensionales en especificaciones que son de fácil implementación, consistentes con la interfaz 2D y de precisión.

Para que un punto del terreno aparezca en el mismo píxel de pantalla para cualquier WTS son necesarios los parámetros del punto de vista, el tamaño de la imagen y el modelo digital de elevaciones (DEM).

Los parámetros suficientes, aunque no únicos, para definir una escena 3D son:

1. Punto de interés (POI): localización exacta x,y,z espaciales del foco del observador.
2. Distancia entre el observador y el punto de interés.
3. Pitch: ángulo de inclinación entre el observador y el punto de interés.
4. Yaw: azimut de la observación.
5. Ángulo de vista: representa la amplitud del paisaje que comprende la escena del observador. También se conoce como campo de visión o campo de vista.

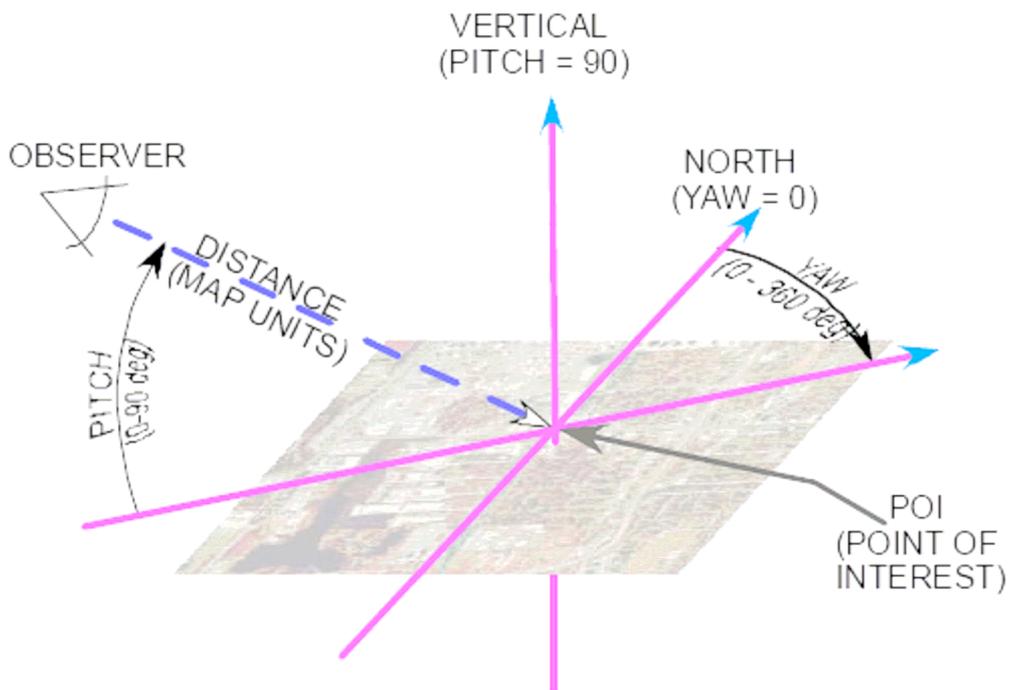


Figura 16.

Otra especificación en la que está trabajando actualmente OGC es Web 3D Service (W3DS). Al contrario que WMS y WTS, las escenas gráficas son creadas. El usuario puede explorar interactivamente las escenas, que son ilustraciones visuales de la información 3D.

Toda implementación de un W3DS debe admitir como formato de salida por defecto VRML97, si bien también ha de considerar otros formatos como GeoVRML o X3D que están ya incorporando mejoras a VRML97.

Para la representación de la información espacial en servicios Web, OGC contempla cuatro pasos o cuatro niveles de información. Comenzando por la representación no gráfica de los objetos almacenados en repositorios y terminando con la presentación final de las entidades gráficas en un dispositivo de visualización.

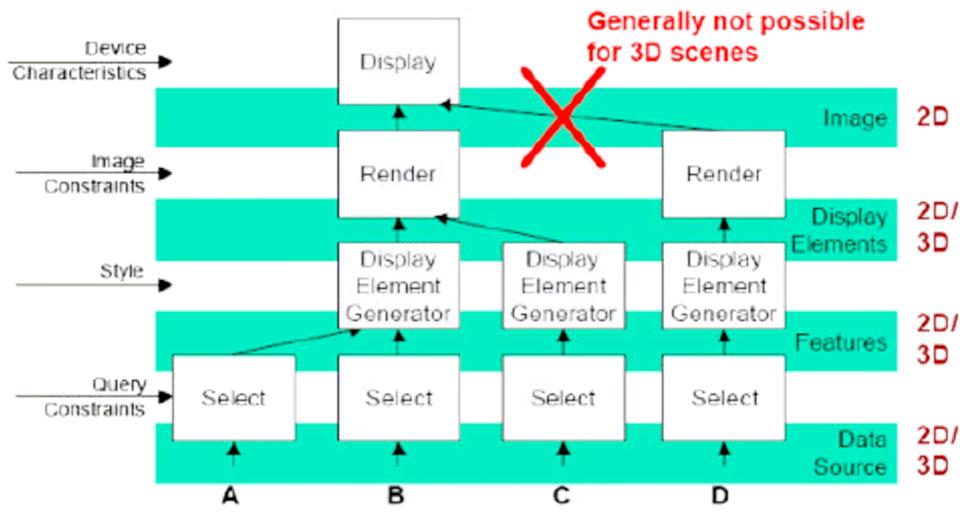


Figura 17.

La unión de datos de diferentes fuentes puede ser realizada en cualquiera de los cuatro pasos. Tras la selección, se pueden generar los elementos a mostrar de las consultas A y B unidos. Incluso antes de realizar la presentación se pueden unir también los elementos gráficos que proceden de la consulta C. Al realizar la presentación se pueden también superponer capas de información que provienen de otra consulta. Esto último, la superposición de capas cuya imagen de objetos gráficos ya había sido generada, es muy útil en 2D y permite que servicios que han de ser combinados sólo tengan que tener compatible el nivel de gráficos de mapa (JPG, TIFF o PNG en la mayoría de los casos), pero no es necesario que sus niveles inferiores sean compatibles. Esto permite la integración de mapas de diferentes sistemas que, de otro modo, no sería posible.

Sin embargo, la integración 3D ha de hacerse antes, como mínimo en el nivel en el que se generan los elementos gráficos.

Por otra parte, los componentes de la línea de flujo de trabajo no han de estar en el mismo sistema, pueden estar distribuidos a través de Internet. Habitualmente en aplicaciones cliente-servidor, el componente de más bajo nivel suele ser procesado en el servidor, o servidores, y el resto de las tareas son desarrolladas por el usuario.

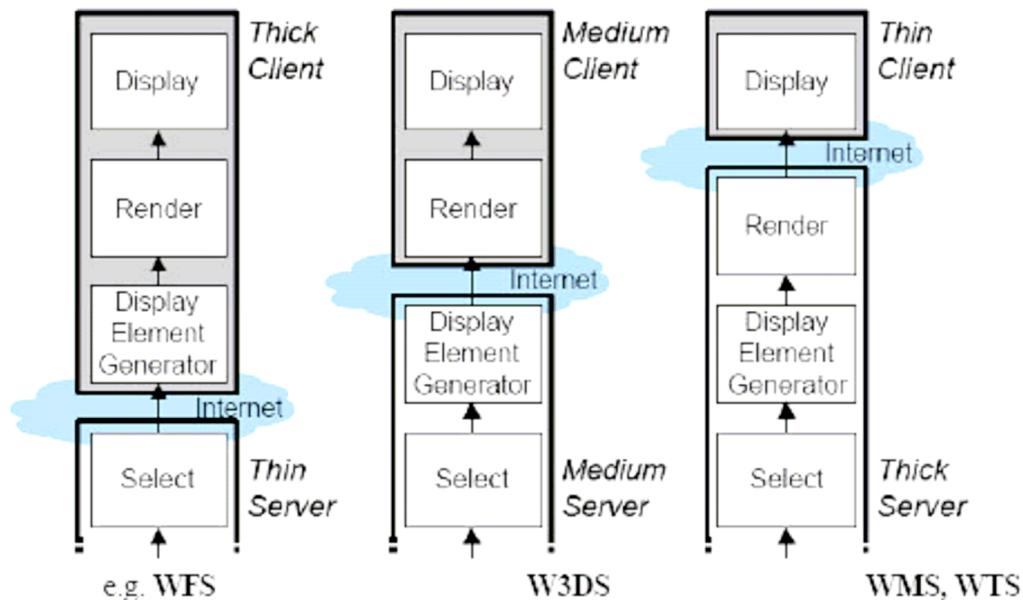


Figura 18.

Los clientes ligeros son los únicos que no necesitarán para su funcionamiento plug-ins. Por el contrario, al ser las imágenes estáticas, las posibilidades de interacción y navegación en la escena 3D mostrada están muy limitadas.

Las dos operaciones definidas para W3DS son:

- GetCapabilities: obtiene el nivel de servicio de metadatos, que es una descripción de la información WTS contenida y los parámetros de consulta aceptados.
- GetScene: devuelve una escena gráfica 3D.

Los parámetros requeridos para la visualización 3D por W3DS son:

- SRS: sistema de referencia espacial.
- BBOX (bounding box): delimitación del área geográfica seleccionada.
- Formato de salida deseado.
- Parámetros para la definición de la cámara virtual.
- Perspectiva: definida de forma similar a como se hace en WTS (POI, distancia, Pitch, Yaw, AOV y campo de visión). Si bien el campo de visión en WTS se puede deducir de forma implícita, en W3DS esto no es posible y ha de indicarse explícitamente.

## **Bibliografía**

- [1] Alan M. MacEachren y D.R. Fraser Taylor “Visualization in modern cartography”. Editorial Pergamon, 1994.
- [2] [www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/geoensenanza/vol4num2/articulo2.pdf](http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/geoensenanza/vol4num2/articulo2.pdf)
- [3] <http://dspace.uah.es/dspace/bitstream/10017/1024/1/Presentaci%C3%B3n+de+Cartograf%C3%ADa+Din%C3%A1mica+Animada.+Atlas+Electr%C3%B3nico+Interactivo+del+Clima.pdf>
- [4] <http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/3D/x3d/Conociendo%20X3D.htm>
- [5] [www.monografias.com/trabajos4/realvirtual/realvirtual.shtml](http://www.monografias.com/trabajos4/realvirtual/realvirtual.shtml)
- [6] [www.opengeospatial.org/standards/wms](http://www.opengeospatial.org/standards/wms)  
[www.opengeospatial.org/standards/dp](http://www.opengeospatial.org/standards/dp)
- [7] [http://es.wikipedia.org/wiki/Web\\_Map\\_Service](http://es.wikipedia.org/wiki/Web_Map_Service)
- [8] [www.ideo.es/resources/recomendacionesCSG/RecomendacionServicioMapas.pdf](http://www.ideo.es/resources/recomendacionesCSG/RecomendacionServicioMapas.pdf)